Matematyka Dyskretna

Termin I

30 stycznia 2023

CZAS TRWANIA EGZAMINU: 120 minut
Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.
Poprawna odpowiedź: 1pkt, błędna: 0pkt.
Odpowiedzi nie trzeba obliczać, wynik podany w formie np. dwumianu Newtona, czy 4^5 jest okej.

Zadanie 1. Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f : X \to Y, g : Y \to X$.

A. Liczba odwzorowań f, które są bijektywne:

B. Liczba odwzorowań g, które nie są iniekcjami:

C. Liczba odwzorowań g, które są suriekcjami:

D. Liczba odwzorowań f, w których $f(1) = f(3)$:

Zadanie 2. Podziały liczby 9 zapisano w porządku antyleksykograficznym. Każdy podział ma niemalejąco uporządkowane elementy oraz jednoznacznie przypisaną pozycję na liście $i = 1, 2, \ldots$

A. Następcą (3,3,2,1) jest:

B. Podział (5,4) występuje na pozycji:

C. Liczby 4 i 2 występują razem w ilu podziałach?

D. W ilu podziałach występują 4 składniki?

Zadanie 3. Podaj zależności prawdzie dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju:

A. Zależność rekurencyjna dla $0 < k < n$:

B. $S(n, 1), n \geqslant 1$:

C. $S(n, 2), n \geqslant 2$:

D. $S(n, n - 1), n \geqslant 2$:

Zadanie 4. Niech a_n oznacza liczbę ciągów ternarnych (składających się z cyfr 0, 1 i 2) o długości n, w których krotność wystąpienia cyfry 0 jest nieparzysta, krotność wystąpienia 1 jest parzysta, a cyfra 2 występuje maksymalnie raz.

A. Funkcja tworząca ciągu $\{a_n\}$ ma postać:

B. a_4:

C. a_{11}:

D. Wzór nierekurencyjny dany jest przez:

Zadanie 5. Niech S będzie zbiorem wszystkich parami różnych permutacji liter w słowie TELEINFORMATYKA.

A. $|S|$:

B. Liczba tych permutacji w S, w których 7 kolejnych liter tworzy KAMFORA:

C. Liczba tych permutacji w S, w których 4 kolejne litery tworzą słowo TYNK i 6 kolejnych słowo FORMAT:

D. Liczba permutacji, w których żadne 5 kolejnych liter nie tworzy słowa AKTOR:

Zadanie 6. Niech G będzie grafem rzędu 2^5, w którym wierzchołki wyznaczone są przez parami różne ciągi binarne długości 5. Dwa wierzchołki połączone są krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy liczba jedynek w nich występujących różni się maksymalnie o 1.

A. Maksymalna liczba krawędzi, jakie można usunąć z G, aby otrzymany graf był nadal spójny wynosi:

B. Minimalna liczba krawędzi, jakie należy usunąć z G, aby $\Delta(G) = 15$ w otrzymanym grafie, wynosi:

C. Minimalna liczba krawędzi, jakie należy usunąć z G, aby graf był dwudzielny wynosi:

D. Minimalna liczba krawędzi, jakie należy usunąć z G, aby otrzymany graf był eulerowski:

Zadanie 7. Dla każdej pary liczb naturalnych n i k takich, że $n \geqslant 4, 3 \leqslant k \leqslant n-1$ niech $\mathcal{T}_{n,k}$ oznacza rodzinę drzew mających n wierzchołków, k liści i co najmniej jeden wierzchołek stopnia 3.

A. Liczba parami nieizomorficznych drzew $\mathcal{T}_{6,3}$ wynosi:

B. Dla $n \geqslant 6$ liczba parami nieizomorficznych drzew $\mathcal{T}_{n,n-2}$ mających $\Delta(T) = n-3$ wynosi:

C. Dla każdego $T \in \mathcal{T}_{n,n-2}$, $\mathrm{diam}(T)$:

D. Liczba składowych spójnych lasu uzyskana z dowolnego drzewa $\mathcal{T}_{n,n-3}$ w wyniku usunięcia 1 wierzchołka (z krawędziami) wynosi co najwyżej:

Zadanie 8. Niech graf G będzie grafem rzędu $2n, n \geqslant 1$ utworzonym z grafu pełnego dwudzielnego $K_{n+1,n+1}$ poprzez zwinięcie dwóch incydentnych krawędzi.

A. $\chi(G_{2n})$:

B. $\chi'(G_{2n})$:

C. $\omega(G_{2n})$:

D. $\alpha(G_{2n})$:

Zadanie 9. Dany jest graf G rzędu 11, który powstał poprzez rozdzielenie jednej z krawędzi w grafie Petersena.

A. Liczba krawędzi w skojarzeniu o maksymalnej liczności wynosi:

B. Minimalna liczba krawędzi, którą należy usunąć z grafu G, aby otrzymany graf był planarny wynosi:

C. Minimalna liczba krawędzi, które należy dołączyć do grafu G, aby otrzymany graf był trasowalny wynosi:

D. Maksymalna długość cyklu w grafie G wynosi:

Zadanie 10. Dany jest graf G, który powstał poprzez usunięcie jednej krawędzi z grafu pełnego K_4.

A. Liczba parami nierównoważnych pokolorowań wierzchołków grafu G za pomocą trzech kolorów wynosi:

B. Indeks cykliczny grupy symetrii (na zbiorze wierzchołków) ma postać:

C. Liczba parami nierównoważnych pokolorowań krawędzi dwoma kolorami wynosi:

D. Liczba parami nierównoważnych pokolorowań, w których jeden wierzchołek jest w innym kolorze niż pozostałe, korzystając z dwóch kolorów, wynosi:

Matematyka Dyskretna

Termin II

13 lutego 2023

CZAS TRWANIA EGZAMINU: 120 minut
Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.
Poprawna odpowiedź: 1pkt, błędna: 0pkt.

Zadanie 1. Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

A. Liczba rosnących ciągów o elementach ze zbioru X o długości 5:

B. Liczba permutacji f zbioru X, w których dla każdej nieparzystej liczby i zachodzi zależcość $f(i) \neq i$:

C. Liczba ciągów różnowartościowych długości 6 o elementach ze zbioru X:

D. Liczba ciągów długości 7 o elementach z X, w których suma dwóch kolejnych wyrazów jest liczbą nieparzystą:

Zadanie 2. Niech $1 \leqslant m \leqslant k \leqslant n$.

A. W podanym wyrażeniu $\binom{n}{k} = \binom{W}{n-k}$, W dane jest przez:

B. W podanym wyrażeniu $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{W}$, W dane jest przez:

C. W podanym wyrażeniu $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{W}{n-k}$, W dane jest przez:

D. W podanym wyrażeniu $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{W}$, W dane jest przez:

Zadanie 3. Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oraz A będzie algorytmem generowania listy wszystkich permutacji zbioru w porządku leksykograficznym; każda permutacja ma przypisaną pozycje na liście $i = 1, 2, \ldots, 6!$

A. Permutacja $\langle 4, 3, 2, 1, 6, 5\rangle$ występuje na pozycji:

B. Następnikiem permutacji $\langle 1, 2, 5, 6, 4, 3\rangle$ jest permutacja:

C. Dla każdej permutacji α typu $1^i 2^j, i + 2j = 6$ liczba permutacji odwrotnych wynosi:

D. Elementy 1,3,4 występują na trzech kolejnych pozycjach w ilu permutacjach?

Zadanie 4. Niech a_n oznacza liczbę nieujemnych, całkowitoliczbowych rozwiązań równania $x_1+x_2+x_3 = n$, gdzie x_1 jest nieparzyste, x_2 jest parzyste natomiast x_3 występuje 2 lub 3 razy.

A. Funkcja tworząca dla ciągu $\{a_n\}$ ma postać:

B. Nierekurencyjny wzór na $n - ty$ wyraz dany jest przez:

C. a_4:

D. a_{22}:

Zadanie 5. Niech $P(n,k)$ to podział liczby n na k składników, a $P(n)$ to wszystkie podziały liczby n.

A. Dla każdego $n \geqslant 2, P(n,2)$:

B. Dla każdego $n \geqslant 4, P(n,n-2)$:

C. $0 < k \leqslant n, P(n) = P(n,k) + W$. W dane jest przez:

D. Liczba podziałów liczby $n, n \geqslant 10$ na 4 parami różne składniki jest równa liczbie podziałów liczby m na 4 składniki, gdzie m:

Zadanie 6. Niech G będzie grafem rzędu 2^5, w którym wierzchołki są wyznaczone przez parami różne ciągi binarne długości 5. Dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy liczba jedynek w konkatenacji ciągów odpowiadającym tym wierzchołkom jest parzysta.

A. Minimalna liczba krawędzi, które należy usunąć z G, aby otrzymany graf był regularny wynosi:

B. Minimalna liczba krawędzi, które należy dodać do G, aby otrzymany graf był spójny wynosi:

C. Minimalna liczba krawędzi, które należy usunąć z G, aby otrzymany graf był eulerowski:

D. Minimalna liczba krawędzi, które należy usunąć z G, aby otrzymany graf posiadał dekompozycję na ścieżki P_3 wynosi:

Zadanie 7. Dla każdej takiej pary liczb naturalnych n i k, że $2 \leqslant k < n-1$ niech $\mathcal{G}_{n,k}$ oznacza rodzinę grafów rzędu n, w których dokładnie k wierzchołków ma stopień 3, a pozostałe $n-k$ ma stopień 2.

A. Dla każdego $n \geqslant 6$ liczba nieizomorficznych grafów $\mathcal{G}_{n,2}$, które są 2-spójne i wierzchołki stopni 3 są sąsiednie wynosi:

B. Liczba parami nieizomorficznych grafów $\mathcal{G}_{6,4}$ wynosi:

C. Liczba składowych spójnych grafu powstałego z $\mathcal{G}_{n,4}$ w wyniku usunięcia jednego wierzchołka (wraz z incydentymi krawędziami) może wynosić co najwyżej:

D. Dla każdego $n \geqslant 6$ spośród $G \in \mathcal{G}_{n,2}, diam(G)$ może wynosić maksymalnie:

Zadanie 8. Niech G_{2n} będzie grafem rzędu $2n$, $n \geqslant 3$ otrzymanym z grafu pełnego dwudzielnego $K_{n-1,n-1}$ poprzez rozdzielenie dwóch nieincydentych krawędzi.

A. $\chi(G_{2n})$ dla $n \geqslant 4$ wynosi:

B. $\chi'(G_{2n})$ dla $n \geqslant 4$ wynosi:

C. $\omega(G_{2n})$ dla $n \geqslant 3$ wynosi:

D. $\alpha(G_{2n})$ dla $n \geqslant 4$ wynosi:

Zadanie 9. Niech G będzie grafem rzędu 9, utworzonego z grafu Petersena poprzez zwinięcie jednej krawędzi.

A. Minimalna liczba krawędzi, które należy usunąć z G, aby otrzymany graf był planarny wynosi:

B. Minimalna liczba krawędzi, które należy dołączyć do G, aby otrzymany graf był hamiltonowski wynosi:

C. Liczba krawędzi w skojarzeniu o maksymalnej liczności wynosi:

D. Długość najdłużeszej ścieżki w G wynosi:

Zadanie 10. Niech G będzie grafem rzędu 6, utworzonym z grafu pełnego dwudzielnego $K_{3,3}$ poprzez usunięcie ścieżki hamiltona.

A. Liczba parami nierównoważnych pokolorować wierzchołków za pomocą co najwyżej trzech kolorów wynosi:

B. Cykliczny indeks grupy symetrii (na zbiorze wierzchołków) dany jest przez:

C. Liczba parami nierwónoważnych pokolorowań krawędzi za pomocą dwóch kolorów wynosi:

D. Liczba parami nierównoważnych pokolorowań wierzchołków, w którym trzy są w jednym kolorze, a pozostałe trzy w innym, wynosi:

Matematyka Dyskretna

Termin III

17 lutego 2023

CZAS TRWANIA EGZAMINU: 120 minut
Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.
Poprawna odpowiedź: 1pkt, błędna: 0pkt.

Zadanie 1. Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}, f : X \to Y, g : Y \to X$.

A. Liczba tych odwzorowań f, które są słabo rosnące wynosi:

B. Liczba tych odwzorowań g, w których $g(1) \neq 3$ oraz $g(2) \neq 3$ wynosi:

C. Liczba tych odwzorowań f, które nie są iniekcjami:

D. Liczba tych odwzorowań f, w których $f(1) = f(2)$ wynosi:

Zadanie 2. Niech s_n oznacza liczbę ciągów ternarnych (składających się z cyfr 0, 1 i 2) o długości $n, n \geqslant 1$, które nie zawierają podciągu 00 (tzn. na dwóch sąsiednich pozycjach występuje, przynajmniej jeden raz, cyfra 1 lub 2).

A. Wzór rekurencyjny na s_n dany jest przez:

B. Wzór nierekurencyjny na s_n dany jest przez:

C. s_2:

D. s_5:

Zadanie 3. Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ oraz A będzie algorytmem generowania listy wszystkich 6-elementowcyh multipodzbiorów (podzbiorów z powtórzeniami) zbioru S w porządku leksykograficznym; każdy multipodzbiór ma niemalejąco uporządkowane elementy oraz jednoznacznie przypisaną pozycję i na tej liście, $i = 1, 2, \ldots, \binom{13}{6}$.

A. Następnikiem multipodzbioru $\{1, 1, 2, 2, 7, 8\}$ jest multipodzbiór:

B. Multipodzbiór $\{1, 2, 2, 2, 2, 3\}$ występuje na pozycji:

C. Liczba multipodzbiorów, w których 6 występuje na ostatniej pozycji wynosi:

D. Liczba uporządkowanych multipodzbiorów, w których 2,4,6,7 występują na czterech kolejnych pozycjach wynosi:

Zadanie 4. Niech a_n oznacza liczbę ciągów długości n o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, gdzie liczba wystąpień 1 i 3 jest parzysta a 2 i 4 nieparzysta. Niech L będzie zbiorem takich ciągów.

A. Funkcja tworząca dla ciągu $\{a_n\}$ ma postać:

B. Wzór nierekurencyjny na $\{a_n\}$ dany jest przez:

C. a_5:

D. Liczba ciągów w L, które mają parami różne cyfry wynosi:

Zadanie 5. Podaj zależności prawdziwe dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju:

A. Dla $0 < k < n$ zależność rekurencyjna dana jest przez:

B. Dla każdego $n \geqslant 2, S(n, 2) + S(n, 1)$:

C. Dla każdego $n \geqslant 2, S(n, n - 1)$:

D. Dla każdego parzystego $n \geqslant 2$ liczba podziałów na 2 bloki o takiej samej liczności:

Zadanie 6. Niech G będzie grafem rzędu 2^5, w którym wierzchołki wyznaczone są przez parami różne ciągi binarne długości 5. Dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy ilość jedynek w konkatenacji odpowiadających im ciągów jest nieparzysta.

A. Minimalna liczba krawędzi, jaką należy dodać do grafu $\overline{G}$, aby otrzymany graf był eulerowski wynosi:

B. Maksymalna liczba krawędzi, jaką można usunąć z G, aby otrzymany graf był nadal spójny wynosi:

C. Minimalna liczba krawędzi, jaką należy usunąć/dodać (?) z G, aby otrzymany graf był dwudzielny wynosi:

D. Minimalna liczba krawędzi, jaką należy dodać do $\overline{G}$, aby otrzymany graf posiadał dekompozycje na pełne skojarzenie wynosi:

Zadanie 7. Dla liczb $n \geqslant 4$ i k, takich że $3 \leqslant k \leqslant n - 1$ niech $\mathcal{T}_{n,k}$ oznacza rodzinę lasów, w których dokładnie n wierzchołków, k liści i conajmniej jeden wierzchołek jest stopnia 3.

A. Dla $n \geqslant 6$ liczba parami nieizomorficznych drzew $\mathcal{T}_{n,n-2}$ wynosi:

B. Liczba parami nieizomorficznych lasów $\mathcal{T}_{6,3}$ wynosi:

C. Dla każdego $T \in \mathcal{T}_{n,n-2}, n \geqslant 5, diam(T)$ wynosi:

D. Liczba krawędzi potrzebnych do przekształcenia lasu $T \in \mathcal{T}_{n,6}$ w drzewo maksymalne wynosi:

Zadanie 8. Dany jest graf $G_{2n}, n \geqslant 3$ utworzony z grafu pełnego K_{2n-2} poprzez zastąpienie jednej krawędzi ścieżką długości 3.

A. $\alpha(G_{2n})$:

B. $\omega(G_{2n})$:

C. $\chi(G_{2n})$:

D. $\chi'(G_{2n})$:

Zadanie 9. Dany jest graf G rzędu 10 utworzony z grafy Petersena poprzez zwinięcie kawędzi $\{u, v\}$ a następnie rozdzielenie jeden z czterech incydentnych krawędzi z wierzchołkiem $\{uv\}$.

A. Minimalna liczba krawędzi, jakie należy dodać do grafu G, aby był trasowalny wynosi:

B. Liczba krawędzi w skojarzeniu o maksymalnej liczności wynosi:

C. Minimalna liczba krawędzi, jakie należy usunąć z G, aby otrzymany graf był planarny wynosi:

D. Maksymalna długość cyklu w grafie G wynosi:

Zadanie 10. Niech G będzie grafem rzędu 5 utworzonym z grafu pełnego K_5 poprzez usunięcie ścieżki Hamiltona.

A. Indeks cykliczny grupy symetrii (na zbiorze wierzchołków) dany jest przez:

B. Liczba parami nierównoważnych pokolorowań wierzchołków, w którym trzy są w jednym kolorze, a pozostałe dwa w drugim wynosi:

C. Liczba parami nierównoważnych pokolorowań wierzchołków za pomocą trzech kolorów wynosi:

D. Liczba parami nierównoważnych pokolorowań krawędzi za pomocą dwóch kolorów wynosi: