Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт по курсовой работе по дисциплине«Вычислительные комплексы»

Выполнил студент:
Митенев Александр Владимирович
группа: 3630102/70201

Проверил:
к.ф.-м.н.,доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2020г.

Содержание

1 Постановка задачи

1. Решить ИСЛАУ субдифференциальным методом.
2. Решить ИСЛАУ треугольным расщеплением.

2 Теория

2.1 Особенные матрицы

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется неособенной (невырожденной), если неособенными являются все точечные $n \times n$ - матрицы $A \in \mathbf{A}$.

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется особенной (вырожденной), если она содержит особенную точечную матрицу.

Теорема. Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ такова, что $mid\ \mathbf{A}$ неособенная и

$$\max_{1 \le j \le n} (rad\ \mathbf{A} \cdot |(mid\ \mathbf{A})^{-1}|)_{jj} \ge 1$$

Тогда $\mathbf{A}$ особенная.

2.2 Сходимость методов

2.2.1 Субдифференциальный метод

Теорема. Пусть интервальная $n \times n$ - матрица $\mathbf{C}$ удовлетворяет условию построчной согласованности, и интервальная $2n \times 2n$ - матрица

$$\begin{pmatrix} (pro\ \mathbf{C})^+ & (pro\ \mathbf{C})^- \\ (pro\ \mathbf{C})^- & (pro\ \mathbf{C})^+ \end{pmatrix}$$

является неособенной. Если при этом $\mathbf{C}$ достаточно узка, то алгоритм SubDiff2 со значением релаксационного параметра $\tau = 1$ сходится за конечное число итераций к $sti(\mathbf{x}^*)$, где $\mathbf{x}^*$ — формальное решение интервальной системы $\mathbf{C}x + \mathbf{d} = 0$.

2.2.2 Треугольное расщепление

Теорема. Пусть для интервальной матрицы $\mathbf{C}$ системы уравнений вещественные квадратные $n \times n$ - матрицы D, L, R определяются формулами

$$D = diag\{|c_{11}^{-1}|,\ |c_{22}^{-1}|,\ \dots\ ,\ |c_{nn}^{-1}|\}$$

$$L = (l_{ij}), \quad \text{где} \quad l_{ij} = \begin{cases} |c_{ij}|, & \text{если } i > j \\ 0, & \text{если } i \le j \end{cases}$$

$$R = (r_{ij}), \quad \text{где} \quad r_{ij} = \begin{cases} |c_{ij}|, & \text{если } i < j \\ 0, & \text{если } i \geq j \end{cases}$$

Если матрица

$$P = \sum_{j=0}^{n-1} (DL)^j DR = (I - DL)^{-1} DR$$

такова, что $\rho(P) < 1$, то итерационный процесс TrSplit для нахождения формального решения ИСЛАУ в полной интервальной арифметике сходится из любого начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$ к единственной неподвижной точке $\mathbf{x}^*$, являющейся формальным решением системы. При этом имеет место оценка

$$Dist\big(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{(k)}\big) \leq \left((I - P)^{-1} - \sum_{j=0}^{k-1} P^j \right) \cdot Dist\big(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}\big)$$

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью библиотк numpy, scipy, seaborn, kaucherpy на языке программирования Python в среде разработки JupiterNotebook.

4 Результаты

4.1 Проверка на работоспособность

Прежде чем решать поставленную задачу, проверим работоспособность реализованных методов на простом примере. Возьмем систему Барта-Нудинга.

$$\begin{pmatrix} [2,\ 4] & [-2,\ 1] \\ [-1,\ 2] & [2,\ 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,\ 2] \\ [-2,\ 2] \end{pmatrix}$$

Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2,\ 4] & [-2,\ 1] \\ [-1,\ 2] & [2,\ 4] \end{pmatrix}$$

С помощью теоремы из пункта 2.1 получили, что матрица не является особенной.

4.1.1 Субдифференциальный метод

С помощью теоремы из пункта 2.2.1 получили, что субдифференциальный метод на данной системе сходиться за конечное число итераций.

Действительно, алгоритм сошелся за 2 итерации к следующим значениям

$$\begin{pmatrix} [-0.3333333,\ 0.3333333] \\ [-0.3333333,\ 0.3333333] \end{pmatrix}$$

Гарантируемая точность - 6 знаков после запятой.

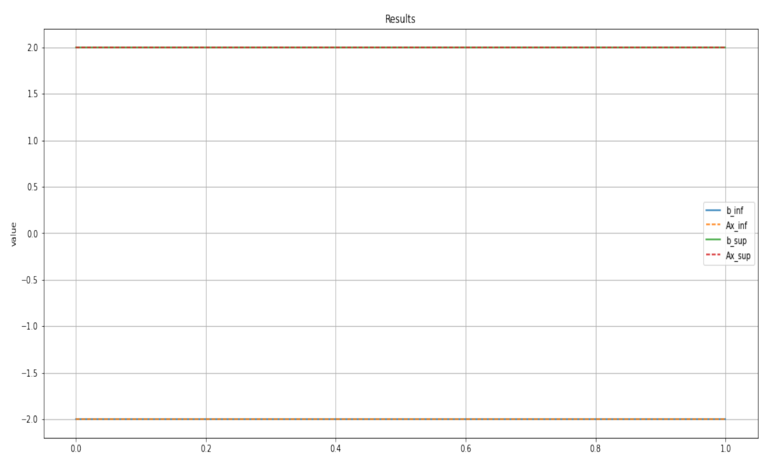

Рис. 1: Результаты

4.1.2 Треугольное расщепление

С помощью теоремы из пункта 2.2.2 получили, что метод треугольного расщепления матрицы на данной системе сходиться за конечное число итераций.

Действительно, алгоритм сошелся за 11 итерации к следующим значениям

$$\begin{pmatrix} [-0.3333333,\ 0.3333333] \\ [-0.3333332,\ 0.3333332] \end{pmatrix}$$

Гарантируемая точность - 6 знаков после запятой.

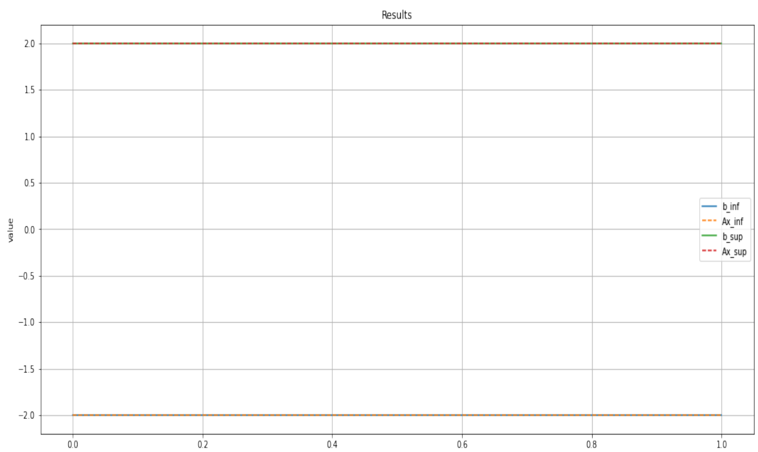

Рис. 2: Результаты

4.2 Решение поставленной задачи

Дана следующая ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [4,\ 6] & [-9,\ 0] & [0,\ 12] & [2,\ 3] & [5,\ 9] & [-23,\ -9] & [15,\ 23] \\ [0,\ 1] & [6,\ 10] & [-1,\ 1] & [-1,\ 3] & [-5,\ 1] & [1,\ 15] & [-3,\ -1] \\ [0,\ 3] & [-20,\ -9] & [12,\ 77] & [-6,\ 30] & [0,\ 3] & [-18,\ 1] & [0,\ 1] \\ [-4,\ 1] & [-1,\ 1] & [-3,\ 1] & [3,\ 5] & [5,\ 9] & [1,\ 2] & [1,\ 4] \\ [0,\ 3] & [0,\ 6] & [0,\ 20] & [-1,\ 5] & [8,\ 15] & [-6,\ 1] & [10,\ 17] \\ [-7,\ -2] & [1,\ 2] & [7,\ 14] & [-3,\ 1] & [0,\ 2] & [3,\ 5] & [-2,\ 1] \\ [-1,\ 5] & [-3,\ 2] & [0,\ 8] & [1,\ 11] & [-5,\ 10] & [2,\ 7] & [6,\ 82] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-10,\ 95] \\ [35,\ 14] \\ [-6,\ 2] \\ [30,\ 7] \\ [4,\ 95] \\ [-6,\ 46] \\ [-2,\ 65] \end{pmatrix}$$

С помощью теоремы из пункта 2.1 получили, что матрица $\mathbf{A}$ является особенной.

4.2.1 Субдифференциальный метод

С помощью теоремы из пункта 2.2.1 получили, что субдифференциальный метод на данной системе **не** сходиться за конечное число итераций.

Однако, алгоритм сошелся за 8 итерации к следующим значениям

$$\begin{pmatrix} [-1.2247431, \ 0.5054298] \\ [18.2644433, \ -9.517504] \\ [-0.0281865, \ 1.1607552] \\ [16.4076957, \ -14.455534] \\ [-1.3435652, \ 3.9882184] \\ [-3.5289385, \ 4.5434583] \\ [5.4308623, \ -0.6740083] \end{pmatrix}$$

Гарантируемая точность - 6 знаков после запятой.

То, что метод сошелся, является очень интересным фактом. В книге [3] это явление названо "mysterious behavior of the subdifferential Newton method"

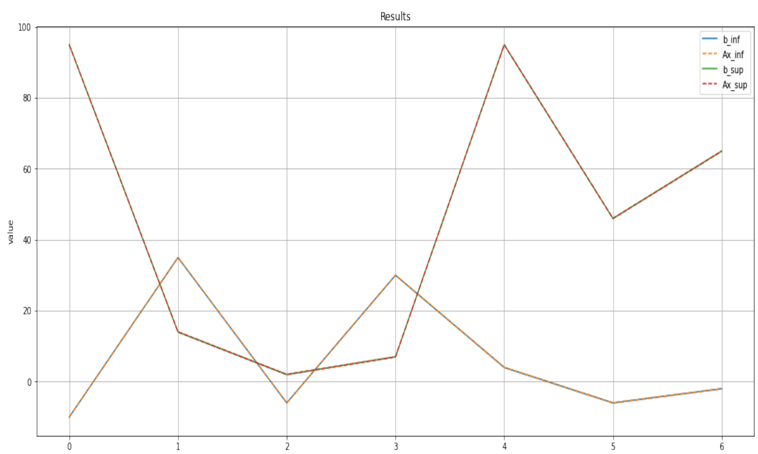

Рис. 3: Результаты

4.2.2 Треугольное расщепление

С помощью теоремы из пункта 2.2.2 получили, что метод треугольного расщепления матрицы на данной системе **не** сходиться за конечное число итераций.

И действительно, алгоритм не сошелся за 100 итераций, а значения стремятся в бесконечность.

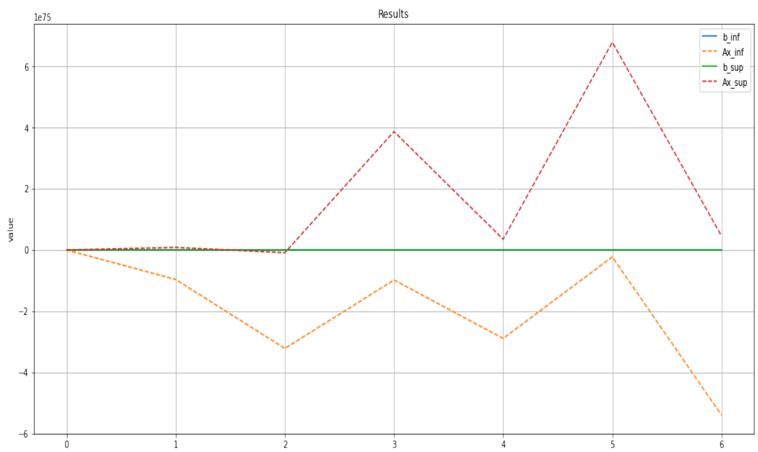

Рис. 4: Результаты

4.3 Эксперименты

4.3.1 Субдифференциальный метод

Исследуем сходимость алгоритма, меняя один из элементов матрицы $\mathbf{A}$. Будем менять нижнюю границу $\mathbf{A}_{77}$

$\mathbf{A}_{77}$	Результат
$[6,\ 82]$	Сошелся
$[6.5,\ 82]$	Сошелся
$[7,\ 82]$	Сошелся
$[7.5,\ 82]$	Сошелся
$[8,\ 82]$	Не сошелся
$[8.5,\ 82]$	Не сошелся
$[9,\ 82]$	Не сошелся
$[9.5,\ 82]$	Не сошелся
$[10,\ 82]$	Не сошелся
$[10.5,\ 82]$	Не сошелся
$[11,\ 82]$	Сошелся
$[11.5,\ 82]$	Сошелся
$[12,\ 82]$	Сошелся
$[12.5,\ 82]$	Сошелся

Таблица 1: Результаты при τ=1

Так же мы можем поменять релаксационный параметр данного алгоритма. Возьмем $\tau = 0.8$

$\mathbf{A}_{77}$	Результат
[6, 82]	Сошелся
[6.5, 82]	Сошелся
[7, 82]	Сошелся
[7.5, 82]	Сошелся
[8, 82]	Сошелся
[8.5, 82]	Сошелся
[9, 82]	Сошелся
[9.5, 82]	Сошелся
[10, 82]	Сошелся
[10.5, 82]	Сошелся
[11, 82]	Сошелся
[11.5, 82]	Сошелся
[12, 82]	Сошелся
[12.5, 82]	Сошелся

Таблица 2: Результаты при τ=0.8

Поменяв параметр релаксации мы добились сходимости алгоритма на всех исследуемых значениях.

4.3.2 Трегольное расщепление матрицы

Проведем аналогичное изменение элемента $\mathbf{A}_{77}$

$\mathbf{A}_{77}$	Результат
[6, 82]	Не сошелся
[6.5, 82]	Не сошелся
[7, 82]	Не сошелся
[7.5, 82]	Не сошелся
[8, 82]	Не сошелся
[8.5, 82]	Не сошелся
[9, 82]	Не сошелся
[9.5, 82]	Не сошелся
[10, 82]	Не сошелся
[10.5, 82]	Не сошелся
[11, 82]	Не сошелся
[11.5, 82]	Не сошелся
[12, 82]	Не сошелся
[12.5, 82]	Не сошелся

Таблица 3: Результаты

Метод треугольного расщепления матрицы не сходиться нигде с требуемой точностью.

4.4 Обсуждение

Можно сделать вывод, что субдифференциальный метод сходится за меньшее количество итераций, чем метод треугольного расщепления матрицы, с одинаковой точностью. Так же мы столкнулись с интересной особоенностью субдифференциального метода - сходимость на некоторых особенных матрицах, что, несомненно, является его преимуществом. Так же субдифференциальный метод поддается настройке, что может значительно улучшить его свойства.

5 Приложения

- Репозиторий с исходным кодом: https://github.com/mitenevav/computer_complex/tree/master/course_project

Список литературы

[1] Баженов А. Н. - Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры: учебное пособие. https://elib.spbstu.ru/dl/2/s20-76.pdf/info

[2] Шарый С. П. - Конечномерный интервальный анализ.

[3] Шарый С. П. - Алгебраический подход к интервальным линейным статическим задачам идентификации, о допусках и об управлении, или еще одно применение арифметики Каухера.