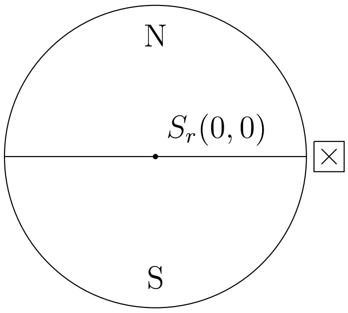
1 Analitična izpeljava vplivov dinamične in statične ekscentričnosti

V tem poglavju bom analitično prikazati vpliv napak omenjenih ekscentričnosti, ki se pojavita zaradi neprimerne vgradnje te vrste enkoderja. Napaki različno vplivati na izhode senzorja, zato ju lahko obravnamvam posamično. Preko analitične izpeljave bomo spoznali kako se spreminja lokacija Hall-ove sonde glede na magnet ob pravilni montaži. Z vpeljavo dodane ekscentričnosti v model bomo videli, kako se trajektorija gibanja Hall-ove sonde glede na magnet spremeni. S poznavanjem lokacije Hall-ove sonde nad magnetom bomo lahko odčitali vrednost B_z .

1.1 Definicija koordinatnih sistemov

Definirajmo kartezični koordinatni sistem, ki ima v izhodišcu postavljen radialno magnetiziran magnet. Na poljubno točko $S_{h0}(x_0, y_0)$, vendar ne v izhodišče postavimo Hall-ovo sondo. Na sliki 1.1 je prikazan tak sistem. Hall-ova sonda je postavljena na abcisno os za lažje razumevanje. Vrednost y_0 je lahko poljubna in končna rešitev izpeljave bo splošna za poljubno lokacijo Hall-ove sonde v začetni legi.

Z rotacijo magneta za kot θ, se lokacija Hall-ove sonde glede na magnet spremeni. Nova lokacija Hall-ove sonde glede na magnet je enaka, če namesto magnet, zarotiramo Hall-ovo sondo za kot $-\theta$. Novo lokacjo Hall-ove sonde glede na ma-



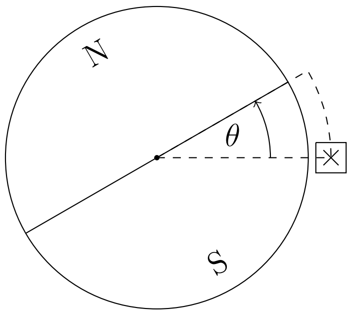
Slika 1.1: Definicija koordinatnega sistema z magnetom in Hall-ovo sondo

gnet lahko zapišemo z rotacijsko matriko.

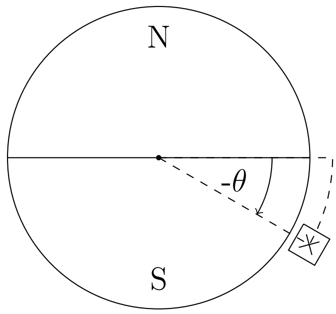
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Argument rotacijske matrike je $-\theta$, pri čemer vemo, da smo namesto magneta zarotirali Hall-ovo sondo v nasprotno smer. Z upoštevanjem lihosti funkcije sinus in sodosti funkcije kosinus, se enačba 1.1 poenostavi v:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$



(a) Zasukan magnet za kot θ

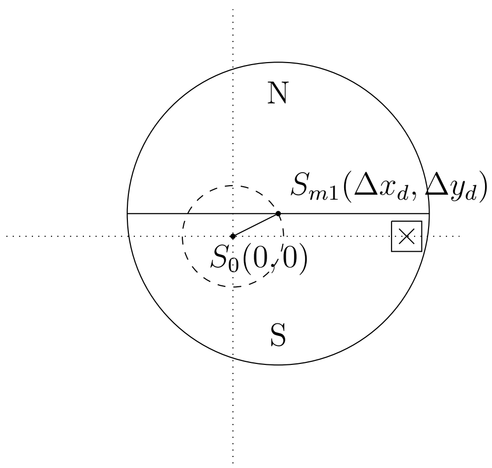


(b) Zasukan senzor za kot $-\theta$

Slika 1.2: Sprememba lokacije glede na magnet ob rotaciji

1.2 Izpeljava gibanja lokacije Hall-ove sonde na magnet pri dinamični ekscentričnosti

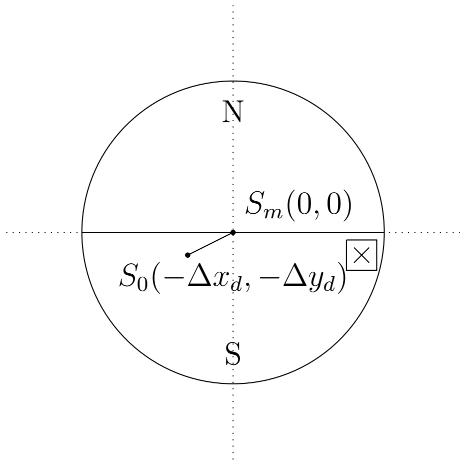
Opazujmo sedaj sistem gibanja Hall-ove sonde glede na magnet ter dinamično ekscentričnost. Magnet je postavljen v izhodišce koordinatnega sistema $S_m(0,0)$. Sedaj magnet izmaknemo v novo lego $S_{m1}(\Delta x_d, \Delta y_d)$ (Slika 1.3). Os vrtenja je še vedno postavljena v izhodišče koordinatnega sistema. Središce magneta $S_{m1}(\Delta x_d, \Delta y_d)$ tako tekom vrtenja okoli koordinatnega izhodišca opiše krožnico z radijem $\sqrt{\Delta x_d^2 + \Delta y_d^2}$. V sistem sedaj dodajmo Hall-ovo sondo v njeno začetno lego glede na izhodišce $S_{h0}(x_0, y_0)$.



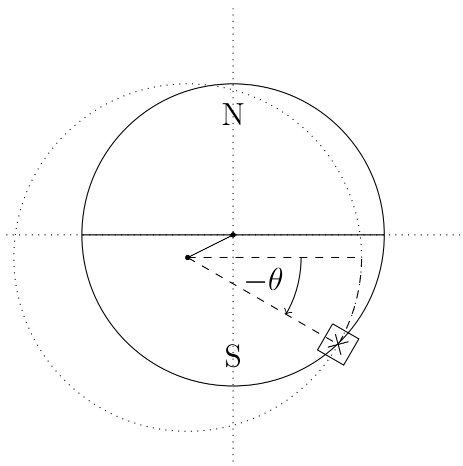
Slika 1.3: Shema definicije dinamične ekscentričnosti vpliva na magnet

Enako gibanje Hall-ove sonde na magnet lahko dosežemo tudi z obrnjenim sistemom. Vrnimo magnet v izhodiščno lego $S_m(0,0)$. Sedaj postavimo os vrtenja magneta v točko $(-\Delta x_d, -\Delta y_d)$. Hall-ovo sondo postavimo v točko $S_{h1}(x_0 - \Delta x_d, y_0 - \Delta y_d)$.

Sistema prikazana na slikah 1.3 in 1.4, se v začetnih legah ne razlikujeta. Sedaj zarotirajmo Hall-ovo sondo okoli osi vrtenja $S_0(-\Delta x_d, -\Delta y_d)$. Hall-ova sonda se giblje glede na magnet enako, kot če bi magnet zavrteli z dinamično ekscentričnostjo (Slika 1.3). Gibanje Hall-ove sonde na magnet je izraženo kot gibanje po krožnici s središčem v točki $(-\Delta x_d, -\Delta y_d)$.



Slika 1.4: Shema definicije dinamične ekscentričnosti vpliva na Hall-ovo sondo



Slika 1.5: Potek Hall-ove sonde ob rotaciji glede na magnet ob dinamični ekscentričnosti

Potek Hall-ove sonde ob rotaciji z upoštevanjem dinamične ekscentričnosti lahko zapišemo kot (1.2) z dodatkom enosmerne komponente dinamične ekscentričnosti.

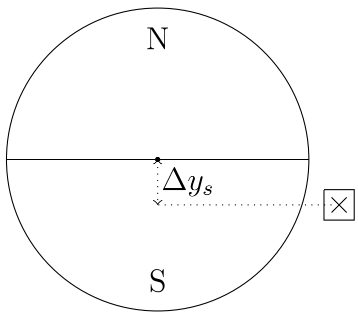
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta x_d \\ -\Delta y_d \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

V (1.3) lahko izrazimo - in izraz se poenostavi.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_d \\ \Delta y_d \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

1.3 Izpeljava gibanja lokacije Hall-ove sonde na magnet pri statični ekscentričnosti

Postavimo sistem nazaj v izhodišcno lego, brez ekscentričnosti. Tako sredisce magneta, kot os vrtenja postavimo v izhodišce. Hall-ova sonda je postavljena v točko $S_{h0}(x_0, y_0)$. Sedaj premaknimo Hall-ovo sondo za $(\Delta x_s, \Delta y_s)$, v novo točko $S_{h1}(x_0 + \Delta x_s, y_0 + \Delta y_s)$. Na sliki 1.6 je prikazana le statična ekscentričnost v y-osi, vendar celotni razmislek velja za obe statični ekscentričnosti enako.

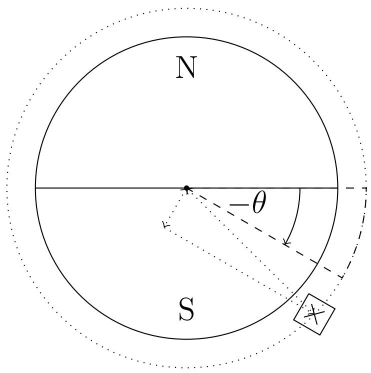


Slika 1.6: Shema definicije statične ekscentričnosti

Po enakem razmišljanju kot v zgornjih poglavjih, sedaj zarotirajmo Hall-ovo sondo za kot $-\theta$ okoli izhodišča. Hall-ova sonda se giblje po krožnici z radijem $\sqrt{(x_0 + \Delta x_s)^2 + (y_0 + \Delta y_s)^2}$.

To lahko zapišemo v izraz (1.2) kot:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + \Delta x_s \\ y_0 + \Delta y_s \end{bmatrix} \tag{1.5}$$



Slika 1.7: Potek Hall-ove sonde ob rotaciji glede na magnet ob statični ekscentričnosti

1.4 Končna enačba za določanje lokacije Hall-ove sonde

Do sedaj smo postopoma izpeljali enačbe za:

- sistem magneta in Hall-ove sonde ob pravilni montaži
- sistem magneta in Hall-ove sonde z dinamično ekscentričnostjo magneta
- sistem magneta in Hall-ove sonde z statično ekscentričnostjo Hall-ove sonde

Enačbi sistema z ekscentričnostjo sti med seboj neodvisni zato lahko enačbe sistemov združimo. Uporabimo princip superpozicije in dobimo končno enačbo za lociranje Hall-ove sonde glede na magnet v odvistnosti od zasuka magneta, z upoštevanjem vpliva tako dinamične kot statične ekscentričnosti. Končna enačba se glasi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + \Delta x_s \\ y_0 + \Delta y_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_d \\ \Delta y_d \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Ogledali smo si, kako je ob rotaciji locirana Hall-ova sonda glede na magnet. Ogledali smo si tudi, kako na lokacijo sonde vplivati dinamična in statična ekscentričnost. S poznavanjem magnetnega polje $B_z = B_z(x, y)$, lahko določimo kakšno vrendost polja B_z pomeri Hall-ova sonda ob rotaciji ($B_z = B_z(\theta)$). Ob poznavanju polja B_z, lahko določimo zasuk magneta glede na postavitev Hallove sonde.

2 Izpeljava poteka polja $B_z(\theta)$ in ocena napake zaradi ekscentričnosti

V tem poglavju si bomo ogledali kakšno polje pomeri Hall-ova sonda, z linearno aproksimiranim magnetnim poljem B_z. Preko pomirjenega polja, bomo izračunali kakšna je napake pomerjenega kota od referenčnega in kako se napaka spreminja z ekscentričnostjo.

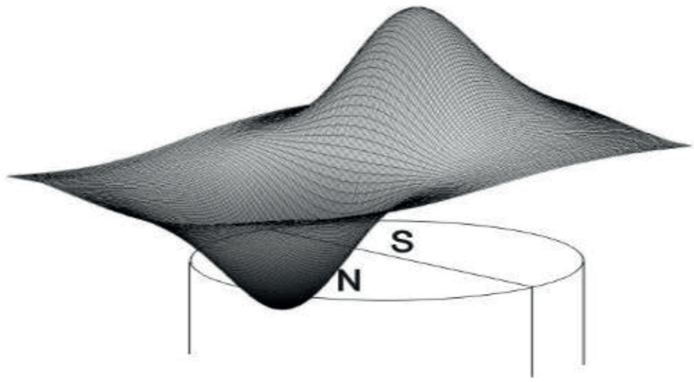
2.1 Definicija gostote magnetnega polja B_z

Dajalnik pozicije RM44 meri z komponento gostote magnetnega polja zato se lahko osredotočimo le nanjo. Potek komponente B_z nad cilindričnim magnetom je prikazan na sliki 2.1.

Potek z-komponente lahko izračunamo po Biot-Savartovim zakonom oz. numerično seštejemo prispevke posameznih delčkov magneta. Tako dobimo vrednost celotnega vektorja gostote magnetnga polja v posamezni točki. Magnetno polje z komponente v okolici osi vrtenja magneta lahko aproksimiramo z ravnino

$$B_z(x, y) = k \cdot x. \tag{2.1}$$

Takšna aproksimacija zadostuje za ocenitev poteka napake. S poznavanjem lokacije Hall-ove sonde, kar smo si ogledali v prejšnjem poglavju, sedaj dobimo potek pomerjene komponente gostote magnetnega polja. Aprokisirano polje je linearno odvisno od x komponente. Za lažje razumevanje definirajmo konstanto



Slika 2.1: z-komponenta vektorja gostote magnetnega polja nad cilindričnim magnetom

k enako 1.

2.2 Postavitev Hall-ovih sond za zajem polja in pomerjeno polje v odvistnosti od ekscentričnosti

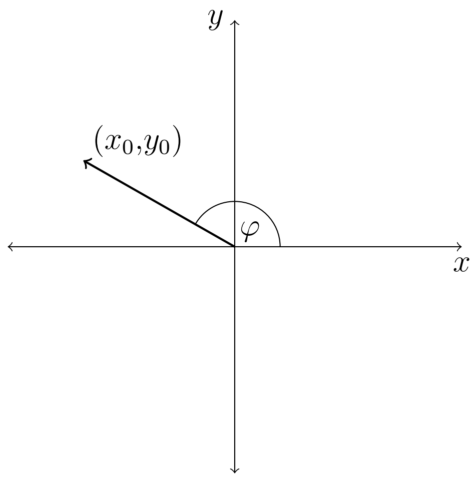
Sedaj si oglejmo, kako bi določili kot zasuka poljubne točke okoli izhodišča. Definirajmo kartezični koordinatni sistem, in v njem poljubno točko (x_0, y_0), ki ni v izhodišču(Slika 2.2). Za določanje kota φ je potrebno poznati poznati položaj točke. Kot φ določimo preko trigonometrične funkcije arctan:

$$\varphi = \arctan \frac{y_0}{x_0}$$

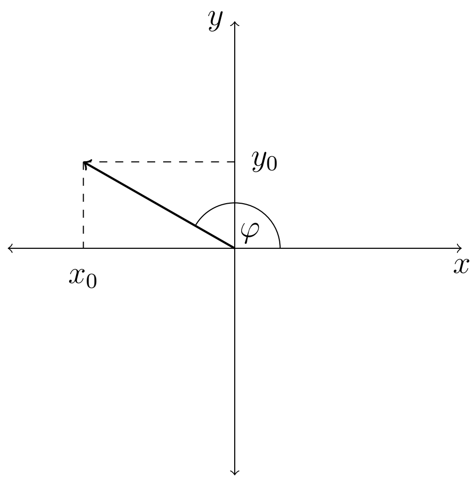
Za določitev kota φ je dovolj poznati že projekciji vektorja na koordinatni osi(slika 2.3),

Če poznamo projekciji točke na koordinatni osi, je to zadosten pogoj za določitev kota φ. Projekcijo lahko pridobimo če opazujemo projekciji položaja točke v koordinatnih oseh.

Sedaj si predstavljajmo da ta poljubna točka predstavlja enega od polov ma-



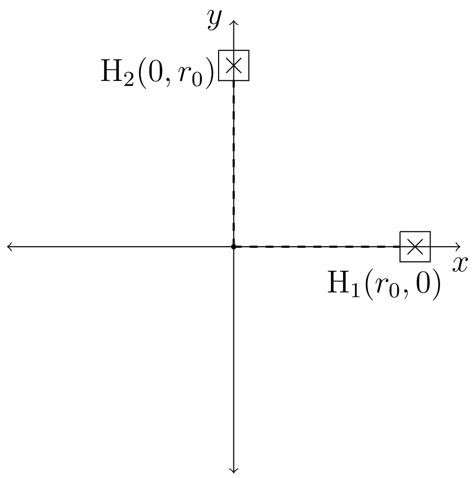
Slika 2.2: Slika za pomoč pri določanju kota



Slika 2.3: Slika za pomoč pri določanju kota

gneta. Za poznavanje zasuka pola magneta, je dovolj odčitanje polja na koordinatnih oseh. Hall-ovi sondi ne smeti biti postavljeni na isto koordinatno os. Ni nujno da sta sondi postavljeni pravokotno druga na drugo, si pa s tem prihranimo korak v katerem bi bilo potrebno izračunati projekcijo na pravokotni koordinatni osi.

Iz zgornjega razmisleka lahko sedaj smiselno postavimo Hall-ovi sondi v koordinatni sistem. Najprimerneje ju je postaviti na koordinatni osi (Slika 2.4). Sondi postavimo na enako razdaljo od izhodišča r_0. Tako bo zajem poteka polja ob rotaciji magneta enak, le fazno zamaknjeno.



Slika 2.4: Začetna postavitev Hallovih sond

S poznavanjem lociranja sonde glede na magnet (1.6), funkcije polja (2.1) ter začetne pozicije Hall-ovih sond lahko določimo potek polja sonde.

$$cos = B_{H_1}(\theta, r_0, \Delta x_s, \Delta y_s, \Delta x_d) = r_0 \cos\theta + \Delta x_s \cos\theta + \Delta y_s \sin\theta - \Delta x_d \quad (2.2)$$

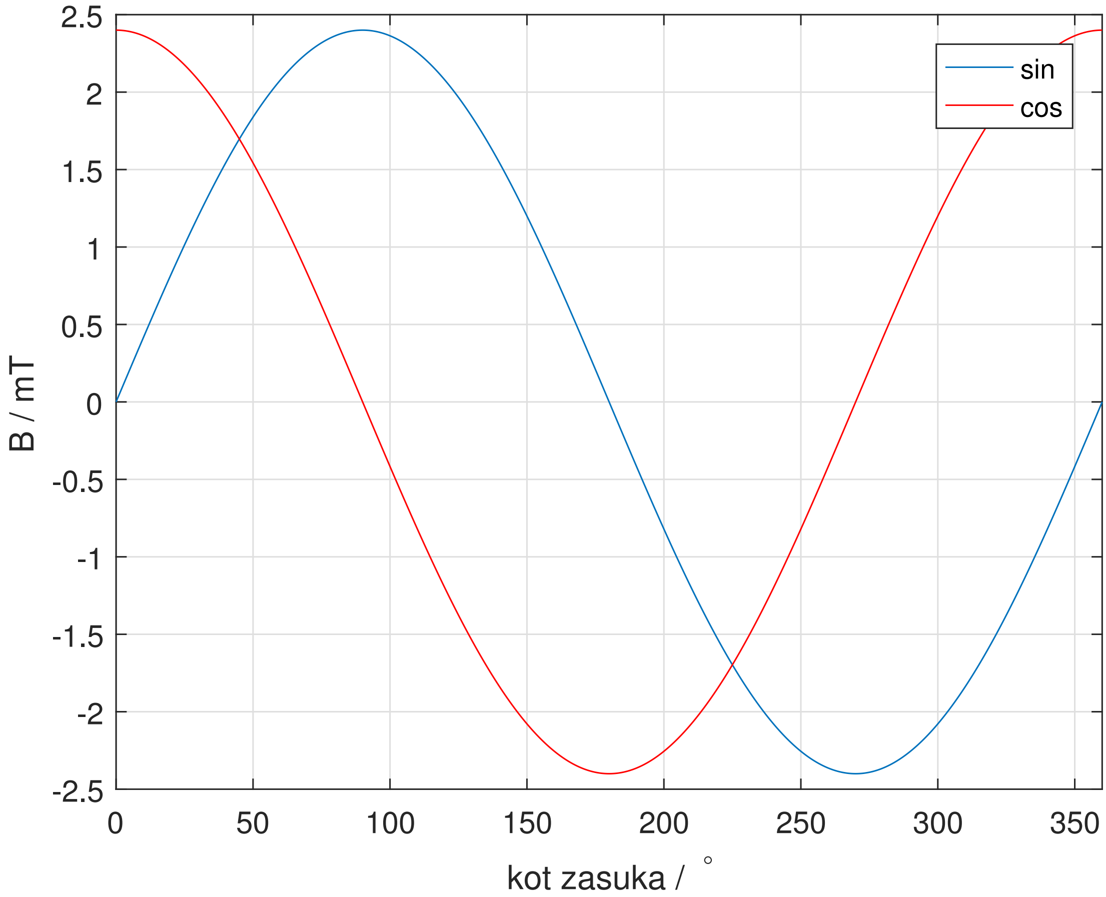
$$sin = B_{H_2}(\theta, r_0, \Delta x_s, \Delta y_s, \Delta x_d) = r_0 \sin\theta + \Delta x_s \cos\theta + \Delta y_s \sin\theta - \Delta x_d \quad (2.3)$$

Zajeta signala bom od tu naprej imenoval sinus (sin) in cosinu (cos), ker to je njuna osnovna oblika.

2.2.1 Sprememba magnetnega polja zaradi ekscentričnosti

Oglejmo si primer kakšno polje zajameti Hall-ovi sondi, ko ekscentričnosti ni. sin in cos izraza se poenostavita in dobimo poteka v obliki sinusa ter kosinusa z enako amplitudo r_0 (Slika 2.5).

Upoštevajmo sedaj le statični ekscentričnosti Δx_s in Δy_s. Δx_d postavimo na 0. Enačbi (2.2) in (2.3) lahko preuredimo v izraza:



Slika 2.5: Poteka *sin* in *cos* brez ekscentričnosti

$$cos(\theta, r_0, \Delta x_s, \Delta y_s) = \sqrt{(r_0 + \Delta x_s)^2 + \Delta y_s^2}\cos(\theta - \arctan\frac{\Delta y_s}{r_0 + \Delta x_s}) \tag{2.4}$$

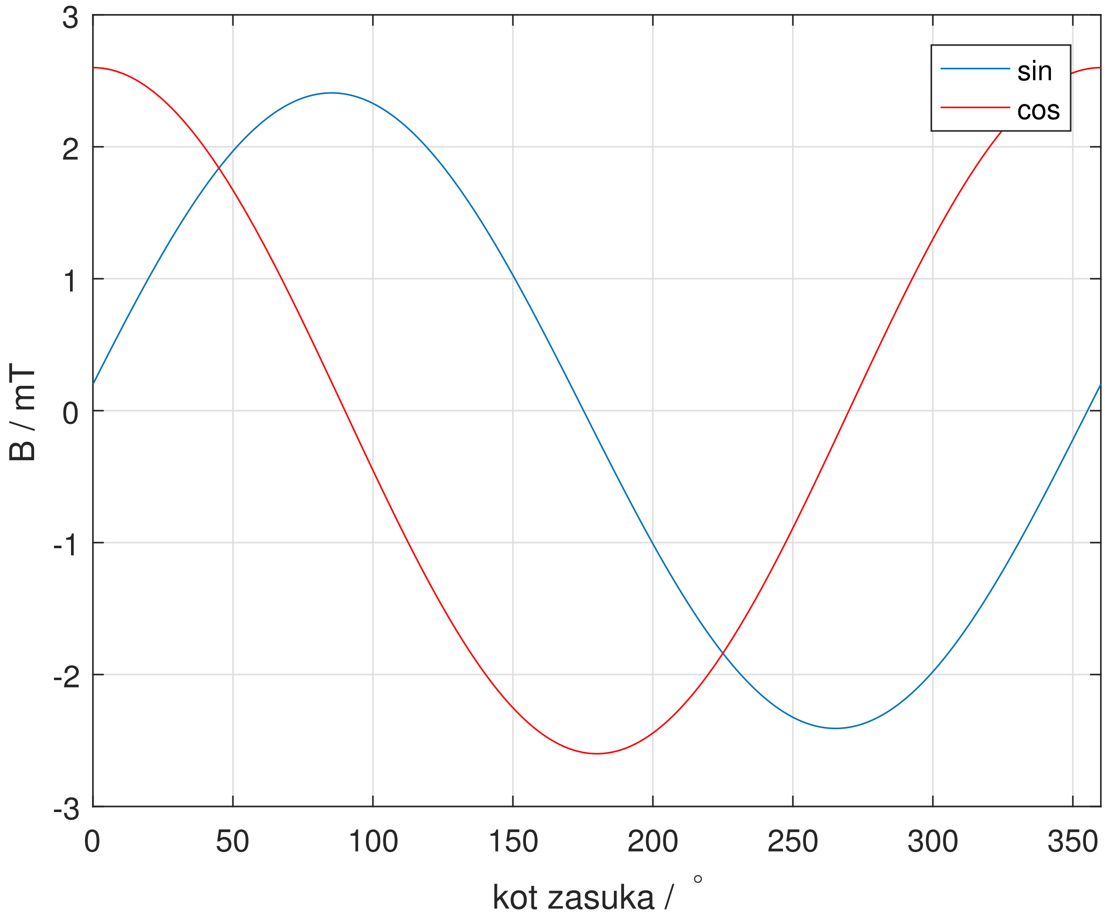
$$sin(\theta, r_0, \Delta x_s, \Delta y_s) = \sqrt{\Delta x_s^2 + (r_0 + \Delta y_s)^2}\sin(\theta + \arctan\frac{\Delta x_s}{r_0 + \Delta y_s}) \tag{2.5}$$

Iz njiju vidimo spremenjena poteka. Signaloma se je spremenila amplituda in fazni zamik (Slika 2.6).

Postavimo sedaj vrednosti Δx_s in $\Delta_y s$ na 0, Δx_d predpostavimo da ni 0.

$$cos(\theta, r_0, \Delta x_s, \Delta y_s, \Delta x_d) = r_0 \cos\theta - \Delta x_d \tag{2.6}$$

$$sin(\theta, r_0, \Delta x_s, \Delta y_s, \Delta x_d) = r_0 \sin\theta - \Delta x_d \tag{2.7}$$

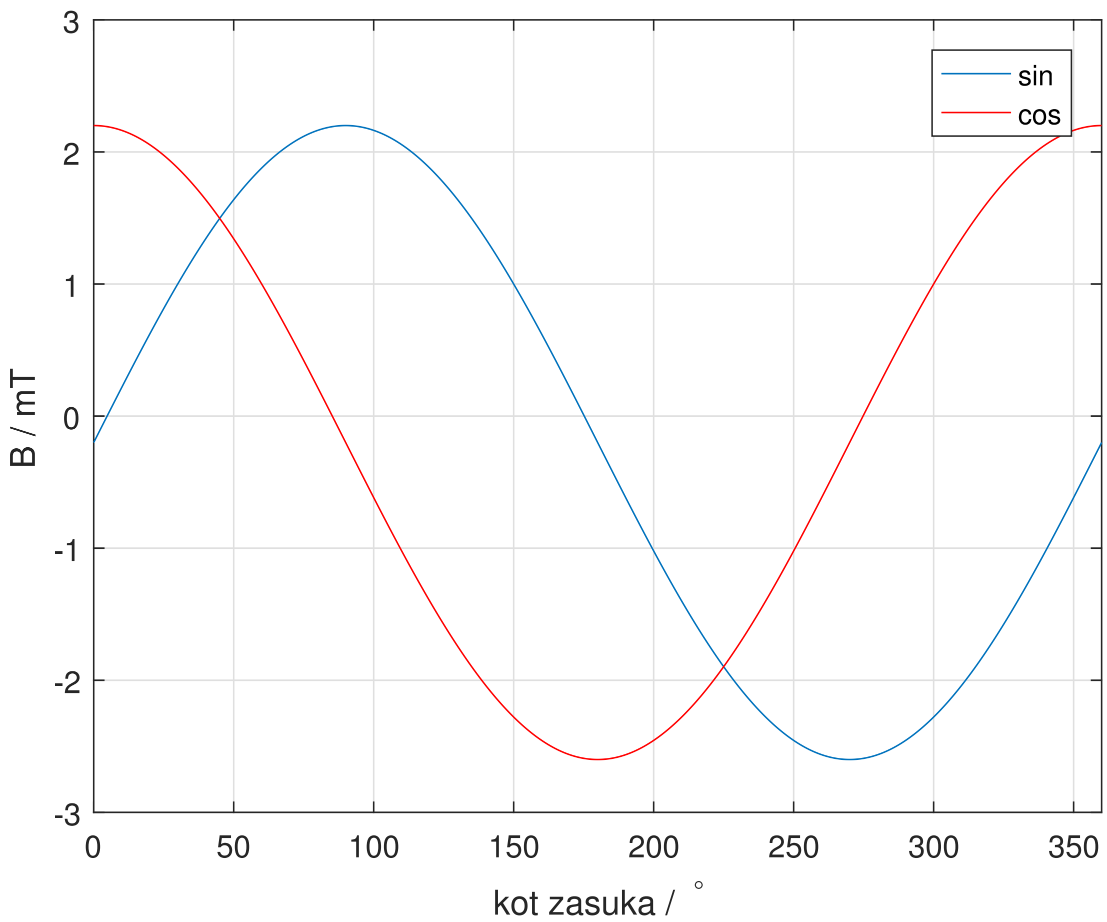


Slika 2.6: Poteka *sin* in *cos* z upoštevanjem 0,2 mm statični ekscentričnosti v x-osi

Polji obdržita enako amplitudo ter fazo, vendar dobita enosmerno komponento, ki je premo sorazmerna z izmikom magneta iz osi vrtenja (Slika 2.7).

2.3 Izračun kota

S poznavanjem potekov polja posamezne sonde sedaj s funkcijo arctan izračunamo kot.



Slika 2.7: Poteka *sin* in *cos* z upoštevanjem 0,2 mm dinamične ekscentričnosti v x-osi

$$\varphi(\theta, \Delta x_s, \Delta y_s, \Delta x_d) = \arctan \frac{B_y}{B_x} = \arctan \frac{r_0 \sin\theta + \Delta x_s \cos\theta + \Delta y_s \sin\theta - \Delta x_d}{r_0 \cos\theta + \Delta x_s \cos\theta + \Delta y_s \sin\theta - \Delta x_d} \tag{2.8}$$

Iz podanega izraza (2.8) je težko sklepati, kakšen bo potek pomerjenega kota. Na tem mestu definirajmo napako merjenega kota:

$$\varepsilon = \varphi - \theta \tag{2.9}$$

Signala *sin* in *cos* imata periodo 360° in sta zvezna. Iz tega sledi, da bo tudi ε

zvezen in imel periodo 360°.Pričakujem da bo potek napake ε v obliki :

$$\varepsilon = A_0 + A_1 \cos\theta + B_1 \sin\theta + A_2 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta \tag{2.10}$$

Za približek napake izraz (2.8) razvijmo v Taylorjevo vrsto po kotu θ. V Taylorjevo vrsto razvjemo tudi nastavek pričakovanega poteka. Zaradi aproksimacije poteka merjenega kota se zadovoljimo z razvojem do petega reda. Za poenostavitev se bom ekscentričnosti lotil posamezno. V naslednjih podpoglavjih bom prikazal analitične rezultate posameznega harmonika. Izpeljavo bom le teoretično opisal.

Oba izraza i (2.8 in 2.10)razvijem do petega reda Taylorjeve vrste. Z združitvijo posameznih potenc θ, pridobimo sistem petih enčb s petimi neznankami. S tem pridobim neznane faktorje A_0, A_1, A_2, B_1 in B_2. S poznavanjem teh faktorjev lahko ocenimo kasšeni bodo poteki posameznih harmonikov, ob posameznih ekscentričnostih.

2.3.1 Aproksimacija pomerjenega kota ob statični ekscentričnosti x

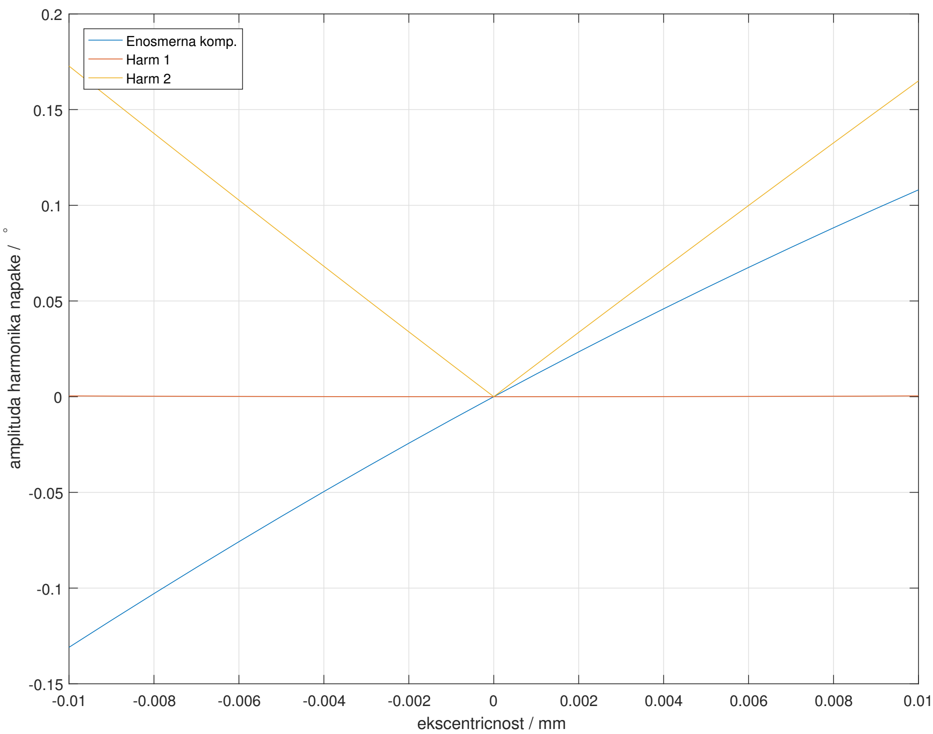
V izrazu (2.8) upoštevamo le statično ekscentričnost Δx_s.

$$\varphi = \arctan \frac{r_0 \sin\theta + \Delta x_s \cos\theta}{r_0 \cos\theta + \Delta x_s \cos\theta} \tag{2.11}$$

Z aproksimacijo po izrazu (2.10) pridobimo koeficiente posameznega harmonika

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{-90r_0^2\Delta y_s(r_0^5+29r_0^4\Delta y_s+132r_0^3\Delta y_s^2+208r_0^2\Delta y_s^3+156r_0\Delta y_s^4+52\Delta y_s^5)}{\pi(r_0^2+2r_0\Delta y_s+2\Delta y_s^2)^4} + \arctan\frac{\Delta y_s}{r_0+\Delta y_s} && (2.12)\\
A_1 &= \frac{2280r_0^2\Delta y_s^2(r_0^4+5r_0^3\Delta y_s+8r_0^2\Delta y_s^2+6r_0\Delta y_s^3+2\Delta y_s^4)}{\pi(r_0^2+2r_0\Delta y_s+2\Delta y_s^2)^4} && (2.13)\\
B_1 &= -\frac{240\Delta y_s^3(7r_0^3+18r_0^2\Delta y_s+18r_0^2\Delta y_s+18r_0\Delta y_s^2+8\Delta y_s^3)}{\pi(r_0^2+2r_0\Delta y_s+2\Delta y_s^2)^3} && (2.14)\\
A_2 &= \frac{90r_0^2\Delta y_s(r_0^5-3r_0^4\Delta y_s-28r_0^3\Delta y_s^2-48r_0^2\Delta y_s^3-36r_0\Delta y_s^4-12\Delta y_s^5)}{\pi(r_0^2+2r_0\Delta y_s+2\Delta y_s^2)^4} && (2.15)\\
B_2 &= \frac{30\Delta y_s(-3r_0^5-18r_0^4\Delta y_s-20r_0^3\Delta y_s^2+12r_0\Delta y_s^4+8\Delta y_s^5)}{\pi(r_0^2+2r_0\Delta y_s+2\Delta y_s^2)^3} && (2.16)\\
& && (2.17)
\end{aligned}
$$

Oglejmo si sliko potekov posameznih harmonikov.



Slika 2.8: Poteki amplitud prvega in drugega harmonika ter enosmerne komponente ob spreminjanju statične ekscentričnosti v x-osi

Te rezultate Taylorjeve vrste lahko upoštevam le v okolici ničle. Iz rezultatov lahko pričakujemo naraščanje drugega harmonika ter naraščanje enosmerne komponete.

2.3.2 Aproksimacija pomerjenega kota ob statični ekscentričnosti y

V izrazu (2.8) upoštevamo le statično ekscentričnost Δy_s.

$$\varphi = \arctan \frac{r_0 \sin\theta + \Delta y_s \sin\theta}{r_0 \cos\theta + \Delta y_s \sin\theta} \tag{2.18}$$

Z aproksimacijo po izrazu (2.10) pridobimo koeficiente posameznega harmonika

$$A_0 = \frac{-90 y_s (r_0^2 - 23 r_0 y_s - 24 y_s^2)}{\pi r_0^3} \tag{2.19}$$

$$A_1 = \frac{-1690 y_s^2 (r_0 + y_s)}{\pi r_0^3} \tag{2.20}$$

$$A_2 = \frac{90 y_s (r_0^2 + 9 r_0 y_s + 8 y_s^2)}{\pi r_0^3} \tag{2.21}$$

$$B_1 = \frac{240 y_s^3}{\pi r_0^3} \tag{2.22}$$

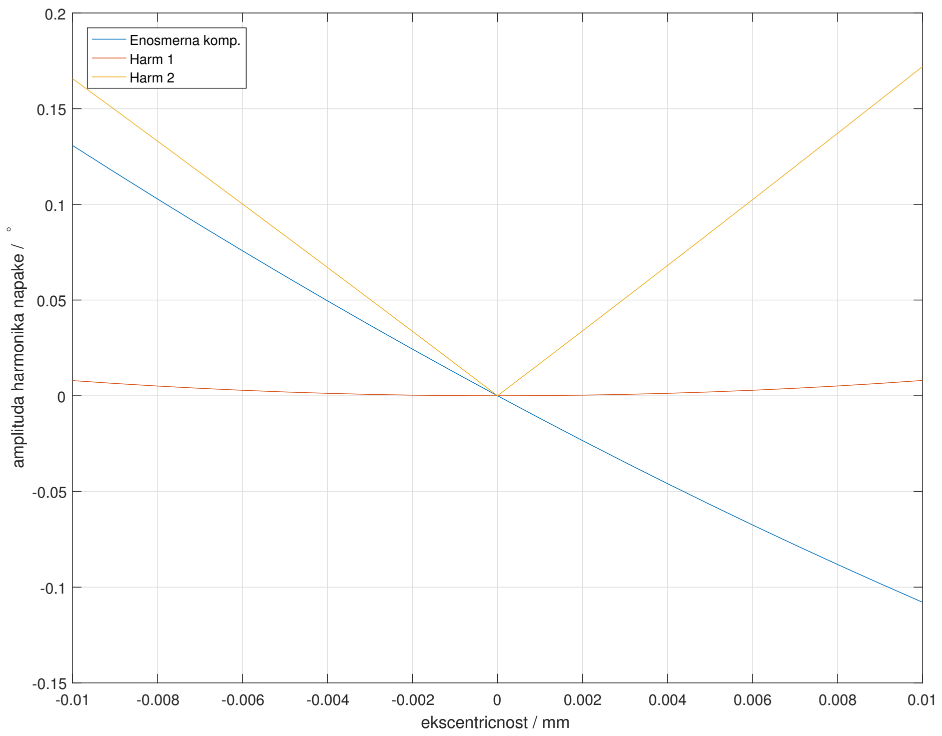
$$B_2 = \frac{30(3 r_0^2 y_s - 4 y_s^3)}{\pi r_0^3} \tag{2.23}$$

Oglejmo si sliko potekov posameznih harmonikov.

Iz grafa je razvidno, da do enosmerna komponenta upadala, drugi harmonik bo najbolj izrazit.

2.3.3 Aproksimacija pomerjenega kota ob dinamični ekscentričnosti x

Izraz (2.8) kjer upoštevamo le dinamično ekscentričnost se poenostavi v:



Slika 2.9: Poteki amplitud prvega in drugega harmonika ter enosmerne komponente ob spreminjanju statične ekscentričnosti v y-osi

$$A_0 = \frac{180(r_0\Delta x_d(r_0^6-7r_0^5\Delta x_d+18r_0^4\Delta x_d^2-36r_0^2\Delta x_d^4+28r_0\Delta x_d^5-8\Delta x_d^6))}{\pi(r_0^2-2r_0\Delta x_d+2\Delta x_d^2)^4} - \arctan\frac{\Delta x_d}{r_0-\Delta x_d} \tag{2.24}$$

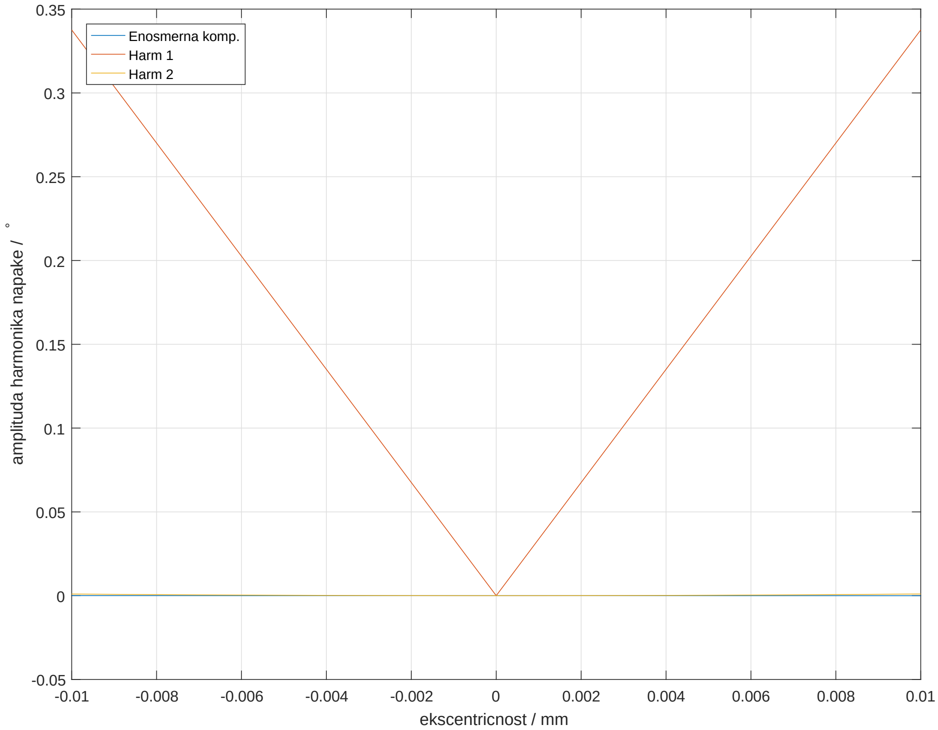
$$A_1 = \frac{-180(r_0\Delta x_d(r_0^6-8r_0^5\Delta x_d+22r_0^4\Delta x_d^2-44r_0^2\Delta x_d^4+32r_0\Delta x_d^5-8\Delta x_d^6)}{\pi(r_0^2-2r_0\Delta x_d+2\Delta x_d^2)^4)} \tag{2.25}$$

$$A_2 = \frac{-180(r_0^2\Delta x_d^2(r_0^4-4r_0^3\Delta x_d+8r_0\Delta x_d^3-4\Delta x_d^4)}{\pi(r_0^2-2r_0\Delta x_d+2\Delta x_d^2)^4)} \tag{2.26}$$

$$B_1 = \frac{60(\Delta x_d(3r_0^5-18r_0^4\Delta x_d+64r_0^3\Delta x_d^2-108r_0^2\Delta x_d^3+84r_0\Delta x_d^4-32\Delta x_d^5))}{\pi(r_0^2-2r_0\Delta x_d+2\Delta x_d^2)^3} \tag{2.27}$$

$$B_2 = \frac{60(2\Delta x_d^3(-4r_0^3+9r_0^2\Delta x_d-6r_0\Delta x_d^2+2\Delta x_d^3))}{\pi(r_0^2-2r_0\Delta x_d+2\Delta x_d^2)^3} \tag{2.28}$$

S slike 2.10 vidimo da bo izrazit le prvi harmonik, ki pri majhnih odmikih narašča linearno.



Slika 2.10: Poteki amplitud prvega in drugega harmonika ter enosmerne komponente ob spreminjanju dinamične ekscentričnosti v x-osi