

Definiția 1. Polinoamele $B_n^k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall k \in \overline{0,n}$, se numesc polinoamele Bernstein de grad n , unde $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Definiția 2. Polinomul $B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(x)$, $\forall x \in [0,1]$, se numește polinomul Bernstein de grad n asociat funcției f .

Teorema 1. (teorema lui Bernstein) Dacă $f \in C[0,1]$, atunci $B_n \xrightarrow{\|\cdot\|_u} f$.

Teorema 2. (teorema lui Weierstrass) Dacă $f \in C[a,b]$, atunci $\exists (P_n)$, un șir de polinoame cu coeficienți reali așa încât $P_n \xrightarrow{\|\cdot\|_u} f$.

Corolarul 1. Dacă $f \in C[a,b]$, atunci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists Q$ un polinoam cu coeficienți raționali așa încât $\|f - Q\|_u < \varepsilon$.

Corolarul 2. Spațiul $(C[a,b], \|\cdot\|_u)$ este separabil.

Teorema lui Bernstein este o teoremă fundamentală în analiza matematică. Prin acest rezultat, orice funcție continuă pe $[0,1]$ (respectiv pe $[a,b]$, dacă ținem seama de Teorema 2) se poate aproxima uniform cu polinoame, care sunt funcții cu o structură mai simplă. Cu alte cuvinte, orice funcție reală continuă pe $[0,1]$ poate fi reprezentată cu o precizie arbitrar fixată, de o funcție polinomială. Din acest motiv, în CAGD (*Computer Aided Geometric Design*) se utilizează mai ales curbele și suprafețele polinomiale, prin intermediul cărora pot fi modelate o mare varietate de forme.

Fie $A_n = \{x \mid x(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, \forall t \in [0,1], \text{ unde } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ și $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Definiția 3. Prin curbă polinomială înțelegem orice curbă definită printr-o parametrizare polinomială: $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\forall t \in [0,1]$, unde $x, y, z \in A$. În acest caz, maximul gradelor polinoamelor x, y, z , se numește gradul curbei γ .

Fie $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\forall t \in [0,1]$, o curbă polinomială de grad n . Atunci există o mulțime de vectori $C_n = \{c_k = (x_k, y_k, z_k) \in \mathbb{R}^3 \mid k \in \overline{0,n}\}$ așa încât $\gamma(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k$, $\forall t \in [0,1]$. Cercetătorii în CAGD au încercat să descopere în ce măsură modificarea acestor coeficienți influențează geometria curbei, dar au ajuns la concluzia că baza canonică $\{1, t, t^2, \dots\}$ nu este potrivită pentru design CAGD. În 1970, Pierre Bézier,

inginer la firma Renault, în dorința de a proiecta caroserii de automobile cu forme cât mai variate, a înlocuit baza canonică din A_n cu baza Bernstein: $B = \{B_n^0, B_n^1, \dots, B_n^n\}$.

Fie $C_n = \{c_k = (x_k, y_k, z_k) \in \mathbb{R}^3 \mid k \in \overline{0, n}\}$. Vom numi această mulțime *poligon de control*.

Definiția 4. Se numește curbă Bézier definită de poligonul de control C_n , funcția $b_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $b_n(t) = \sum_{k=0}^n c_k B_n^k(t)$, $\forall t \in [0, 1]$. În acest caz, punctele c_k , $k \in \overline{0, n}$, se numesc puncte de control ale curbei b_n .

Deoarece $B_n^k(t) \geq 0$ și $\sum_{k=0}^n B_n^k(t) = 1$, $\forall t \in [0, 1]$, rezultă că $b_n(t)$ este o combinație convexă a punctelor de control, $\forall t \in [0, 1]$.

În desenele următoare avem reprezentate câteva curbe Bézier plane.

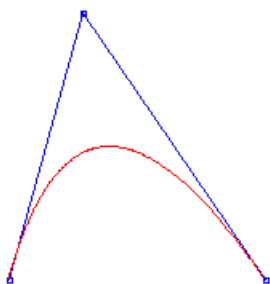


Fig. 1. Curbă Bézier cu 3 puncte de control

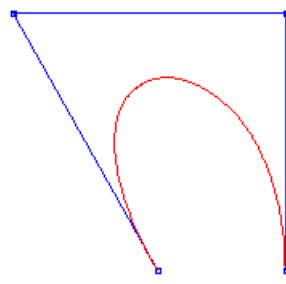


Fig. 2. Curbă Bézier cu 4 puncte de control

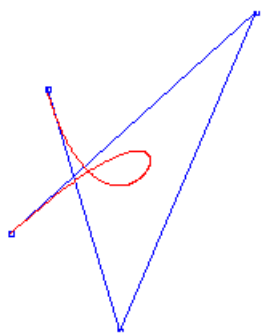


Fig. 3. Curbă Bézier cu 4 puncte de control

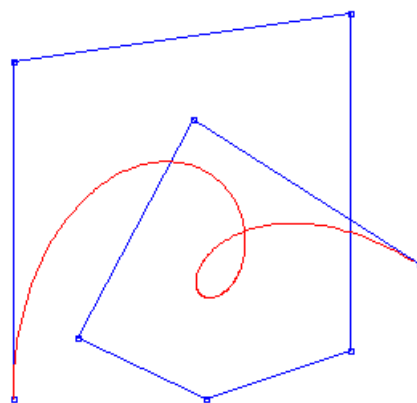


Fig. 4. Curbă Bézier cu 8 puncte de control

Fie acum mulțimea curbelor din \mathbb{R}^3 :

$$C = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \gamma(t) = (f(t), g(t), h(t)), \forall t \in [0, 1], \text{ unde } f, g, h \in C[0, 1]\}.$$

Considerăm funcția $\|\cdot\|_u : C \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\|\gamma\|_u = \sup_{t \in [0, 1]} \|\gamma(t)\|_\infty$, $\gamma \in C$. Ținând seama că $\|\cdot\|_\infty$ este o

normă pe \mathbb{R}^3 , se arată fără dificultate că $\|\cdot\|_u$ este o normă pe C .

Fie $(\gamma_n) \subset C$ și $\gamma \in C$. Presupunem că $\gamma_n = (f_n, g_n, h_n)$, $\forall n$ și $\gamma = (f, g, h)$. Au loc de asemenea echivalențele:

$$\gamma_n \xrightarrow{\|\cdot\|_u} \gamma \Leftrightarrow \gamma_n \xrightarrow{[0,1]} \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} f_n \xrightarrow{[0,1]} f \\ g_n \xrightarrow{[0,1]} g \\ h_n \xrightarrow{[0,1]} h \end{cases}.$$

Fie $\gamma \in C$, $\gamma = (f, g, h)$, unde $f, g, h \in C[0,1]$. Atunci din teorema lui Bernstein obținem că:

$$\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k \xrightarrow{[0,1]} f, \quad \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k \xrightarrow{[0,1]} g, \quad \sum_{k=0}^n h\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k \xrightarrow{[0,1]} h.$$

Considerăm poligonul de control $C_n = \left\{ \left(f\left(\frac{k}{n}\right), g\left(\frac{k}{n}\right), h\left(\frac{k}{n}\right) \right) \mid k \in \overline{0, n} \right\}$ și fie b_n curba Bézier asociată lui C_n . Acestea vor fi numite *curbele Bézier asociate lui γ* . Ținând seama de observațiile de mai sus, rezultă că $b_n \xrightarrow{\|\cdot\|_u} \gamma$. Prin urmare, curba γ poate fi reprezentată prin curbele Bézier asociate.

În prezent, în CAGD curbele Bézier sunt utilizate aproape în exclusivitate.

Problemă:

Să se scrie un applet care să permită desenarea unei curbe Bezier cu 4 puncte de control.

Temă:

Să se modifice appletul pentru un număr oarecare de puncte de control, n , furnizat din documentul HTML. Să se testeze appletul pentru $n=30$.