

К2. Числено решаване на задача на Коши за системи ОДУ с методи на Рунге-Кута

Да се реши приближено следната задача на Коши:

Да се намери функция $u(t)$, която удовлетворява диференциалното уравнение

$$u'' + 2u = 2u' - 3(u')^3, 0 \leq t \leq 50$$

и началните условия:

$$u(0) = 1, u'(0) = -2$$

Използвайте класическия явен четириетапен метод на Рунге-Кута с грешка на апроксимация $O(h^4)$. Една стъпка с този метод се задава така:

$$s_1 = f(t_i, y_i)$$

$$s_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}s_1\right)$$

$$s_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}s_2\right)$$

$$s_4 = f(t_i + h, y_i + hs_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4)$$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

а) Първо сведете задачата с едно ОДУ от втори ред до задача със система от две ОДУ от първи ред с неизвестни $u(t)$ и $u'(t)$.

б) За мрежа със стъпка $h = 2^{-9}$ намерете приближените решения за $u(t)$ и $u'(t)$ и ги изобразете на една графика. Съставете таблица съдържаща приближените решения за последните 10 точки от мрежата с $h = 2^{-9}$. Представете графично и фазовата крива за тези решения в равнината (u, u') (u по x -координата и u' по y -координатата).

в) Въведете три вложени мрежи със стъпки $h = 2^{-9}$, $h/2 = 2^{-10}$, $h/4 = 2^{-11}$. Намерете приближените решения $y_h, y_{\frac{h}{2}}, y_{\frac{h}{4}}$. Пресметнете реда на сходимост $\alpha(t)$ по формулата:

$$\alpha(t) = \log \left| \frac{y_h(t) - y_{\frac{h}{2}}(t)}{y_{\frac{h}{2}}(t) - y_{\frac{h}{4}}(t)} \right| / \log(2)$$

за първите 10 общи точки t на трите мрежи.

При предаване на заданието да се състави протокол съдържащ условието на задачата и решението на а), б) и в).