

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт по курсовой работе по дисциплине «Вычислительные комплексы»

Выполнил студент:
Митенев Александр Владимирович
группа: 3630102/70201

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2020г.

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Теория	2
2.1	Особенные матрицы	2
2.2	Сходимость методов	2
2.2.1	Субдифференциальный метод	2
2.2.2	Треугольное расщепление	2
3	Реализация	3
4	Результаты	4
4.1	Проверка на работоспособность	4
4.1.1	Субдифференциальный метод	4
4.1.2	Треугольное расщепление	5
4.2	Решение поставленной задачи	5
4.2.1	Субдифференциальный метод	6
4.2.2	Треугольное расщепление	6
4.3	Эксперименты	7
4.3.1	Субдифференциальный метод	7
4.3.2	Треугольное расщепление матрицы	8
4.4	Обсуждение	9
5	Приложения	10
	Список используемой литературы	10

1 Постановка задачи

1. Решить ИСЛАУ субдифференциальным методом.
2. Решить ИСЛАУ треугольным расщеплением.

2 Теория

2.1 Особенные матрицы

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется неособенной (невырожденной), если неособенными являются все точечные $n \times n$ - матрицы $A \in \mathbf{A}$.

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется особенной (вырожденной), если она содержит особенную точечную матрицу.

Теорема. Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ такова, что $\text{mid } \mathbf{A}$ неособенная и

$$\max_{1 \leq j \leq n} (\text{rad } \mathbf{A} \cdot |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}|)_{jj} \geq 1$$

Тогда \mathbf{A} особенная.

2.2 Сходимость методов

2.2.1 Субдифференциальный метод

Теорема. Пусть интервальная $n \times n$ - матрица \mathbf{C} удовлетворяет условию построчной согласованности, и интервальная $2n \times 2n$ - матрица

$$\begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix}$$

является неособенной. Если при этом \mathbf{C} достаточно узка, то алгоритм SubDiff2 со значением релаксационного параметра $\tau = 1$ сходится за конечное число итераций к $\text{sti}(\mathbf{x}^*)$, где \mathbf{x}^* — формальное решение интервальной системы $\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d} = 0$.

2.2.2 Треугольное расщепление

Теорема. Пусть для интервальной матрицы \mathbf{C} системы уравнений вещественные квадратные $n \times n$ - матрицы \mathbf{D} , \mathbf{L} , \mathbf{R} определяются формулами

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{|c_{11}^{-1}|, |c_{22}^{-1}|, \dots, |c_{nn}^{-1}|\}$$

$$\mathbf{L} = (l_{ij}), \quad \text{где } l_{ij} = \begin{cases} |c_{ij}|, & \text{если } i > j \\ 0, & \text{если } i \leq j \end{cases}$$

$$R = (r_{ij}), \quad \text{где } r_{ij} = \begin{cases} |c_{ij}|, & \text{если } i < j \\ 0, & \text{если } i \geq j \end{cases}$$

Если матрица

$$P = \sum_{j=0}^{n-1} (DL)^j DR = (I - DL)^{-1} DR$$

такова, что $\rho(P) < 1$, то итерационный процесс TrSplit для нахождения формального решения ИСЛАУ в полной интервальной арифметике сходится из любого начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$ к единственной неподвижной точке \mathbf{x}^* , являющейся формальным решением системы. При этом имеет место оценка

$$Dist(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{(k)}) \leq \left((I - P)^{-1} - \sum_{j=0}^{k-1} P^j \right) \cdot Dist(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)})$$

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью библиотек numpy, scipy, seaborn, kaucherpy на языке программирования Python в среде разработки JupiterNotebook.

4 Результаты

4.1 Проверка на работоспособность

Прежде чем решать поставленную задачу, проверим работоспособность реализованных методов на простом примере. Возьмем систему Барта-Нудинга.

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

Рассмотрим матрицу \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix}$$

С помощью теоремы из пункта 2.1 получили, что матрица не является особенной.

4.1.1 Субдифференциальный метод

С помощью теоремы из пункта 2.2.1 получили, что субдифференциальный метод на данной системе сходится за конечное число итераций.

Действительно, алгоритм сошелся за 2 итерации к следующим значениям

$$\begin{pmatrix} [-0.333333, 0.333333] \\ [-0.333333, 0.333333] \end{pmatrix}$$

Гарантируемая точность - 6 знаков после запятой.

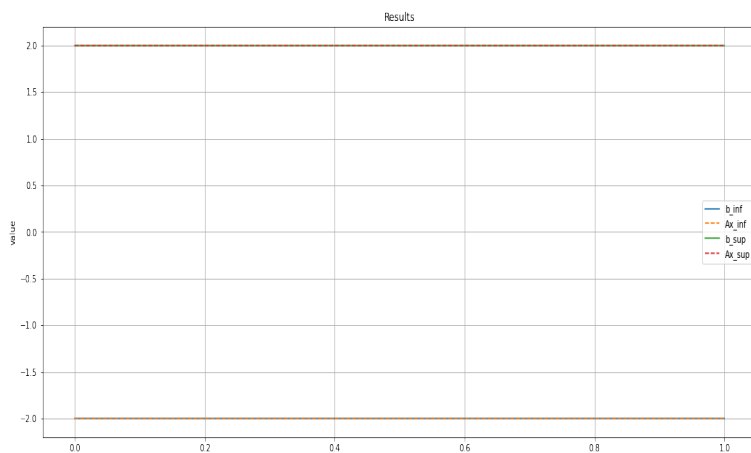


Рис. 1: Результаты

4.1.2 Треугольное расщепление

С помощью теоремы из пункта 2.2.2 получили, что метод треугольного расщепления матрицы на данной системе сходится за конечное число итераций.

Действительно, алгоритм сошелся за 11 итерации к следующим значениям

$$\begin{pmatrix} [-0.3333333, 0.3333333] \\ [-0.3333332, 0.3333332] \end{pmatrix}$$

Гарантируемая точность - 6 знаков после запятой.

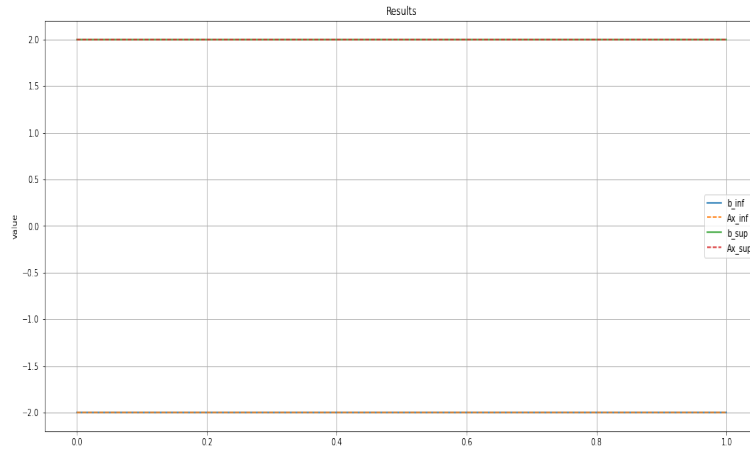


Рис. 2: Результаты

4.2 Решение поставленной задачи

Дана следующая ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [4, 6] & [-9, 0] & [0, 12] & [2, 3] & [5, 9] & [-23, -9] & [15, 23] \\ [0, 1] & [6, 10] & [-1, 1] & [-1, 3] & [-5, 1] & [1, 15] & [-3, -1] \\ [0, 3] & [-20, -9] & [12, 77] & [-6, 30] & [0, 3] & [-18, 1] & [0, 1] \\ [-4, 1] & [-1, 1] & [-3, 1] & [3, 5] & [5, 9] & [1, 2] & [1, 4] \\ [0, 3] & [0, 6] & [0, 20] & [-1, 5] & [8, 15] & [-6, 1] & [10, 17] \\ [-7, -2] & [1, 2] & [7, 14] & [-3, 1] & [0, 2] & [3, 5] & [-2, 1] \\ [-1, 5] & [-3, 2] & [0, 8] & [1, 11] & [-5, 10] & [2, 7] & [6, 82] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-10, 95] \\ [35, 14] \\ [-6, 2] \\ [30, 7] \\ [4, 95] \\ [-6, 46] \\ [-2, 65] \end{pmatrix}$$

С помощью теоремы из пункта 2.1 получили, что матрица **A** является особенной.

4.2.1 Субдифференциальный метод

С помощью теоремы из пункта 2.2.1 получили, что субдифференциальный метод на данной системе **не** сходится за конечное число итераций.

Однако, алгоритм сошелся за 8 итерации к следующим значениям

$$\begin{pmatrix} [-1.2247431, 0.5054298] \\ [18.2644433, -9.517504] \\ [-0.0281865, 1.1607552] \\ [16.4076957, -14.455534] \\ [-1.3435652, 3.9882184] \\ [-3.5289385, 4.5434583] \\ [5.4308623, -0.6740083] \end{pmatrix}$$

Гарантируемая точность - 6 знаков после запятой.

То, что метод сошелся, является очень интересным фактом. В книге [3] это явление названо "mysterious behavior of the subdifferential Newton method"

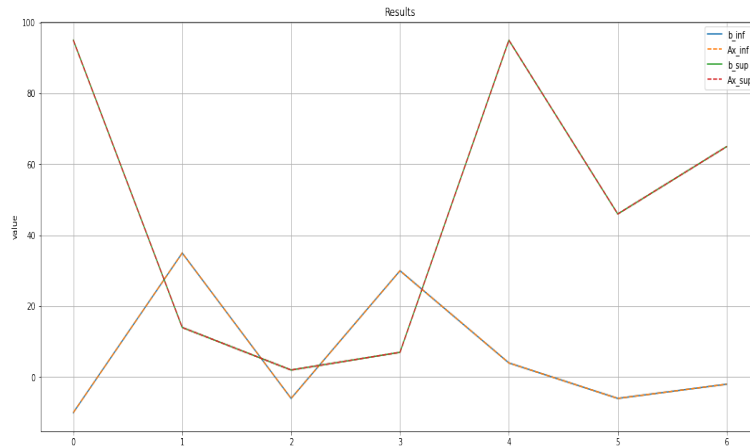


Рис. 3: Результаты

4.2.2 Треугольное расщепление

С помощью теоремы из пункта 2.2.2 получили, что метод треугольного расщепления матрицы на данной системе **не** сходится за конечное число итераций.

И действительно, алгоритм не сошелся за 100 итераций, а значения стремятся в бесконечность.

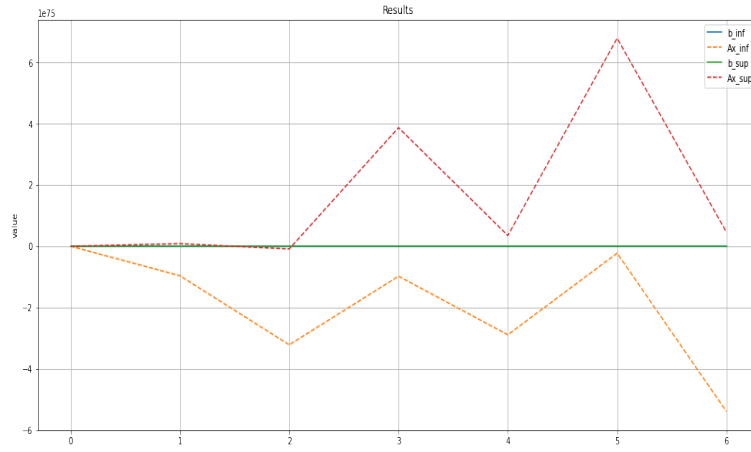


Рис. 4: Результаты

4.3 Эксперименты

4.3.1 Субдифференциальный метод

Исследуем сходимость алгоритма, меняя один из элементов матрицы \mathbf{A} . Будем менять нижнюю границу \mathbf{A}_{77}

\mathbf{A}_{77}	Результат
[6, 82]	Сошелся
[6.5, 82]	Сошелся
[7, 82]	Сошелся
[7.5, 82]	Сошелся
[8, 82]	Не сошелся
[8.5, 82]	Не сошелся
[9, 82]	Не сошелся
[9.5, 82]	Не сошелся
[10, 82]	Не сошелся
[10.5, 82]	Не сошелся
[11, 82]	Сошелся
[11.5, 82]	Сошелся
[12, 82]	Сошелся
[12.5, 82]	Сошелся

Таблица 1: Результаты при $\tau=1$

Так же мы можем поменять релаксационный параметр данного алгоритма. Возьмем $\tau = 0.8$

\mathbf{A}_{77}	Результат
[6, 82]	Сошелся
[6.5, 82]	Сошелся
[7, 82]	Сошелся
[7.5, 82]	Сошелся
[8, 82]	Сошелся
[8.5, 82]	Сошелся
[9, 82]	Сошелся
[9.5, 82]	Сошелся
[10, 82]	Сошелся
[10.5, 82]	Сошелся
[11, 82]	Сошелся
[11.5, 82]	Сошелся
[12, 82]	Сошелся
[12.5, 82]	Сошелся

Таблица 2: Результаты при $\tau=0.8$

Поменяв параметр релаксации мы добились сходимости алгоритма на всех исследуемых значениях.

4.3.2 Треугольное расщепление матрицы

Проведем аналогичное изменение элемента \mathbf{A}_{77}

\mathbf{A}_{77}	Результат
[6, 82]	Не сошелся
[6.5, 82]	Не сошелся
[7, 82]	Не сошелся
[7.5, 82]	Не сошелся
[8, 82]	Не сошелся
[8.5, 82]	Не сошелся
[9, 82]	Не сошелся
[9.5, 82]	Не сошелся
[10, 82]	Не сошелся
[10.5, 82]	Не сошелся
[11, 82]	Не сошелся
[11.5, 82]	Не сошелся
[12, 82]	Не сошелся
[12.5, 82]	Не сошелся

Таблица 3: Результаты

Метод треугольного расщепления матрицы не сходится нигде с требуемой точностью.

4.4 Обсуждение

Можно сделать вывод, что субдифференциальный метод сходится за меньшее количество итераций, чем метод треугольного расщепления матрицы, с одинаковой точностью. Так же мы столкнулись с интересной особенностью субдифференциального метода - сходимостью на некоторых особенных матрицах, что, несомненно, является его преимуществом. Так же субдифференциальный метод поддается настройке, что может значительно улучшить его свойства.

5 Приложения

- Репозиторий с исходным кодом: https://github.com/mitenevav/computer_complex/tree/master/course_project

Список литературы

- [1] Баженов А. Н. - Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры: учебное пособие. <https://elib.spbstu.ru/dl/2/s20-76.pdf/info>
- [2] Шарый С. П. - Конечномерный интервальный анализ. <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>
- [3] Шарый С. П. - Алгебраический подход к интервальным линейным статическим задачам идентификации, о допусках и об управлении, или еще одно применение арифметики Каухера. <http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/OneMoreKaucher.pdf>