Grid-peeling

Gašper Pust, Mitja Mandić

6. december 2020

1 Predstavitev problema

V projektu si bova podrobneje ogledala konveksne ovojnice $m \times n$ mreže. Konveksna ovojnica množice je najmanjša konveksna množica, ki vsebuje dano množico točk. Najlažje si jo predstavljamo tako, kot da bi okoli elementov množice napeli elastiko - kar elastika obkroži, je konveksna ovojnica. Lupljenje konveksnih ovojnic mreže, (angl. *grid-peeling*) je proces, ko iz mreže iterativno odstranjujemo konveksne ovojnice. S simboli lahko to zapišemo takole: $P_0 = G_{m,n} = \{0, \ldots, m-1\} \times \{0, \ldots, n-1\}$. Naj bo $C_i = \mathcal{CH}(P_{i-1})$ za $i = 1, \ldots$. V_i naj bo množica vozlišč C_i - kot vozlišče razumemo točko, ki je na vogalu mreže (torej za katero bi zataknili elastiko). Naj bo sedaj $P_i = P_{i-1} \setminus V_i$. Začnemo torej z $n \times m$ mrežo in iterativno lupimo konveksne ovojnice, dokler ne odstranimo vseh točk.

V projektni nalogi bova s pomočjo simulacij opazovala v literaturi navedene številke za $n \times n$ mrežo - teorija napoveduje $\theta(n^{\frac{4}{3}})$ ovojnic. Za $m \times n$ mrežo v literaturi ni navedenih podatkov, zanimala pa naju bo morebitna povezava. Simulacije bova izvedla tudi za točke na neenakomerni mreži.

Po izvedenem eksperimentalnem delu, bova rezultate analizirala in jih primerjala z rezultati iz literature. Zanimalo naju bo, kako drugačno je število ovojnic na $m \times n$ mreži v primerjavi s simetrično.

2 Orodja in algoritmi

Za uporabo algoritmov v Pythonu sva najprej definirala razred Točka, v katerem sva skonstruirala vsa potrebna orodja in funkcije za uporabo algoritmov za iskanje konveksnih ovojnic.

```
class Tocka:
    def __init__(self, x, y):
        self.x = x
        self.y = y

    def kot_med_dvema(self, other):
        if self.x != other.x:
            return (self.y - other.y) / (self.x - other.x)
        else:
            return 90

    def vektorski_produkt(self, other):
        return self.x * other.y - self.y * other.x

    def razlika(self, other):
      return Tocka(self.x - other.x, self.y - other.y)

    def razdalja(self, other):
        return (self.x - other.x) ** 2 + (self.y - other.y) ** 2

    def __str__(self):
        return '(' + str(self.x) + ', ' + str(self.y) + ')'

    def __repr__(self):
        return 'T(' + str(self.x) + ', ' + str(self.y) + ')'

def smer_razlike(p,q,r):
    return p.razlika(q).vektorski_produkt(r.razlika(q))

def uredi_po_kotu(seznam):
    prvi = min(seznam, key = lambda tocka: (tocka.x, tocka.y))
    return [prvi] + sorted(seznam[1:], key=lambda x: prvi.
    kot_med_dvema(x))

def naredi_potencno(m, n): #naredi potencno mrezo, ki je
    predstavljena kasneje
    return [Tocka(2**i,2**j) for i in range(m) for j in range(n)]

def kvazi_cantor_mreza(n): #naredi Cantorjevo mrezo, ki je
    predstavljena kasneje
    sez = [0,3]
    for i in range(1,n):
        nasl_dol = sez[0] - 3 ** i
        nasl_gor = sez[-1] + 3 ** i
        sez.append(nasl_gor)
        sez = [nasl_dol] + sez
    return [Tocka(i,j) for i in sez for j in sez]
```

Zgornje funkcije bova uporabila v dveh različnih algoritmih za iskanje konveksnih ovojnic, in sicer v Jarvisovem obhodu in Grahamovemu pregledu. Oba algoritma sprejmeta seznam točk in mu priredita konveksno ovojnico, a to storita na drugačen način.

2.1 Jarvisov obhod

Jarvisov obhod (angl. *Jarvis March*) ali algoritem zavijanja darila je postopek, ki dani množici točk poišče konveksno ovojnico v eni ali več dimenzijah (osredotočili se bomo na dve dimenziji). Algoritem se imenuje po R.A. Jarvisu, ki ga je objavil leta 1973. Časovna zahtevnost algoritma je $O(nh)$, kjer n predstavlja število vseh točk, h pa število točk, ki ležijo na konveksni ovojnici. V najslabšem primeru, ko so vse podane točke tudi elementi konveksne ovojnice, torej v primeru $h = n$, je njegova časovna zahtevnost $O(n^2)$. Jarvisov obhod se največkrat uporablja za majhne n ali pa v primeru, ko pričakujemo, da bo h zelo majhen glede na n.

```
1  def jarvis_march(seznam):
2      zacetna_tocka =  min(seznam, key = lambda tocka: tocka.x)
3      indeks = seznam.index(zacetna_tocka)
4      l = indeks
5      rezultat = []
6      rezultat.append(zacetna_tocka)
7      while (True):
8          q = (l + 1) % len(seznam)
9          for i in range(len(seznam)):
10             if i == l:
11                 continue
12             d = smer_razlike(seznam[l], seznam[i], seznam[q])
13             if d > 0 or (d == 0 and seznam[i].razdalja(seznam[l]) >
       seznam[q].razdalja(seznam[l])):
14                 q = i
15         l = q
16         if l == indeks:
17             break
18         rezultat.append(seznam[q])
19     return rezultat
```

Algoritem najprej poišče najbolj levo točko (2. vrstica kode). Potem ustvari prazen seznam, v katerega postopoma dodaja točke, ki jih obišče. Vanj najprej doda začetno točko, potem pa od trenutne točke poišče največji levi ovinek in gre v tisto točko (v primeru kolinearnosti, gre v točko, ke je od trenutne točke najdlje). Točko doda v seznam in jo nastavi za trenutno točko. To je del kode od 7. do 15. vrstice. Ko spet pride v začetno točko, se algoritem ustavi.

2.2 Grahamov pregled

Alternativa prejšnjemu algoritmu je tako imenovani Grahamov pregled (angl. *Graham's scan*). Algoritem se imenuje po Ronaldu Grahamu, ki ga je objavil leta 1972. V primerjavi z Jarvisovim obhodom je Grahamov pregled hitrejši, saj ima časovno zahtevnost $O(n \log n)$.

```
1  def graham_scan(seznam):
2      urejene_tocke = uredi_po_kotu(seznam)
3      ovojnica = []
4      for tocka in urejene_tocke:
5          while len(ovojnica) > 1 and smer_razlike(ovojnica[-2],
       ovojnica[-1], tocka) >= 0:
6              ovojnica.pop()
7          ovojnica.append(tocka)
8      return ovojnica
```

Algoritem najprej točke iz seznama točk uredi po kotu in ustvari prazen seznam, v katerega bo dodajal točke, ki so v konveksni ovojnici. Za točko potem pogleda (naredi neki k mi ni čist jasno) in doda točko v ovojnico. To stori za vse točke v urejenem seznamu. V kodi je ta postopek napisan od 4. do 7. vrstice.

3 Algoritem za lupljenje konveksnih ovojnic

S pomočjo zgornjih algoritmov sedaj lahko izpeljemo algoritem za lupljenje konveksnih ovojnic. Glede na vrsto iskanja konveksnih ovojnic, torej po Jarvisovem ali Grahamovem načinu, ločimo dva algoritma, ki pa se razlikujeta le v koraku, v katerem iščemo konveksno ovojnico.

```
1  def grid_peel_graham(m, n): # oz. grid_peel_jarvis(m, n)
2      start = time.time()
3      mreza = [Tocka(i,j) for i in range(m) for j in range(n)]
4      ovojnice = {}
5      i = 0
6      while mreza or len(mreza) > 1:
7          ch = graham_scan(mreza) # oz. ch = jarvis_march(mreza)
8          nova = [x for x in mreza if x not in ch]
9          mreza = nova
10         ovojnice[i] = ch
11         i += 1
12     casovna_zahtevnost = time.time() - start
13     return i, ovojnice, casovna_zahtevnost
```

V obeh primerih algoritem najprej označi začetni čas in sestavi seznam točk na mreži velikosti $m \times n$, kjer sta m in n naravni števili, ki jih funkcija sprejme kot argument. Potem ustvari prazno množico, v katero bo kasneje shranjeval konveksne ovojnice. Dokler seznam točk ni prazen, algoritem na vsakem koraku poišče konveksno ovojnico (7. vrstica kode, tu se algoritma razlikujeta) in iz seznama mrežnih točk odstrani vse točke, ki so v konveksni ovojnici. Točke v konveksni ovojnici, dobljeni na i-tem koraku, doda v množico konveksnih ovojnic kot i-ti element in števec poveča za 1. To je del kode od 6. do 11. vrstice (v obeh algoritmih). Preden vrne rezultat, algoritem še enkrat izmeri čas in odšteje začetnega, da dobimo časovno zahtevnost. Kot rezultat algoritma vrneta število korakov do prazne mreže, množico konveksnih ovojnic in pa potreben čas za izvedbo algoritma. S pomočjo množice konveksnih ovojnic lahko postopek lupljenja $m \times n$ mreže tudi narišemo.

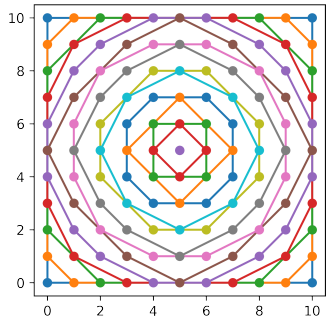
Za primer, ko mreža ni enakomerna, v algoritmih samo prilagodimo množico točk, ki jo algoritem ustvari:

- Za potenčno mrežo, torej za mrežo točk oblike $(2^i, 2^j), 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1$, 3. vrstico algoritma spremenimo v `mreza = naredi_potencno(m, n)`.
- Za Cantorjevo mrežo, torej za mrežo točk oblike *nekaoblika*, 3. vrstico algoritma spremenimo v `mreza = kvazi_cantor_mreza(n)`.

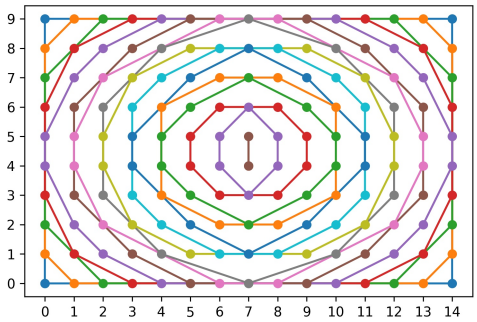
3.1 Prikaz rezultatov na primerih

Za boljšo predstavo, kako algoritem deluje, sva postopek lupljenja konveksnih ovojnic prikazala na nekaj primerih. Prvi, ki je prikazan na sliki 1, je postopek lupljenja navadne mreže velikosti 11×11, drugi, prikazan na sliki 2, pa je psotopek lupljenja navadne mreže velikosti 15×10.

Slika 1: Postopek lupljenja ovojnic 11×11 mreže

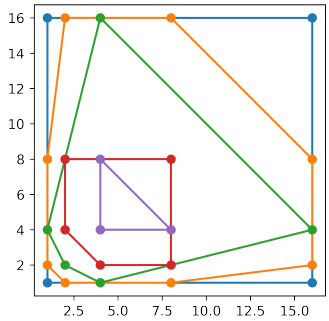


Slika 2: Postopek lupljenja ovojnic 15×10 mreže

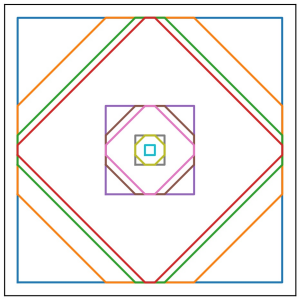


Na sliki 3 je prikazan postopek na potenčni mreži velikosti 5×5, na sliki 4 pa postopek na Cantorjevi mreži velikosti 4×4.

Slika 3: Postopek lupljenja ovojnic potenčne 5×5 mreže



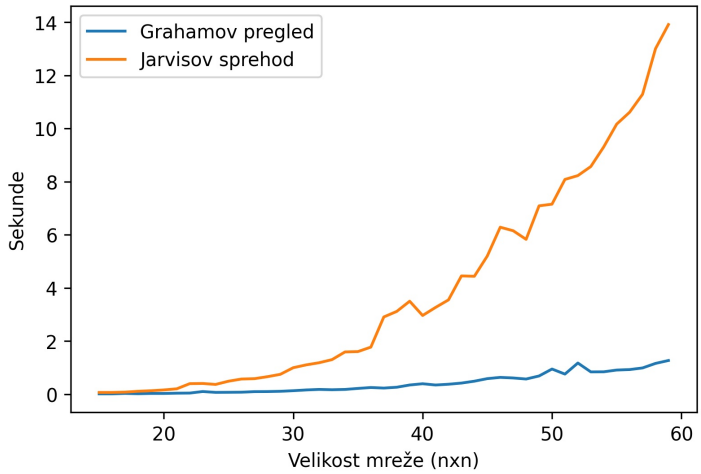
Slika 4: Postopek lupljenja ovojnic Cantorjeve 4×4 mreže



3.2 Časovna zahtevnost algoritma

Najprej bova prikazala časovno primerjavo med Jarvisovim obhodom in Grahamovim pregledom. Glede na izbrani algoritem za iskanje konveksnih ovojnic se čas izvajanja algoritma za lupljenje lahko zelo razlikuje, kar je jasno razvidno iz slike 5. Tu sva prikazala samo primer $n \times n$ mreže, vendar pa je za $m \times n$ mreže rezultat podoben.

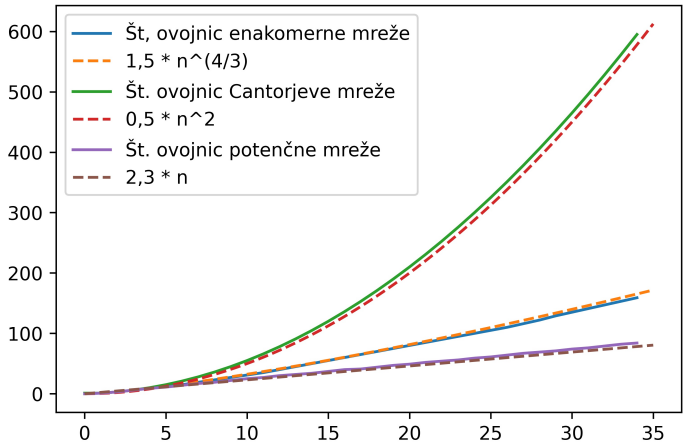
Slika 5: Čas izvedbe algoritma lupljenja konveksnih ovojnic $n \times n$ mreže v odvisnosti od n



Kot že omenjeno, je v literaturi omenjena časovna zahtevnost $\mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}})$, kar pomeni, da je število konveksnih ovojnic na $n \times n$ mreži $\theta(n^{\frac{4}{3}})$. Na sliki 6 je predstavljeno število ovojnic izvedenega algoritma v odvisnosti od n, kjer za n vzamemo naravna števila od 1 do 35 in mreže različnih vrst. Opazimo, da se razmerju med številom ovojnic in velikostjo navadne mreže najbolj prilega funkcija $1,5 \cdot n^{\frac{4}{3}}$. Eksperimentalni rezultat se torej ujema s tistim, navedenim v literaturi. Za potenčne $n \times n$ mreže je najboljša funkcija, ki prikaže razmerje med številom konveksnih ovojnic in velikostjo mreže, $2,3 \cdot n$, torej je časovna zahtevnost algoritma v tem primeru $\mathcal{O}(n)$. Na enak način za Cantorjevo $n \times n$ mrežo dobimo časovno zahtevnost $\mathcal{O}(n^2)$, vendar pa to velja samo za n manjši

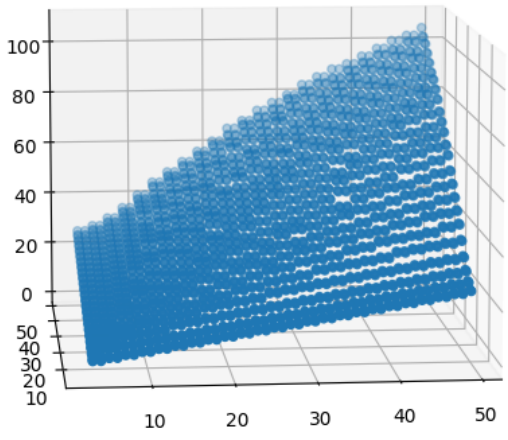
od 35, za višje n pa se število ovojnic Cantorjeve mreže obnaša bolj kompleksno in na nekaterih mestih celo pada z večanjem n

Slika 6: Število ovojnic različnih $n \times n$ mrež v odvisnosti od n



Za $m \times n$ mreže v literaturi ni omenjene časovne zahtevnosti, zato sva jo poiskušala določiti sama. Število ovojnic je tu odvisno od dveh parametrov, m in n, zato je ta graf tridimenzionalen. Rezultate lahko vidimo na sliki 7.

Slika 7: Število ovojnic $m \times n$ mreže v odvisnosti od m in n



4 Rezultati

Kot že rečeno se za navadne $n \times n$ mreže, za katere je bila v literaturi podana časovna zahtevnost, teoretični in eksperimentalni podatki ujemajo. Časovna zahtevnost izvedbe algoritma na je v tem primeru torej $\mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}})$. Za potenčne mreže velikosti $n \times n$, tj. množice točk oblike $(2^i, 2^i), 0 \leq i \leq n-1$, je časovna zahtevnost enaka $\mathcal{O}(n)$, za Cantorjeve mreže pa $\mathcal{O}(n^2)$ (za $n \leq 35$). Za mreže velikosti $m \times n$ v literaturi ni bilo podatka o časovni zahtevnosti, zato sva jo določila eksperimentalno. Ugotovila sva, da je za take mreže časovna zahtevnost algoritma $\mathcal{O}(?)$.