

1 Uvod

V današnjem času elektromotorski pogoni vse hitreje nadomeščajo druge oblike ustvarjanja mehanskega dela. Zahteve po čim hitrejši regulaciji in zanesljivosti pogona so čedalje višje. V pogonih se želi doseči tudi čim višji izkoristek. Za doseganje uspešnega obratovanja elektromotorskega pogona se potrebuje dober in zanesljiv dajalnik pozicije. Dejavnike delimo na linearne dajalnike in dajalnike zasuka oz. rotacije. Tu se bom osredotočil na rotacijske dajalnike pozicije. Ti so lahko montirani na poljubnem mestu na osi (angl.: through hole), ali le na koncu osi (ang.: On-axis).

Vsak dajalnik ima točnost, katero doseže, če je pravilno montiran. Naapka nepravilne montaze je odvisna od nepravilno postavljenega aktuatorja na osi pogona, ali nepravilno montiranega senzorja. V tem delu bom analiziral kako se napaka

V tem delu se bom osredotočil na dajalnik RM44, ki ga bom namerno

Dajalnike ločimo tudi glede na uporabljen princip zaznavanja premika. Poznamo magnetne, optične, induktivne in druge. Dejavniki se razlikujejo tudi na izodne signale.

2 Dajalniki pozicije RM44

Dajalnik pozicije RM44 je produkt podjetja RLS merilna tehnika d.o.o. kratka RLS pomeni rotacijski in linearni senzorji zasuka (ang.: Rotary and Linear motion Sensors). Podjetje proizvaja merilnike na podlagi merjenja magnetnega polja. Dajalnik pozicije RM44 spada v družio enkoderjev montiranih na koncu osi rotirajoče gredi (ang.: On-axis). Na rotirajočo os je pritrjen cilindrični magnet, ki je diametralno magnetiziran. Senzor je sestavljen iz čipa AM8192B, v katerem so vgrajene Hallove sonde za merjenje pravokotne komponente magnetnega polja, magneta montiranega na os pogona. Izhod senzorja je lahko analogen v obliki dveh signalov sinusa in kosinusa. Izhod senzorja je lahko inkrementalni, ki poda relativno spremembo pozicije ter smer premikanja. Senzor lahko prikaže tudi absolutno vrednost pozicije. Njegova resolucija je nastavljiva med 320 in 8192 pozicij na obrat.

3 Analitična izpeljava dinamične in statične ekscentričnosti

Napake so prisotne pravzaprav pri vsakem senzorju. V tem poglavju bom analitično prikazal vpliv napak omenjenih ekscentričnosti, ki se pojavijo ob nepravilni montaži senzorja. Njuna vpliva različno vplivata na napako zato ju bom obravnaval posamično. V delu sem predpostavil, da se izmiki iz idealne pozicije izmikajo le v smeri x in y. Napaka se pojavi tudi ob premiku v smeri z vendar tega tu ne bom obravnaval. Zaradi narave problema je smiselno uporabiti kartezični koordinatni sistem. V izpeljavah bom predpostavil, da so izmiki majhni. Najprej bom izpeljal po kašni trajektoriji se giblje posamezna Hallova sonda. Iz znane trenutne lokacije Hallove sonde bom lahko izračunal vrednost B komponente ki jo meri posamezna Hallova sonda. Pri analitični izpeljavi bom predpostavil, da je polje ob majhnih odmikih linearno in ustreza enacbi polja $B(x, y) = k \cdot y$. Nato bom analitično izrazil vrednost kota, ki predstavlja izhod senzorja.

3.1 Začetna pozicija senzorjev

Za določanje kota med vektorjem ki kaže v smeri x-os (1_x) in vektorjem med koordinatnim izhodiščem in poljubno točko v koordinatnem sistemu, je potrebno poznati poznati le položaj točke. Primer je podan na sliki 3.1. Kot φ določimo preko trigonometrične funkcije arctan:

$$\varphi = \arctan \frac{y_0}{x_0}$$



Slika 3.1: Slika za pomoč pri določanju kota

Za določitev kota φ je dovolj poznati že projekciji vektorja na koordinatni osi (slika 3.2),



Slika 3.2: Slika za pomoč pri določanju kota

Če poznamo le projekciji točke na koordinatni osi, je to zadosten pogoj za določitev kota φ . Za določitev kota zasuka v idealnih pogojih, kot je predpostavka, da je polje linearno, sta dovolj dve Hallovi sondi, ki sta prostorsko zama knjeni za 90° (Slika 3.3).

Začetni lokaciji sond enostavno postavimo na koordinatni osi in s tem ustrezemo pogoju po prostorskem zasuku med sondama. Sonde postavimo na

razdaljo r_0 od koordinatnega izhodišča. S tem dobimo začetni lokaciji Hallovih sond $H_1(x_0, y_0) = (r_0, 0)$, $H_2(x_0, y_0) = (0, r_0)$.



Slika 3.3: Začetna postavitev Hallovih sond

3.2 Zasuk magneta

Z zasukom magneta za kot θ se na mestu, kjer merimo magnetno polje, polje spremni. Polje bi se spremenilo enako če bi nad magnetom zasukali senzor za kot $-\theta$. Hallova sonda z začetno lokacijo (x_0, y_0) bi se po krožnici premaknila v novo lokacijo (x, y) :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Z upoštevanjem da je funkcija sinus liha in funkcija kosinus soda, se izračun v enačbi 3.1 poenostavi v:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Ko zavrtimo senzor okoli magneta pri tem pomeri polje. Ker sem predpostavil linearno polje, ga predstavim s izrazom

$$B(x, y) = k \cdot x \quad (3.3)$$



Slika 3.4: Hallovi sondi se glede na magnet nahajati na enaki lokaciji

Za poenostavitev vzemimo $k = 1$. S tem se enačba 3.3 poenostavi v:

$$B(x, y) = x \quad (3.4)$$

Polje ki ga pomeri posamezna sonda dobimo z upoštevanjem enačb 3.2 in 3.4.

$$B_{H_1}(\theta) = r_0 \cdot \sin \theta \quad (3.5)$$

$$B_{H_2}(\theta) = r_0 \cdot \cos \theta \quad (3.6)$$

3.3 Izpeljava enačb pri dinamični ekscentričnosti

Opazujmo sedaj opisan sistem z dodano dinamično ekscentričnostjo. Definirajmo začetno lego rotorja v centru statorja $S_r(0, 0) = S_s(0, 0)$. Rotor izmaknemo iz začetne lege v novo središče $S_r(\Delta x_d, \Delta y_d)$. Os vrtenja ostaja v centru statorja, zato staro središče rotorja opisuje krožnico s polmerom $\sqrt{\Delta x_d^2 + \Delta y_d^2}$.

Če sedaj sistem miselno obrnemo kot sem to napravil v prejnjem poglavju in senzor zavrtimo. Ob takem premiku senzor opiše trajektorijo kot pri pravilno



Slika 3.5: Magnetno polje, ki ga pomeriti sonde, ko je montaža pravilna

montiranjem senzorju le z dodano translacijo ekscentričnosti. Kako Hallova sonda spreminja lokacijo glede na vrtenje je prikazano na sliki 3.6b, s pikčasto krožnico.

Novo lokacijo Hallove sonde lahko določimo po enačbi 3.7.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta x_d \\ -\Delta y_d \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Enačbo 3.7 lahko poenostavimo pri čemer Δx_d in Δy_d predstavlja vrednost za koliko je rotor izmaknjen iz osi vrtenja.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_d \\ \Delta y_d \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Z upoštevanjem magnetnega polja po izrazu 3.4 izrazimo odvisnost ma-



Slika 3.6: Hallovi sondi se glede na magnet nahajati na enaki lokaciji

gnetnega polja od kota zasuke in ekscentričnosti. Iz potekov magnetnega polja v izrazih (3.9) in (3.10) opazimo da magnetno polje ni odvisno od dinamične ekscentričnosti v y smeri. S hitrim miselnim eksperimentom si lahko hitro predstavljamo, da če senzor izmaknemo v smeri y magnetno polje na novi lokaciji ostane enako.

$$B_{H_1}(\theta) = r_0 \cdot \cos \theta - \Delta x_d \quad (3.9)$$

$$B_{H_2}(\theta) = r_0 \cdot \sin \theta - \Delta x_d \quad (3.10)$$

3.4 Izpeljava enačb pri statični ekscentričnosti

Opazovani sistem ostaja enak, brez ekscentričnosti. Sedaj iz osi vrtenja izmaknemo senzor. Os magneta in os vrtenja sta poravnani. Središče senzorja se sedaj nahaja na koordinatah $S_s(\Delta x_s, \Delta y_s)$. kot pri izpeljavi pri dinamični ekscentričnosti obrnimo sistem in zavrtimo senzor upoštevajoče z ekscentričnostjo. Središče senzorja opiše krožnico okoli središča magneta oz. osi vrtenja. Hallovi



Slika 3.7: Magnetno polje, ki ga pomeriti sonde, ko je magnet izmaknjen

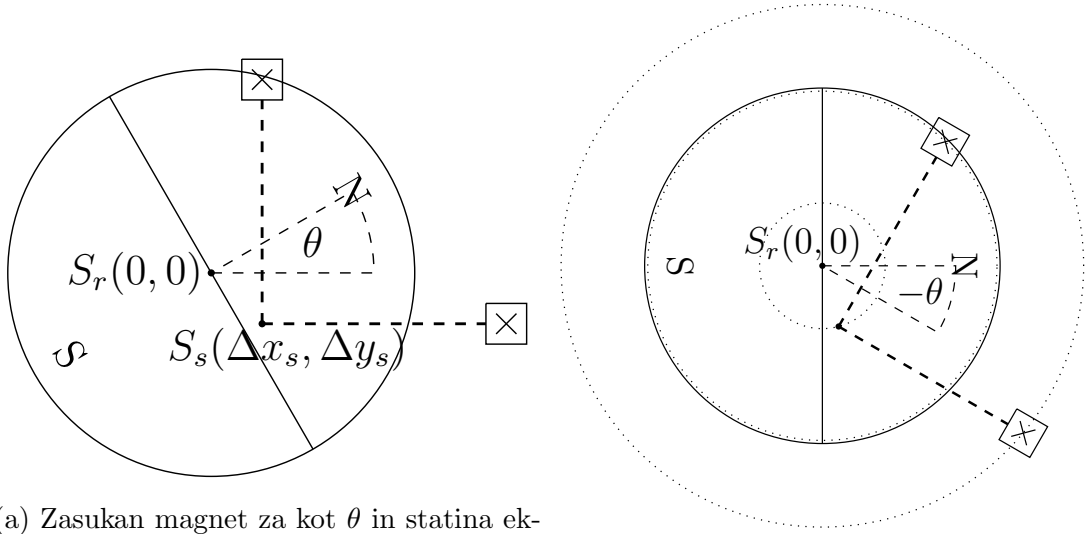
sondi se vrtita vsaka po svoji krožnici. Gibanje posamezne sonde lahko opišemo z izrazom:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 + \Delta x_s \\ y_0 + \Delta y_s \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Magnetno polje, ki ga pomerita dobimo iz izraza (3.4).

$$B_{H_1} = (r_0 + \Delta x_s) \cos(\theta) + \Delta y_s \sin(\theta) \quad (3.12)$$

$$B_{H_2} = -\Delta x_s \sin(\theta) + (r_0 + \Delta y_s) \cos(\theta) \quad (3.13)$$



(a) Zasukan magnet za kot θ in statina ekscentričnost

(b) Zasukan senzor za kot $-\theta$

ub

Slika 3.8: Hallovi sondi se glede na magnet nahajati na enaki lokaciji

3.5 Končna enačba za določitev lokacije sonde in določanje pomerjenega kota

Sedaj lahko izraza za določanje lokacije in hkrati magnetnega polja zapišemo z eno enačbo:

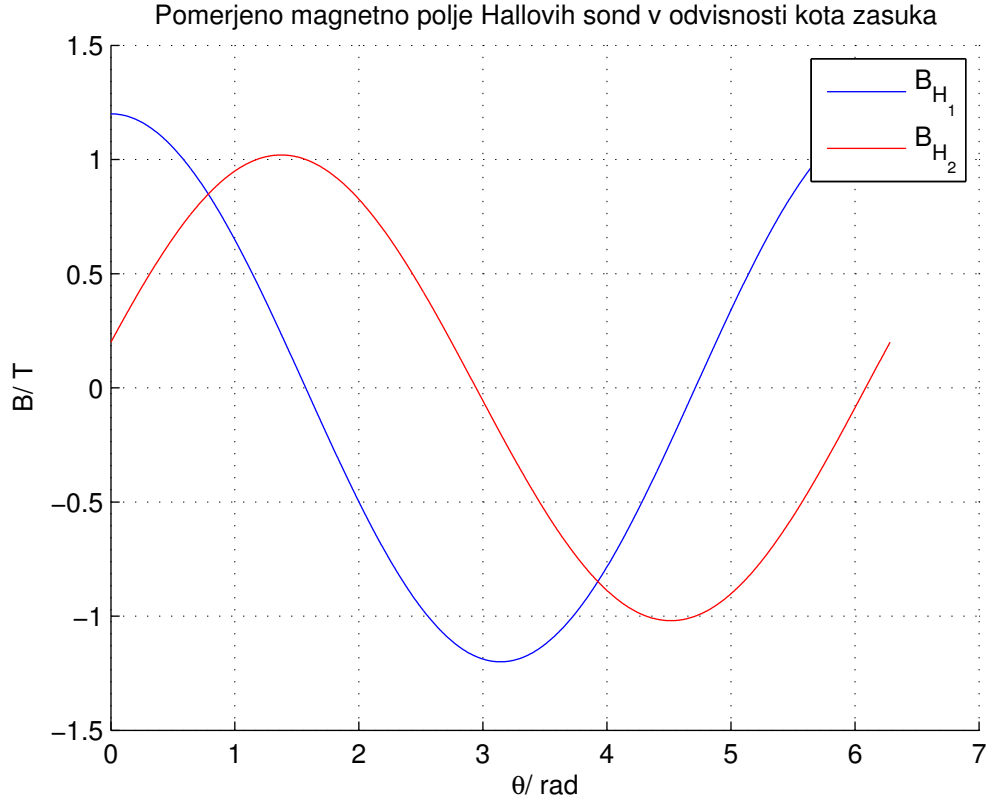
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 + \Delta x_s \\ y_0 + \Delta y_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_d \\ \Delta y_d \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Polje ki ga opišeti sondi se glasi:

$$B_{H_1} = (r_0 + \Delta x_s) \cos(\theta) + \Delta y_s \sin(\theta) - \Delta x_d \quad (3.15)$$

$$B_{H_2} = \Delta x_s \cos(\theta) + (r_0 + \Delta y_s) \sin(\theta) - \Delta x_d \quad (3.16)$$

Iz izrazov (3.15) in (3.16) sedaj lahko izračunamo kot.



Slika 3.9: Magnetno polje, ki ga pomeriti sonde, ko je senzor izmaknjen

$$\varphi = \arctan \frac{B_{H_2}}{B_{H_1}} = \arctan \frac{\Delta x_s \cos(\theta) + (r_0 + \Delta y_s) \sin(\theta) - \Delta x_d}{(r_0 + \Delta x_s) \cos(\theta) + \Delta y_s \sin(\theta) - \Delta x_d} \quad (3.17)$$

3.6 Določanje kota pri statični ekscentričnosti v smeri x

Zaradi nelinearnosti funkcije \arctan je izraz (3.17) analitično težko poenostaviti v polni obliki. Zato se vsake ekscentričnosti lotim posamično. Če upoštevamo le ekscentričnost Δx_s se izraz (3.17) poenostavi v:

$$\varphi = \arctan \frac{\Delta x_s \cos(\theta) + r_0 \sin(\theta)}{(r_0 + \Delta x_s) \cos(\theta)} \quad (3.18)$$

Z upoštevanjem Taylorjeve vrse za arctan:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} \dots \text{pri } |x| \leq 1 \quad (3.19)$$

Izraz lahko zapišemo kot

$$\varphi = \frac{\Delta x_s \cos(\theta) + r_0 \sin(\theta)}{(r_0 + \Delta x_s) \cos(\theta)} + \frac{(\Delta x_s \cos(\theta) + r_0 \sin(\theta))^3}{3((r_0 + \Delta x_s) \cos(\theta))^3} \quad (3.20)$$

3.7 Določanje približka za funkcijo arctan

Funkcija arkustangens (arctan), je inverzna funkcija funkcije tangens.

Zaloga vrednosti je v območju med $-\pi/2$ in $\pi/2$. Funkcija arkustangens tako zajame le polovico periode. V numeriki se za določitev kota na celi periodi $[-\pi, \pi]$ uporablja funkcijo *atan2*, ki sprejme dva parametra in na podlagi njunih predznakov določi v katerem kvadrantu se nahaja iskani kot.

$$\varphi = \text{atan2}(x, y) = \begin{cases} [0, \frac{\pi}{2}] : & x \geq 0, y \geq 0 \\ [\frac{\pi}{2}, \pi] : & x \leq 0, y \geq 0 \\ [-\pi, -\frac{\pi}{2}] : & x \leq 0, y \leq 0 \\ [-\frac{\pi}{2}, 0] : & x \geq 0, y \leq 0 \end{cases}$$

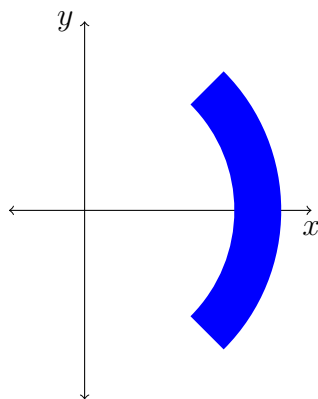
Funkcija *atan2* nato preko funkcije arctan izračuna vrednost na podlagi razmerja $\frac{y}{x}$. Iz izraza (3.21) lahko vidimo, da je potrebno poznati za funkcijo arctan zalogo vrednosti le med $-\frac{\pi}{4}$ in $\frac{\pi}{4}$.

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \quad (3.21)$$

Za določitev kota ne glede kje na periodi, je potrebno izračunati kvocient med spremenljivko x in y . Da bi se izognil temu deljenju sem aproksimiral funkcijo $f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ z ravnino (3.22).

$$\varphi(x, y) = a_1 x^3 + a_2 x^2 y + a_3 x^2 + a_4 x y^2 + a_5 x y + a_6 x + a_7 y^3 + a_8 y^2 + a_9 y + a_{10} \quad (3.22)$$

Funkcijo sem aproksimiral na naključno razporejene točke po četrtini krožnega kolobarja $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, z radijema $a = r_0 - 0.2$ mm in $b = r_0 + 0.2$ mm.



Slika 3.10: Območje nahajanja ključnih točk

Za točke znotraj območja sem izračunal vrednost $\arctan \frac{y}{x}$. Na to sem z uporabo funkcije `polyfitn`(dodaj vir), aproksimiral ravnino definirano z izrazom (3.22). Dobil sem koeficiente katere sem lahko uporabil v izračunih za analitičen prikaz napake. Ravnina je na definiranem območju odstopala za največ $0,253^\circ$. S predpostavko, da bo napaka ob dovolj veliki ekscentričnosti, višja od napake zaradi aproksimacije ravnine sem v izraz za ravnino, vstavil izraza (3.15) in (3.16). Izpeljava je prikazana v dodatku. Izrazi se poenostavijo če posamično obravnavam vsako ekscentričnost.

Z vnosom števil se je pokazalo, da bo pri statičnem izmiku nekoliko bolj izraziti drugi harmonik napake, kot pri dinamični ekscentričnosti.

Tu se kaj napisati

Več informacij je bilo težko izluščiti, saj je bila funkcija \arctan aproksimirana z ravnino dveh spremenljivk le na četrtini celotne periode.

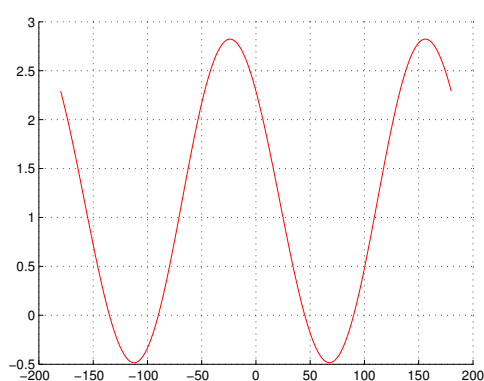
4 Numeričen izračun napake

Od tu naprej sem za izračun kota uporabljal vgrajeno funkcijo *atan2*, ki numerično določi izhodni kot φ glede na vhodni spremenljivki x in y . Pri izračunih sem postavil hallovi sondi na razdaljo $r_0 = 2,4$ mm, vsako ekscentričnost posamezno sem simuliral z 0,1 mm izmikom.

4.0.1 Napaka pri statični ekscentričnosti v smeri x-osi

Z vnosom izrazov (3.15) in (3.16) v funkcijo *atan2*, s statično ekscentričnostjo v x-osi se pojavi napaka definirana kot

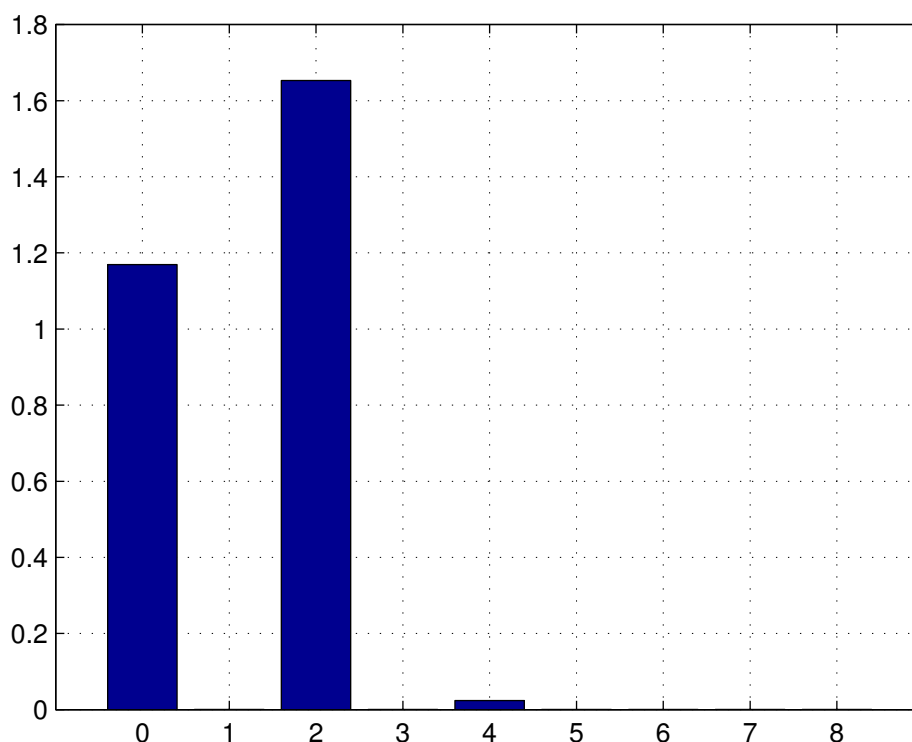
$$\varepsilon = \varphi - \theta \quad (4.1)$$



Slika 4.1: numeričen izračun napake

Iz slike 4.1 se vidi napaka v obliki enosmerne komponente in drugega har-

minika na periodo. Napaka se s konstantnim vrtenjem magneta ne akumulira, zato je dovolj prikaz napake na eni periodi. Napako razvijem v Fouriejevo vrsto do osmega harmonika. Amplitude posameznih harmonikov za statično ekscentričnost v smeri x osi za izmik 0,1 mm so prikazane na sliki 4.2.



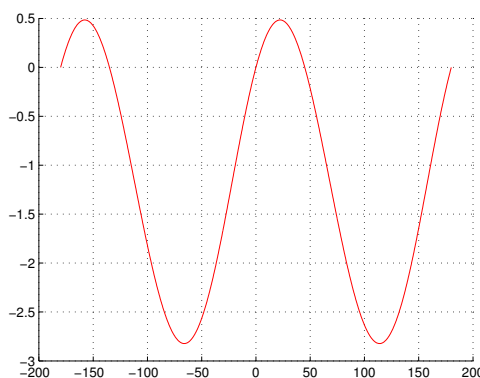
Slika 4.2: AAmplitude harmonikov protokola

Kot smo že predpostavili po sliki 4.1 izstopata predvsem enosmerna komponenta in drugi harmonik. Nakaj je še četrtega harmonika medtem ko so ostali harmoniki zanemarljivi.

4.0.2 Napaka pri statični ekscentričnosti v smeri y-osi

Pri statični ekscentričnosti sem ponovil postopek kot pri statični ekscentričnosti v smeri x-osi. Pričakoval sem podobene rezultate, kot pri statični ekscentričnosti

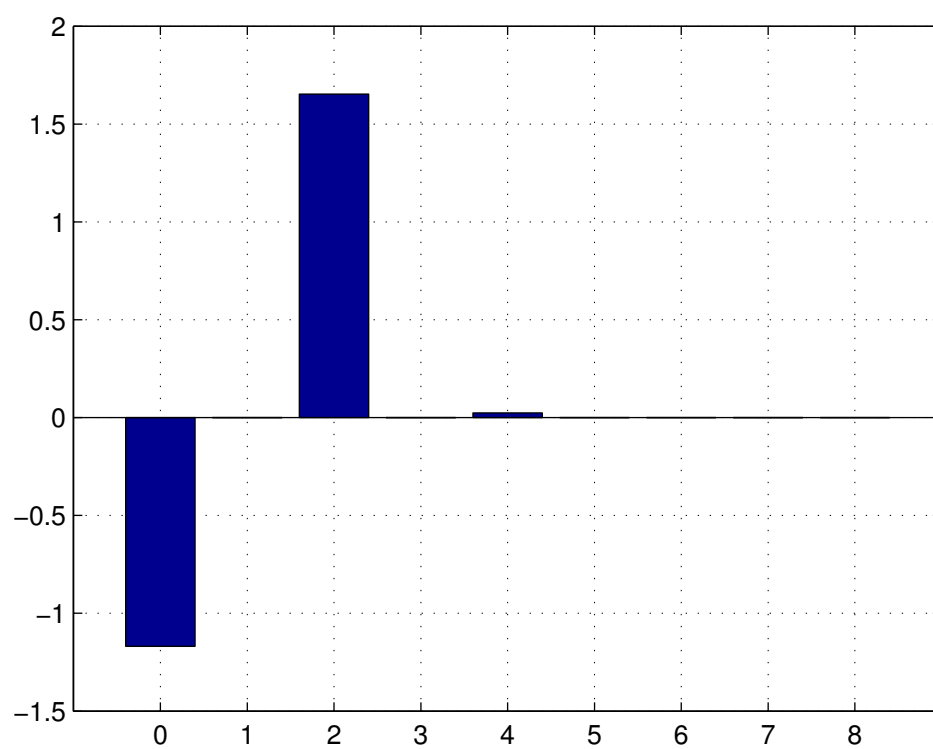
v smeri x-osi. Napaka kota ε je prikazana na sliki 4.3. Prav tako kot pri napaki ob statični ekscentričnosti v smeri x-osi izstopa enosmerna komponenta in drugi harmonik. Opazimo, da je enosmerna komponenta spremenila predznak. Iz Fourierjeve vrste (slika 4.4) Opazimo rezultate podobne kot pri statični ekscentričnosti v smeri x-osi. Izstopajo enosmerna komponenta drugi harmonik, obstaja tudi četrti harmonik, ostali so zanemarljivi. Zanimivost lahko razberemo še iz faznega premika. Napaka pri statični ekscentričnosti v smeri y-osi, za statično napako v smeri x-osi, fazno zaostaja ravno za velikost dveh faznih kotov. To se pojavi pri drugem in šestem harmoniku. Šesti harmonik je po amplitudi zanemarljiv zato je zanimiv podatek o faznem kotu le za drugi harmonik.



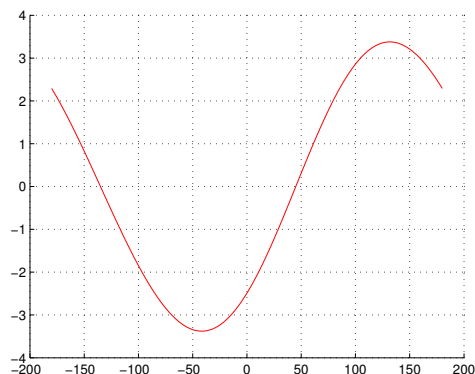
Slika 4.3: numeričen izračun napake

4.0.3 Napaka pri dinamični ekscentričnosti v smeri x-osi

Že iz analitičnih izrazov lahko pričakujemo, da bo tu manjša izrazitost drugega harmonika. Napaka kota ε je prikazana na sliki 4.5. Izrazit je predvsem prvi harmonik. Nezanemarljiv je še drugi harmonik, ostale komponente Fourierjeve vrste pa so zanemarljive.



Slika 4.4: AAmplitude harmonikov protokola



Slika 4.5: numeričen izračun napake

4.1 Linearno večanje napake in opazovanje posameznih harmonikov pogreška

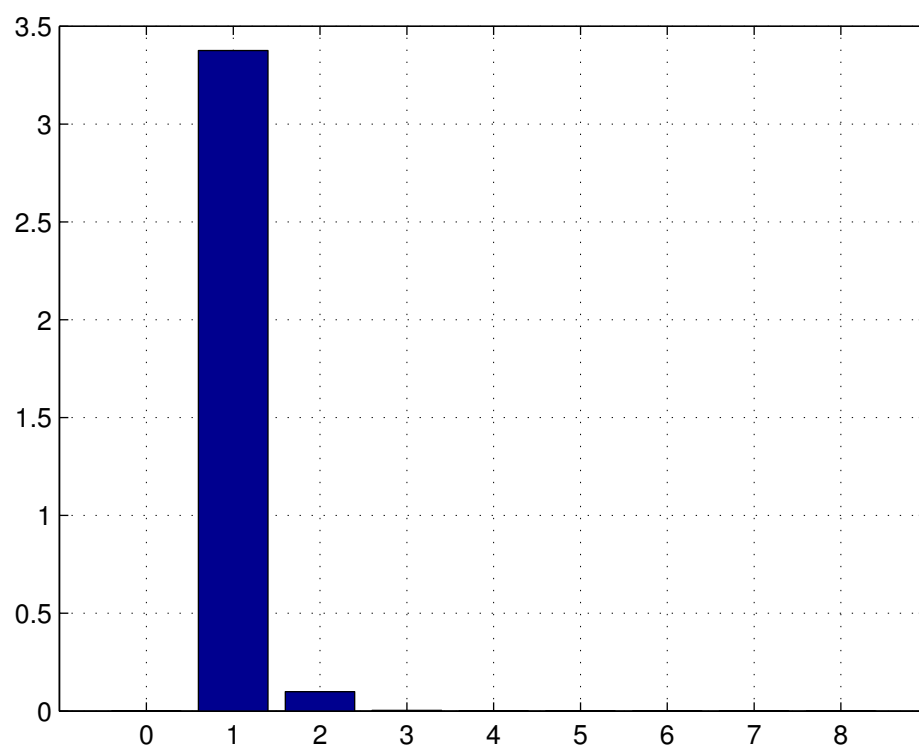
Sedaj pogledajmo kako se spreminja posamezna amplituda ekscentričnosti glede na velikost ekscentričnosti.

4.1.1 Večanje statične napake v x-osi

S večanjem statične napake se spreminja amplituda posameznih harmonikov. Vrednost enosmerne komponente lahko zapisemo kot polinom v odvisnosti od $p_0(\Delta x_s)$.

4.1.2 Večanje statične napake v y-osi

4.1.3 Večanje dinamične napake v x-osi



Slika 4.6: AAmplitude harmonikov protokola

Dodatek

Koeficienti enačbe (3.22):

$$a_1 = -6.306319442659312 \cdot 10^{-4}$$

$$a_2 = -1.640168709495793 \cdot 10^{-3}$$

$$a_3 = 3.962017072440235 \cdot 10^{-3}$$

$$a_4 = -2.887048260782111 \cdot 10^{-4}$$

$$a_5 = -1.412276545356571 \cdot 10^{-1}$$

$$a_6 = -7.931822230064153 \cdot 10^{-3}$$

$$a_7 = -2.104555700820865 \cdot 10^{-2}$$

$$a_8 = 6.238774627110503 \cdot 10^{-4}$$

$$a_9 = 7.651613620676274 \cdot 10^{-1}$$

$$a_{10} = 4.980440898351878 \cdot 10^{-3}$$

.1 Brez ekscentričnosti

V enačbo (3.22), namesto x vstavimo izraz za B_{H_1} iz enačbe (3.15). Namesto y vstavimo izraz za B_{H_2} iz enačbe (3.16). Z upoštevanjem, da ekscentričnosti ni, se izraza iz enačb (3.15) in (3.16) poenostavita v:

$$B_{H_1} = r_0 \cos(\theta) \tag{2}$$

$$B_{H_2} = r_0 \sin(\theta) \quad (3)$$

Vstavimo izraza v (3.22) in poenostavimo.

$$\begin{aligned} \varphi = & 0.00498044 + 0.00229295r_0^2 \\ & -(0.00793182r_0 + 0.00054515r_0^3) \cos(\theta) \\ & + 0.00166907r_0^2 \cos(2\theta) \\ & - 0.0000854818r_0^3 \cos(3\theta) \\ & + (0.765161r_0 - 0.0161942r_0^3) \sin(\theta) \\ & - 0.0706138r_0^2 \sin(2\theta) \\ & + 0.00485135r_0^3 \sin(3\theta) \end{aligned} \quad (4)$$

Če za r_0 vzamemo 2.4 mm se izraz (14) poenostavi v

$$\varphi = 0.018 + 0.613 \cdot \sin(\theta - 2.484^\circ) - 0.407 \cdot \sin(2 \cdot \theta + 1.354^\circ) - 0.067 \cdot \sin(3 \cdot \theta - 1.009^\circ) \quad (5)$$

.2 Staticna ekscentričnost v x-osi

V izrazih (3.15) in (3.16) upoštevamo, da je statični izmik v x-osi. Δx_s ni 0, Δy_s in Δx_d sta 0 in izraza za B_{H_1} in B_{H_2} sta enaka:

$$B_{H_1} = (r_0 + \Delta x_s) \cos(\theta) \quad (6)$$

$$B_{H_2} = \Delta x_s \cos(\theta) + r_0 \sin(\theta) \quad (7)$$

Vstavimo v (3.22) in dobimo:

$$\begin{aligned}
\varphi = & 0.00498044 + 0.00229295r_0^2 - 0.0666518r_0x_s - 0.0683209x_s^2 \\
& + (-0.00054515r_0^3 + 0.75723x_s - 0.0185054r_0^2x_s \\
& - 0.0177038x_s^3 + r_0(-0.00793182 - 0.0040957x_s^2)) \cos[\theta] \\
& + (0.00166907r_0^2 - 0.0666518r_0x_s - 0.0683209x_s^2) \cos[2\theta] \\
& + (-0.0000854818r_0^3 + 0.0149733r_0^2x_s - 0.00136523r_0x_s^2 - 0.00590127x_s^3) \cos[3\theta] \\
& + r_0(0.765161 - 0.0161942r_0^2 - 0.000964437r_0x_s - 0.0163386x_s^2) \sin[\theta] \\
& + r_0(-0.070614r_0 - 0.06999x_s) \sin[2\theta] \\
& + r_0(0.00485135r_0^2 - 0.000964437r_0x_s - 0.0163386x_s^2) \sin[3\theta]
\end{aligned} \tag{8}$$

.3 Staticna ekscentričnost v y-osi

V izrazih (3.15) in (3.16) upoštevamo, da je statični izmik v y-osi. Δy_s ni 0, Δx_s in Δx_d sta 0 in izraza za B_{H_1} in B_{H_2} sta enaka:

$$B_{H_1} = r_0 \cos(\theta) + \Delta y_s \sin(\theta) \tag{9}$$

$$B_{H_2} = (r_0 + \Delta y_s) \sin(\theta) \tag{10}$$

Vstavimo v (3.22) in dobimo:

$$\begin{aligned}
\varphi = & 0.00498044 + 0.00229295r_0^2 - 0.0699899r_0y_s - 0.0683209y_s^2 \\
& + r_0(-0.00793182 - 0.00054515r_0^2 - 0.000964437r_0y_s - 0.00136523y_s^2) \cos(\theta) \\
& + (0.00166907r_0^2 + 0.0699899r_0y_s + 0.0683209y_s^2) \cos(2\theta) \\
& + (-0.0000854818r_0^3 + 0.000964437r_0^2y_s + 0.00136523r_0y_s^2) \cos(3\theta) \\
& + (0.765161r_0 - 0.0161942r_0^3 + 0.75723y_s - 0.048452r_0^2y_s \\
& \quad - 0.0490157r_0y_s^2 - 0.0177038y_s^3) \sin(\theta) \\
& + r_0(-0.070614r_0 - 0.066652y_s) \sin(2\theta) \\
& + (0.00485135r_0^3 + 0.0149733r_0^2y_s + 0.0163386r_0y_s^2 + 0.00590127y_s^3) \sin(3\theta)
\end{aligned} \tag{11}$$

.4 Dinamična ekscentričnost v x-osi

V izrazih (3.15) in (3.16) upoštevamo, da je statični izmik v x-osi. Δx_d ni 0, Δx_s in Δy_s sta 0 in izraza za B_{H_1} in B_{H_2} sta enaka:

$$B_{H_1} = r_0 \cos(\theta) - \Delta x_d \tag{12}$$

$$B_{H_2} = r_0 \sin(\theta) - \Delta x_d \tag{13}$$

Vstavimo v (3.22) in dobimo:

$$\begin{aligned}
\varphi = & 0.00498044 + 0.00229295r_0^2 - 0.75723x_d \\
& + 0.0334787r_0^2x_d - 0.136642x_d^2 + 0.0236051x_d^3 \\
& + (-0.00793182r_0 - 0.00054515r_0^3 + 0.133304r_0x_d - 0.00546094r_0x_d^2) \cos(\theta) \\
& + (0.00166907r_0^2 - 0.0299467r_0^2x_d) \cos(2\theta) \\
& - 0.0000854818r_0^3 \cos(3\theta) \\
& + (0.765161r_0 - 0.0161942r_0^3 + 0.13998r_0x_d - 0.0653542r_0x_d^2) \sin(\theta) \\
& + (-0.0706138r_0^2 + 0.00192887r_0^2x_d) \sin(2\theta) \\
& + 0.00485135r_0^3 \sin(3\theta)
\end{aligned} \tag{14}$$