Étude de cas : Théorie Moderne du Portefeuille

Houcine Senoussi

Avril 2023

Introduction

- Cette étude de cas est consacrée à la **théorie moderne du portefeuille** aussi appelée **Mean Variance Optimization (MVO)**. Cette théorie a été élaborée par H. Markowitz (prix Nobel d'économie 1990) dans les années 1950.
- La formulation principale de cette théorie est : "Construire un portefeuille (sélectionner les titres) de manière à minimiser le risque et maximiser la rentabilité", ou encore "Minimiser le risque pour un niveau de rendement choisi", ou enfin "Maximiser la rentabilité pour un niveau donné de risque".
- L'idée principale est de prendre en compte les caractéristiques individuelles des actifs (moyenne et volatilité) mais aussi la manière dont ils impactent le portefuille dans son ensemble/la manière dont ils interagissent avec les autres actifs.
- Vocabulaire : Expected return (rentabilité) , perceived risk, diversification.

Définitions

- Considérons un portefeuille P composé de n actifs. Nous devons d'abord définir les caractéristiques (la rentabilité et le risque) de P en fonction de celles de ses composantes.
- Notons $x_i, i = 1, ..., n$ la proportion des fonds investi dans l'actif i. Autrement dit, nous avons noter $P = (x_1, ..., x_n)$. La rentabilité de P est donc définie par :

$$E(P) = x_1 * \mu_1 + ... + x_n * \mu_n$$

  où μ_i est la rentabilité de l'actif i.
- Le risque de P est défini par :

$$Var(P) = \sum_i \sum_j x_i * x_j * Cov_{ij}$$

=cov*matrice (x1)
(x2)
(...)
(xn)

  où Cov_{ij} est la covariance des actifs i et j.
- **Exercice** : Démontrez ces deux formules.

Formulation (1)

- Il s'agit de choisir les valeurs des x_i de manière à minimiser le risque pour un niveau de rentabilité donné. Il s'agit donc du problème d'optimisation suivant :
  - Minimiser $V(P)$
  - Sous les contraintes suivantes :
    1. $x_1 + ... + x_n = 1.$
    2. $E(P) = x_1 * \mu_1 + ... + x_n * \mu_n \geq R.$
    3. $xi \geq 0,\ i = 1, ..., n.$

Formulation (2)

- Il s'agit de choisir les valeurs des x_i de manière à maximiser la rentabilité pour un niveau de risque donné. Il s'agit donc du problème d'optimisation suivant :
  - Maximiser $E(P)$
  - Sous les contraintes suivantes :
    1. $x_1 + ... + x_n = 1.$
    2. $V(P) \leq \overline{R}.$
    3. $xi \geq 0,\ i = 1, ..., n.$

Caractéristiques des actifs

- Pour compléter nos problèmes d'optimisation nous avons besoin des paramètres suivants :
  1. La rentabilité (moyenne) μ_i de chaque actif i.
  2. La covariance Cov_{ij} de chaque paire d'actifs (i, j).
     - Lorsque $i = j$, nous obtenons la variance de l'actif i, c'est-à-dire le risque qui lui est associé.
- Pour calculer ces valeurs, notre point départ sera les prix des actifs sur une période $t = 1, ..., T$.

Caractéristiques des actifs (2)

- Considérons un actif dont le prix sur la période $t = 1, ..., T$ est noté p^t.
- La rentabilité de cet actif est défini par $r^t = \frac{p^{t+1} - p^t}{p^t}$.
- La rentabilité moyenne est donnée par la moyenne arithmétique ou géométrique définies de la manière suivante :
  1. $r^a = \frac{1}{T} \sum_1^T r^t$
  2. $r^g = (\prod_1^T (1 + r^t))^{\frac{1}{T}} - 1$
- La covariance de deux actifs i et j est définie de la manière suivante :
  - $Cov_{ij} = \frac{1}{T} \sum_1^T (r_i^t - r_i^a)(r_j^t - r_j^a)$
- Et en particulier la variance (carré de la volatilité):
  - $\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_1^T (r_i^t - r_i^a)^2$

Résolution du problème

- On considèrera la première formulation ("Minimiser le risque ...").
- Il s'agit donc d'un problème de programmation quadratique.
- Pour le résoudre, nous utiliserons le module **cvxopt** de Python.

Exercices

- **Exercice 1 :** Faire les calculs pour les actifs (actions de 4 sociétés du CAC40) dont les prix entre avril 22 et avril 23 sont définis dans la feuille Excel ci-jointe.

Exercices

- **Exercice 2 :** Étude de cas ci-jointe.