

Deformacija vhoda v funkcijo atan2 in potek napake v odvisnosti od deformacije

Mitja Alič

Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, Tržaška cesta 25, 1000 Ljubljana
E-pošta: mitja1357@gmail.com

Distortion of the input to the atan2 function and the course of error due to distortion

Distortion of sine and cosine used for angle identification, causes error. By different literature, error is presented by basic harmonic only. My project is to present error with higher harmonics included, due to non-equalities of amplitudes of basic sine and cosine, offsets and non-orthogonality.

1 Uvod

Dandanes je potreba po kakovostni regulaciji elektromotorskih pogonov neizogibna. Za kakovostno nadzorovanje rotirajočega pogona, se v povratnih zankah uporablja senzorje zasuka. Zasuk se meri na različne principe, inkrementalni dajalnik, resolver, enkoder... Resolver in enkoder, na podlagi zajetih signalov, v obliki sinusa in kosinusa, določi kot. Za izračun kota, se uporablja funkcija atan2.

Senzorji niso idealni in napaka je neizogibna. Primer napake je nepopolna oblika, zajetih signalov sinus in kosinus. V tem delu, bom predstavil, kako se izraža napaka izmerjenega kota, pri deformiranih vhodnih signalih sinusa in kosinusa.

Različne literature [1], [2], [3] opisujejo, kako deformacija vhodnih signalov vpliva na napako. Napako so izrazili le z najočitnejšimi harmoniki. V napaki nastopajo tudi višji harmoniki, katere se lahko predstavi, kot napaka v obliki neskončne vrste (1).

$$\varepsilon(x) = C_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) \sin(n\theta + \varphi_n(x)) \quad (1)$$

Parameter x predstavlja, neodvisno spremenljivko, katera popači vhodna signala sinus in kosinus. C_0 predstavlja enosmerno komponento napake, C_n amplitudo posameznega člena vrste ter φ_n fazni zamik harmonika napake. Vsi členi so odvisni od x .

Osnovna vhodna signala sinus in kosinus sta:

$$\sin = B_0 + B_1 \sin(\theta + \varphi_s) \quad (2)$$

$$\cos = A_0 + A_1 \cos(\theta + \varphi_c) \quad (3)$$

Idealno so v (2) in (3), B_0 , A_0 , φ_s in φ_c , enaki 0, B_1 in A_1 sta enaki. V nadaljevanju bom opisal, kako se izrazi napaka pri neenakosti B_1 in A_1 . Opisal bom tudi odvisnost napake, pri neničelnosti enosmernih komponent ter

če sta B_0 , A_0 enaka. Opisal bom tudi, kako se izrazi napaka, če se vhodnima signaloma prišteje, signal v obliki sinusa ali kosinusa. Tako popačenje povzroči različni amplitudi in različna fazna kota v odvisnosti od ene spremenljivke.

$$\sin = \sin(\theta) + \Delta_c \cos(\theta) + \Delta_s \sin(\theta) \quad (4)$$

$$\cos = \cos(\theta) + \Delta_c \cos(\theta) + \Delta_s \sin(\theta) \quad (5)$$

2 Metode

Definicija merjenega kota φ in napake ε je:

$$\varphi = \text{atan2d}(\sin, \cos) \quad (6)$$

$$\varepsilon = \varphi - \text{atan2d}(\sin(\theta), \cos(\theta)) \quad (7)$$

pri čemer θ predstavlja referenco.

Funkcija atan2d() je definirana funkcija v programskem okolju MATLAB, katera izračuna vrednost atan v štirih kvadrantih in izhod je v stopinjah[4]. Vsi rezultati so predstavljeni v stopinjah.

Določanja napake sem se lotil na naslednji način. Izbran parameter, katerega sem upošteval pri napaki, sem limitiral v neskončnost. Pri limitiranju parametra v neskončnost, se napaka izrazi v obliki npr:

$$\varepsilon = \begin{cases} 90^\circ - \theta, & \theta \in \{0^\circ, 180^\circ\} \\ 270^\circ - \theta, & \theta \in \{180^\circ, 360^\circ\} \end{cases} \quad (8)$$

Napako se da razviti v Fourierovo vrsto [5] in s tem ugotoviti, k čemu strmi ob večanju parametra ter katere harmonike je pomembno opazovati. Sledi iskanje analitične funkcije, ki opisuje potek amplitude harmonika ter faznega zasuka posameznega harmonika, ob spremembi parametra. Ugotovil sem, da so višji harmoniki podobni osnovnemu harmoniku napake, le potencirani. Napaka se izrazi kot potenčna vrsta.

2.1 Določanje napake ob različnih amplitudah

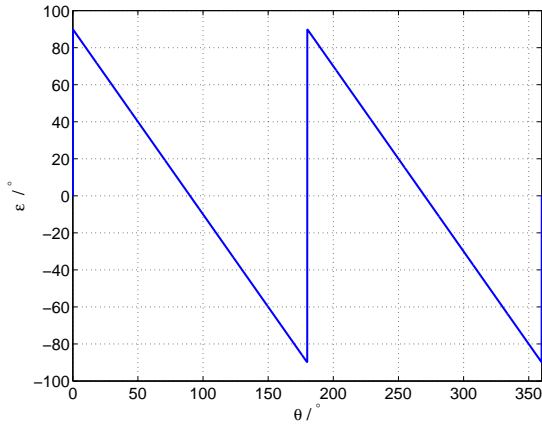
Z uporabo sistema per unit in bazo A_1 se sistem poenostavi v sistem z eno spremenljivko. Razmerje amplitud definira koeficient k . Sprememba obeh amplitud za določen faktor, nebo ustvarila dodatne napake.

$$\sin = k \sin(\theta) \quad (9)$$

$$\cos = \cos(\theta) \quad (10)$$

Ko gre k proti neskončnosti, se pojavi napaka (Slika 1)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{atan2}(k \sin \theta, \cos \theta) - \text{atan2}(\sin \theta, \cos \theta) \quad (11)$$

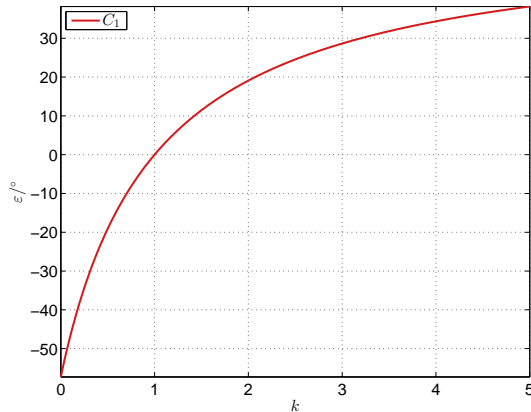


Slika 1: Napaka ε ob limiti k

predstavljena s Fourierovo vrsto

$$\varepsilon = \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2n\theta. \quad (12)$$

Največni vpliv ima drugi harmonik. Potek drugega harmonika je predstavljen na sliki 2 kot C_1 , saj nastopajo le sodi harmoniki. Z uporabo Curve Fitting Toolbox se



Slika 2: Potek drugega harmonika v odvisnosti od k

najbolje prilega poteku racionalna funkcija.

$$\varepsilon(k) = \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^n \sin 2n\theta \quad (13)$$

Izraz velja, če je k večji od 0.

$$k \geq 0$$

2.2 Določanje napake ob spremembi parametra φ_s

Vhodna signala imata naslednjo obliko:

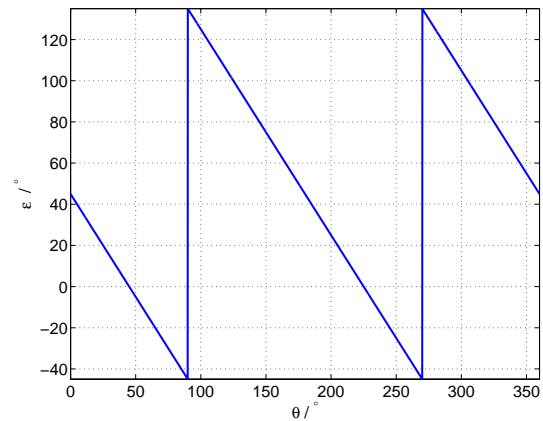
$$\text{Sin} = \sin(\theta + \varphi_s) \quad (14)$$

$$\text{Cos} = \cos(\theta) \quad (15)$$

Za določanje limite, v tem primeru, ni potrebno iti proti neskončnosti, ampak le do najslabše možnosti, ki je pri 90° oz -90° :

$$\varepsilon = \lim_{\varphi_s \rightarrow 90^\circ} \text{atan2}(\text{Sin}, \text{Cos}) - \text{atan2}(\sin(\theta), \cos(\theta)) \quad (16)$$

Potek napake ε s slike 3 predstavi vrsta (17).



Slika 3: Napaka ε ob limiti $\varphi_s = 90^\circ$

$$\varepsilon = 45^\circ - \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2n\theta) \quad (17)$$

Iz izraza je vidno, nastopanje enosmerne komponente in sodih harmonikov. Na sliki 4 so prikazani: potek enosmerne komponente C_0 , potek amplitude drugega harmonika C_1 , in φ_1 kot fazni zamik drugega harmonika glede na kosinusno obliko. Za predstavitev poteka s sinusi, je potrebno prišteti še 90° . Ordinatska skala grafa na sliki 4 je v stopinjah. Pri C_0 in C_1 , stopinje predstavljajo amplitudo napake, pri φ_1 je na skali fazni zamik v stopinjah.

Potek enosmerne komponente linearen. Potek amplitude drugega harmonika napake ima obliko funkcije tangens.

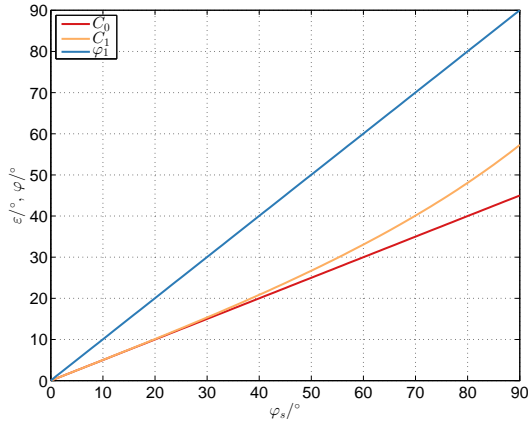
Fazni zamik drugega harmonika narašča linearno, vendar, za predstavitev s sinusi, je potrebno prišteti še 90° .

Enačba končnega poteka se glasi:

$$\varepsilon(\varphi_s) = \frac{\varphi_s}{2} + \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan\left(\frac{\varphi_s}{2}\right)^n \sin(2n\theta + 90n + n\varphi_{sin}) \quad (18)$$

pri čemer velja enačba za fazne zamike sinusa med -90° in 90° .

$$\varphi_{sin} \in [-90^\circ, 90^\circ]$$

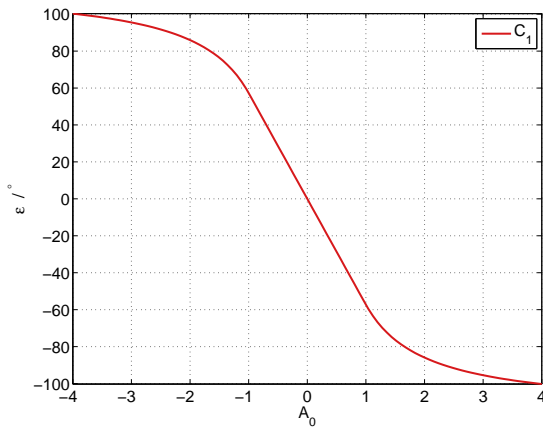


Slika 4: Potek enosmerne komponente napake C_0 , amplitude drugega harmonika C_1 in faznega zamika φ_1 glede na kosinus, v odvisnosti od faznega zamika sinusa φ_s

2.3 Določanje napake ob spremembi parametra A_0
Z limito A_0 in razvojem napake v Fourierovo vrsto je napaka:

$$\varepsilon = \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(n\theta + 90n) \quad (19)$$

Enosmerne komponente ni, največji je prvi harmonik. Po-



Slika 5: Potek amplitude prvega harmonika od enosmerne komponente kosinus signala

tek s slike 5 se razdeli na 3 dele in aproksimira napako z naslednjim izrazom:

$$\varepsilon(A_0) = \begin{cases} \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2-|A_0|^{-n}}{n} \sin(n\theta), & A_0 \leq -1 \\ \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{A_0^n}{n} \sin(n\theta), & |A_0| \leq 1 \\ \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2-A_0^{-n}}{n} \sin(n\theta), & A_0 \geq 1 \end{cases} \quad (20)$$

2.4 Dodan signal $\Delta_c \cos(\theta)$

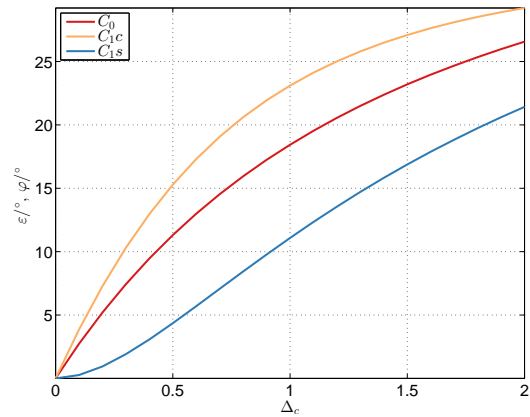
Fourierova vrsta limite, ko gre $\Delta_c \cos(\theta)$ v neskončnost je

$$\varepsilon = 45^\circ - \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2n\theta) \quad (21)$$

Drugi harmonik je predstavljen kot vsota sinusa in cosinusa.

$$C_1 s \cdot \sin(2\theta) + C_1 c \cdot \cos(2\theta) \quad (22)$$

Poteki enosmerne komponente ter drugega harmonika predstavljenega kot seštevek sinusa in kosinusa so prikazani na sliki 6.



Slika 6: Potek enosmerne komponente napake, v odvisnosti od faznega zamika sinusa φ_s

Enosmerno komponento ima obliko racionalne funkcije v funkciji atan. $C_1 s$ in $C_1 c$ sti racionalni funkciji. S poznavanja funkcij, se določi skupna amplituda $C_1 = \sqrt{C_1 s^2 + C_1 c^2}$ in faza za sinusni potek napake $\varphi_1 = \text{atan}(\frac{C_1 c}{C_1 s})$. Končna enačba se glasi:

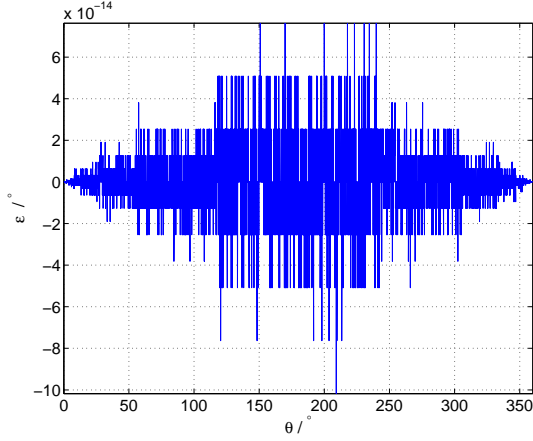
$$\varepsilon(\Delta_c) = \text{atan}\left(\frac{\Delta_c}{\Delta_c + 2}\right) + \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\Delta_c}{\sqrt{\Delta_c^2 + 2\Delta_c + 2}}\right)^n \sin(2n\theta + n(90 + \text{atan}(\Delta_c + 1))) \quad (23)$$

Pri čemer velja, da mora biti $\Delta_c > -1$.

3 Rezultati

Pri modeliranju ptekov, sem uporabil prvih 15 členov. Razlika med dejansko napako in predvideno napako je bila le numerična (Slika 7). V primeru, da parameter dosega večje vrednosti, dejanska napaka postane nezvezna, je s 15 členi ni mogoče povsem zadeti, saj so odstopanja na nezveznih območjih. Omenti je še potrebno, da so kljub izpeljavam vrste s katerimi so predstavljene napake posameznih deformacij med seboj odvisne. To področje je potrebno še raziskati. Zanimivo je tudi, kako višji harmoniki vplivajo na napako.

Sedaj izpišem še vse rezultate:



Slika 7: Razlika med predvidjeno napako (13) in dejansko numerično izračunano napako pri $k = 1.1$

$$\varepsilon(k) = \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^n \sin 2n\theta \quad (24)$$

$$k \geq 0$$

$$k = \frac{B_1}{A_1}$$

$$\varepsilon(\varphi_s) = \frac{\varphi_s}{2} + \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan\left(\frac{\varphi_s}{2}\right)^n \sin(2n\theta + 90n + n\varphi_s) \quad (25)$$

$$\varphi_s \in [-90^\circ, 90^\circ]$$

$$\varepsilon(\varphi_c) = \frac{\varphi_c}{2} + \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan\left(\frac{\varphi_c}{2}\right)^n \sin(2n\theta - 90n + n\varphi_c) \quad (26)$$

$$\varphi_c \in [-90^\circ, 90^\circ]$$

$$\varepsilon(B_0) = \begin{cases} \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-|B_0|^{-n}}{n} \sin(n\theta - 90n), & B_0 \leq -1 \\ \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_0^n}{n} \sin(n\theta + 90n), & |B_0| \leq 1 \\ \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-B_0^{-n}}{n} \sin(n\theta + 90n), & B_0 \geq 1 \end{cases} \quad (27)$$

$$\varepsilon(A_0) = \begin{cases} \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2-|A_0|^{-n}}{n} \sin(n\theta), & A_0 \leq -1 \\ \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{A_0^n}{n} \sin(n\theta), & |A_0| \leq 1 \\ \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2-A_0^{-n}}{n} \sin(n\theta), & A_0 \geq 1 \end{cases} \quad (28)$$

$$\varepsilon(A_0, B_0 = A_0) = \begin{cases} \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-|\sqrt{2}A_0|^{-n}}{n} \sin(n\theta + 90n), & A_0 \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}A_0)^n}{n} \sin(n\theta - 90n), & |A_0| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-(\sqrt{2}A_0)^{-n}}{n} \sin(n\theta - 90n), & A_0 \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (29)$$

$$\varepsilon(\Delta_c) = \text{atan}\left(\frac{\Delta_c}{\Delta_c + 2}\right) + \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\Delta_c}{\sqrt{\Delta_c^2 + 2\Delta_c + 2}} \right)^n \sin(2n\theta + n(90 + \text{atan}(\Delta_c + 1))) \quad (30)$$

$$\Delta_c > -1$$

$$\varepsilon(\Delta_s) = \text{atan}\left(\frac{-\Delta_s}{\Delta_s + 2}\right) + \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\Delta_s}{\sqrt{\Delta_s^2 + 2\Delta_s + 2}} \right)^n \sin(2n\theta + n(90 + \text{atan}(\Delta_s + 1))) \quad (31)$$

$$\Delta_s > -1$$

4 Zaključek

Spoznali smo kako se napaka razvija glede na deformacijo sinusnega in kosinusnega signala. Prikazal sem, kam bo napaka limitirala in katere harmonike je potrebno opazovati. Potek harmonika napake glede na deformacijo sem želel izpeljati s najbolj prilagujajočo se funkcijo, katero sem lahko odkril, a kljub temu nezahtevno. Za majhne deformacije sinusa in kosinusa, se lahko uporabi le prvi člen vrste, kar potrjuje druga literatura. S tem delom sem želel na drugačen način prikazati obnašanje napake, ob deformaciji signalov sinus in kosinus.

Literatura

- [1] Qi Lin, Tiejai Li, Zhaoyong Zhou, "Error Analysis and Compensation of the Orthogonal Magnetic Encoder", Proceedings of IEEE ICMCC Conference, pp.11-14, 21-23 Oct. 2011
- [2] Hanselman D.C., "Resolver Signal Requirements for High Accuracy Resolver-to-Digital Conversion", IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol.37, no.6, pp.556-561, Dec. 1990
- [3] Demierre M., "Improvements of CMOS Hall Microsystems and Application for Absolute Angular Position Measurements", PhD. thesis, pp. 152-161, Federal Polytechnic School of Lausanne, Switzerland, 2003
- [4] <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/atan2d.html>
- [5] https://sl.wikipedia.org/wiki/Fourierova_vrstka