

Potek napake funkcije atan2 ob popačenju vhodnih signalov

Mitja Alič

Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, Tržaška cesta 25, 1000 Ljubljana
E-pošta: mitja1357@gmail.com

The course of error due to distortion of input signal to the atan2 function

Distortion of sine and cosine values, used for angle determination with the atan2 function, can result in numerical error. According to the performed review of literature, error is normally presented by taking only the basic harmonic into account. This paper however presents determination of error by taking into account also higher harmonics, which are non-negligible at larger distortion of sine or cosine. Error is going to be expressed with infinite series, which expand the domain of distortion parameter.

1 Uvod

Dandanes je potreba po kakovostni regulaciji elektromotorskih pogonov neizogibna in tako prisotna v številnih aplikacijah. Za kakovostno nadzorovanje rotirajočega pogona, se v povratnih zankah uporablja senzorje zasuka [1]. Zasuk se meri na različne principe, inkrementalni dajalnik, resolver, enkoder [2][3][4]... Izhoda enkoderja ali resolverja, sta signala sinus in kosinus. Za izračun informacije o zasuku se uporabi funkcijo inverz tangensa [8]. V aplikacijah se običajno uporablja funkcija atan2, katere zaloga vrednosti je $[-\pi, \pi]$ [9].

Senzorji niso idealni in posledično je iluzorno pričakovati delovanje povsem brez napake. Primer napake je popačena oblika, zajetih signalov sinus in kosinus. Različne literature [5], [6], [7] opisujejo, kako popačenje vhodnih signalov vpliva na napako. Napako so izrazili le z najočitnejšimi harmoniki. V napaki nastopajo tudi višji harmoniki, katere se lahko predstavi kot napako v obliki neskončne vrste. V raznih aplikacijah je možen dostop le do izhodnega podatka o zasuku. Z referenčnim dajalnikom, se lahko določi napako, njen izvor ostaja neznan.

S poznavanjem vplivov popačenja signalov sinus in kosinus na napako, se lahko kasneje iz napake oceni kaj nanjo vpliva in kako jo zmanjšati. V tem delu bom predstavil, kako se pri popačenih vhodnih signalih sinusa in kosinusa izraža napaka izračunanega kota v obliki neskončne vrste.

2 Metodologija in rezultati

Osnovna vhodna signala v funkcijo sta sinus in kosinus. Popačena sta lahko na več načinov:

$$\sin = B_0 + B_1 \sin(\theta + \varphi_s) \quad (1)$$

$$\cos = A_0 + A_1 \cos(\theta + \varphi_c) \quad (2)$$

Vsebujejo lahko različne amplitude, fazne zamike ali enosmerne komponente. Idealno so v (1) in (2), B_0 , A_0 , φ_s in φ_c , enaki 0, B_1 in A_1 sta enaka. Signaloma se lahko zaradi enega parametra spremeni tako amplituda kot faza. To se zgodi ob upoštevanju enega od parametrov v (3) in (4).

$$\sin = \sin(\theta) + \Delta_c \cos(\theta) + \Delta_s \sin(\theta) \quad (3)$$

$$\cos = \cos(\theta) + \Delta_c \cos(\theta) + \Delta_s \sin(\theta) \quad (4)$$

Definicija merjenega kota φ in napake ε je:

$$\varphi = \text{atan2d}(\sin, \cos) \quad (5)$$

$$\varepsilon = \varphi - \text{atan2d}(\sin(\theta), \cos(\theta)) \quad (6)$$

pri čemer θ predstavlja referenco. atan2d() je funkcija, ki je že privzeto definirana v programskem okolju MATLAB in je namenjena izračunu vrednosti arkus tangensa v štirih kvadrantih. Izhod funkcije je podan v kotnih stopinjah [10]. Napaka bo predstavljena v obliki neskončne vrste (7).

$$\varepsilon(x) = C_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) \sin(n\theta + \varphi_n(x)) \quad (7)$$

Parameter x predstavlja neodvisno spremenljivko, katera popači vhodna signala sinus in kosinus. C_0 predstavlja enosmerno komponento napake, C_n amplitudo posameznega člena vrste ter φ_n fazni zamik harmonika napake. Vsi členi so odvisni od x .

V nadaljevanju je predstavljen eden od možnih načinov določanja napake. Izbran parameter (A_0 , B_0 , A_1 , B_1 , φ_s , φ_c , Δ_s , Δ_c), katerega sem upošteval pri napaki, sem limitiral v neskončnost. Pri limitiranju parametra v neskončnost se napaka izrazi v obliki npr:

$$\varepsilon = \begin{cases} 90^\circ - \theta, & \theta \in \{0^\circ, 180^\circ\} \\ 270^\circ - \theta, & \theta \in \{180^\circ, 360^\circ\} \end{cases} \quad (8)$$

Napako se da razviti v Fourierovo vrsto [?] in s tem ugotoviti konvergenco ter katere harmonike je potrebno opazovati. Sledi iskanje analitične funkcije, ki opisuje potek amplitude harmonika ter faznega zasuca posameznega harmonika ob spremembi parametra. Raziskave so pokazale, da so višji harmoniki potence osnovnega harmonika napake. Napaka se izrazi kot potenčna vrsta.

V nadaljevanju so predstavljeni principi določanja napake ob različnih amplitudah, faznih zamikih, enosmer-nih komponentah, ter kombinaciji različnih amplitud ter faz zaradi parametra Δ_s ali Δ_s .

2.1 Določanje napake ob različnih amplitudah

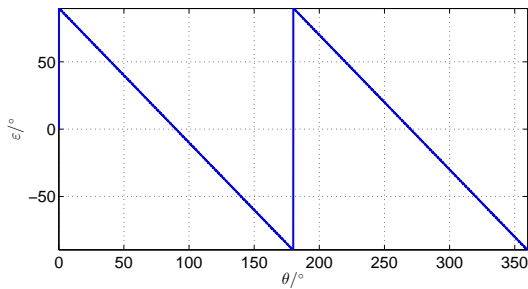
Definirajmo razmerje amplitude sinusa in kosinusa s k . Sprememba obeh amplitud za določen faktor ne bo ustvarila dodatne napake.

$$\sin = k \sin(\theta) \quad (9)$$

$$\cos = \cos(\theta) \quad (10)$$

Ob povečanju k proti neskončnosti se pojavi napaka (slika 1),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\text{atan2}(k \sin \theta, \cos \theta) - \text{atan2}(\sin \theta, \cos \theta)) \quad (11)$$



Slika 1: Napaka ε ob limiti k proti neskončnosti

ki se v Fourierovi vrsti izrazi kot:

$$\varepsilon = \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2n\theta. \quad (12)$$

Največji vpliv ima drugi harmonik, njegov potek v odvisnosti od k je predstavljen na sliki 2 kot C_1 , saj nastopajo le sodi harmoniki.

Z uporabo Curve Fitting Toolbox se poteku najbolje prilega racionalna funkcija. Napaka se izrazi s potenčno vrsto:

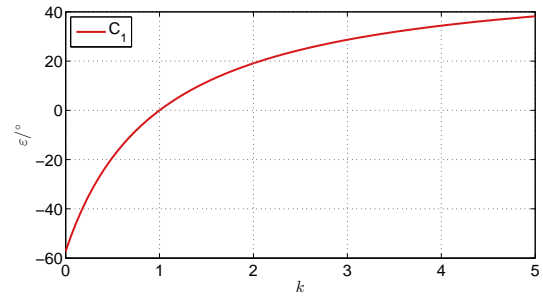
$$\varepsilon(k) = \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^n \sin 2n\theta \quad (13)$$

in velja, če je k večji od 0.

$$k \geq 0$$

V (13) namesto k vstavimo razmerje amplitud:

$$\varepsilon(k) = \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{B_1 - A_1}{B_1 + A_1} \right)^n \sin 2n\theta \quad (14)$$



Slika 2: Potek drugega harmonika v odvisnosti od k

kar velja pri pogoju:

$$\frac{B_1}{A_1} \geq 0.$$

2.2 Določanje napake ob spremembi faznega zamika

Vhodna signala imata naslednjo obliko:

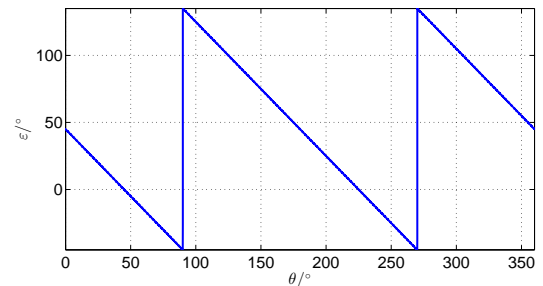
$$\sin = \sin(\theta + \varphi_s) \quad (15)$$

$$\cos = \cos(\theta + \varphi_c) \quad (16)$$

Napako se določi posamično za vsakega od parametrov. Drugi je takrat enak 0. Na koncu se enačbi združi. Za določanje limite ni potrebno iti proti neskončnosti, ampak le do najslabše možnosti, ki je pri $\pm 90^\circ$:

$$\varepsilon = \lim_{\varphi_s \rightarrow 90^\circ} \text{atan2}(\sin, \cos) - \text{atan2}(\sin(\theta), \cos(\theta)) \quad (17)$$

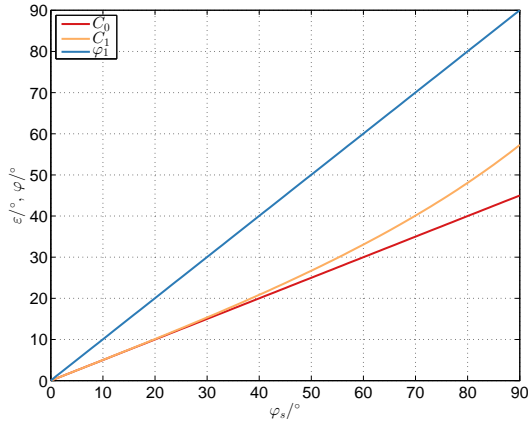
Potek napake ε s slike 3 predstavi vrsta (18).



Slika 3: Napaka ε ob limiti $\varphi_s \rightarrow 90^\circ$

$$\varepsilon = 45^\circ - \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2n\theta) \quad (18)$$

Iz izraza je vidno nastopanje enosmerne komponente in sodih harmonikov. Na sliki 4 so prikazani: potek enosmerne komponente C_0 , potek amplitude drugega harmonika C_1 , in φ_1 fazni zamik drugega harmonika glede na kosinusno obliko. Za predstavitev poteka s sinusi je potrebno prišteti še 90° . Ordinatna skala grafa na sliki 4 je v stopinjah. Pri C_0 in C_1 stopinje predstavljajo amplitudo napake, pri φ_1 skala prikazuje fazni zamik v stopinjah. Poteku enosmerne komponente se najbolje prilega funk-



Slika 4: Potek enosmerne komponente napake C_0 , amplitude drugega harmonika C_1 in faznega zamika φ_1 glede na kosinus, v odvisnosti od faznega zamika sinusa φ_s

cija premice. Potek amplitude drugega harmonika napake ima obliko funkcije tangens. Fazni zamik drugega harmonika narašča linearno, vendar je za predstavitev s sinusi potrebno prišteti še 90° . Enako se lahko ponovi za fazni zamik kosinus signala. Enačba končnega poteka se glasi:

$$\varepsilon(\varphi_s, \varphi_c) = \frac{\varphi_s + \varphi_c}{2} + \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\tan \frac{\varphi_s - \varphi_c}{2})^n \sin(2n\theta + n(90^\circ + \varphi_s + \varphi_c)) \quad (19)$$

pri čemer, (19) velja za :

$$\varphi_s - \varphi_c \in [-90^\circ, 90^\circ]$$

2.3 Določanje napake ob spremembi enosmerne komponente

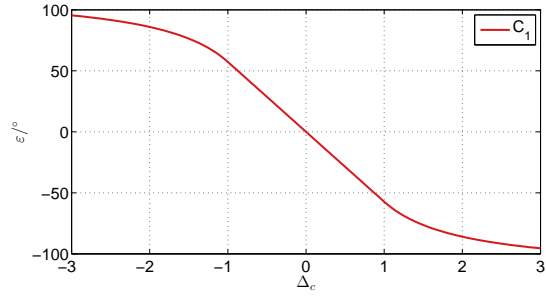
Amplitudi signalov sinus in kosinus sta enaki 1. Z limito A_0 in razvojem napake v Fourierovo vrsto napako izrazimo z:

$$\varepsilon = \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(n\theta + 90^\circ n). \quad (20)$$

Enosmerne komponente ni, največji je prvi harmonik. Potek s slike 5 se razdeli na 3 dele in aproksimira napako z naslednjim izrazom, upoštevajoč tudi enakosti amplitud:

$$\varepsilon(A_0) = \begin{cases} \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} (2 - |\frac{A_0}{A_1}|^{-n}) \sin(n\theta), & \frac{A_0}{A_1} \leq -1 \\ \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} (\frac{A_0}{A_1})^n \sin(n\theta), & |\frac{A_0}{A_1}| \leq 1 \\ \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} (2 - (\frac{A_0}{A_1})^{-n}) \sin(n\theta), & \frac{A_0}{A_1} \geq 1 \end{cases} \quad (21)$$

Enako se lahko stori tudi za B_0 (22) in za aproksimacijo napake, ko imata sinus in kosinus enako enosmerno komponento (23).



Slika 5: Potek amplitude prvega harmonika od enosmerne komponente kosinus signala, pri amplitudah enakih 1

$$\varepsilon(B_0) = \begin{cases} \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2 - |\frac{B_0}{B_1}|^{-n}) \sin(n\theta - 90^\circ n), & \frac{B_0}{B_1} \leq -1 \\ \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\frac{B_0}{B_1})^n \sin(n\theta + 90^\circ n), & |\frac{B_0}{B_1}| \leq 1 \\ \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2 - (\frac{B_0}{B_1})^{-n}) \sin(n\theta + 90^\circ n), & \frac{B_0}{B_1} \geq 1 \end{cases} \quad (22)$$

$$\varepsilon(A_0, B_0 = A_0) = \begin{cases} \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2 - |\sqrt{2} \frac{A_0}{A_1}|^{-n}) \sin(n\theta + 90^\circ n), & \frac{A_0}{A_1} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{2} \frac{A_0}{A_1})^n \sin(n\theta - 90^\circ n), & |\frac{A_0}{A_1}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2 - (\sqrt{2} \frac{A_0}{A_1})^{-n}) \sin(n\theta - 90^\circ n), & \frac{A_0}{A_1} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (23)$$

2.4 Različni amplitudi in fazi v odvisnosti od enega parametra

Fourierova vrsta limite (6) pri upoštevanju (3) in (4), ko gre Δ_c v neskončnost, je

$$\varepsilon = 45^\circ - \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2n\theta). \quad (24)$$

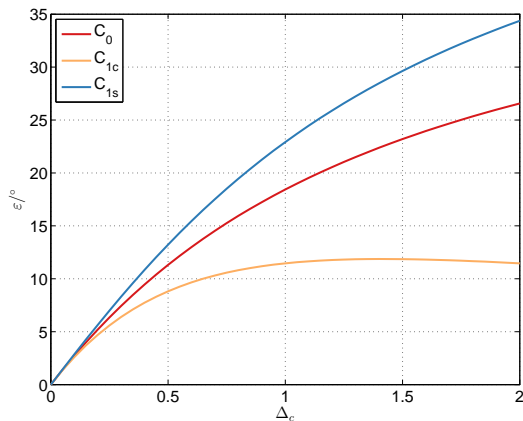
Potek drugega harmonika od Δ_c se lahko zapiše kot vsota sinusa in kosinusa.

$$C_{1s} \cdot \sin(2\theta) + C_{1c} \cdot \cos(2\theta) \quad (25)$$

Poteki enosmerne komponente ter drugega harmonika, predstavljenega kot seštevek sinusa in kosinusa, so prikazani na sliki 6.

Enosmerna komponenta ima obliko racionalne funkcije v funkciji atan. C_{1s} in C_{1c} sta racionalni funkciji. Amplituda je geometrijska vsota členov $C_n = \sqrt{C_{ns}^2 + C_{nc}^2}$, faza za sinusni potek napake je $\varphi_n = \text{atan}(\frac{C_{nc}}{C_{ns}})$. Končna enačba z upoštevanjem amplitude osnovnega signala sinus in kosinus se glasi:

$$\varepsilon(\Delta_c) = \text{atan} \frac{\Delta_c}{\Delta_c + 2A_1} + \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\Delta_c}{\sqrt{\Delta_c^2 + 2A_1\Delta_c + 2A_1}} \right)^n \sin(2n\theta + n(90^\circ + \text{atan}(\frac{\Delta_c + A_1}{A_1}))) \quad (26)$$



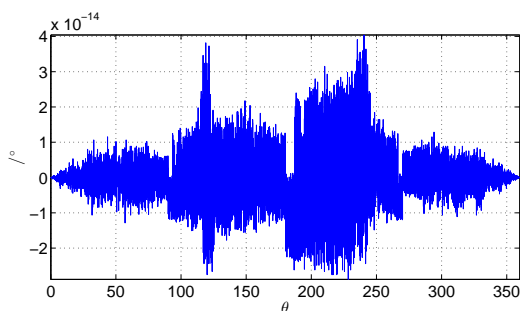
Slika 6: Potek enosmerne komponente in drugega harmonika napake, v odvisnosti od Δ_c

$$\varepsilon(\Delta_s) = \text{atan}\left(\frac{-\Delta_s}{\Delta_s + 2A_1} + \frac{180}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\Delta_s}{\sqrt{\Delta_s^2 + 2A_1\Delta_s + 2A_1}} \right)^n \sin(2n\theta + n(90^\circ + \text{atan}(\frac{\Delta_s + A_1}{A_1}))) \right) \quad (27)$$

$$\Delta_s, \Delta_c > -A_1$$

3 Komentar rezultatov

Pri modeliranju potekov je bilo uporabljeno prvih 15 členov potenčne vrste. Razlika med dejansko napako in predvideno napako je le numerična (slika 7). Opravi sem FFT predvidene in dejanske napake. Razlika med posameznima amplitudama harmonika je le numerična. V primeru, da parameter dosega večje vrednosti, ali se približuje robnim pogojem, dejanska napaka postane nezvezna in je s 15 členi ni mogoče povsem določiti. Omeniti je potrebno, da so kljub izpeljavam, predstavljene vrste napake posameznih deformacij med seboj odvisne.



Slika 7: Razlika med predvideno (13) in dejansko napako pri $k = 1.1$

4 Zaključek

V članku so predstavljeni poteki napake v odvisnosti od različnih amplitud, enosmernih komponent, faznih zamikov in kombinacij različnih amplitud ter faznih zamikov

signalov sinusa in kosinusa. Napaka vsebuje tudi višje harmonike, ki ob večjih razlikah med sinusom in kosinusom niso več zanemarljivi. Za majhna popačenja vhodnih signalov zadostuje napako izraziti z enosmerno komponento in prvim členom potenčne vrste. Napako, izraženo z enosmerno komponento in prvim členom potenčne vrste, je potrdila tudi druga literatura [5]. Izraze se lahko uporabi za ugotovitev nepravilne montaže resolverja ali enkoderja, v vgrajenih aplikacijah, kjer ni dostopa do signalov sinus in kosinus. V signalih sinus in kosinus se lahko pojavijo tudi višji harmoniki, ki prav tako vplivajo na napako. Vpliv popačenj vhodnih signalov v funkcijo atan2 na izhodno napako ponuja še veliko izzivov za nadaljnje delo.

Literatura

- [1] Gachter J., Hirz M., Seebacher R., "Impact of Rotor Position Sensor Errors on Speed Controlled Permanent Magnetized Synchronous Machines", IEEE 12th International Conference on Power Electronics and Drive Systems (PEDS), pp.822-830, 12-15 Dec. 2017
- [2] Brugnano F., Concarì C., Imamovic E., Savi F., Toscani A., Zanichelli R., "A simple and accurate algorithm for speed measurement in electric drives using incremental encoder", IECON 2017 - 43rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, pp. 8551-8556, 29 Oct.-1 Nov. 2017
- [3] Reddy B.P., Murali A., Shaga G., "Low Cost Planar Coil Structure for Inductive Sensors to Measure Absolute Angular Position", 2017 2nd International Conference on Frontiers of Sensors Technologies (ICFST), pp.14-18, 14-16 April 2017
- [4] Zhang Z., Ni F., Liu H., Jin M., "Theory analysis of a new absolute position sensor based on electromagnetism", International Conference on Automatic Control and Artificial Intelligence, pp.2204-208, 3-5 Mar. 2012
- [5] Qi Lin, T. Li, Z. Zhou, "Error Analysis and Compensation of the Orthogonal Magnetic Encoder", Proceedings of IEEE ICMCC Conference, pp.11-14, 21-23 Oct. 2011
- [6] Hanselman D.C., "Resolver Signal Requirements for High Accuracy Resolver-to-Digital Conversion", IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol.37, no.6, pp.556-561, Dec. 1990
- [7] Demierre M., "Improvements of CMOS Hall Microsystems and Application for Absolute Angular Position Measurements", PhD. thesis, pp. 152-161, Federal Polytechnic School of Lausanne, Switzerland, 2003
- [8] Dolinar G. "Matematika 1", Fakulteta za elektrotehniko, Založba FE in FRI, 2010
- [9] <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/atan2.html>, dostop junij 2018
- [10] <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/atan2d.html>, dostop junij 2018