ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА»
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИНФОРМАТИКИ

Курсовая работа

«Принятие инвестиционных решений в условиях неопределенности»

Выполнил:

Студент 217 гр. А. Цзыкай

Научный руководитель:

к. ф.-м. н. А. В. Зубюк

Москва 2022

Содержание

Введение

Многие обратные задачи, возникающие при анализе данных физического эксперимента, экономических данных и др. являются некорректно поставленными. Эти некорректно поставленные обратные задачи, имеющее решение не единственно, или решение не непрерывно зависят от входных данных, можно решить с помощью имеющейся априорной информацией в виде мягких качественных ограничений.

В настоящей работе рассматриваются практические применения некорректно поставленных обратных задач оценивания в области инвестиционных решений. Для решения таких задач широко используется метод регуляризации, однако в настоящей работе предпочтение отдается подходу с мягкими качественными ограничениями, основанном на понятия теории возможности профессора Ю. П. Пытьева [1]. Даны постановки задач с мягкими качественными ограничениями и предложены численные методы их решения в линейном и нелинейном случаях. В линейном случае задачи сводятся к задачам линейного программирования. В нелинейном предложены метод доверительных областей их решения. [2]

- **Цель работы**

  Использование известной априорной информации для установления мягких качественных ограничений в условиях некорректно поставленных задач, и реализация соответственными математическими методами в области инвестиционных решений.

Глава 1. Мягкие качественные ограничения

1.1 Обратная задача оценивания и некорректность её постановки

В различных предметных областях, существует общая зависимость между известными наблюдениями и полезными сигналами, подлежащим оценивание:

$$\xi = Af + \nu \tag{1}$$

где A – линейный оператор, действующий из $\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$, соответственно f является вектором n-мерного Евклидова пространства $\mathcal{R}^n$, и ξ является вектором m-мерного Евклидова пространства $\mathcal{R}^m$. μ – случайная погрешность преобразования,принимающая в $\mathcal{R}^m$ и моделирующая аддитивный шум. Поставленна обратная задача схемой (1), в которой требуется оценить полезный сигнал f по наблюдению ξ.

1.1.1 Некорректность обратной задачи оценивания при отсутствии априорной информации

Определение 1. Задача называется корректно поставленной (по Адамару), если выполнены следующие условия:

1) Решение этой задачи существует;

2) Решение задачи единственно;

3) Решение непрерывно зависит от входных параметров.

Некорректность задачи оценивания сигнала f при отсутствии априорной информации о нём, т. е. когда оценка строится исключительно на основе наблюдения , может быть обусловлена двумя факторами [2]:

1) Вырожденность оператора A,когда его ядро содержит не только нулевой элемент: $ker(A) \neq \{0\}$.

Действительно, при отсутствии какой-либо априорной информации о f, если $\hat{f}_1$ – полученная оценка сигнала f (оптимальная в некотором смысле), то $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ также является справедливой оценкой исходного сигнала f, где $\forall \hat{f}_2 \in ker(A)$. Значит, настоящие задачи с вырожденным оператором, имеющие не единственное решение.

2) Плохая обусловленность оператора A, когда оператора A имеет большое число обусловленности ($cond(A) \gg 1$).

При достаточно большом числе обусловленности, в зависимости от входных параметров решение может изменяться непредсказуемым образом. Это фактор показывает, что решение зависит от входных параметров не непрерывным образом.

1.1.2 Обычное ограничение и мягкое ограничение

В случае наличия различных факторов, обусловливающих некорректность обратной задачи оценивания – вырожденности и (или) плохой обусловленности оператора A , – оценка сигнала f может быть представлена в виде:

$$\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 \tag{2}$$

где компонента $\hat{f}_1$ находится известными методами, а $\hat{f}_2$ может быть любой в пределах некоторого известного множества $\mathcal{L}_2$ (которым может быть ядро $ker(A)$ оператора A или подпространство $ker(A)$). Таким образом, при отсутствии априорной информации все оценки:

$$\hat{f} \in \mathcal{L} = \hat{f}_1 + \mathcal{L}_2 = \{\hat{f}_1 + \hat{f}_2 | \hat{f}_2 \in \mathcal{L}_2\} \tag{3}$$

Для уточнения оценки в пределах множества $\mathcal{L}$ (3) используем априорную информацию об оцениваемом сигнале f и, следовательно, его оценке ограничений $\hat{f}$, заданную в форме системы мягких ограничений:

$$c_i(\hat{f}) \gtrsim 0, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{4}$$

где c_i – функции из $\mathcal{L} \to \mathbb{R}$, $\gtrsim 0$ – мягкое унарное отношение на числовой прямой $\mathbb{R}$, которое мы будем понимать, как «мягкую неотрицательность». Таким образом, ограничения (4) мы будем интерпретировать как «скорее всего, $c(\hat{f})$ неотрицательны» для всех $i = 1, \ldots, k$.

1.2 Теория возможности

1.2.1 Мягкое унарное ограничение

В предыдущем разделе мы использовали мягкое отношение $\gtrsim 0$ для определения системы мягких ограничений, теперь мы определим его понятие и исследуем его основные свойства.

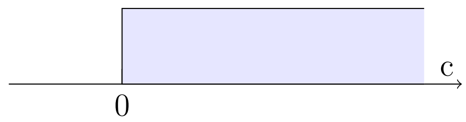
Определение 2. Пара $(2^X, \geq_\pi)$ является мягким унарным отношением на X, где $\geq_\pi$ – полный предпорядок на множестве 2X всех подмножеств множества X. [2]

- Обычное унарное отношение на X — подмножество множества X.

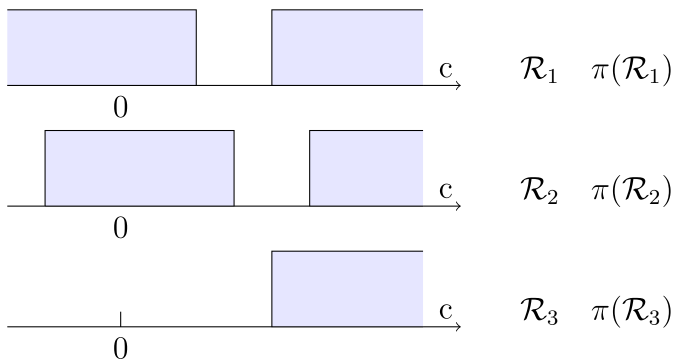
  2^X — множество всех обычных унарных отношений на X.

- Мягкое унарное отношение $(2^X, \geq_\pi)$ является математической формализацией пожеланий относительно вида обычного унарного отношения на X.
  ввести на 2^X полный предпорядок $\geq_\pi$ и определяем насколько хорошо элементы 2^X соответствуют нашим пожеланиям.

Для понятия разницы между четким унарным отношением $c \geq 0$ и мягким унарным отношением $c \gtrsim 0$, сравним их подмножества на $\mathbb{R}$:
Четкое унарное отношение $c \geq 0$ – это четкое подмножество на $\mathbb{R}$.



Мягкое унарное отношение $c \gtrsim 0$ – это плохое известное подмножество $\mathcal{R}_{\gtrsim 0}$ на $\mathbb{R}$



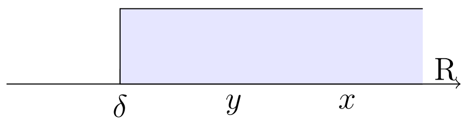
Когда мы вычисляем полный предпорядок $\geq_\pi$, можно рассматривать функцию $\pi : 2^X \to [0, 1]$. Она предназначена для количественной оценки различных обычных унарных отношений соответствия нашим желаниям: $\pi(R_1) \geq \pi(R_2) \Leftrightarrow R_1 \geq_\pi R_2, R_i \in 2^X$. Очевидно, что значения функции π монотонного задаются с точностью до строго преобразования отрезка [0,1] с неподвижными точками 0 и 1. Такой подход к заданию полного предпорядка на множестве всех доступных альтернатив лег в основу теории возможностей Ю.П. Пытьева [2], в которой функция π названа *распределением возможностей.*

Согласно принципу транзитивности унарных отношений, можно легко доказать следующую теорему о распределении вероятностей [2]:

Определение 3. (принцип транзитивности) Мягким отношением $\gtrsim 0$ назовём мягкое унарное отношение на $\mathbb{R}$, для любых $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяющее условию:

$$x \geq y, y \gtrsim 0 \Rightarrow x \gtrsim 0.$$

Теорема 1. $\pi_{\gtrsim 0}(R) > 0$, только если $R = [a, \infty)$ – полупрямая.



1.2.2 Мера возможности

Согласно [1] мерой возможности является функция

$$\Pi(\varepsilon) = \sup_{R \in \varepsilon} \pi(R) \qquad \Pi : \mathcal{P}(2^X) \to [0, 1]$$

где $\mathcal{P}(2^X)$ – множество всех подмножеств 2^X (алгебра событий).

Функция мерой возможности удовлетворяют следующей доказанной теории:

Теорема 2. Возможность $\mu(x) = \Pi_{\gtrsim 0}(\{x \gtrsim 0\})$ того,что $x \gtrsim 0$, – монотонно неубывающая функция аргумента x.

Значение функции $\mu(x)$ представляет собой возможность удовлетворения мягкого ограничения $x \gtrsim 0$, и что эта возможность не уменьшается с ростом x.

1.3 Система мягких ограничений

С практической точки зрения, исследуемая нами задача (4) – это не одно мягкое ограничение, а их система, имеющая вид:

$$\begin{cases} c_1 \gtrsim 0 \\ c_2 \gtrsim 0 \\ \vdots \\ c_k \gtrsim 0 \end{cases}$$

Для того чтобы получить возможность этой системы, необходимо доказать еще одну теорему:

Теорема 3. Возможность одновременного выполнения системы мягких ограничений $x_i \gtrsim 0, i = 1, \ldots, k$, равна:

$$\begin{aligned} \Pi_{\gtrsim 0}(\bigcap_{i=1}^{k} \{x_i \gtrsim 0\}) &= \sup\{\pi_{\gtrsim 0}(R) | x_i \in R, i = 1, \ldots, k\} \\ &= \sup\{\pi_{\gtrsim 0}([a, \infty)) | a \leq x_i, i = 1, \ldots, k\} \\ &= \sup\{\pi_{\gtrsim 0}([a, \infty)) | a \leq \min_{i=1,\ldots,k} x\} \\ &= \mu \min_{i=1,\ldots,k} x_i = \min_{i=1,\ldots,k} \mu(x_i) \end{aligned}$$

Глава 2. Реализация численных методов решения и практические применения

Возвращаясь к математической задаче поиска оценки $\hat{f}$ (1), поставленной в начале нашей работой. В результате всего показанного в предыдущей главе, эту задачу можно поставить как поиска вектора $\hat{f} \in \mathcal{L}$, который максимизирует возможность одновременного выполнения системы мягких ограничений (4), т.е. как оптимизационная задача $\min_{i=1,\dots,k} \mu(c_i \hat{f}) \sim \max_{\hat{f}\in\mathcal{L}}$, которая с учётом монотонности μ принимает вид:

$$\min_{i=1,\dots,k} c_i(\hat{f}) \sim \max_{\hat{f}\in\mathcal{L}} \tag{5}$$

В рассматриваемых обратных задачах оценивания, линейность оператора A приводит к линейности множества $\mathcal{L}$ в (5), затем в нем функции c_i, задающие мягкие ограничения (4), можно рассматривать в двух случаях: линейном и нелинейном.

2.1 Решения обратной задачи оценивания с линейными мягкими ограничениями

Если каждая из функций c_i линейна, то задача (5) может быть сведена к задаче линейного программирования:

$$z \sim \max_{\hat{f}\in\mathcal{L}, z\in\mathbb{R}}, \quad c_i(\hat{f}) \geq z \tag{6}$$

или:

$$\begin{cases} z \sim \max\limits_{\hat{f}\in\mathcal{L}, z\in\mathbb{R}} \\ c_1 \geq z \\ c_2 \geq z \\ \vdots \\ c_k \geq z \end{cases}$$

которая решается известными численными методами.

2.1.1 Пример применения мягких ограничений для решения обратных задач оценки в области принятия инвестиционных решений

Сначала мы реализуем простую задачу линейного программирования в Python, используя функцию linprog в библиотеки scipy.optimize. Рассмотрим такую портфельную проблему с простого случая (двумерного): в инвестиционном фонде инвестор может комбинировать две облигации по своему усмотрению в своем финансовом плане, где правило покупки облигации A заключается в том, что доходность составляет 10%, когда общая сумма покупок ниже 30% от общих активов фонда, а доходность снижается до 8%, когда общая сумма покупок превышает 30% от общих активов фонда из-за некоторого рыночного эффекта, облигация B где правило покупки заключается в том, что доходность составляет 12% для покупок на сумму менее 20% от общих активов фонда и снижается до 6% для покупок, превышающих 20% от общих активов фонда. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} z \sim \max \\ 0.12x + 0.08(y - 0.3) + 0.10 * 0.3 \geq z \\ 0.12 * 0.2 + 0.06(x - 0.2) + 0.08(y - 0.3) + 0.10 * 0.3 \geq z \\ 0.12 * 0.2 + 0.06(x - 0.2) + 0.10y \geq z \\ x + y \leq 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

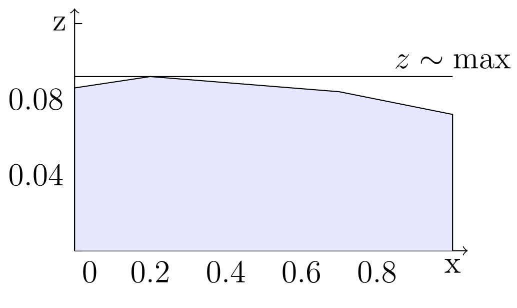
где z – суммарная доходность фонда, а x и y соответствуют доходности облигации A и B соответственно. Когда мы рассматриваем случай $x + y = 1$, задача линейного программирования сводится к виду:

$$\begin{cases} z \sim \max \\ z - 0.04x \leq 0.086 \\ z + 0.02x \leq 0.098 \\ z + 0.04x \leq 0.112 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

используя linprog, мы можем легко получить реализацию его кода:

```
from scipy.optimize import linprog
c=[-1,0]
A = [[1,-0.04],[1,0.02],[1,0.04]]
b = [0.086,0.098,0.112]
z_bounds = (None,None)
x_bounds = (0,1)
res = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, bounds=[z_bounds, x_bounds])

Result:
x: array([0.094, 0.2 ])
```



А когда мы рассматриваем случай $x + y \leq 1$, мы можем использовать Python для получения визуального изображения.

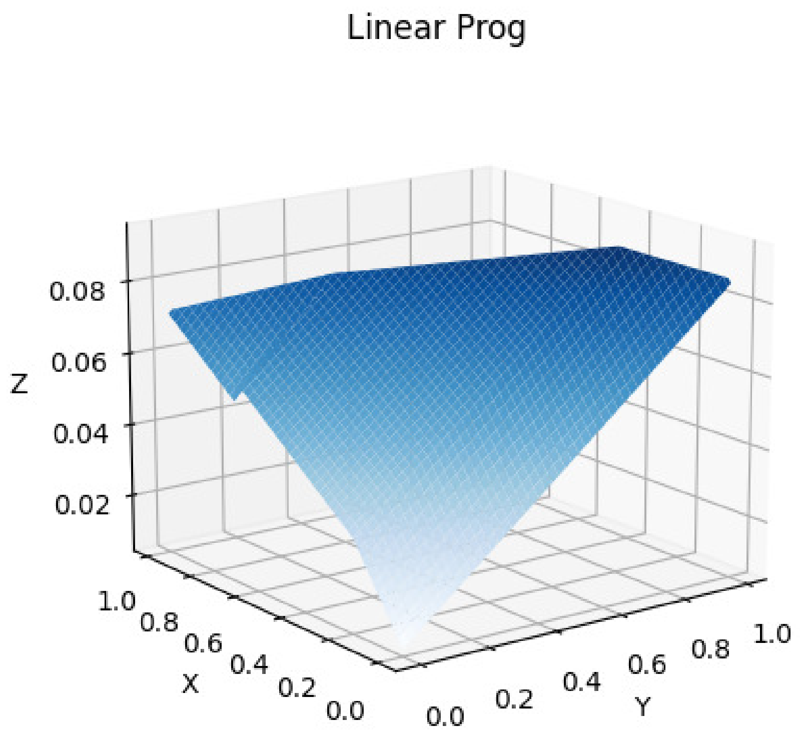


Рис. 1: Линейное программирование

В целом, использование мягких качественных ограничений при принятии инвестиционных решений заключается в том, чтобы оценить на доле различных финансовых продуктов в неизвестном портфеле, или, рассчитывать, как сильно колебания цен исходных сырей повлияют на цены акций.

Для первого случая, пусть r_n – доходность различных финансовых продуктов, x_i – доля i-го продукта в общем инвестицийб и $z = \min\{r_n(x_{i_n} - x_{j_n})\}$ мы можем построить математическую модель следующим образом:

$$\begin{cases} z \sim \max \\ r_1(x_{i_1} - x_{j_1}) \geq z \\ \vdots \\ r_n(x_{i_n} - x_{j_n}) \geq z \\ \sum_{i=1}^{k} x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k \end{cases}$$

2.2 Решения с нелинейными мягкими ограничениями

Если же функции c_i нелинейны, задача (5) может быть решена методом доверительных областей.

Заключение

В настоящей работе, дано определение некорректно поставленных обратных задач оценивания, с помощью известной априорной информации установили задачи с мягкими качественными ограничениями. Показано численное определение мягкого унарного отношения на основе теории возможности Ю. П. Пытьева, и исследовали его основные свойства.

В то же время, мы также исследовали линейный и нелинейный случаи мягких ограничений и дали решения для линейного случая с помощью линейного программирования и кратко объяснили того, каковы перспективы его применения в инвестиционной области.

Список литературы

[1] Пытьев Ю.П. Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, приложения. М: ФИЗМАТЛИТ, 2016. 600 с.

[2] В. А. Зубюк, Численные методы решения некорректно поставленных обратных задач с мягкими качественными ограничениями, Москва, 2020.