Spis treści

Uwagi

Na egzaminie było 120 minut czasu. Było 10 zadań, wszystkie z czterema podpunktami - jeśli tutaj jakieś zadanie ma więcej podpunktów, znaczy że było wiele jego wersji. Warunki jak na kolokwiach – np. nie można było używać funkcji Stirlinga w odpowiedziach, trzeba było ją rozpisywać.

Funkcje tworzące można było zapisywać w „prostej" formie, typu $f(x) = (1 + x + ...)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...\right)$.

Czasem były błędy w oficjalnym kluczu, niektóre udało się poprawić. Innymi słowy, na konsultacje puśćcie najmądrzejszych przodem, może uda im się coś wywalczyć dla innych ;)

Termin 1, 2024-02-02

1. Zakładamy $1 \leq m \leq k < n$. Podaj W.

- $\binom{n}{k} = \binom{W}{n-k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{W}$
- $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{W}{n-k}$
- $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{W}$

2. Uzupełnij.

- $0 < k < n,\ S(n,k) =$
- $n \geq 1,\ S(n,n) =$
- $n \geq 2,\ S(n,2) =$
- $n \geq 3,\ S(n,n-2) =$

3. Rozważamy ciągi o elementach ze zbioru $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

- Liczba ciągów długości 7, w których sumy każdej sąsiedniej pary elementów są nieparzyste.
- Liczba ciągów niemalejących długości 6.
- Liczba ciągów różnowartościowych długości 5.
- Liczba permutacji takich, że dla każdego parzystego n, $f(n) \neq n$.

4. $a_n =$ liczba ciągów długości n złożonych z $\{2,3,4,5,6\}$. 3 i 5 mają występować parzystą liczbę razy, a 4 i 6 nieparzystą. L jest zbiorem wszystkich tych ciągów.

- Ile jest w L liczb z parami różnymi cyframi?
- $a_4 =$
- Funkcja tworząca a_n to $f(x) =$
- Nierekurencyjny wzór na $a_n =$

5. $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Generujemy wszystkie permutacje S w porządku leksykograficznym. Numerujemy je $1, 2, \ldots, 6!$.

- Dla każdej permutacji α typu $1^i 2^j$, gdzie $i + 2j = 6$, liczba permutacji odwrotnych wynosi:
- Liczba permutacji, w których $1, 3, 4$ występują na kolejnych pozycjach:
- Na której pozycji jest $\langle 4,3,2,1,6,5 \rangle$?
- Następnik $\langle 1,2,5,6,4,3 \rangle$ to:

6. Niech G będzie grafem rzędu 9 powstałym przez zwinięcie jednej z krawędzi w grafie Petersena.

- Liczba krawędzi w najliczniejszym skojarzeniu G:
- Maksymalne $\Delta(T)$ dla T będących drzewami spinającymi G:
- Minimalna liczba krawędzi które trzeba dodać by G był trasowalny:
- Minimalna liczba krawędzi które trzeba usunąć by G był planarny:

7. Niech G_{2n} będzie grafem rzędu $2n, n \geq 3$ utworzonym z K_{2n-3} zastąpieniem jednej z krawędzi ścieżką długości 4.

- $n \geq 3,\ \alpha(G_{2n}) =$
- $n \geq 3,\ \chi(G_{2n}) =$
- $n \geq 3,\ \omega(G_{2n}) =$
- $n \geq 4,\ \chi'(G_{2n}) =$

8. Niech G będzie grafem rzędu $2n + 1$ dla $n \geq 2$ utworzonym poprzez rozdzielenie jednej z krawędzi $K_{n,n}$.

- Dla $n \geq 3$, liczba ścieżek hamiltonowskich w $\overline{G}$ to:
- Liczba cykli Hamiltona w G dla $n \geq 3$:
- Minimalna liczba krawędzi, jaką trzeba dodać do G nieparzystego stopnia > 3, by stał się eulerowski:
- Minimalna liczba krawędzi, którą trzeba usunąć z $\overline{G}, n \geq 2$, by stał się dwudzielny:

9. Niech $\tau_{n,k}$ będzie rodziną lasów o n wierzchołkach i k liściach dla $n \geq 3, 2 \leq k \leq n - 1$.

- Dla każdego **drzewa** $T \in \tau_{n,n-3}, n \geq 5$, $\mathrm{diam}(T) =$
- Liczba parami nieizomorficznych **drzew** w $\tau_{n,n-2}$ dla parzystego $n \geq 6$:
- Liczba parami nieizomorficznych lasów w $\tau_{6,3}$:
- Maksymalna liczba krawędzi wymagana do przekształcenia lasu $T \in \tau_{n,n-5}$ w drzewo:

10. Niech B będzie graniastosłupem, którego podstawą jest trójkąt równoboczny.

- Cykliczny indeks grupy symetrii wierzchołków:
- Liczba parami nierównoważnych kolorowań wierzchołków dwoma kolorami:
- Liczba parami nierównoważnych kolorowań wierzchołków, gdzie cztery wierzchołki są jednego koloru, a dwa drugiego:
- Liczba parami nierównoważnych kolorowań ścian trzema kolorami:

Termin 2, 2024-02-13

1. Niech $X = \{1, 2, 3, 4\},\ Y = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ f : X \to Y,\ g : Y \to X$

- Ile f jest odwracalnych?
- Ile jest f takich, że $f(1) = f(3)$ i $f(2) \neq 3$?
- Ile jest odwzorowań g, które nie są injektywne?
- Ile jest surjekcji g?

2. Niech a_n oznacza liczbę ciągów ternarnych (składających się z cyfr 0, 1 i 2) o długości $n,\ n \geq 1$, które nie zawierają podciągu 00 (tzn. na każdych dwóch sąsiednich pozycjach występuje, przynajmniej jeden raz, cyfra 1 lub 2).

- nierekurencyjny wzór na $a_n,\ n \geq 1$:
- rekurencyjny wzór na $a_n,\ n \geq 3$:
- $a_1 =$
- $a_2 =$
- $a_5 =$
- $a_6 =$

3a. Niech s_n będzie liczbą dodatnich, całkowitych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 = n$, w których x_1 jest parzyste, x_2 nieparzyste, $x_3 \in \{2, 3\}$.

- Funkcja tworząca dla ciągu $\{s_n\}$:
- Nierekurencyjny wzór na $s_n, n \geq 1$, ma postać:
- $s_5 =$
- $s_{24} =$

3b. Niech s_n będzie liczbą dodatnich, całkowitych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 = n$, w których x_1 jest parzyste, x_2 nieparzyste, $x_3 \in \{1, 2\}$.

- Funkcja tworząca dla ciągu $\{s_n\}$ ma postać
- Nierekurencyjny wzór na $s_n,\ n \geq 1$, ma postać:
- $s_2 =$
- $s_3 =$
- $s_{22} =$
- $s_{24} =$

4. Niech $P(n, k)$ to podział liczby n na k składników, a $P(n)$ to wszystkie podziały liczby n.

- $0 < k < n, \quad P(n) = \sum_{i=0}^{n-k} P(n, i) + W,\ W =$
- $0 < k < n, \quad P(n) = \sum_{i=0}^{k} P(n, i) + W,\ W =$
- $n \geq 2, \quad P(n, 2) =$
- $n \geq 6, \quad P(n, n-3) =$
- Liczba podziałów liczby $n, n \geq 10$ na 4 parami różne składniki jest równa liczbie podziałów liczby m na 4 składniki, gdzie $m =$

5. Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ oraz A będzie algorytmem generowania listy wszystkich 6-elementowych multipodzbiorów zbioru X w porządku leksykograficznym. Każdy multipodzbiór reprezentuje niemalejący ciąg jego elementów, oraz ma przypisaną pozycję $i \in \left\{1, 2, ..., \binom{13}{6}\right\}$

- Elementy $1, 2, 3, 5$ występują na kolejnych pozycjach w ilu multipodzbiorach?
- Elementy $2, 4, 6, 7$ występują na kolejnych pozycjach w ilu multipodzbiorach?
- Liczba multipodzbiorów, w których ostatnim elementem jest 6:
- Liczba multipodzbiorów, w których ostatnim elementem jest 7:
- Multizbiór $\{1, 2, 2, 2, 2, 3\}$ występuje na pozycji:
- Multizbiór $\{2, 2, 2, 2, 2, 3\}$ występuje na pozycji:
- Następnik $\{1, 1, 1, 2, 2, 8\}$:
- Następnik $\{1, 1, 2, 2, 7, 8\}$:

6. Graf G rzędu n, rozmiaru $2n$ powstały z cyklu C_n, $n \geq 4$, gdzie wierzchołki odległe o odległość 2 zostają połączone krawędzią.

- Najmniejsza ilość krawędzi, którą trzeba usunąć, aby graf G był planarny
- Liczba krawędzi w skojarzeniu o maksymalnej liczności:
- Minimalna ilość krawędzi do usunięcia, by powstał graf dwudzielny:
- Minimalne $\mathrm{diam}(T)$ drzewa rozpinającego G:

7. G to graf rzędu $2n - 1, n \geq 2$, utworzony z grafu pełnego dwudzielnego $K_{n,n}$ poprzez zwinięcie dowolnej krawędzi. $\overline{G}$ to dopełnienie grafu G.

- Liczba cykli Hamiltona[1] w G:
- Dla $n \geq 2$, maksymalna liczba krawędzi którą można usunąć, by otrzymany graf miał dokładnie 5 spójnych składowych:
- Dla parzystego $n \geq 4$, jaka jest minimalna ilość krawędzi, które należy dodać do dopełnienia $\overline{G}$, aby posiadało cykl Eulera:
- Dla parzystego $n \geq 3$, liczba niemal pełnym skojarzeń w $\overline{G}$:

8. $T_{n,k}$ to rodzina grafów, w których rząd jest n, k wierzchołków jest stopnia 2, a $n - k$ jest stopnia 3.

- Dla $n \geq 6$ i spójnego $G \in T_{n,n-2}$, $\mathrm{diam}(G)$ wynosi maksymalnie:
- Dla $n \geq 6$, liczba parami nieizomorficznych spójnych grafów w $T_{n,n-2}$, w których wierzchołki stopnia 3 są sąsiednie:
- Ile maksymalnie spójnych składowych można otrzymać poprzez usunięcie jednego wierzchołka z grafu w $T_{n,n-4}$?
- Liczba parami nieizomorficznych grafów w $T_{6,2}$:

9a. G to graf rzędu $2n$, $n \geq 3$, powstały przez rodzielenie dwóch incydentnych krawędzi w grafie pełnym K_{2n-2}.

- $n \geq 3,\ \alpha(G) =$
- $n \geq 3,\ \chi(G) =$
- $n \geq 3,\ \omega(G) =$
- $n \geq 4,\ \chi'(G) =$

[1] Było ograniczenie n od jakiejś liczby – nie pamiętam jakiej.

9b. G to graf rzędu $2n, n \geq 3$, powstały przez rodzielenie dwóch nieincydentnych krawędzi w grafie pełnym K_{2n-2}.

- $n \geq 3,\ \alpha(G) =$
- $n \geq 3,\ \chi(G) =$
- $n \geq 3,\ \omega(G) =$
- $n \geq 4,\ \chi'(G) =$

10. Podaj dla sześcianu foremnego:

- indeks cykliczny grupy symetrii wierzchołków:
- indeks cykliczny grupy symetrii ścian:
- ilość parami nierównoważnych kolorowań krawędzi dwoma kolorami:
- ilość parami nierównoważnych kolorowań wierzchołków trzema kolorami:
- ilość parami nierównoważnych kolorowań ścian dwoma kolorami:
- ilość parami nierównoważnych kolorowań ścian trzema kolorami:

Termin 3, 2024-02-16

1a. Podziały liczby 9 zapisano w porządku antyleksykograficznym. Każdy podział ma niemalejąco uporządkowane elementy oraz jednoznacznie przypisaną pozycję $i = 1, 2, \ldots$

- Liczba podziałów składających się z czterech składników:
- Liczba podziałów, w których jednocześnie występują 4 i 2:
- Następnikiem $(3, 3, 2, 1)$ jest:
- Pozycja $(5, 4)$ to:

1b. Podziały liczby 10 zapisano w porządku antyleksykograficznym. Każdy podział ma niemalejąco uporządkowane elementy oraz jednoznacznie przypisaną pozycję $i = 1, 2, \ldots$

- Liczba podziałów składających się z czterech składników:
- Liczba podziałów, w których jednocześnie występują 4 i 2:
- Następnikiem $(4, 3, 2, 1)$ jest:
- Pozycja $(5, 5)$ to:

2. Niech $s(n, k)$ oznacza liczbę Stirlinga pierwszego rodzaju.

- Wzór jawny na $s(n, 1)$:
- Wzór jawny na $s(n, 2)$:
- Wzór jawny na $s(n, n)$:
- Wzór jawny na $s(n, n-1)$:
- Wzór jawny na $s(n, n-2)$:
- Wzór jawny na $s(n, n-3)$:
- Wzór rekurencyjny na $s(n, k)$:

3. Niech s_n oznacza liczbę ciągów ternarnych długości n zawierających 1 na każdych dwóch kolejnych pozycjach.

- $s_2 =$
- $s_5 =$
- nierekurencyjny wzór na s_n:
- rekurencyjny wzór na s_n:

4. W koszyku jest 5 bananów, 3 jabłka, 6 pomarańcz oraz 4 gruszki. Niech a_n będzie liczbą n-elementowych zestawów owoców z koszyka, gdzie bierzemy co najmniej jednego banana, co najwyżej 2 jabłka, parzystą liczbę pomarańcz oraz nieparzystą liczbę gruszek.

- $a_2 =$
- $a_3 =$
- $a_7 =$
- Funkcja tworząca dla ciągu $\{a_n\}$:
- Nierekurencyjny wzór na a_n:

5. Niech $X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{1,2,3,4,5,6\}$, $f : X \to X$, $g : Y \to X$.

- Liczba odwzorowań f, które nie są bijekcjami
- Liczba odwzorowań f, które są odwracalne
- Liczba odwzorowań g, które nie są ani rosnące, ani malejące
- Liczba odwzorowań g, w których $g(1) = g(2) + 1$

6. Niech G_n będzie grafem rzędu n o rozmiarze $2n - 3$, utworzonym ze ścieżki P_n poprzez dodanie krawędzi dla każdej pary wierzchołków oddalonych o 2.

- Minimalna liczba krawędzi, którą trzeba usunąć z G_n, by stał się on dwudzielny:
- $\mathrm{diam}(G_n) =$
- Liczba krawędzi w najdłuższym cyklu w G_n:
- Minimalna liczba krawędzi, którą trzeba usunąć z G_n, by stał się on planarny:

7a. Niech $G_n, n \geq 4$, będzie grafem powstałym poprzez usunięcie z grafu pełnego K_n cyklu C_3. Podaj:

- $\alpha(G_n) =$
- $\omega(G_n) =$
- $\chi(G_n) =$
- $\chi'(G_n) =$

7b. Niech $G_n, n \geq 4$, będzie grafem powstałym poprzez usunięcie z grafu pełnego K_n cyklu C_4. Podaj:

- $\alpha(G_n) =$
- $\omega(G_n) =$
- $\chi(G_n) =$
- $\chi'(G_n) =$

8. Niech G_{2n} będzie grafem rzędu $2n, n \geq 3$, otrzymanym z grafu pełnego K_{2n-2} poprzez zastąpienie jednej z krawędzi ścieżką długości 3. Niech $\overline{G}_{2n}$ oznacza jego dopełnienie.

- Minimalna liczba krawędzi, którą trzeba dodać do $G_{2n}, n \geq 4$, by stał się on eulerowski:
- Liczba cykli Hamiltona dla $n \geq 3$:
- Liczba pełnych skojarzeń dla $n \geq 3$:
- Maksymalna liczba krawędzi, którą można usunąć z $\overline{G}_{2n}$, by miał on dokładnie 4 spójnych składowych:
- Maksymalna liczba krawędzi, którą można usunąć z $\overline{G}_{2n}$, by miał on dokładnie 5 spójnych składowych:

9. Dla $2 \leq k < n$, niech $T_{n,k}$ oznacza rodzinę wszystkich drzew, które mają dokładnie n wierzchołków i k liści.

- $\forall G \in T_{n,n-3} : \mathrm{diam}(G) =$
- Dla $n \geq 6$, liczba parami nieizomorficznych drzew w $G \in T_{n,n-3}$, gdzie $\Delta(G) = n - 3$:
- Liczba parami nieizomorficznych drzew w $T_{6,3}$:
- Maksymalna liczba spójnych składowych, które można stworzyć usuwając wierzchołek z drzewa w $T_{n,n-4}$:

10. Podaj dla czworościanu foremnego:

- Indeks cykliczny grupy symetrii wierzchołków:
- Liczbę nierównoważnych pokolorowań krawędzi 2 kolorami:
- Liczbę nierównoważnych pokolorowań wierzchołków 2 kolorami:
- Liczbę nierównoważnych pokolorowań wierzchołków 3 kolorami:
- Liczbę nierównoważnych pokolorowań ścian 2 kolorami:
- Liczbę nierównoważnych pokolorowań ścian 3 kolorami:

Termin 1, 2024-02-02, *z odpowiedziami*

1. Zakładamy $1 \le m \le k < n$. Podaj W.

- $\binom{n}{k} = \binom{W}{n-k}$ $\quad n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{W}$ $\quad k-1$
- $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{W}{n-k}$ $\quad n-m$
- $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{W}$ $\quad k-1$

2. Uzupełnij.

- $0 < k < n,\ S(n,k) =$ $\quad S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$
- $n \ge 1,\ S(n,n) =$ $\quad 1$
- $n \ge 2,\ S(n,2) =$ $\quad 2^{n-1} - 1$
- $n \ge 3,\ S(n,n-2) =$ $\quad \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$

3. Rozważamy ciągi o elementach ze zbioru $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

- Liczba ciągów długości 7, w których sumy każdej sąsiedniej pary elementów są nieparzyste. $\quad 5^4 4^3 + 5^3 4^4$
- Liczba ciągów niemalejących długości 6. $\quad \binom{14}{6}$
- Liczba ciągów różnowartościowych długości 5. $\quad \binom{9}{5} \cdot 5! = \frac{9!}{4!}$
- Liczba permutacji takich, że dla każdego parzystego n, $f(n) \ne n$. $\quad 9! - \binom{4}{1}8! + \binom{4}{2}7! - \binom{4}{3}6! + \binom{4}{4}5!$

4. $a_n =$ liczba ciągów długości n złożonych z $\{2,3,4,5,6\}$. 3 i 5 mają występować parzystą liczbę razy, a 4 i 6 nieparzystą. L jest zbiorem wszystkich tych ciągów.

- Ile jest w L liczb z parami różnymi cyframi? $\quad 2! + 3!$
- $a_4 =$ $\quad 44$
- Funkcja tworząca a_n to $f(x) =$ $\quad \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)^2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^2$
- Nierekurencyjny wzór na $a_n =$ $\quad \frac{1}{16}(5^n - 2 + (-3)^n)$

5. $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Generujemy wszystkie permutacje S w porządku leksykograficznym. Numerujemy je $1, 2, \ldots, 6!$.

- Dla każdej permutacji α typu $1^i 2^j$, gdzie $i + 2j = 6$, liczba permutacji odwrotnych wynosi: $\quad 1$
- Liczba permutacji, w których $1, 3, 4$ występują na kolejnych pozycjach: $\quad 4! \cdot 3!$
- Na której pozycji jest $\langle 4,3,2,1,6,5 \rangle$? $\quad 3 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 3! + 2$
- Następnik $\langle 1,2,5,6,4,3 \rangle$ to: $\quad \langle 1,2,6,3,4,5 \rangle$

6. Niech G będzie grafem rzędu 9 powstałym przez zwinięcie jednej z krawędzi w grafie Petersena.

- Liczba krawędzi w najliczniejszym skojarzeniu G: $\quad 4$
- Maksymalne $\Delta(T)$ dla T będących drzewami spinającymi G: $\quad 4$
- Minimalna liczba krawędzi które trzeba dodać by G był trasowalny: $\quad 0$
- Minimalna liczba krawędzi które trzeba usunąć by G był planarny: $\quad 1$

7. Niech G_{2n} będzie grafem rzędu $2n, n \geq 3$ utworzonym z K_{2n-3} zastąpieniem jednej z krawędzi ścieżką długości 4.

- $n \geq 3,\ \alpha(G_{2n}) =$ 3
- $n \geq 3,\ \chi(G_{2n}) =$ $2n-4$
- $n \geq 3,\ \omega(G_{2n}) =$ $2n-4$
- $n \geq 4,\ \chi'(G_{2n}) =$ $2n-3$

8. Niech G będzie grafem rzędu $2n+1$ dla $n \geq 2$ utworzonym poprzez rozdzielenie jednej z krawędzi $K_{n,n}$.

- Dla $n \geq 3$, liczba ścieżek hamiltonowskich w $\overline{G}$ to:

$$(n-1)!^2(n-1)^2 + 2(n-2)(n-1)!^2 + 4n(n-1)!^2$$

- Liczba cykli Hamiltona w G dla $n \geq 3$:

$$(n-1)!^2$$

- Minimalna liczba krawędzi, jaką trzeba dodać do G nieparzystego stopnia > 3, by stał się eulerowski:

$$n$$

- Minimalna liczba krawędzi, którą trzeba usunąć z $\overline{G}, n \geq 2$, by stał się dwudzielny:

$$2\left(\binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor\right) + (n-1)$$

9. Niech $\tau_{n,k}$ będzie rodziną lasów o n wierzchołkach i k liściach dla $n \geq 3, 2 \leq k \leq n-1$.

- Dla każdego **drzewa** $T \in \tau_{n,n-3}, n \geq 5$, $\operatorname{diam}(T) =$ 4
- Liczba parami nieizomorficznych **drzew** w $\tau_{n,n-2}$ dla parzystego $n \geq 6$: $\frac{n-2}{2}$
- Liczba parami nieizomorficznych lasów w $\tau_{6,3}$: 4
- Maksymalna liczba krawędzi wymagana do przekształcenia lasu $T \in \tau_{n,n-5}$ w drzewo: $4 + \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor$

10. Niech B będzie graniastosłupem, którego podstawą jest trójkąt równoboczny.

- Cykliczny indeks grupy symetrii wierzchołków: $P_G(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{6}(z_1^6 + 3z_2^3 + 2z_3^2)$
- Liczba parami nierównoważnych kolorowań wierzchołków dwoma kolorami: 16
- Liczba parami nierównoważnych kolorowań wierzchołków, gdzie cztery wierzchołki są jednego koloru, a dwa drugiego: 4
- Liczba parami nierównoważnych kolorowań ścian trzema kolorami: 63

Termin 2, 2024-02-13, *z odpowiedziami*

Uwaga: Rozwiązania tego terminu nie zostały sprawdzone tak dokładnie jak rozwiązania dwóch innych terminów i należy je traktować z odrobiną dystansu.

1. Niech $X = \{1,2,3,4\},\ Y = \{1,2,3,4,5\},\ f : X \to Y,\ g : Y \to X$

- Ile f jest odwracalnych? $\binom{5}{4}4!$ lub 0
- Ile jest f takich, że $f(1) = f(3)$ i $f(2) \neq 3$? $5^2 \cdot 4$
- Ile jest odwzorowań g, które nie są injektywne? 4^5
- Ile jest surjekcji g? $4^5 - 3^5\binom{4}{1} + 2^5\binom{4}{2} - \binom{4}{3}$

2. Niech a_n oznacza liczbę ciągów ternarnych (składających się z cyfr 0, 1 i 2) o długości $n,\ n \geq 1$, które nie zawierają podciągu 00 (tzn. na każdych dwóch sąsiednich pozycjach występuje, przynajmniej jeden raz, cyfra 1 lub 2).

- nierekurencyjny wzór na $a_n,\ n \geq 1$: $a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^n$
- rekurencyjny wzór na $a_n,\ n \geq 3$: $2 \cdot a_{n-2} + 2 \cdot a_{n-1}$
- $a_1 =$ 3
- $a_2 =$ 8
- $a_5 =$ 164
- $a_6 =$ 448

3a. Niech s_n będzie liczbą dodatnich, całkowitych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 = n$, w których x_1 jest parzyste, x_2 nieparzyste, $x_3 \in \{2,3\}$.

- Funkcja tworząca dla ciągu $\{s_n\}$:

$$(x^2 + x^3)(x^2 + x^4 + \ldots)(x + x^3 + x^5 + \ldots)$$

- Nierekurencyjny wzór na $s_n, n \geq 1$, ma postać:

$$\begin{cases} a_n = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1, & n \geq 3 \\ a_0 = a_1 = a_2 = 0 \end{cases}$$

- $s_5 =$ 1
- $s_{24} =$ 10

3b. Niech s_n będzie liczbą dodatnich, całkowitych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 = n$, w których x_1 jest parzyste, x_2 nieparzyste, $x_3 \in \{1,2\}$.

- Funkcja tworząca dla ciągu $\{s_n\}$ ma postać $(x + x^2)(x^2 + x^4 + \ldots)(x + x^3 + x^5 + \ldots)$
- Nierekurencyjny wzór na $s_n,\ n \geq 1$, ma postać: ?
- $s_2 =$ 0
- $s_3 =$ 0
- $s_{22} =$?
- $s_{24} =$?

4. Niech $P(n,k)$ to podział liczby n na k składników, a $P(n)$ to wszystkie podziały liczby n.

- $0 < k < n, \quad P(n) = \sum_{i=0}^{n-k} P(n,i) + W, \; W =$ $\sum_{j=n-k+1}^{n} P(n,j)$
- $0 < k < n, \quad P(n) = \sum_{i=0}^{k} P(n,i) + W, \; W =$ $\sum_{j=k+1}^{n} P(n,j)$
- $n \geq 2, \quad P(n,2) =$ $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- $n \geq 6, \quad P(n,n-3) =$ 3
- Liczba podziałów liczby n, $n \geq 10$ na 4 parami różne składniki jest równa liczbie podziałów liczby m na 4 składniki, gdzie $m =$ $n-6$

5. Niech $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ oraz A będzie algorytmem generowania listy wszystkich 6-elementowych multipodzbiorów zbioru X w porządku leksykograficznym. Każdy multipodzbiór reprezentuje niemalejący ciąg jego elementów, oraz ma przypisaną pozycję $i \in \{1, 2, \ldots, \binom{13}{6}\}$

- Elementy $1,2,3,5$ występują na kolejnych pozycjach w ilu multipodzbiorach? 15
- Elementy $2,4,6,7$ występują na kolejnych pozycjach w ilu multipodzbiorach? 10
- Liczba multipodzbiorów, w których ostatnim elementem jest 6: $\binom{10}{5} = \binom{5+6-1}{5}$
- Liczba multipodzbiorów, w których ostatnim elementem jest 7: $\binom{11}{5} = \binom{5+7-1}{5}$
- Multizbiór $\{1,2,2,2,2,3\}$ występuje na pozycji: $\binom{11}{4} + 2$
- Multizbiór $\{2,2,2,2,2,3\}$ występuje na pozycji: $\binom{12}{5} + 2$
- Następnik $\{1,1,1,2,2,8\}$: $\{1,1,1,2,3,3\}$
- Następnik $\{1,1,2,2,7,8\}$: $\{1,1,2,2,8,8\}$

6. Graf G rzędu n, rozmiaru $2n$ powstały z cyklu C_n, $n \geq 4$, gdzie wierzchołki odległe o odległość 2 zostają połączone krawędzią.

- Najmniejsza ilość krawędzi, którą trzeba usunąć, aby graf G był planarny

$$\begin{cases} 0 \text{ dla parzystego } n \\ 1 \text{ dla nieparzystego } n \end{cases}$$

- Liczba krawędzi w skojarzeniu o maksymalnej liczności: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- Minimalna ilość krawędzi do usunięcia, by powstał graf dwudzielny: ?
- Minimalne $\operatorname{diam}(T)$ drzewa rozpinającego G: $1 + \lfloor \frac{n-5}{2} \rfloor$

7. G to graf rzędu $2n-1, n \geq 2$, utworzony z grafu pełnego dwudzielnego $K_{n,n}$ poprzez zwinięcie dowolnej krawędzi. $\overline{G}$ to dopełnienie grafu G.

- Liczba cykli Hamiltona[2] w G: $((n-1)!)^2$
- Dla $n \geq 2$, maksymalna liczba krawędzi którą można usunąć, by otrzymany graf miał dokładnie 5 spójnych składowych: $(n-1)^2 + 4$
- Dla parzystego $n \geq 4$, jaka jest minimalna ilość krawędzi, które należy dodać do dopełnienia $\overline{G}$, aby posiadało cykl Eulera: 3
- Dla parzystego $n \geq 3$, liczba niemal pełnym skojarzeń w $\overline{G}$:

$$\begin{cases} 0 & \text{dla parzystego } n \\ \left(\frac{(n-1)!}{2^{\frac{n-1}{2}} \cdot (\frac{n-1}{2})!} \right)^2 & \text{dla nieparzystego } n \end{cases}$$

[2]Było ograniczenie n od jakiejś liczby – nie pamiętam jakiej.

8. $T_{n,k}$ to rodzina grafów, w których rząd jest n, k wierzchołków jest stopnia 2, a $n-k$ jest stopnia 3.

- Dla $n \geq 6$ i spójnego $G \in T_{n,n-2}$, $\mathrm{diam}(G)$ wynosi maksymalnie: ?
- Dla $n \geq 6$, liczba parami nieizomorficznych spójnych grafów w $T_{n,n-2}$, w których wierzchołki stopnia 3 są sąsiednie: ?
- Ile maksymalnie spójnych składowych można otrzymać poprzez usunięcie jednego wierzchołka z grafu w $T_{n,n-4}$? ?
- Liczba parami nieizomorficznych grafów w $T_{6,2}$: ?

9a. G to graf rzędu $2n, n \geq 3$, powstały przez rodzielenie dwóch incydentnych krawędzi w grafie pełnym K_{2n-2}.

- $n \geq 3,\ \alpha(G) =$ 3
- $n \geq 3,\ \chi(G) =$ $2n-3$
- $n \geq 3,\ \omega(G) =$ $2n-3$
- $n \geq 4,\ \chi'(G) =$ $2n-3$

9b. G to graf rzędu $2n, n \geq 3$, powstały przez rodzielenie dwóch nieincydentnych krawędzi w grafie pełnym K_{2n-2}.

- $n \geq 3,\ \alpha(G) =$ 3
- $n \geq 3,\ \chi(G) =$ $2n-4$
- $n \geq 3,\ \omega(G) =$ $2n-4$
- $n \geq 4,\ \chi'(G) =$ $2n-3$

10. Podaj dla sześcianu foremnego:

- indeks cykliczny grupy symetrii wierzchołków: $P_G(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{24}(z_1^8 + 8z_1^2 z_3^2 + 9z_2^4 + 6z_4^2)$
- indeks cykliczny grupy symetrii ścian: $P_G(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{24}(z_1^6 + 3z_1^2 z_2^2 + 6z_1^2 z_4 + 6z_2^3 + 8z_3^2)$
- ilość parami nierównoważnych kolorowań krawędzi dwoma kolorami: 218
- ilość parami nierównoważnych kolorowań wierzchołków trzema kolorami: 333
- ilość parami nierównoważnych kolorowań ścian dwoma kolorami: 10
- ilość parami nierównoważnych kolorowań ścian trzema kolorami: 57

Termin 3, 2024-02-16, *z odpowiedziami*

1a. Podziały liczby 9 zapisano w porządku antyleksykograficznym. Każdy podział ma niemalejąco uporządkowane elementy oraz jednoznacznie przypisaną pozycję $i = 1, 2, \ldots$

- Liczba podziałów składających się z czterech składników: 6
- Liczba podziałów, w których jednocześnie występują 4 i 2: 3
- Następnikiem $(3, 3, 2, 1)$ jest: $(3, 3, 1, 1, 1)$
- Pozycja $(5, 4)$ to: 8

1b. Podziały liczby 10 zapisano w porządku antyleksykograficznym. Każdy podział ma niemalejąco uporządkowane elementy oraz jednoznacznie przypisaną pozycję $i = 1, 2, \ldots$

- Liczba podziałów składających się z czterech składników: 9
- Liczba podziałów, w których jednocześnie występują 4 i 2: 5
- Następnikiem $(4, 3, 2, 1)$ jest: $(4, 3, 1, 1, 1)$
- Pozycja $(5, 5)$ to: 13

2. Niech $s(n, k)$ oznacza liczbę Stirlinga pierwszego rodzaju.

- Wzór jawny na $s(n, 1)$: $(n-1)!$
- Wzór jawny na $s(n, 2)$: ?
- Wzór jawny na $s(n, n)$: 1
- Wzór jawny na $s(n, n-1)$: $\binom{n}{2}$
- Wzór jawny na $s(n, n-2)$: $\binom{n}{3} \cdot 2! + \frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$
- Wzór jawny na $s(n, n-3)$: $\binom{n}{4} \cdot 3! + \binom{n}{3}\binom{n-3}{2} \cdot 2! + \frac{1}{3!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}$
- Wzór rekurencyjny na $s(n, k)$: $s(n-1, k-1) + (n-1) \cdot s(n-1, k)$
  (bo chyba zakładamy $0 \leq k \leq n$?)

3. Niech s_n oznacza liczbę ciągów ternarnych długości n zawierających 1 na każdych dwóch kolejnych pozycjach.

- $s_2 =$ 5
- $s_5 =$ 43
- nierekurencyjny wzór na s_n: $-\frac{1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{4}{3} \cdot 2^n$
- rekurencyjny wzór na s_n: $s_{n-1} + 2s_{n-2}$

4. W koszyku jest 5 bananów, 3 jabłka, 6 pomarańcz oraz 4 gruszki. Niech a_n będzie liczbą n-elementowych zestawów owoców z koszyka, gdzie bierzemy co najmniej jednego banana, co najwyżej 2 jabłka, parzystą liczbę pomarańcz oraz nieparzystą liczbę gruszek.

- $a_2 =$ 1
- $a_3 =$ 2
- $a_7 =$ 12
- Funkcja tworząca dla ciągu $\{a_n\}$: $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(x + x^3)$
- Nierekurencyjny wzór na a_n: $(a_n)_{n=2}^{16} = (1, 2, 5, 7, 11, 12, 15, 14, 15, 12, 11, 7, 5, 2, 1)$
  (tak, należało rozpisać wszystkie wyrazy ciągu)

5. Niech $X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{1,2,3,4,5,6\}$, $f : X \to X$, $g : Y \to X$.

- Liczba odwzorowań f, które nie są bijekcjami $5^5 - 5!$
- Liczba odwzorowań f, które są odwracalne $5!$
- Liczba odwzorowań g, które nie są ani rosnące, ani malejące 5^6
- Liczba odwzorowań g, w których $g(1) = g(2) + 1$ $4 \cdot 5^4$

6. Niech G_n będzie grafem rzędu n o rozmiarze $2n-3$, utworzonym ze ścieżki P_n poprzez dodanie krawędzi dla każdej pary wierzchołków oddalonych o 2.

- Minimalna liczba krawędzi, którą trzeba usunąć z G_n, by stał się on dwudzielny: $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$
- $\mathrm{diam}(G_n) =$ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
- Liczba krawędzi w najdłuższym cyklu w G_n: n
- Minimalna liczba krawędzi, którą trzeba usunąć z G_n, by stał się on planarny: 0

7a. Niech $G_n, n \geq 4$, będzie grafem powstałym poprzez usunięcie z grafu pełnego K_n cyklu C_3. Podaj:

- $\alpha(G_n) =$ 3
- $\omega(G_n) =$ $n-2$
- $\chi(G_n) =$ $n-2$
- $\chi'(G_n) =$

$$\begin{cases} n-1, & \text{dla } n < 9 \text{ lub } n \text{ parzystego} \\ n, & \text{dla } n \geq 9 \text{ nieparzystego} \end{cases}$$

7b. Niech $G_n, n \geq 4$, będzie grafem powstałym poprzez usunięcie z grafu pełnego K_n cyklu C_4. Podaj:

- $\alpha(G_n) =$ 2
- $\omega(G_n) =$ $n-2$
- $\chi(G_n) =$ $n-2$
- $\chi'(G_n) =$?

8. Niech G_{2n} będzie grafem rzędu $2n, n \geq 3$, otrzymanym z grafu pełnego K_{2n-2} poprzez zastąpienie jednej z krawędzi ścieżką długości 3. Niech $\overline{G}_{2n}$ oznacza jego dopełnienie.

- Minimalna liczba krawędzi, którą trzeba dodać do $G_{2n}, n \geq 4$, by stał się on eulerowski: $2n-3$
- Liczba cykli Hamiltona dla $n \geq 3$: $(2n-4)!$
- Liczba pełnych skojarzeń dla $n \geq 3$: $(n-1) \cdot (2n-3)!!$
  (podwójna silnia, mnożenie co 2)
- Maksymalna liczba krawędzi, którą można usunąć z $\overline{G}_{2n}$, by miał on dokładnie 4 spójnych składowych:

  $2n-1$
- Maksymalna liczba krawędzi, którą można usunąć z $\overline{G}_{2n}$, by miał on dokładnie 5 spójnych składowych:

  $2n$

9. Dla $2 \leq k < n$, niech $T_{n,k}$ oznacza rodzinę wszystkich drzew, które mają dokładnie n wierzchołków i k liści.

- $\forall G \in T_{n,n-3}$: $\text{diam}(G) =$ 4
- Dla $n \geq 6$, liczba parami nieizomorficznych drzew w $G \in T_{n,n-3}$, gdzie $\Delta(G) = n - 3$: 2
- Liczba parami nieizomorficznych drzew w $T_{6,3}$: 2
- Maksymalna liczba spójnych składowych, które można stworzyć usuwając wierzchołek z drzewa w $T_{n,n-4}$:

$$n - 4$$

10. Podaj dla czworościanu foremnego:

- Indeks cykliczny grupy symetrii wierzchołków: $P_G(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{12}(z_1^4 + 8z_1z_3 + 3z_2^2)$
- Liczbę nierównoważnych pokolorowań krawędzi 2 kolorami: 12
- Liczbę nierównoważnych pokolorowań wierzchołków 2 kolorami: 5
- Liczbę nierównoważnych pokolorowań wierzchołków 3 kolorami: 15
- Liczbę nierównoważnych pokolorowań ścian 2 kolorami: 5
- Liczbę nierównoważnych pokolorowań ścian 3 kolorami: 15

Bonus: graf Petersena z 1.9

Jest on stałym motywem na egzaminach, lecz wielu ludzi nie widzi czemu wystarczy usunąć tylko jedną krawędź (nic dziwnego - ciężko na to wpaść).

Tutaj był kiedyś ładny wektorowy rysunek w Graphvizie, ale się zesrał.