Pe spațiul $\mathbb{R}^2$ considerăm norma $\|\cdot\|_p$, $p \in [1,\infty]$, definită în exemplul 3.1.1.

1. *Să se reprezinte grafic bila deschisă centrată în origine şi cu raza r relativă la norma $\|\cdot\|_p$, $p \in [1,\infty]$.*
2. *Să se scrie un aplet care să afişeze într-un mod animat transformarea bilei date de norma $\|\cdot\|_1$ în bila dată de norma $\|\cdot\|_\infty$ atunci când parametrul p variază de la 1 la ∞ (şi respectiv pentru $p \in (0,1)$). Să se afişeze valoarea parametrului p în timpul acestei transformări şi să se pună în evidență situațiile $p=1$, $p=2$ şi $p=\infty$.*
3. *Utilizând programul de la punctul 2, să se arate că pentru $p \in (0,1)$, $\|\cdot\|_p$ nu verifică inegalitatea triunghiulară.*

Rezolvare: 1. Fie $r > 0$ şi $p \in [1,\infty]$. Bila deschisă centrată în $(0,0)$ cu raza *r* relativă la norma $\|\cdot\|_p$ este:

$$B_{\|\cdot\|_p}\left((0,0),r\right) = \begin{cases} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(|x|^p + |y|^p\right)^{1/p} < r\right\}, & \text{dacă } 1 \le p < \infty \\ \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid max\left\{|x|,|y|\right\} < r\right\}, & \text{dacă } p = \infty \end{cases}$$

Pentru a reprezenta grafic această mulțime este suficient să reprezentăm frontiera ei. Fie $\partial_p = Fr\left(B_{\|\cdot\|_p}\left((0,0),r\right)\right)$. Atunci avem:

$$\partial_p = \begin{cases} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^p + |y|^p = r^p\right\}, & \text{dacă } 1 \le p < \infty \\ \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid max\left\{|x|,|y|\right\} = r\right\}, & \text{dacă } p = \infty \end{cases}$$

Mulțimea ∂_p satisface următoarele simetrii:

$\forall (x,y) \in \partial_p \Rightarrow (-x,y) \in \partial_p$, deci ∂_p este simetrică față de axa Oy,

$\forall (x,y) \in \partial_p \Rightarrow (x,-y) \in \partial_p$, deci ∂_p este simetrică față de axa Ox,

$\forall (x,y) \in \partial_p \Rightarrow (-x,-y) \in \partial_p$, deci ∂_p este simetrică față de origine,

$\forall (x,y) \in \partial_p \Rightarrow (y,x) \in \partial_p$, deci ∂_p este simetrică față de prima bisectoare.

În concluzie, pentru a reprezenta grafic ∂_p este suficient să reprezentăm porțiunea din ∂_p situată în primul cadran, sub prima bisectoare. Apoi, prin simetrizări față de prima bisectoare, față de axe şi față de origine, obținem întreaga mulțime ∂_p. Este evident că ∂_1 este un pătrat cu laturile paralele cu bisectoarele, ∂_2 este un cerc cu raza *r* şi ∂_∞ este un pătrat cu laturile paralele cu axele.

Fie acum $p \in (1,\infty) \setminus \{2\}$ şi fie funcția $f : \left[\frac{r}{2^{1/p}}, r\right] \to \left[0, \frac{r}{2^{1/p}}\right]$, $f(x) = \left(r^p - x^p\right)^{1/p}$.

Deoarece $G_f = \partial_p \cap \left\{(x,y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ x \ge y\right\}$, reprezentăm grafic funcția *f*.

Avem: $f\left(\frac{r}{2^{1/p}}\right)=\frac{r}{2^{1/p}}$ şi $f(r)=0$. Întrucât $f'(x)=-x^{p-1}\left(r^p-x^p\right)^{\frac{1}{p}-1}<0$, $\forall x\in\left[\frac{r}{2^{1/p}},r\right)$, funcţia f este descrescătoare şi nu are puncte de extrem. Deoarece $\frac{1}{p}-1<0$, $\lim\limits_{\substack{x\to r\\x<r}} f'(x)=-\infty$ şi deci, dreapta $x=r$ este tangentă la G_f în punctul $(r,0)$. Deoarece $f'\left(\frac{r}{2^{1/p}}\right)=-1$, rezultă că dreapta de ecuaţie $y=x$ este normală la G_f în punctul $\left(\frac{r}{2^{1/p}},\frac{r}{2^{1/p}}\right)$. Deoarece $f''(x)=-(p-1)r^p x^{p-2}\left(r^p-x^p\right)^{\frac{1}{p}-2}<0,\ \forall x\in\left[\frac{r}{2^{1/p}},r\right)$, rezultă că *f* este o funcţie concavă. Atunci graficul funcţiei *f* este următorul:

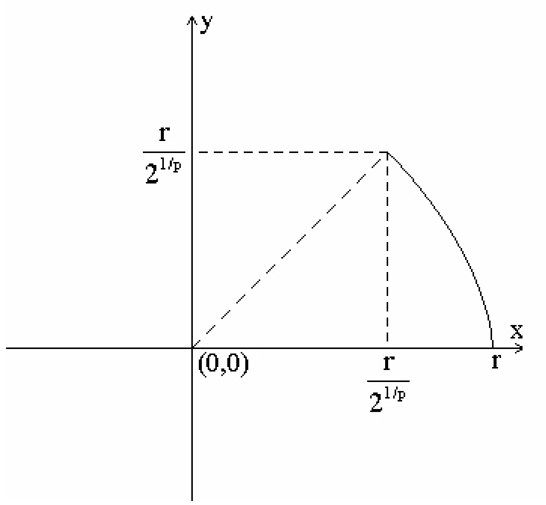

Fig. 1 Graficul funcţiei *f* pentru *p* = 1,6

Cum distanţa de la origine la punctul $\partial_p\cap\{(x,y)\mid x=y \text{ şi } x\geq 0\}$ este egală cu $r2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$, deducem că pentru $p\in(1,2)$, ∂_p se găseşte între ∂_1 şi ∂_2 iar pentru $p>2$, cercul ∂_2 este inclus în domeniul mărginit de ∂_p.

Prin simetrizările amintite mai sus obţinem forma lui ∂_p:

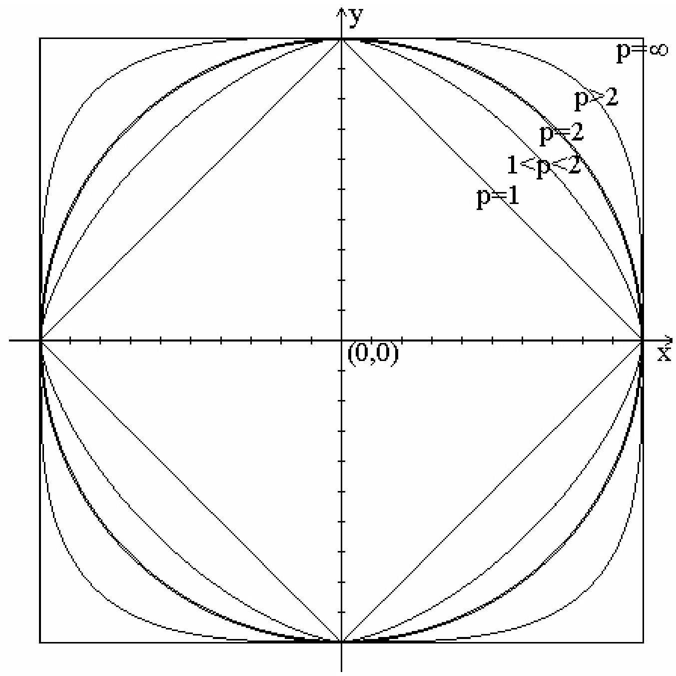

Fig. 2. Forma frontierelor ∂_p, $p \in [1,\infty]$

Observație: Utilizând acest aplet se poate observa viteza mare de convergență a normelor $\|\cdot\|_p \, (p \geq 1)$ către $\|\cdot\|_\infty$.

3. Din apletul de la punctul 2, se observă imediat că pentru $p \in (0,1)$, $B_{\|\cdot\|_p}((0,0), r)$ nu este o mulțime convexă. Prin urmare, în acest caz $\|\cdot\|_p$ nu este o normă. Întrucât pentru $p \in (0,1)$, $\|\cdot\|_p$ are proprietățile:

$\|(x,y)\|_p = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ și

$\|\lambda(x,y)\|_p = |\lambda| \|(x,y)\|_p, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

rezultă că, în acest caz $\|\cdot\|_p$ nu verifică inegalitatea triunghiulară.

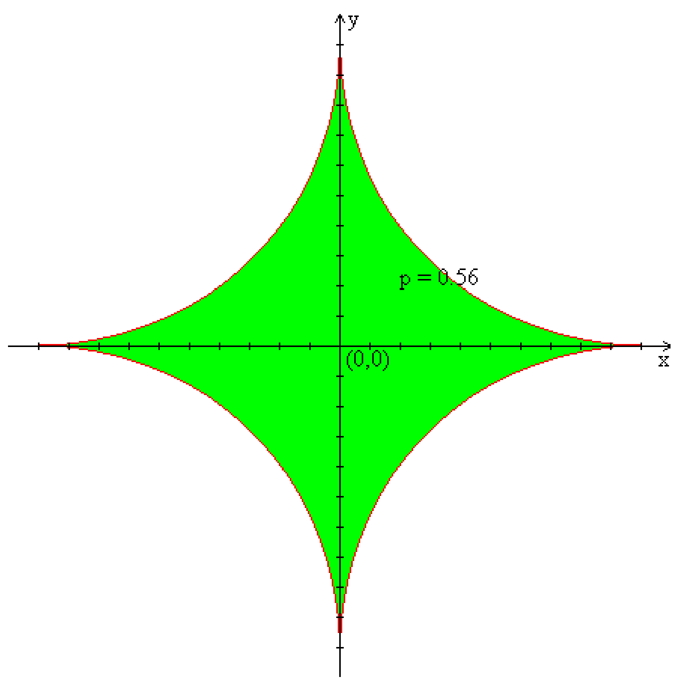

Fig. 3. Reprezentarea mulțimii $B_{\|\cdot\|_{0,56}}((0,0), r)$