

1 Uvod

V današnjem času elektromotorski pogoni vse hitreje nadomeščajo druge oblike ustvarjanja mehanskega dela. Zahteve po čim hitrejši regulaciji in zanesljivosti pogona so čedalje višje. V pogonih se želi doseči tudi čim višji izkoristek. Za doseganje uspešnega obratovanja elektromotorskega pogona se potrebuje dober in zanesljiv dajalnik pozicije. Dejavnike delimo na linearne dajalnike in dajalnike zasuka oz. rotacije. Tu se bom osredotočil na rotacijske dajalnike pozicije. Ti so lahko montirani na poljubnem mestu na osi (angl.: through hole), ali le na koncu osi (ang.: On-axis).

Vsak dajalnik ima točnost, katero doseže, če je pravilno montiran. Naapka nepravilne montaze je odvisna od nepravilno postavljenega aktuatorja na osi pogona, ali nepravilno montiranega senzorja. V tem delu bom analiziral kako se napaka

V tem delu se bom osredotočil na dajalnik RM44, ki ga bom namerno

Dajalnike ločimo tudi glede na uporabljen princip zaznavanja premika. Poznamo magnetne, optične, induktivne in druge. Dejavniki se razlikujejo tudi na izodne signale.

2 Dajalniki pozicije RM44

Dajalnik pozicije RM44 je produkt podjetja RLS merilna tehnika d.o.o. kratka RLS pomeni rotacijski in linearni senzorji zasuka (ang.: Rotary and Linear motion Sensors). Podjetje proizvaja merilnike na podlagi merjenja magnetnega polja. Dajalnik pozicije RM44 spada v družio enkoderjev montiranih na koncu osi rotirajoče gredi (ang.: On-axis). Na rotirajočo os je pritrjen cilindrični magnet, ki je diametralno magnetiziran. Senzor je sestavljen iz čipa AM8192B, v katerem so vgrajene Hallove sonde za merjenje pravokotne komponente magnetnega polja, magneta montiranega na os pogona. Izhod senzorja je lahko analogen v obliki dveh signalov sinusa in kosinusa. Izhod senzorja je lahko inkrementalni, ki poda relativno spremembo pozicije ter smer premikanja. Senzor lahko prikaže tudi absolutno vrednost pozicije. Njegova resolucija je nastavljiva med 320 in 8192 pozicij na obrat.

3 Analitična izpeljava dinamične in statične ekscentričnosti

Napake so prisotne pravzaprav pri vsakem senzorju. V tem poglavju bom analitično prikazal vpliv napak omenjenih ekscentričnosti, ki se pojavijo ob nepravilni montaži senzorja. Njuna vpliva različno vplivata na napako zato ju bom obravnaval posamično. V delu sem predpostavil, da se izmiki iz idealne pozicije izmikajo le v smeri x in y. Napaka se pojavi tudi ob premiku v smeri z vendar tega tu ne bom obravnaval. Zaradi narave problema je smiselno uporabiti kartezični koordinatni sistem. V izpeljavah bom predpostavil, da so izmiki majhni. Najprej bom izpeljal po kašni trajektoriji se giblje posamezna Hallova sonda. Iz znane trenutne lokacije Hallove sonde bom lahko izračunal vrednost B komponente ki jo meri posamezna Hallova sonda. Pri analitični izpeljavi bom predpostavil, da je polje ob majhnih odmikih linearno in ustreza enacbi polja $B(x, y) = k \cdot y$. Nato bom analitično izrazil vrednost kota, ki predstavlja izhod senzorja.

3.1 Začetna pozicija senzorjev

Za določanje kota med vektorjem ki kaže v smeri x-os (1_x) in vektorjem med koordinatnim izhodiščem in poljubno točko v koordinatnem sistemu, je potrebno poznati poznati le položaj točke. Primer je podan na sliki 3.1. Kot φ določimo preko trigonometrične funkcije arctan:

$$\varphi = \arctan \frac{y_0}{x_0}$$



Slika 3.1: Slika za pomoč pri določanju kota

Za določitev kota φ je dovolj poznati že projekciji vektorja na koordinatni osi (slika 3.2),



Slika 3.2: Slika za pomoč pri določanju kota

Če poznamo le projekciji točke na koordinatni osi, je to zadosten pogoj za določitev kota φ . Za določitev kota zasuka v idealnih pogojih, kot je predpostavka, da je polje linearno, sta dovolj dve Hallovi sondi, ki sta prostorsko zama knjeni za 90° (Slika 3.3).

Začetni lokaciji sond enostavno postavimo na koordinatni osi in s tem ustrezemo pogoju po prostorskem zasuku med sondama. Sonde postavimo na

razdaljo r_0 od koordinatnega izhodišča. S tem dobimo začetni lokaciji Hallovih sond $H_1(x_0, y_0) = (r_0, 0)$, $H_2(x_0, y_0) = (0, r_0)$.



Slika 3.3: Začetna postavitev Hallovih sond

3.2 Zasuk magneta

Z zasukom magneta za kot θ se na mestu, kjer merimo magnetno polje, polje spremni. Polje bi se spremenilo enako če bi nad magnetom zasukali senzor za kot $-\theta$. Hallova sonda z začetno lokacijo (x_0, y_0) bi se po krožnici premaknila v novo lokacijo (x, y) :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Z upoštevanjem da je funkcija sinus liha in funkcija kosinus soda, se izračun v enačbi 3.1 poenostavi v:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Ko zavrtimo senzor okoli magneta pri tem pomeri polje. Ker sem predpostavil linearno polje, ga predstavim s izrazom

$$B(x, y) = k \cdot x \quad (3.3)$$



Slika 3.4: Hallovi sondi se glede na magnet nahajati na enaki lokaciji

Za poenostavitev vzemimo $k = 1$. S tem se enačba 3.3 poenostavi v:

$$B(x, y) = x \quad (3.4)$$

Polje ki ga pomeri posamezna sonda dobimo z upoštevanjem enačb 3.2 in 3.4.

$$B_{H_1}(\theta) = r_0 \cdot \sin \theta \quad (3.5)$$

$$B_{H_2}(\theta) = r_0 \cdot \cos \theta \quad (3.6)$$

3.3 Izpeljava enačb pri dinamični ekscentričnosti

Opazujmo sedaj opisan sistem z dodano dinamično ekscentričnostjo. Definirajmo začetno lego rotorja v centru statorja $S_r(0, 0) = S_s(0, 0)$. Rotor izmaknemo iz začetne lege v novo središče $S_r(\Delta x_d, \Delta y_d)$. Os vrtenja ostaja v centru statorja, zato staro središče rotorja opisuje krožnico s polmerom $\sqrt{\Delta x_d^2 + \Delta y_d^2}$.

Če sedaj sistem miselno obrnemo kot sem to napravil v prejnjem poglavju in senzor zavrtimo. Ob takem premiku senzor opiše trajektorijo kot pri pravilno



Slika 3.5: Magnetno polje, ki ga pomeriti sonde, ko je montaža pravilna

montiranjem senzorju le z dodano translacijo ekscentričnosti. Kako Hallova sonda spreminja lokacijo glede na vrtenje je prikazano na sliki 3.6b, s pikčasto krožnico.

Novo lokacijo Hallove sonde lahko določimo po enačbi 3.7.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_0 \\ r_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta x_d \\ -\Delta y_d \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Enačbo 3.7 lahko poenostavimo pri čemer Δx_d in Δy_d predstavlja vrednost za koliko je rotor izmaknjen iz osi vrtenja.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_0 \\ r_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_d \\ \Delta y_d \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Z upoštevanjem magnetnega polja po izrazu 3.4 izrazimo odvisnost ma-



Slika 3.6: Hallovi sondi se glede na magnet nahajati na enaki lokaciji

gnetnega polja od kota zasuke in ekscentričnosti. Iz potekov magnetnega polja v izrazih (3.9) in (3.10) opazimo da magnetno polje ni odvisno od dinamične ekscentričnosti v y smeri. S hitrim miselnim eksperimentom si lahko hitro predstavljamo, da če senzor izmaknemo v smeri y magnetno polje na novi lokaciji ostane enako.

$$B_{H_1}(\theta) = r_0 \cdot \cos \theta - \Delta x_d \quad (3.9)$$

$$B_{H_2}(\theta) = r_0 \cdot \sin \theta - \Delta x_d \quad (3.10)$$

3.4 Izpeljava enačb pri statični ekscentričnosti

Opazovani sistem ostaja enak, brez ekscentričnosti. Sedaj iz osi vrtenja izmaknemo senzor. Os magneta in os vrtenja sta poravnani. Središče senzorja se sedaj nahaja na koordinatah $S_s(\Delta x_s, \Delta y_s)$. kot pri izpeljavi pri dinamični ekscentričnosti obrnimo sistem in zavrtimo senzor upoštevajoče z ekscentričnostjo. Središče senzorja opiše krožnico okoli središča magneta oz. osi vrtenja. Hallovi



Slika 3.7: Magnetno polje, ki ga pomeriti sonde, ko je magnet izmaknjen

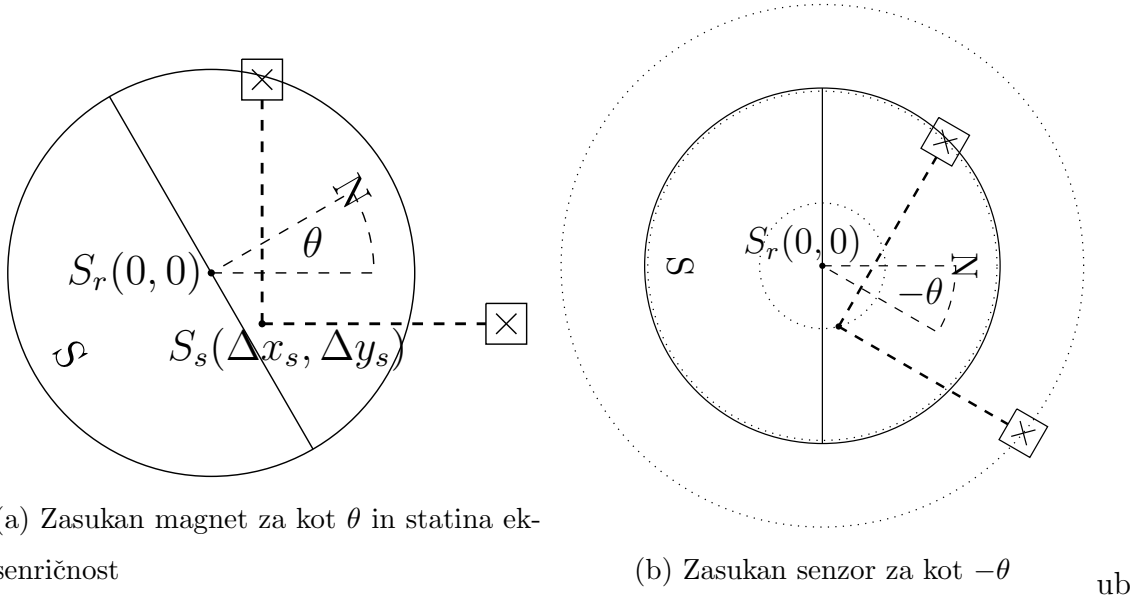
sondi se vrtita vsaka po svoji krožnici. Gibanje posamezne sonde lahko opišemo z izrazom:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_0 + \Delta x_s \\ r_0 + \Delta y_s \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Magnetno polje, ki ga pomerita dobimo iz izraza (3.4).

$$B_{H_1} = (r_0 + \Delta x_s) \cos(\theta) + \Delta y_s \sin(\theta) \quad (3.12)$$

$$B_{H_2} = -\Delta x_s \sin(\theta) + (r_0 + \Delta y_s) \cos(\theta) \quad (3.13)$$



Slika 3.8: Hallovi sondi se glede na magnet nahajati na enaki lokaciji

3.5 Končna enačba za določitev lokacije sonde in določanje pomerjenega kota

Sedaj lahko izraza za določanje lokacije in hkrati magnetnega polja zapišemo z eno enačbo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 + \Delta x_s \\ y_0 + \Delta y_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_d \\ \Delta y_d \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

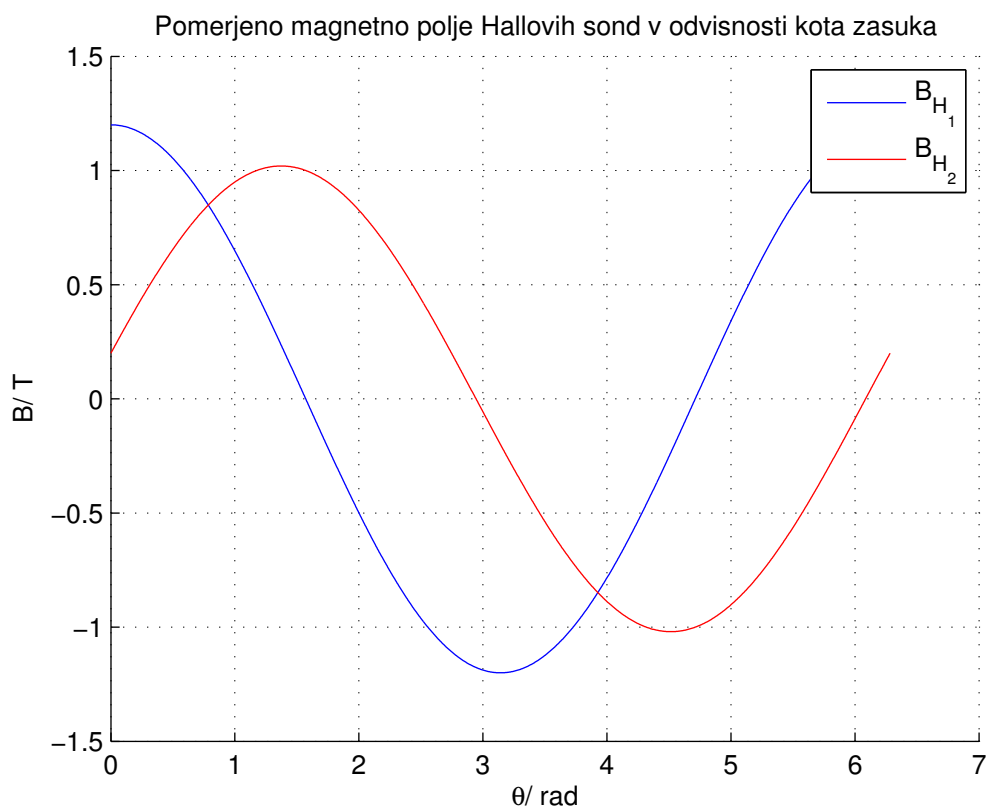
Polje ki ga opišeti sondi se glasi:

$$B_{H_1} = (r_0 + \Delta x_s) \cos(\theta) + \Delta y_s \sin(\theta) - \Delta x_d \quad (3.15)$$

$$B_{H_2} = \Delta x_s \cos(\theta) + (r_0 + \Delta y_s) \sin(\theta) - \Delta x_d \quad (3.16)$$

Iz izrazov (3.15) in (3.16) sedaj lahko izračunamo kot.

$$\varphi = \arctan \frac{B_{H_2}}{B_{H_1}} = \arctan \frac{\Delta x_s \cos(\theta) + (r_0 + \Delta y_s) \sin(\theta) - \Delta x_d}{(r_0 + \Delta x_s) \cos(\theta) + \Delta y_s \sin(\theta) - \Delta x_d} \quad (3.17)$$



Slika 3.9: Magnetno polje, ki ga pomeriti sonde, ko je senzor izmaknjen

3.6 Določanje kota pri statični ekscentričnosti v smeri x

Zaradi nelinearnosti funkcije \arctan je izraz (3.17) analitično težko poenostaviti v polni obliki. Zato se vsake ekscentričnosti lotim posamično. Če upoštevamo le ekscentričnost Δx_s se izraz (3.17) poenostavi v:

$$\varphi = \arctan \frac{\Delta x_s \cos(\theta) + r_0 \sin(\theta)}{(r_0 + \Delta x_s) \cos(\theta)} \quad (3.18)$$

Z upoštevanjem Taylorjeve vrse za \arctan :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} \dots \text{pri } |x| \leq 1 \quad (3.19)$$

Izraz lahko zapišemo kot

$$\varphi = \frac{\Delta x_s \cos(\theta) + r_0 \sin(\theta)}{(r_0 + \Delta x_s) \cos(\theta)} + \frac{(\Delta x_s \cos(\theta) + r_0 \sin(\theta))^3}{3((r_0 + \Delta x_s) \cos(\theta))^3} \quad (3.20)$$

3.7 Določanje približka za funkcijo arctan

Funkcija arkustangens (arctan), je inverzna funkcija funkcije tangens.

Zaloga vrednosti je v območju med $-\pi/2$ in $\pi/2$. Funkcija arkustangens tako zajame le polovico periode. V numeriki se za določitev kota na celi periodi $[-\pi, \pi]$ uporablja funkcijo *atan2*, ki sprejme dva parametra in na podlagi njunih predznakov določi v katerem kvadrantu se nahaja iskani kot.

$$\varphi = \text{atan2}(x, y) = \begin{cases} [0, \frac{\pi}{2}] : & x \geq 0, y \geq 0 \\ [\frac{\pi}{2}, \pi] : & x \leq 0, y \geq 0 \\ [-\pi, -\frac{\pi}{2}] : & x \leq 0, y \leq 0 \\ [-\frac{\pi}{2}, 0] : & x \geq 0, y \leq 0 \end{cases}$$

Funkcija *atan2* nato preko funkcije arctan izračuna vrednost na podlagi razmerja $\frac{y}{x}$. Iz izraza (3.21) lahko vidimo, da je potrebno poznati za funkcijo arctan zalogo vrednosti le med $-\frac{\pi}{4}$ in $\frac{\pi}{4}$.

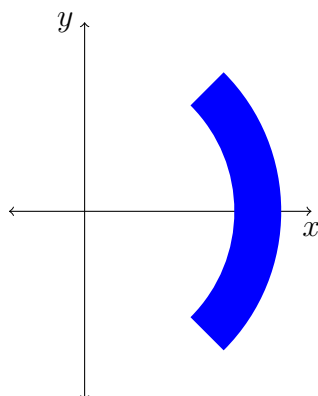
$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \quad (3.21)$$

Za določitev kota ne glede kje na periodi, je potrebno izračunati kvocient med spremenljivko x in y . Da bi se izognil temu deljenju sem aproksimiral funkcijo $f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ z ravnino (3.22).

$$\varphi(x, y) = a_1 x^3 + a_2 x^2 y + a_3 x^2 + a_4 x y^2 + a_5 x y + a_6 x + a_7 y^3 + a_8 y^2 + a_9 y + a_{10} \quad (3.22)$$

Funkcijo sem aproksimiral na naključno razporejene točke po četrtini krožnega kolobarja $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, z radijema $a = r_0 - 0.2$ mm in $b = r_0 + 0.2$ mm.

Za točke znotraj območja sem izračunal vrednost $\arctan \frac{y}{x}$. Na to sem z uporabo funkcije *polyfitn*(dodaj vir), aproksimiral ravnino definirano z izrazom



Slika 3.10: Območje nahajanja ključnih točk

(3.22). Dobil sem koeficiente katere sem lahko uporabil v izračunih za analitičen prikaz napake. Ravnina je na definiranem območju odstopala za največ $0,253^\circ$. S predpostavko, da bo napaka ob dovolj veliki ekscentričnosti, višja od napake zaradi aproksimacije ravnine sem v izraz za ravnino, vstavil izraza (3.15) in (3.16). Izpeljava je prikazana v dodatku. Izrazi se poenostavijo če posamično obravnavam vsako ekscentričnost.

Z vnosom številke se je pokazalo, da bo pri statičnem izmiku nekoliko bolj izrazit drugi harmonik napake, kot pri dinamični ekscentričnosti.

Tu se kaj napisati

Več informacij je bilo težko izluščiti, saj je bila funkcija arctan aproksimirana z ravnino dveh spremenljivk le na četrtini celotne periode.

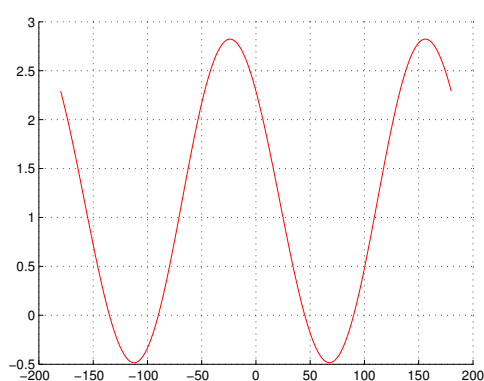
4 Numeričen izračun napake

Od tu naprej sem za izračun kota uporabljal vgrajeno funkcijo *atan2*, ki numerično določi izhodni kot φ glede na vhodni spremenljivki x in y . Pri izračunih sem postavil hallovi sondi na razdaljo $r_0 = 2,4$ mm, vsako ekscentričnost posamezno sem simuliral z 0,1 mm izmikom.

4.0.1 Napaka pri statični ekscentričnosti v smeri x-osi

Z vnosom izrazov (3.15) in (3.16) v funkcijo *atan2*, s statično ekscentričnostjo v x-osi se pojavi napaka definirana kot

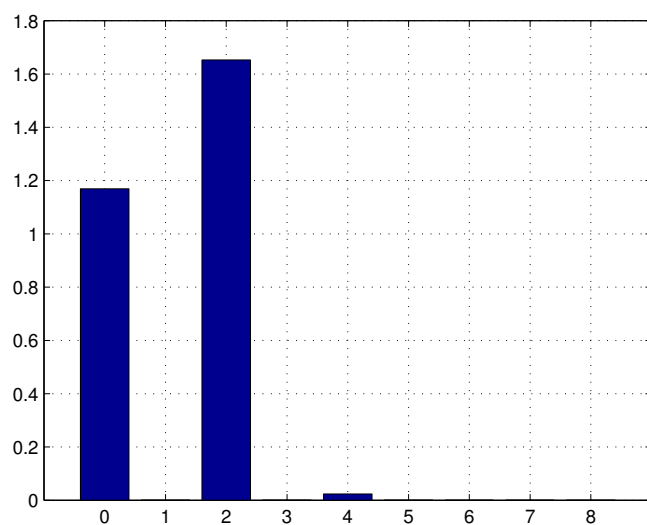
$$\varepsilon = \varphi - \theta \quad (4.1)$$



Slika 4.1: numeričen izračun napake

Iz slike 4.1 se vidi napaka v obliki enosmerne komponente in drugega har-

minika na periodo. Napaka se s konstantnim vrtenjem magneta ne akumulira, zato je dovolj prikaz napake na eni periodi. Napako razvijem v Fouriejevo vrsto do osmega harmonika. Amplitude posameznih harmonikov za statično ekscentričnost v smeri x osi za izmik 0,1 mm so prikazane na sliki 4.2.



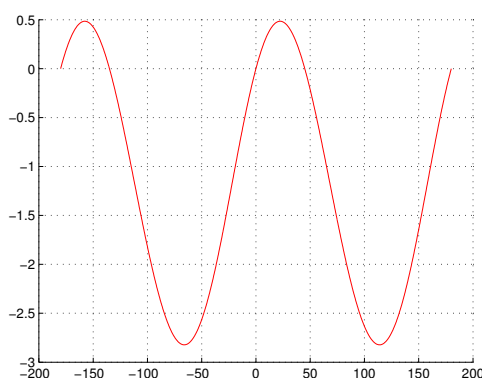
Slika 4.2: AAmplitude harmonikov protokola

Kot smo že predpostavili po sliki 4.1 izstopata predvsem enosmerna komponenta in drugi harmonik. Nakaj je še četrtega harmonika medtem ko so ostali harmoniki zanemarljivi.

4.0.2 Napaka pri statični ekscentričnosti v smeri y-osi

Pri statični ekscentričnosti sem ponovil postopek kot pri statični ekscentričnosti v smeri x-osi. Pričakoval sem podobne rezultate, kot pri statični ekscentričnosti v smeri x-osi. Napaka kota ε je prikazana na sliki 4.3. Prav tako kot pri napaki ob statični ekscentričnosti v smeri x-osi izstopa enosmerna komponenta in drugi harmonik. Opazimo, da je enosmerna komponenta spremenila predznak. Iz Fouriejeve vrste (slika 4.4) Opazimo rezultate podobne kot pri statični ekscentričnosti v smeri x-osi. Izstopajo enosmerna komponenta drugi harmonik, obstaja tudi

četrti harmonik, ostali so zanemarljivi. Zanimivost lahko razberemo še iz faznega premika. Napaka pri statični ekscentričnosti v smeri y-osi, za statično napako v smeri x-osi, fazno zaostaja ravno za velikost dveh faznih kotov. To se pojavi pri drugem in šestem harmoniku. Šesti harmonik je po amplitudi zanemarljiv zato je zanimiv podatek o faznem kotu le za drugi harmonik.



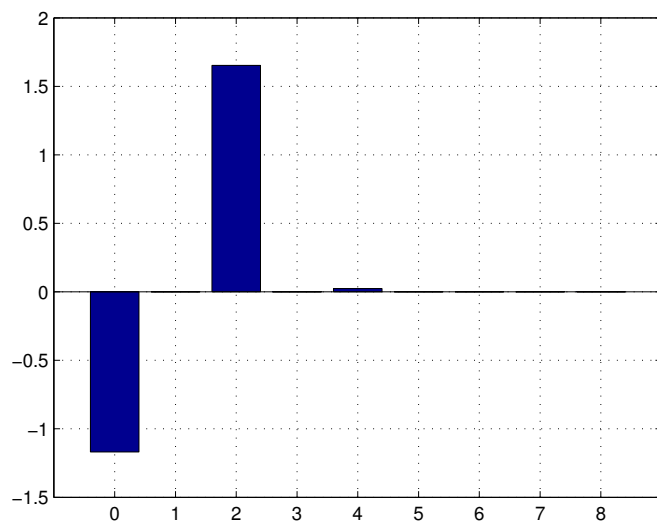
Slika 4.3: numeričen izračun napake

4.0.3 Napaka pri dinamični ekscentričnosti v smeri x-osi

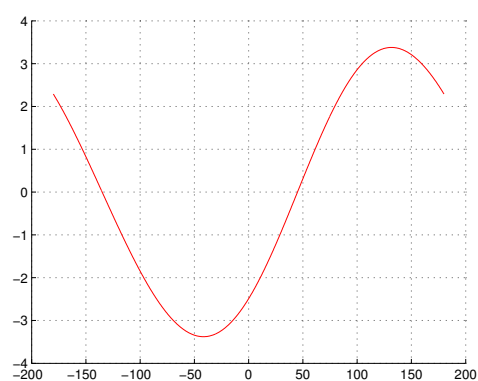
Že iz analitičnih izrazov lahko pričakujemo, da bo tu manjša izrazitost drugega harmonika. Napaka kota ε je prikazana na sliki 4.5. Izrazit je predvsem prvi harmonik. Nezanemarljiv je še drugi harmonik, ostale komponente Fourierjeve vrste pa so zanemarljive.

4.1 Linearno večanje napake in opazovanje posameznih harmonikov pogreška

Sedaj pogledjmo kako se spreminja posamezna amplituda ekcentričnosti glede na velikost ekscentričnosti. Posamično sem večal ekscentričnosti in pri tem opazoval spreminjanje pogreška ε . Pogrešek ε sem razvil v fourierovo vrsto in opazoval



Slika 4.4: AAmplitude harmonikov protokola



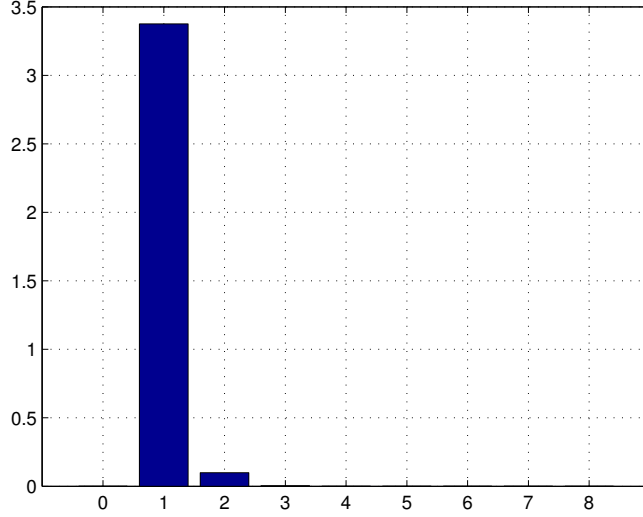
Slika 4.5: numeričen izračun napake

amplitudo posameznega harmonika $A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)$.

4.1.1 Večanje statične napake v x-osi

Z večanjem statične napake se spreminja amplituda posameznih harmonikov.

Slika 4.7 prikazuje potek amplitud posameznih harmonikov poteka napake ε .



Slika 4.6: AAmplitude harmonikov protokola

Opazimo dokaj linearno povečevanje amplitude posameznega harmonika. Vednost amplitude lahko zapišemo kot polinom druge stopnje.

$$A_0(\Delta x_s) = 0.24856\Delta x_s^3 - 2.334952\Delta x_s^2 + 11.8579362\Delta x_s + 0.00749 \quad (4.2)$$

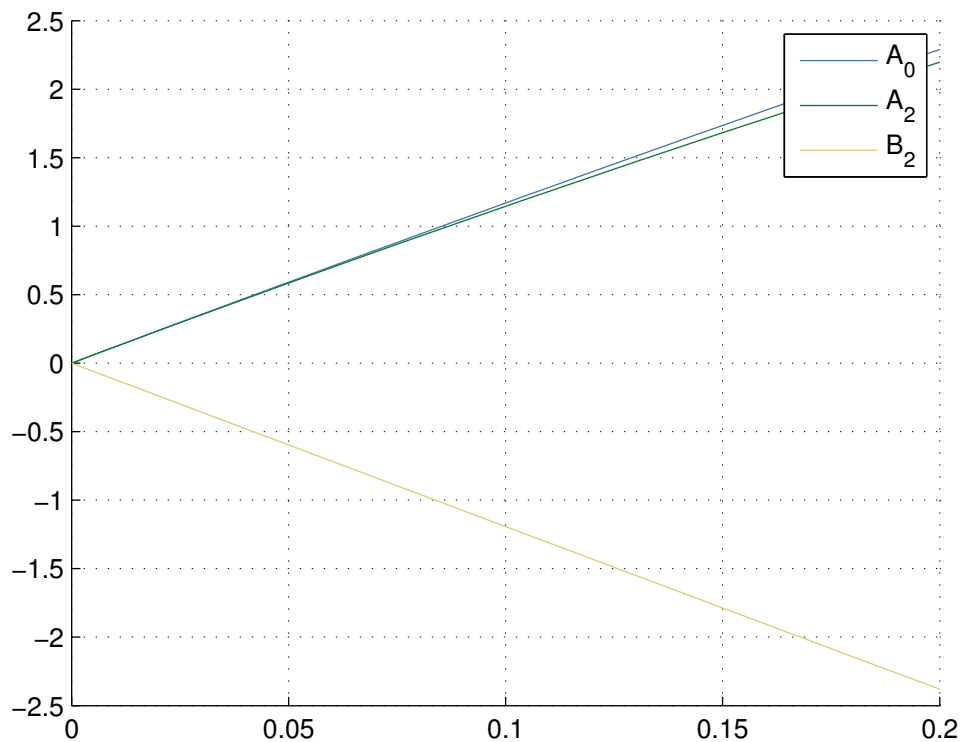
$$A_2(\Delta x_s) = 0.61989\Delta x_s^3 - 4.32207\Delta x_s^2 + 11.62794\Delta x_s + 0.02824 \quad (4.3)$$

$$B_2(\Delta x_s) = 0.32657\Delta x_s^3 + 0.45499\Delta x_s^2 - 12.04424\Delta x_s + 0.00516 \quad (4.4)$$

S primerjavo z analitičnih izpeljav lahko vidimo, da se pri majhnih ekscentričnostih amplitude harmonikov pogreška ε linearno povečujejo.

4.1.2 Večanje statične ekscentričnosti v y-osi

Na sliki 4.8 vidimo spreminjanje amplitude izrazitih posameznih harmonikov. Pri statični ekscentričnosti v smeri y-osi se velikosti amplitud pri določeni ekscentričnosti ne spremeni. Spremeni se le predznak. Predznak se spremenila amplituda enosmerne komponente in sinusna komponenta. S zapisom odvisnosti amplitude od ekscentričnosti s polinomom dobimo izraze:



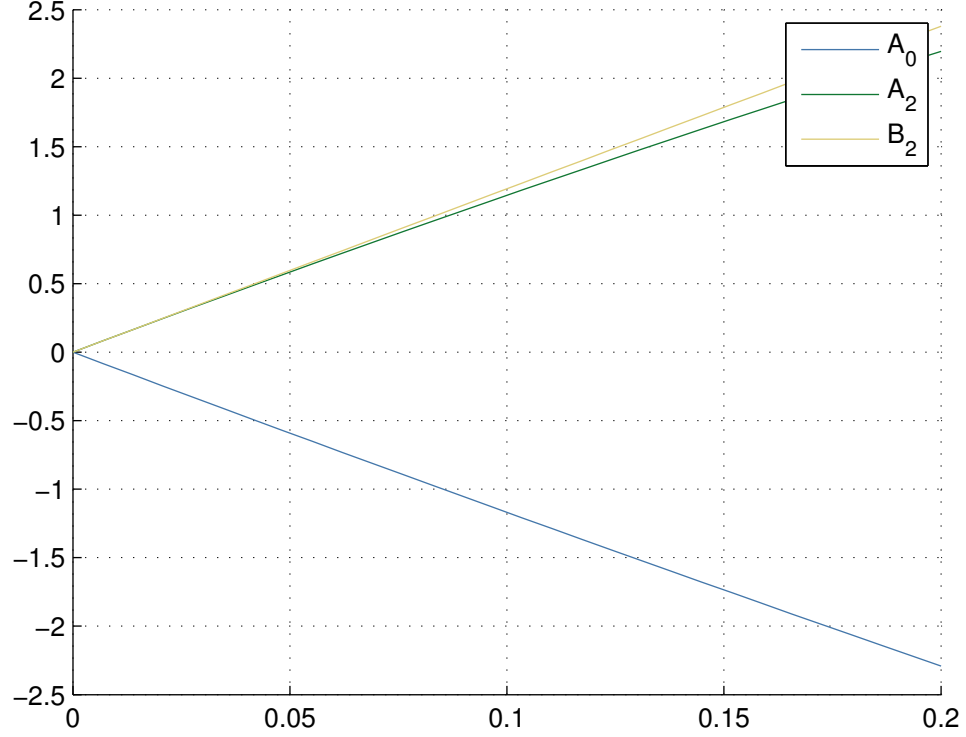
Slika 4.7: Amplitude harmonikov s spreminjanjem ekscentričnosti

$$A_0(\Delta y_s) = -0.24299\Delta y_s^3 + 2.33829\Delta y_s^2 - 11.87186\Delta y_s - 0.00587 \quad (4.5)$$

$$A_2(\Delta y_s) = 0.85111\Delta y_s^3 - 4.800845\Delta y_s^2 + 11.88757\Delta y_s + 0.00263 \quad (4.6)$$

$$B_2(\Delta y_s) = -0.33333\Delta y_s^3 - 0.45861\Delta y_s^2 + 12.0461\Delta y_s - 0.00527 \quad (4.7)$$

Izrazi (4.5), (4.6) in (4.7) so podobni izrazom (4.2), (4.3) in (4.4). Razlikujejo se le v predznakih pri izrazih (4.2) in (4.4). Razlika pri decimalnih mesti se pojavi zaradi numeričnih napak in končnega števila točk s katerimi sem aproksimiral polinom.



Slika 4.8: Amplitude harmonikov s spreminjanjem ekscentričnosti

4.1.3 Večanje dinamične napake v x-osi

Že v poglavju 4.0.3, smo opazili, da se pri dinamični ekscentričnosti napaka ε pojavi v izraziti obliki prvega harmonika. Na sliki 4.9 vidim potek amplitude prvega in drugega harmonika. Z aproksimacijo, posamezne amplitude od dinamične ekscentričnosti v smeri x-osi, s polinomom dobimo izraze:

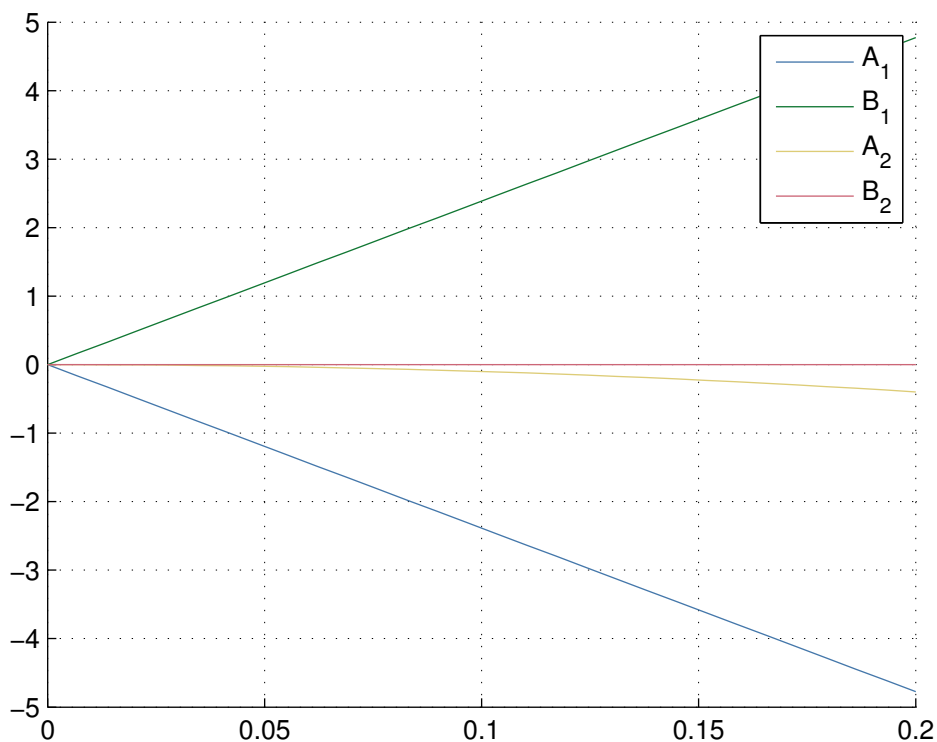
$$A_1(\Delta x_d) = -0.6196\Delta x_d^3 + 0.71962\Delta x_d^2 - 24.09233\Delta x_d + 0.01225 \quad (4.8)$$

$$B_1(\Delta x_d) = 0.52925\Delta x_d^3 - 0.50255\Delta x_d^2 + 24.00878\Delta x_d - 0.00688 \quad (4.9)$$

$$A_2(\Delta x_d) = 0.17300\Delta x_d^3 - 9.97085\Delta x_d^2 - 0.02442\Delta x_d + 0.00272 \quad (4.10)$$

$$B_2(\Delta x_d) = -1.64858\Delta x_d^3 + 1.6394\Delta x_d^2 - 0.45992\Delta x_d + 0.02430 \quad (4.11)$$

Iz izrazov vidimo linearno naraščanje amplitude prvega harmonika. Z večanjem ekscentričnosti prične kvadratično naraščati tudi drugi harmonik.



Slika 4.9: Amplitude harmonikov s spreminjanjem ekscentričnosti

4.2 Izračun napke z realnimi podatki gostote magnetnega polja

V podjetju RLS merilna tehnika so mi simulirali Z-komponento vektorja gostote magnetnega pretoka. Simulacija je bila opravljena na višini 2.55mm nad magnetom tako kot to predpisuje podotkovni list senzorja RM44. Kljub realnemu polju se zavedam da bo točnost simulacije slabša od realnega senzorja, saj merim polje le z dvema sondama. Sonde sem postavil na enak radij, kot so postavljene sonde v senzorju. S spreminjanjem radija na katerega sem postavil sonde se je spremi-

njala tudi velikost napake. Napaka je bila glede na dimenzije magneta najnižja pri postavitvi sond na radij 2.4mm. Simulacije sem se lotil na enak način kot pri predpostavki, da je gostota magnetnega polja linearna funkcija.

S poznavanjem lokacije sonde, sem iz tabele rezultatov simulacije Z-komponente vektorja B, odčital polje.

Izračun vrednosti polja v določeni točki z uporabo funkcije `interp2` je dolgotrajen. Funkcija `interp2` ima velik povprečni čas izvajanja (ACET-avrage case execution time). Za hitrejše izvajanje simulacije, sem zato za vrednost polja v določeni točki uporabil vrednost polja, v kateri imam znano polje in je le ta najbližja točki v kateri želim dobiti polje. Simulacije sem opravil tudi z uporabo funkcije `interp2`. () Razlika dobljenih potokev vektorja B je vidna na sliki (dodaj sliko !!!!!). Razlika ni velika, čas izvajanja simulacije pa je krajši.

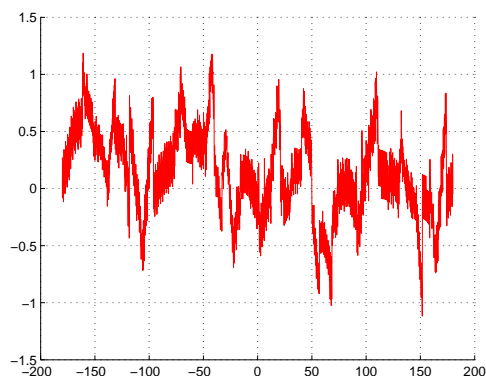
Tako sem dobil poteke vektorja B, ki ga pomeriti sondi v odvisnosti od trenutnega zasuka θ . Nato sem z uporabo funkcije `atan2` določil vrednost kota φ .

Podatek, ki me je zanimal, je seveda napaka. V naslednjih podpoglavjih bom predstavil, potek napake ε v odvisnosti od kota zasuka θ , z uporabo realnega vektorja B ki ga ustvarja magnet.

4.2.1 Napaka brez ekscentričnosti

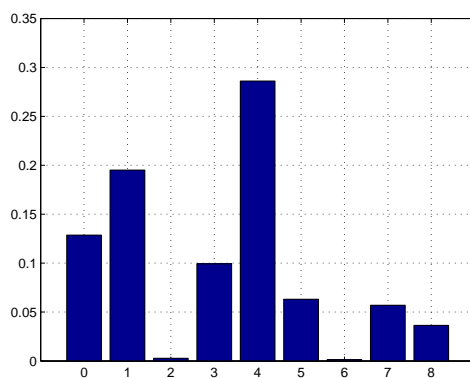
Poglejmo najprej kakšen je potek napake brez ekscentričnosti. Potek napake ε se nahaja na sliki 4.10. Opazimo da je nekoliko bolj izrazit četrti harmonik, ki pri simulacijah ekscentričnosti z aprksimacijo linearne vektorja B ni bil ključen. Večji skoki ki se pojavljajo v napaki (kot naprimer pri $\theta = -160^\circ$), so posledica numerične napake pri simulaciji Z komponente vektorja B.

Z razvojem napake ε v Fouriejevo vrsto, se potrди teza da je najvišji četrti harmonik. Pri uporabi linearne polja vektorja B se je statično ekscentričnostjo najbolj spreminjala amplituda drugega harmonika, katera je v napaki na sliki 4.11 majhna. Višje harmonike bi lahko izločil če bi uporabil več Hallovih sond. Sonde



Slika 4.10: Napaka pomejenega kota pri idealni montazi

bi morale biti pametno razporejene po radiju, tako kot je to vrjetno izvedeno v senzorju RM44.

Slika 4.11: Amplitude harmonikov pogreška ε

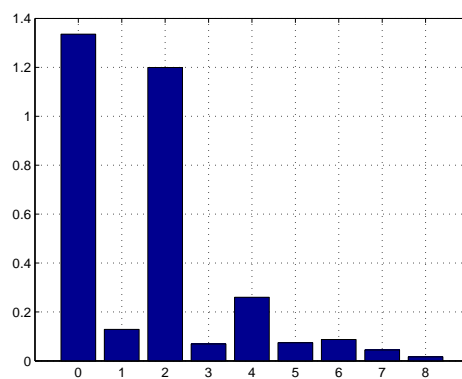
4.2.2 Napaka pri statični ekscentričnosti v smeri x-osi

Sedaj v simulaciji dodamo statično ekscentričnost v smeri x-osi. Razlika med izračunanim kotom φ in pravim kotom θ , v odvisnosti od pravih kota θ je prikazana na sliki 4.12. Tako kot je v napaki pri uporabi linearnega vektorja B najbolj izstopala enosmerna komponenta in drugi harmonik, se tudi tu takoj opazi podoben potek.



Slika 4.12: Napaka pomerjenega kota pri statični ekscentričnosti v smeri x-osi

Z razvojem napake v Fourijejevo vrsto (slika 4.13) lahko vidimo podobnosti, z napako, kjer je bilo uporabljeno linearno polje vektorja B . Izstopati enosmerna komponenta in drugi harmonik. Malo izstopa tudi četrti harmonik, ostali so zanemarljivi.



Slika 4.13: Amplitude harmonikov pogreška ε ob statični ekscentričnosti v smeri x-osi

4.2.3 Napaka pri statični ekscentričnosti v smeri y-osi

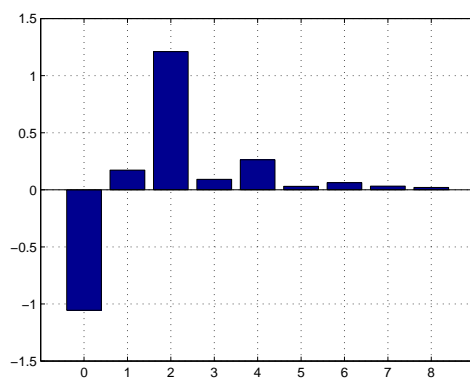
Po simulacijah z uporabo linearnega polja sem pričakoval enak potek napake kot pri statični ekscentričnosti v smeri x-osi. Pričakoval sem razliko le v enosmerni

komponenti, ki bo negativna, drugi harmonik pa fazno premaknjen.

Napaka ε za primer ekscentričnosti v smeri y-osi, je prikazana na sliki 4.14. S slike se opazi pričakovano negativno enosmerno komponento in izrazit drugi harmonik. Razvoj napake ε v Fourierovo vrsto potrди pričakovane rezultate (slika 4.15).



Slika 4.14: Napaka pomerjenega kota pri statični ekscentričnosti v smeri y-osi



Slika 4.15: Amplitude harmonikov pogreška ε ob statični ekscentričnosti v smeri y-osi

4.2.4 Napaka pri dinamični ekscentričnosti v smeri x-osi

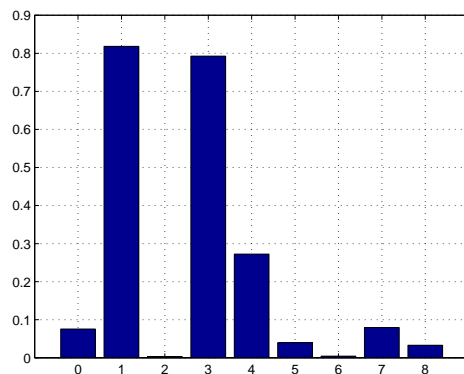
Pri dinamične ekscentričnosti sem pričakoval izrazit prvi harmonik napake. Napaka ε prikazana na sliki 4.16. Na sliki opazimo izrazit tretji harmonik, ki je bil v napaki z uporabo linearnega polja B zanemarljiv. Z razvojem napake v Fourierovo vrsto (slika 4.17) opazimo, da je amplituda tretjega harmonika podobna amplitudi prvega harmonika. Enosmerna komponenta je nizka po pričakovanjih. Ostali harmoniki imajo enake vrednosti kot napaka, kjer sem postavil ekscentričnosti na nič. Amplituda prvega harmonika je nižja od pričakovane vrednosti.



Slika 4.16: Napaka pomerjenega kota pri dinamični ekscentričnosti v smeri x-osi

4.2.5 Napaka pri dinamični ekscentričnosti v smeri y-osi

Dinamična ekscentričnost v smeri y-osi ni bilo zaradi poenostavitve z uporabo linearnega polja B. Z uporabo realnega modela polja pričakujem napako podobno. Napaka je prikazana na sliki 4.18. Napaka je zelo podobna napaki dinamične ekscentričnosti v smeri x-osi z uporabo linearnega magnetnega polja B. Izrazit je prvi harmonik, izstopa tudi tretji. Z razvojem v Fourierjevo vrsto, opazimo izrazit prvi harmonik. Povišala se je amplituda tretjega harmonika, ostali harmoniki pa imajo amplitude zanemarljive.



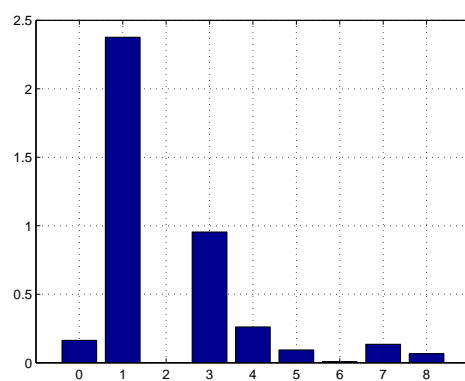
Slika 4.17: Amplitude harmonikov pogreška ε ob dinamični ekscentričnosti v smeri x-osi



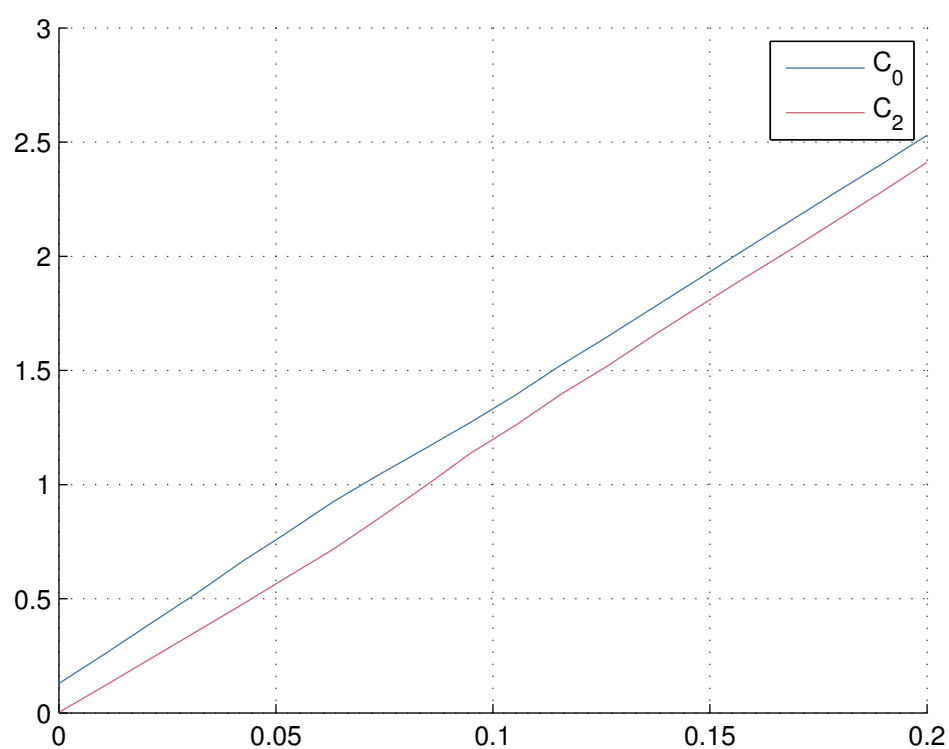
Slika 4.18: Napaka pomerjenega kota pri dinamični ekscentričnosti v smeri y-osi

4.2.6 Večanje statične ekscentričnosti v x-osi

Sedaj pogledjmo odvisnost spreminjanja posamezne amplitude harmonikov v odvisnosti od statične ekscentričnosti v smeri x-osi. Iz rezultatov kjer smo postavili linearno polje z-komponente vektorja B . Pričajkujem tudi tu podobne rezultate. Začetne vrednosti amplitud bodo neničelne, saj že v primeru brez ekscentričnosti dobimo napako, ki se izraža v posameznih harmonikih (slika 4.11). Spremembo amplitude enosmerne komponente in drugega harmonika je vidna na sliki 4.20.



Slika 4.19: Amplitude harmonikov pogreška ε ob dinamični ekscentričnosti v smeri y-osi



Slika 4.20: Amplitude harmonikov s spreminjanjem ekscentričnosti

Spreminjanje amplitude posameznega harmonika lahko aproksimiramo s polinomom tretje stopnje in dobimo izraz:

$$C_0(\Delta x_s) = 39,78\Delta x_s^3 - 13,29\Delta x_s^2 + 13,12\Delta x_s + 0,12 \quad (4.12)$$

$$C_2(\Delta x_s) = -61,68\Delta x_s^3 + 19,77\Delta x_s^2 + 10,49\Delta x_s + 0,004 \quad (4.13)$$

Pričakovano je začetna vrednost aproksimacijskega polinoma enaka amplitudi harmonika pri napaki brez ekscentričnosti. Enosmerna komponenta je narašča enako, kot je naraščala pri simulaciji z uporabo linearnega polja z-komponente vektorja B, medtem ko amplituda drugega harmonika narašča počasneje.

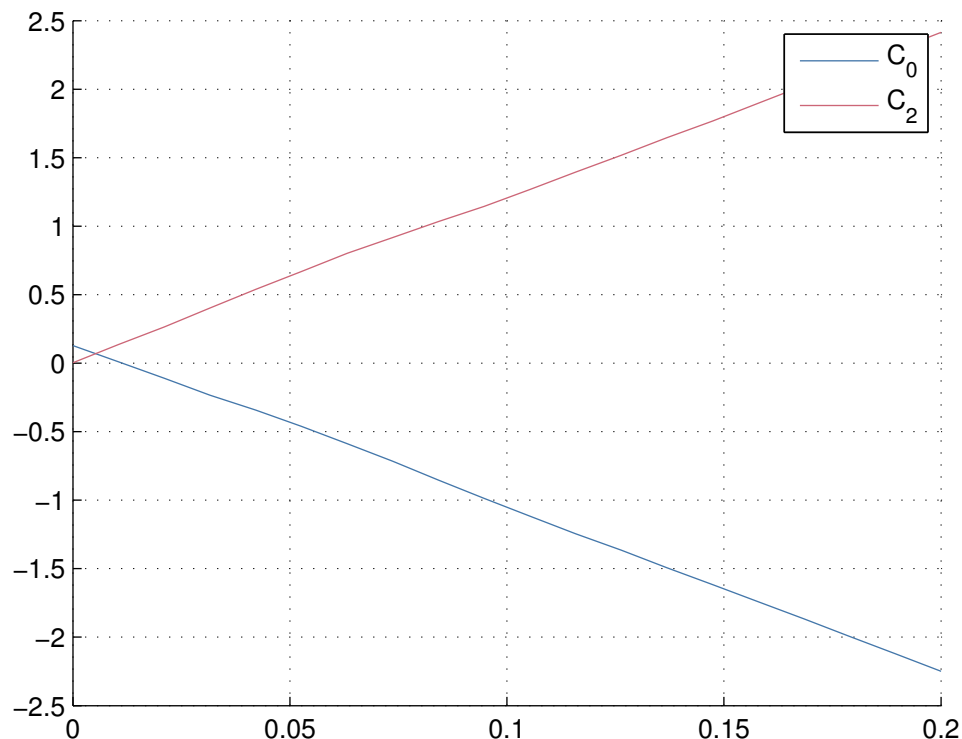
4.2.7 Večanje statične ekscentričnosti v y-osi

Napaka zaradi statične ekscentričnosti v smeri y-osi pričakujem enako kot pri ekscentričnosti v smeri x-osi. Po rezultatih iz prejšnjih poglavij predvidevam, da bo enosmerna komponenta z višanjem ekscentričnosti vedno bolj negativna.

Na sliki 4.21 so predvidevanja potrdijo. Začetni vrednosti sta enaki. Amplituda drugega harmonika narašča enako kot narašča amplituda drugega harmonika pri statični ekscentričnosti v smeri x-osi. Odvisnost amplitude posameznega harmonika napake lahko aproksimiramo s polinomom. Potek je amplitude je po pričakovanjih.

$$A_0(\Delta y_s) = 38.7884\Delta y_s^3 - 13.0988\Delta y_s^2 - 10.7638\Delta y_s + 0.1253 \quad (4.14)$$

$$C_2(\Delta y_s) = 61.0142\Delta y_s^3 - 18.9682\Delta y_s^2 + 13.4816\Delta y_s - 0.0028 \quad (4.15)$$



Slika 4.21: Amplitude harmonikov s spreminjanjem ekscentričnosti

4.2.8 Večanje dinamične ekscentričnosti v x-osi

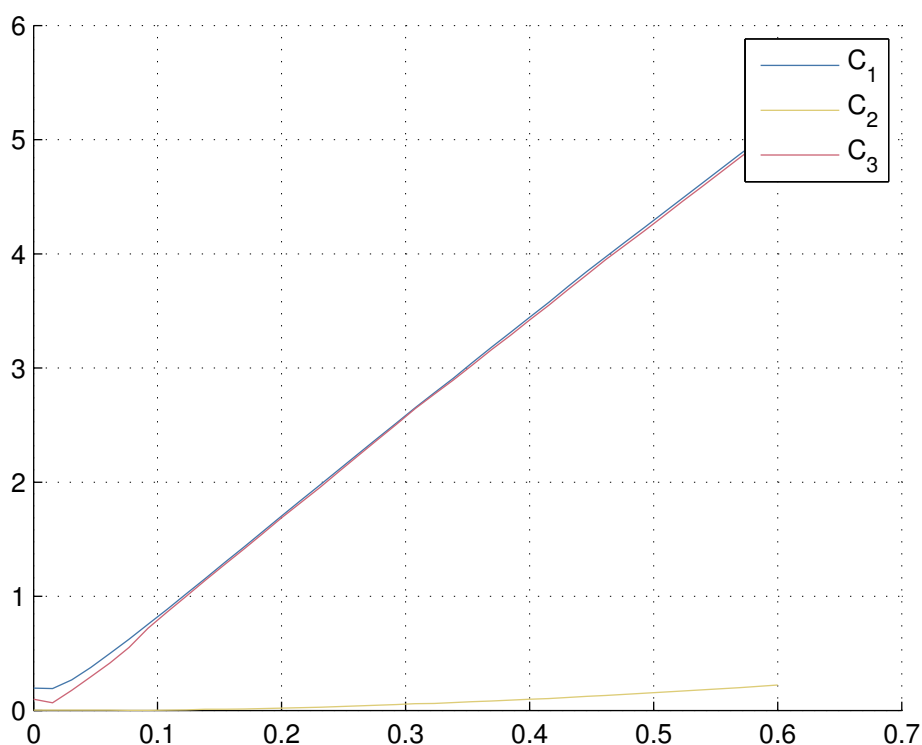
Pri simulacijah napake zaradi dinamične ekscentričnosti pri uporabi linearne poteka z-komponente vektorja B je amplituda prvega harmonika linearno naraščala v odvisnosti od večanja dinamične ekscentričnosti v smeri x-osi. Pričakujem linearno naraščanje amplitude prvega harmonika. Pri simulaciji z realnim poljem se je izkazal za izrazitejši tretji harmonik. Pričakujem, da bo tudi amplituda tretjega harmonika naraščala z večanjem ekscentričnosti. Na sliki 4.22 so prikazani poteki amplitud za prvi drugi in tretji harmonik v odvisnosti od dinamične ekscentričnosti v x-osi. Amplitudi prvega in tretjega harmonika naraščata linearno in strmo. Drugi harmonik narašča s kvadratom ekscentričnosti vendar zelo položno. Poteke amplitude posameznega harmonika v odvisnosti od

dinamične ekscentričnosti v smeri x-osi lahko aproksimiramo s polinomom:

$$C_1(\Delta x_d) = -5.88\Delta x_d^3 + 5.50\Delta x_d^2 + 7.18\Delta x_d + 0.08 \quad (4.16)$$

$$C_2(\Delta x_d) = -0.31\Delta x_d^3 + 0.95\Delta x_d^2 - 0.09\Delta x_d + 0.004 \quad (4.17)$$

$$C_3(\Delta x_d) = -3.28\Delta x_d^3 + 2.52\Delta x_d^2 + 8.19\Delta x_d - 0.04 \quad (4.18)$$

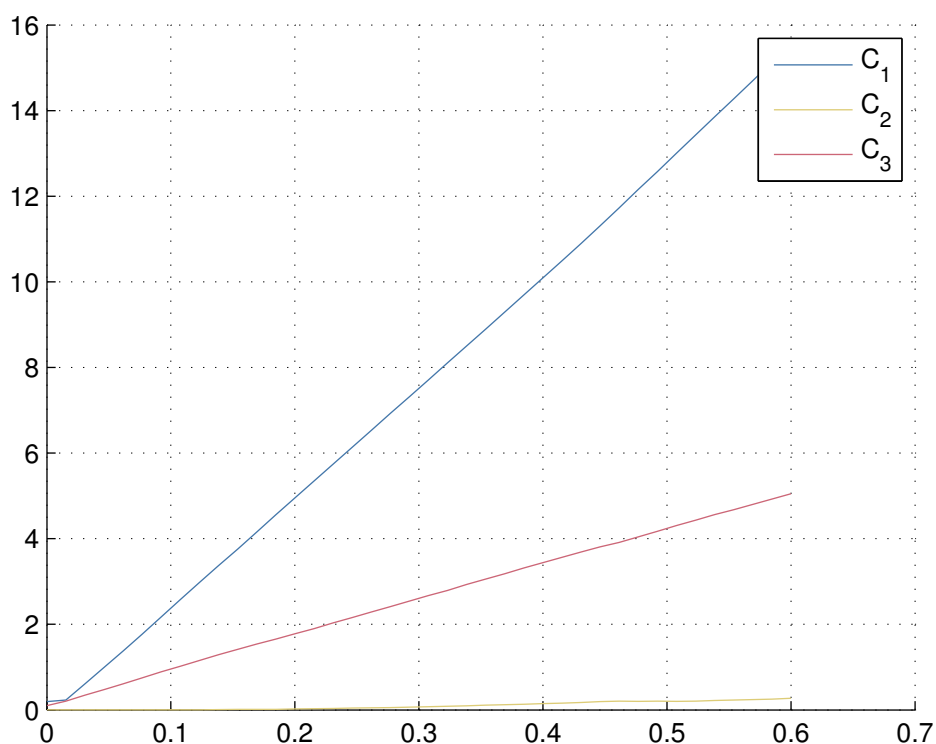


Slika 4.22: Amplitude harmonikov s spreminjanjem ekscentričnosti

4.2.9 Večanje dinamične ekscentričnosti v y-osi

Pri dinamični ekscentričnosti v smeri y-osi pričakujem podobne rezultate kot pri dinamični ekscentričnosti v smeri x-osi. Pričakujem le višjo amplitudo prvega harmonika. Rezultat je viden na sliki 4.23. Amplituda prvega harmonika narašča približno trikrat hitreje, kot je naraščala amplituda prvega harmonika pri

dinamični ekscentričnosti v smeri x-osi. Drugi harmonik narašča počasneje kot pri dinamični ekscentričnosti v smeri x-osi, tretji harmonik poteka približno enako. Aproksimacija s polinomom potrdi sklepanja s slike.



Slika 4.23: Amplitude harmonikov s spreminjanjem ekscentričnosti

$$C_1(\Delta y_d) = 1.01\Delta y_d^3 + 1.82\Delta y_d^2 + 24.57\Delta y_d - 0.07 \quad (4.19)$$

$$C_2(\Delta y_d) = -2.37\Delta y_d^3 + 2.79\Delta y_d^2 - 0.41\Delta y_d + 0.01 \quad (4.20)$$

$$C_3(\Delta y_d) = 0.83\Delta y_d^3 - 1.21\Delta y_d^2 + 8.71\Delta y_d + 0.09 \quad (4.21)$$

4.3 Zaključna misel po opravljenih simulacijah

Predvidevam, da bo pri meritvah napaka nižja, saj je bil simulacijski model osnovan. V napaki kljub temu pričakujem izraz napake v obliki enosmerne komponente oz. prvega ali drugega harmonika. Napaka bo z večanjem ekscentričnosti naraščala približno linearno. Napaka zaradi dinamične ekscentričnosti bo višja kot napaka zaradi statične ekscentričnosti. To se je pokazalo že pri linearnem modelu in prav tako pri realnem modelu polja.

5 Meritve ekscentričnosti

Meritve ekscentričnosti sem opravil na napravi v LRTME. Naprava omogoča premik senzorja v šestih prostorskih smereh. Potreboval sem le dve. Za referenčni enkoder je uporabljen encoder Tonic T2001-15A podjetja Renishaw.

Senzor RM44 pomeri magnetno polje s večjim številom Hallovih senzorjev. Z matematično obdelavo signalov s Hall-ovih sond prejemem na izhodu senzorja dva analogna signala. Analogna signala prikazujeta enako vrednost kot če bi pomeril magnetno polje magneta z dvema Hall-ovima sondama, ki sta prostorsko premaknjeni za 90° . Iz prejetih signalov s funkcijo \arctan lahko izračunam trenutno pozicijo. Postopek je enak postopku, ki sem ga uporabil med simulacijam.

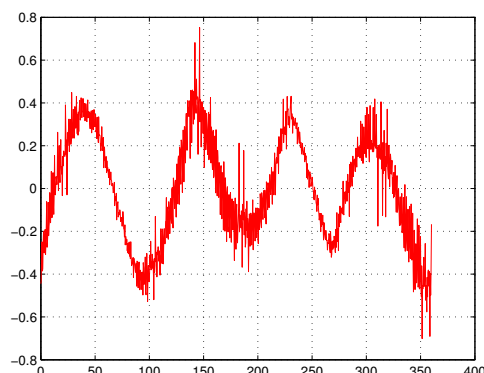
5.1 Pomerjeno magnetno polje

Na začetku si oglejmo prejeta signala s senzorja. V izdelani montaži oz. v kolikor sem senzor lahko

5.1.1 Napaka ko sta senzor in magnet na isti osi

napaka med kotom pomerjenega s senzorjem RM44 in referenčnim enkoderjem je prikazana na sliki 5.1.

V napaki je najizrazitejši četrti harmonik. Višja frekvenca vidna v napaki je razlika ki nastane zaradi različnih resolucij enkoderjev. Izhoda senzorja (signala sinus in kosinus), sta z analogno-digitalnim pretvorniko pretvorjena v digitalno



Slika 5.1: Napaka pomerjenega kota pri najboljšimontaži

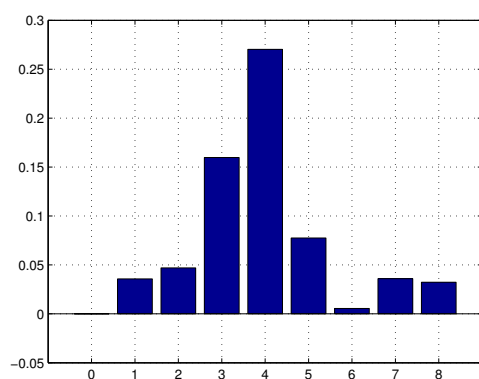
obliko. AD pretvornik ima nižjo resolucijo kot referenčni enkoder.

S primerjavo napake pri simulacijah z realnim poljem, ko je bil senzor in magnet v idealne stanju (Slika 4.10) opazimo, da je napaka manjša. Napaka je manjša zaradi drugega načina zajema signalov sinus in kosinus.

Napako razvijmo v Fourierovo vrsto. Amplituda posameznega harmonika je prikazana na sliki 5.2. Enosmerna komponenta je nič, saj se ob zagonu naprave senzora kalibrirata v enako izhodišče. Naraščanje enosmerna komponenta se bo pojavila z izmikom senzorja iz kalibrirane pozicije. S primerjavo velikosti amplitud posameznega harmonika napake pri simulacijah z uporabo realnega magnetnega polja (slika 4.11) opazimo, da je amplituda drugega harmonika višja kot amplituda drugega harmonika pri simulacijah.

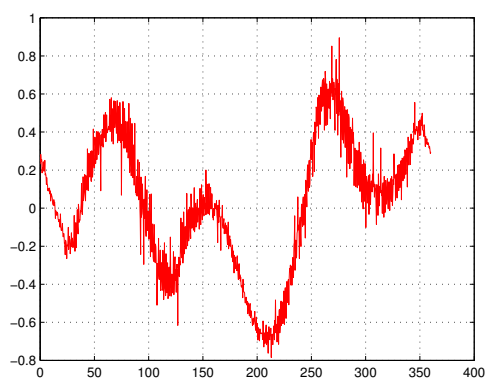
5.1.2 Napaka pri statični ekscentričnosti v smeri x-osi

Pri simulacijah statične ekscentričnosti se je pojavila napaka v obliki drugega harmonika. Napako pri meritvah pričakujem manjšo kot je bila v simulacijah. Pričakujem enako obliko. Napaka pri ekscentričnosti 0.1mm je prikazana na sliki 5.3. Napaka je v primerjavi s simulacijami pol manjša (slika 4.13). Iz poteka napake ni razvidno, povišanje le drugega harmonika.

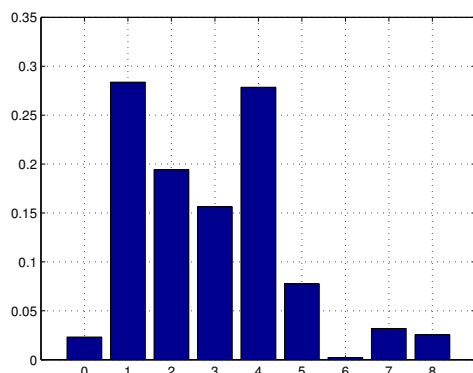


Slika 5.2: Amplitude posameznega harmonika napake pri najboljši montaži

Slika 5.4 prikazuje amplitude posameznih harmonikov v napaki. Po pričakovanjih sta se povišali enosmerna komponenta in drugi harmonik. Po nepričakovanem se je povišal tudi prvi harmonik. Med simuliranjem nisem zaznal, da bi bile napake ekscentričnosti odvisne od drugih ekscentričnosti. Amplituda prvega harmonika napake je najvišja. Harmoniki, višji od drugega se z ekscentričnostjo niso spremenili.



Slika 5.3: Napaka pomerjenega kota pri statični ekscentričnosti v x-osi



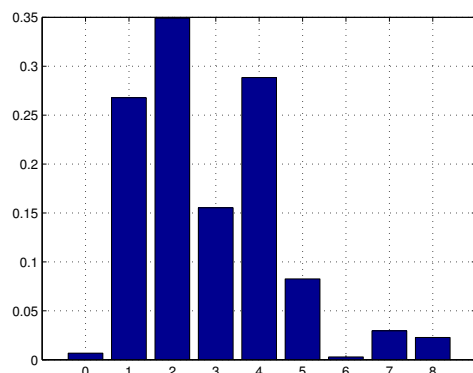
Slika 5.4: Razvoj napake v F vrsto pri statični ekscentričnosti v x-osi

5.1.3 Napaka pri statični ekscentričnosti v smeri y-osi

Izmaknimo sedaj senzor v smeri y-osi. Opazi se pozitivno enosmerno komponento katero sem iz rezultatov simulacij pričakoval negativno (Slika 5.5). Napaka je večja(peak-peak) kot je bila napaka pri izmiku senzorja v smeri x-osi. Napaka je manjša od pričakovane napake po rezultatih simulacij. S Fourijevo vrsto razvijmo napako po amplitudah(Slika 5.6).Povišala sta se predvsem prvi in drugi harmonik. Opazimo da je enosmerna komponenta pozitivna, kar se ne sklada s simulacijami. Po simulacijah se meritev razlikuje tudi v tem da se je izrazil povečal prvi harmonik napake. Harmoniki višji od tretjega se niso spremenili.



Slika 5.5: Napaka pomerjenega kota pri statični ekscentričnosti v y-osi



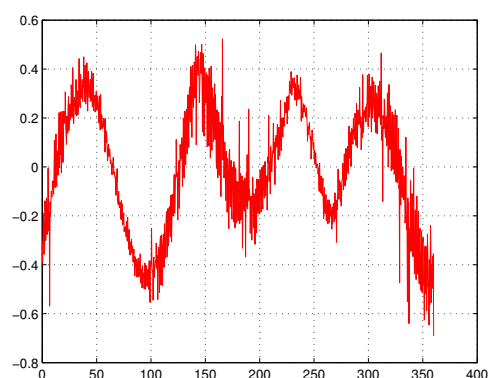
Slika 5.6: Razvoj napake v F vrsto pri statični ekscentričnosti v y-osi

5.1.4 Napaka pri premiku senzorja v smeri z-osi

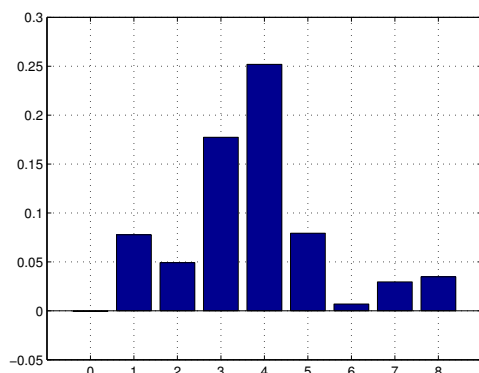
V simulacijah tega dogodka nisme predvidel. Pričakoval bi, da se bo magnetno polje, ki ga pomerijo hallove sonde zmanjšalo. Tako bosta imela signala sinus in kosinus zmanjšano amplitudo za enak faktor, kar na izračun kota (\arctan) ne bi imelo vpliva.

$$\arctan \frac{k \cdot y}{k \cdot x} = \arctan \frac{y}{x}$$

Meritev je pokazala, da se ob premiku senzorja v z-osi pojavi napaka. Povišala se je amplituda prvega in tretjega harmonika.



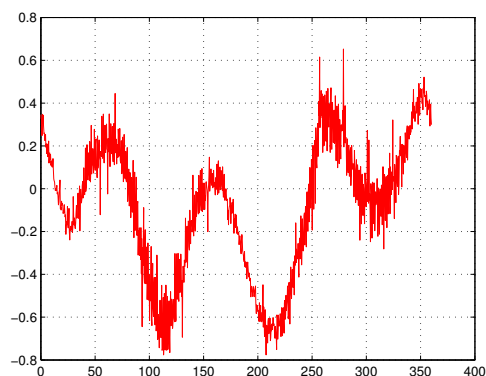
Slika 5.7: Napaka pomerjenega kota pri statični ekscentričnosti v z-osi



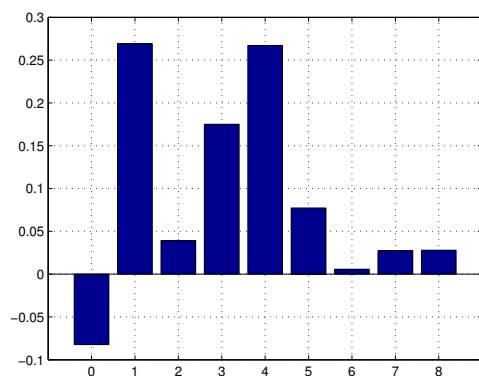
Slika 5.8: Razvoj napake v F vrsto pri statični ekscentričnosti v z-osi

5.1.5 Napaka pri premiku magneta iz osi vrtenja

Naparava omogoča premik magneta izven osi vrtenja le v eni smeri. Meritev je zato narejena le za en primer. Napaka je pomerjena pri premiku $125\ \mu\text{m}$ (Slika ??). Opazi se, da se je pojavila napaka v obliki prvega harmonika. Z DFT-jem razvijemo napako na posamezne amplitude (Slika 5.10). Velikosti amplitud pokažejo povišanje amplitude prvega harmonika kar je bilo pričakovati. Spremenila se je tudi enosmerna komponenta napake.



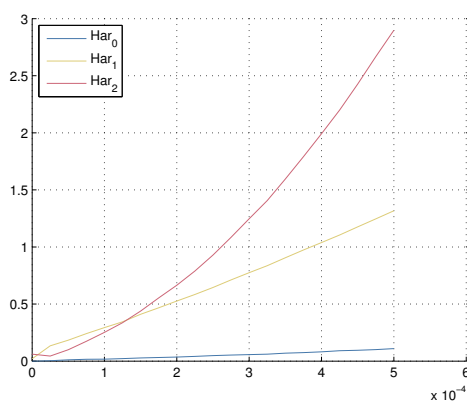
Slika 5.9: Napaka pomerjenega kota pri dinamični ekscentričnosti 125u



Slika 5.10: Razvoj napake v F vrsto pri dinamični ekscentričnosti 125u

5.1.6 Večanje statične ekscentričnosti v x osi na napravi

Kot v poglavju 4.2.6, sem tudi tu pomeril napako pri različnih izmikih enkoderja iz idealne montaže. Napako sem z DFT-jem razstavil na posamezne harmonike. Na sliki 5.11, so prikazani poteki spreminjanja velikosti posameznega harmonika napake v odvisnosti statične ekscentričnosti v x-osi.



Slika 5.11: Odvisnost posameznega harmonika napake od statične ekscentričnosti v x osi

$$A_0(\Delta x_s) = 0.15740\Delta x_s^3 + 0.01388\Delta x_s^2 + 0.17182\Delta x_s + 0.00061$$

$$A_1(\Delta x_s) = 1.81983\Delta x_s^3 - 0.81049\Delta x_s^2 + 2.49720\Delta x_s + 0.04854$$

$$A_2(\Delta x_s) = -1.75100\Delta x_s^3 + 9.86952\Delta x_s^2 + 1.23683\Delta x_s + 0.03126$$

Dodatek

Koeficienti enačbe (3.22):

$$a_1 = -3.613254883256721 \cdot 10^{-2}$$

$$a_2 = -9.397474474352774 \cdot 10^{-2}$$

$$a_3 = 2.270068566096036 \cdot 10^{-1}$$

$$a_4 = -1.654156805933996 \cdot 10^{-2}$$

$$a_5 = -1.412276545356571 \cdot 10^{-1}$$

$$a_6 = -8.091748555424770 \cdot 10^0$$

$$a_7 = -1.205821594072327 \cdot 10^0$$

$$a_8 = 3.574554554667357 \cdot 10^{-2}$$

$$a_9 = 4.384051669295653 \cdot 10^1$$

$$a_{10} = 2.853582435899069 \cdot 10^{-1}$$

.1 Brez ekscentričnosti

V enačbo (3.22), namesto x vstavimo izraz za B_{H_1} iz enačbe (3.15). Namesto y vstavimo izraz za B_{H_2} iz enačbe (3.16). Z upoštevanjem, da ekscentričnosti ni, se izraza iz enačb (3.15) in (3.16) poenostavita v:

$$B_{H_1} = r_0 \cos(\theta) \tag{1}$$

$$B_{H_2} = r_0 \sin(\theta) \quad (2)$$

Vstavimo izraza v (3.22) in poenostavimo.

$$\begin{aligned} \varphi = & 0.2853582 + 0.1313764r_0^2 \\ & -(0.4544598r_0 + 0.0312348r_0^3) \cos(\theta) \\ & + 0.0956307r_0^2 \cos(2\theta) \\ & - 0.0048977r_0^3 \cos(3\theta) \\ & + (43.8404961r_0 - 0.9278593r_0^3) \sin(\theta) \\ & - 4.0458727r_0^2 \sin(2\theta) \\ & + 0.2779619r_0^3 \sin(3\theta) \end{aligned} \quad (3)$$

.2 Staticna ekscentričnost v x-osi

V izrazih (3.15) in (3.16) upoštevamo, da je statični izmik v x-osi. Δx_s ni 0, Δy_s in Δx_d sta 0 in izraza za B_{H_1} in B_{H_2} sta enaka:

$$B_{H_1} = (r_0 + \Delta x_s) \cos(\theta) \quad (4)$$

$$B_{H_2} = \Delta x_s \cos(\theta) + r_0 \sin(\theta) \quad (5)$$

Vstavimo v (3.22) in dobimo:

$$\begin{aligned}
\varphi = & 0.2853582 + 0.1313764r_0^2 - 3.8188667r_0x_s - 3.9144993x_s^2 \\
& + (-0.0312348r_0^3 + 43.3860817x_s - 1.0602813r_0^2x_s \\
& - 1.0143530x_s^3 + r_0(-0.4544598 - 0.2346663x_s^2)) \cos[\theta] \\
& + (0.0956307r_0^2 - 3.8188667r_0x_s - 3.9144993x_s^2) \cos[2\theta] \\
& + (-0.0048977r_0^3 + 0.8579069r_0^2x_s - 0.0782219r_0x_s^2 - 0.3381179x_s^3) \cos[3\theta] \\
& + r_0(43.8404961 - 0.9278593r_0^2 - 0.0552582r_0x_s - 0.0552582x_s^2) \sin[\theta] \\
& + r_0(-4.0458841r_0 - 4.0101318x_s) \sin[2\theta] \\
& + r_0(0.2779619r_0^2 - 0.0552582r_0x_s - 0.9361328x_s^2) \sin[3\theta]
\end{aligned} \tag{6}$$

.3 Staticna ekscentričnost v y-osi

V izrazih (3.15) in (3.16) upoštevamo, da je statični izmik v y-osi. Δy_s ni 0, Δx_s in Δx_d sta 0 in izraza za B_{H_1} in B_{H_2} sta enaka:

$$B_{H_1} = r_0 \cos(\theta) + \Delta y_s \sin(\theta) \tag{7}$$

$$B_{H_2} = (r_0 + \Delta y_s) \sin(\theta) \tag{8}$$

Vstavimo v (3.22) in dobimo:

$$\begin{aligned}
\varphi = & 0.2853582 + 0.1313764r_0^2 - 4.0101261r_0y_s - 3.9144993y_s^2 \\
& + r_0(-0.4544598 - 0.0312348r_0^2 - 0.0552582r_0y_s - 0.0782219y_s^2) \cos(\theta) \\
& + (0.0956307r_0^2 + 4.0101261r_0y_s + 3.9144993y_s^2) \cos(2\theta) \\
& + (-0.0048977r_0^3 + 0.0552582r_0^2y_s + 0.0782219r_0y_s^2) \cos(3\theta) \\
& + (43.8404961r_0 - 0.9278593r_0^3 + 43.3860817y_s - 2.7760952r_0^2y_s \\
& \quad - 2.8083928r_0y_s^2 - 1.0143530y_s^3) \sin(\theta) \\
& + r_0(-4.0458841r_0 - 3.8188784y_s) \sin(2\theta) \\
& + (0.2779619r_0^3 + 0.8579069r_0^2y_s + 0.9361328r_0y_s^2 + 0.3381179y_s^3) \sin(3\theta)
\end{aligned} \tag{9}$$

.4 Dinamična ekscentričnost v x-osi

V izrazih (3.15) in (3.16) upoštevamo, da je statični izmik v x-osi. Δx_d ni 0, Δx_s in Δy_s sta 0 in izraza za B_{H_1} in B_{H_2} sta enaka:

$$B_{H_1} = r_0 \cos(\theta) - \Delta x_d \tag{10}$$

$$B_{H_2} = r_0 \sin(\theta) - \Delta x_d \tag{11}$$

Vstavimo v (3.22) in dobimo:

$$\begin{aligned}
\varphi = & 0.2853582 + 0.1313764r_0^2 - 43.3860817x_d \\
& + 1.9181882r_0^2x_d - 7.8290100x_d^2 + 1.3524727x_d^3 \\
& + (-0.4544598r_0 - 0.0312348r_0^3 + 7.6377568r_0x_d - 0.3128888r_0x_d^2) \cos(\theta) \\
& + (0.0956307r_0^2 - 1.7158195r_0^2x_d) \cos(2\theta) \\
& - 0.0048977r_0^3 \cos(3\theta) \\
& + (43.8404961r_0 - 0.9278593r_0^3 + 8.0202637r_0x_d - 3.7445199r_0x_d^2) \sin(\theta) \\
& + (-4.0458727r_0^2 + 0.1105161r_0^2x_d) \sin(2\theta) \\
& + 0.2779619r_0^3 \sin(3\theta)
\end{aligned} \tag{12}$$