

УДК 519.711

Рецензент

Член-корреспондент, профессор, директор ВЦ РАН
Ю.Г. Евтушенко

Андреева Е.А.

Оптимальное управление динамическими системами: учеб.
пособие: в 2 ч. Тверь: Твер. гос. ун-т, 2016. –Ч.I – 177с., Ч.II – 188 с.

ISBN 978-5-7609-0161-3

Отражены современные методы и проблемы математической теории оптимального управления динамическими системами, которые описываются функционально-дифференциальными уравнениями, включая разрывные системы и системы с запаздыванием. Пособие состоит из двух частей и включает как теоретический материал, так и прикладные задачи, которые решал автор со своими аспирантами.

Предназначается для аспирантов, магистров и научных работников, проводящих исследования в области оптимального управления динамическими системами.

УДК 519.711

ISBN 978-5-7609-0161-3

© Андреева Е.А., 2016

© Тверской государственный
университет, 2016

ГЛАВА 4. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В этой главе изложены необходимые и достаточные условия оптимальности для систем с последействием. Примеры систем с запаздыванием в аргументе функции состояния изложены в главе 5, где рассматриваются искусственные нейронные сети.

Активное развитие теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом повлекло за собой ее использование при решении ряда практических задач, связанных с моделированием управляемых процессов. Задачи оптимального управления системами с запаздывающим аргументом имеют обширные приложения в технике, экономике, биологии, теории автоматического регулирования, теории автоколебательных систем и других науках. Математическая теория управления такими системами еще далека от завершения.

Необходимые и достаточные условия оптимальности для систем с последействием, задача синтеза оптимального управления для линейной системы с запаздыванием и квадратичным критерием качества, подробная библиография приведены в работах [11], [13], [16].

Актуальным вопросом является развитие приближенных и численных методов для решения задач оптимального управления с запаздывающим аргументом.

§1. Условие оптимальности для систем с постоянным запаздыванием

В этом параграфе приведены необходимые и достаточные условия оптимальности и сформулирована двойственная задача для систем с постоянным запаздыванием.

Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим управляемую систему запаздывающего типа вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

$$x_0 = x(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad \Theta \in [-h, 0]. \quad (1.2)$$

Предложим, что вектор-функция состояния, или фазовая переменная,

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

является абсолютно непрерывной функцией на $[0, T] = \Gamma$ и удовлетворяет фазовым ограничениям

$$\begin{aligned} x(t) \in X(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(t, x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l, \\ g_j(t, x) = 0, \quad j = l+1, \dots, m, \quad t \in \Gamma\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

и граничным условиям

$$x(T) \in X_1 \subset X(T). \quad (1.4)$$

Измеримое управление $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ принимает значения из заданного множества

$$u(t) \in U(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^r, \quad n.e. \quad t \in \Gamma. \quad (1.5)$$

Здесь и далее запись *n.e.* $t \in \Gamma$ означает: при почти всех $t \in \Gamma$ по мере Лебега.

Функция $f(t, x, y, u) : \Gamma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ с компонентами $f(t, x, y, u)$ измерима по t , непрерывна по u и непрерывно дифференцируема по x, y . Выберем произвольное управление $u(t)$, $t \in \Gamma$, удовлетворяющее условию (1.5), подставим его в систему (1.1). Интегрируя систему (1.1) с начальными условиями (1.2), найдем траекторию $x(t)$, соответствующую выбранному управлению $u(t)$. Пару функций $\sigma = (x(t), u(t))$ назовем допустимым процессом, если она удовлетворяет условиям (1.1)–(1.5). Множество всех допустимых процессов обозначим через W . Предположим, что $W \neq \emptyset$. На множестве допустимых процессов рассмотрим функционал

$$J(u) = \int_0^T F_1(t, x(t), x(t-h), u(t)) dt + F_0(x(t)). \quad (1.6)$$

Последовательность $\omega_i \in W$, $i = 1, 2, \dots$ допустимых процессов назовем минимизирующей, если $\lim_{i \rightarrow \infty} J(\omega_i) = \inf_W J(u)$. Задача оптимального управления системой (1.1)–(1.5) заключается в построении такого допустимого процесса или минимизирующей последовательности, который доставляет абсолютный глобальный минимум функционалу (1.6) на множестве всех допустимых процессов. Ниже предполагается, что в функционале (1.6) скалярная функция $F_1(t, x, y, u) : \Gamma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема по x, y , измерима по t и непрерывна по u , функция $F_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема по x .

Если в задаче (1.1)–(1.6) отсутствуют фазовые и терминальные ограничения, а множество U не зависит от x , то справедлив принцип максимума [14].

Принцип максимума для задачи оптимального управления с постоянным запаздыванием

Теорема (о необходимых условиях оптимальности).

Пусть процесс $\bar{\omega} = [\bar{x}(t), \bar{u}(t)]$ является локально-оптимальным для задачи (1.1)–(1.6), тогда оптимальное управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понtryagina:

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-h), \bar{u}(t), p(t)) = \max_{u \in U(t)} H(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-h), u, p(t)), \quad (1.7)$$

где

$$H(t, x, y, u, p(t)) = -\lambda_0 F_1 + (p(t), f),$$

а сопряженная вектор-функция $p(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial H(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-h), \bar{u}(t), p(t))}{\partial x_i} \\ &\quad - \frac{\partial H(t+h, \bar{x}(t+h), \bar{x}(t), \bar{u}(t+h), p(t+h))}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$t \in [t_0, t_1], i = \overline{1, n},$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} p_i(t_1) &= -\frac{\partial F_0}{\partial x_i}(x(T)), \quad i = \overline{1, n}, \\ p_i(t) &\equiv 0, \quad t > T, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Условия (1.9) называют условиями трансверсальности.

Если $\lambda_0 = 1$, то, учитывая, что $(p, x)' = (\dot{p}, x) + (p, \dot{x})$, представим минимизируемый функционал с помощью функции Понtryгина в следующем виде:

$$J(u) = - \int_0^T [H(t, x(t), x(t-h), u(t), p(t)) - (\dot{p}(t), x(t))] dt + l(x(0), x(T)), \quad (1.10)$$

где

$$l(x(0), x(T)) = \Phi(x(T)) + (p(T), x(T)) - (p(0), x(0)). \quad (1.11)$$

Для любого допустимого процесса $(x(t), u(t))$ и локально-оптимального $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ приращение функционала (1.6) $\Delta J = J(u) - J(\bar{u})$ может быть вычислено по формуле

$$\begin{aligned} \Delta J = & \\ &= \int_0^T [H(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, p(t)) - H(t, x, y, u, p(t)) - (\dot{p}(t), x - \bar{x})] dt + \\ &+ l(x(0), x(T)) - l(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) \pm \int_0^T H(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, p) dt \end{aligned} \quad (1.12)$$

для случая $\|x(t) - \bar{x}(t)\|_C < \varepsilon$, $\|y(t) - \bar{y}(t)\|_C < \varepsilon$, где $y(t) = x(t-h)$.

Используя разложение в ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned} \Delta J = & \\ &= \int_0^T [H(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, p(t)) - H(t, \bar{x}, \bar{y}, u, p(t))] dt - \\ &- \int_0^T [(\bar{H}_x(t), \Delta x) + (\bar{H}_y(t), \Delta y) + (\dot{p}(t), \Delta x)] dt + \\ &+ \int_0^T [o(\|\Delta x\|) + o(\|\Delta y\|)] dt + \left(\frac{\partial l}{\partial x(T)} (x(0), x(T)), \Delta x(T) \right), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $\tilde{H}(t) = H(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t), p(t))$, $\Delta x = x(t) - \bar{x}(t)$, $\Delta y = y(t) - \bar{y}(t)$.

С помощью формулы (1.13) легко доказать принцип максимума для задачи оптимального управления с запаздыванием [18].

Краевая задача принципа максимума включает в себя исходную систему дифференциальных уравнений с запаздыванием (1.1) с начальными условиями (1.2), сопряжённую систему с отклоняющимся аргументом (1.8) с граничным условием (1.9), в которых оптимальное управление определяется с помощью принципа максимума (1.7).

Покажем, что в задаче (1.1)–(1.6) функция Понtryгина является непрерывной, но даже в случае, если исходная задача автономна, функция Понtryгина не является постоянной вдоль оптимального процесса.

ЛЕММА. Функция Понtryгина $H(t) = H(t, x(t), y(t), u(t), p(t))$, $t \in [0, T]$, является непрерывной функцией на оптимальном процессе.

Пусть $t, t^* \in [0, T]$ — две произвольные точки на отрезке $[0, T]$, они также могут быть точками разрыва оптимального управления $u(t)$.

Введём обозначение:

$$H(t^*) = H(t^*, x(t^*), y(t^*), u(t^*), p(t^*)). \quad (1.14)$$

Согласно принципу максимума, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & H(t^*, x(t^*), y(t^*), u(t), p(t^*)) - H(t, x(t), y(t), u(t), p(t)) \leq \\ & \leq H(t^*) - H(t) \leq \\ & \leq H(t^*, x(t^*), y(t^*), u(t^*), p(t^*)) - H(t, x(t), y(t), u(t^*), p(t)). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Функции $x(t)$, $y(t)$, $p(t)$, $t \in [0, T]$, непрерывны, поэтому выражение в левом неравенстве стремится к нулю при $t^* \rightarrow t$.

Рассмотрим правое неравенство, пусть $t^* = t_k \rightarrow t$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Тогда имеет место неравенство

$$H(t^*, x(t^*), y(t^*), u(t^*), p(t^*)) - H(t, x(t), y(t), u(t^*), p(t)) \geq \alpha > 0. \quad (1.16)$$

Из последовательности $u(t_k) \in U(t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность вследствие компактности множества $U(t)$. Будем считать, что $u(t_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, — сходящаяся подпоследовательность. Используя непрерывность функции Понtryгина

по аргументу u , получим противоречие с (1.16):

$$\begin{aligned} 0 < \alpha \leq \\ \leq \lim_{k \rightarrow \infty} & \left[H(t_k, x(t_k), y(t_k), u(t_k), p(t_k)) - \right. \\ & \left. - H(t, x(t), y(t), u(t_k), p(t)) \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

или

$$0 < \lim_{k \rightarrow \infty} [H(t_k) - H(t)] = 0. \quad (1.18)$$

Противоречие доказывает лемму.

В автономных задачах оптимального управления функция Понтрягина не зависит явно от t . Учитывая (1.6), (1.15), (1.18), вычислим полную производную функции Понтрягина на оптимальном процессе:

$$\frac{dH(t)}{dt} = \left(\frac{\partial H(t)}{\partial y}, \dot{x}(t-h) \right) - \left(\frac{\partial H(t+h)}{\partial y}, \dot{x}(t) \right), \quad t \in [h, T]. \quad (1.19)$$

Действительно, разделив (1.15) на $\Delta t > 0$ и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{H(x(t^*), y(t^*), u(t), p(t^*)) - H(x(t), y(t), u(t), p(t))}{\Delta t} = \\ & = \frac{H(x(t^*), y(t^*), u(t), p(t^*)) - H(x(t), y(t), u(t), p(t^*))}{\Delta t} + \\ & + \frac{H(x(t), y(t), u(t), p(t^*)) - H(x(t), y(t), u(t), p(t))}{\Delta t} \leq \\ & \leq \frac{H(t^*) - H(t)}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

откуда вытекает с учётом (1.6), что справедливо следующее неравенство:

$$\left(\frac{\partial H(t)}{\partial y}, \dot{y}(t) \right) - \left(\frac{\partial H(t+h)}{\partial y}, \dot{x}(t) \right) \leq \frac{dH(t)}{dt}, \quad t \in [h, T]. \quad (1.21)$$

Аналогично легко доказать противоположное неравенство

$$\frac{dH(t)}{dt} \leq \left(\frac{\partial H(t)}{\partial y}, \dot{x}(t-h) \right) - \left(\frac{\partial H(t+h)}{\partial y}, \dot{x}(t) \right), \quad t \in [h, T]. \quad (1.22)$$

Из неравенств (1.21), (1.22) следует справедливость формулы (1.19), из которой вытекает, что даже в автономных задачах оптимального управления с запаздыванием в аргументе функции состояния функция Понтрягина не является постоянной величиной вдоль оптимального процесса.

Достаточные условия оптимальности

Рассмотрим некоторый функционал $V(t, x_t)$, который зависит от выбора момента $t \in \Gamma$ и состояния $x_t = x(t+\Theta)$, $\Theta \in [-h, 0]$ системы (1.1). Если зафиксировать управление $u(t)$, то $x(t)$ определяется как решение системы (1.1) и функционал $V(t, x_t)$ становится функцией только t . Пусть для любого $t \in \Gamma$ и любого допустимого управления u существует предел $\lim_{t_1 \rightarrow t+0} [V(t_1, x_{t_1}) - V(t, x_t)](t_1 - t)^{-1} = \dot{V}_u(t, x_t)$. Здесь $x_{t_1} = x(t_1 + \Theta)$, $t_1 \geq t$ — решение системы (1.1) при выбранном управлении u и начальном условии (t, x_t) .

Отметим, что $\dot{V}(t, x_t)$ представляет собой полную производную функционала $V(t, x_t)$ вдоль траектории системы (1.1) при управлении u . Будем иногда обозначать ее $\dot{V}(t)$.

Кроме того, предположим, что справедливо представление

$$V(t_1, x_{t_1}) - V(t, x_t) = \int_t^{t_1} \dot{V}_u(s) ds.$$

Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^T [F_1(t, x(t), x(t-h), u(t)) - \dot{V}_u(t)] dt + F_0(x(T)) + \\ &\quad + V(T, x_T) - V(0, x_0). \end{aligned} \tag{1.23}$$

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть существует функционал $V(t, x_t)$ и допустимый процесс ω_0 , такие, что

- 1) $\int_0^T [F_1(t, x(t), x(t-h), u(t)) - \dot{V}_u(t)] dt \geq 0, \quad \forall \omega \in W;$
- 2) $F_1(t, x_0(t), x_0(t-h), u_0(t)) - \dot{V}_{u_0}(t) = 0, \quad n.s. \quad t \in \Gamma;$
- 3) $F_0(x_0(T)) + V(T, x_{0T}) = \inf_{x(T+\Theta) \in X(T+\Theta)} [F_0(x(T)) + V(T, x_T)] = m.$

Тогда процесс $\omega_0 = (x_0(t), u_0(t))$ — глобально оптимальный и имеет место равенство

$$J(u_0) = m - V(0, \varphi).$$

Справедливость этой теоремы следует из представления (1.23) для минимизируемого функционала.

Таким образом, для решения исходной задачи оптимального управления надлежит построить функционал V , удовлетворяющий условиям теоремы 1.1. Используя теорему 1.1, можно получить функциональное уравнение Беллмана для функционала $V(t, x_t)$.

Однако в ряде случаев задачу о выборе функционала V можно изменить, пытаясь подобрать вспомогательную функцию $\Psi(t, x, y) : G \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую некоторым вспомогательным условиям. Опишем их. Введем множество G :

$$G = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^{2n+1} : t \in \Gamma, x \in X(t), y \in X(t-h)\}.$$

Определение 1.1. Функция $\Psi(t, x, y) : G \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит множеству γ_- , если она непрерывно дифференцируема во внутренних точках G , непрерывна в \bar{G} (т.е. в замыкании G) и допускает представление $\Psi(t, x, y) = \Psi_0(t, x) + \Psi_1(t, y)$, где $\Psi_1(t, y) = 0$, $t > T$.

Введем в рассмотрение функции Понтрягина $H(t, x, y, u, \Phi(t, x))$ и Гамильтона $\mathcal{H}(t, x, y, \Phi(t, x))$. Положим

$$H(t, x, y, u, \Phi(t, x)) = -F_1(t, x, y, u) + \Phi'(t, x)f(t, x, y, u).$$

Здесь и далее штрих ' $\hat{\cdot}$ ' — знак транспонирования,

$$\begin{aligned}\Psi_{ix}(t, x) &= \frac{\partial \Psi_i(t, x)}{\partial x}, \\ \Phi(t, x) &= \Psi_{0x}(t, x) + \Psi_{1x}(t+h, x).\end{aligned}$$

Функция \mathcal{H} определяется равенством

$$\mathcal{H}(t, x, y, \Phi(t, x)) = \max_{u \in U(t, x)} H(t, x, y, u, \Phi(t, x)).$$

Обозначим через $\dot{\Psi}(t)$ полную производную функции $\Psi(t, x, y)$ вдоль допустимого процесса задачи (1.1)–(1.6):

$$\dot{\Psi}(t) = \Psi_t + \Psi'_x(t)f(t) + \Psi'_y(t)\dot{x}(t-h), \quad (1.24)$$

где

$$\Psi(t) = \Psi(t, x(t), y(t)), \quad f(t) = f(t, \dot{x}(t), y(t), u(t)), \quad y(t) = x(t - h),$$

$$\Psi_t(t) = \frac{\partial \Psi(t, x(t), y(t))}{\partial t}, \quad \Psi_x(t) = \frac{\partial \Psi_0(t, x(t))}{\partial x}, \quad \Psi_y(t) = \frac{\partial \Psi_1(t, y(t))}{\partial y}.$$

Интегрируя (1.24) по t в пределах от 0 до T и произведя замену переменных $s = t - h$ в последнем слагаемом, получим

$$\int_0^T \dot{\Psi}(t) dt = \int_0^{T-h} [\Psi_t(t) + \Psi'_x(t)f(t) + \Psi'_y(t+h)f(t)] dt +$$

$$+ \int_{T-h}^T [\Psi_t(t) + \Psi'_x(t)f(t)] dt + \int_{-h}^0 \Psi'_y(t+h)\dot{\varphi}(t) dt.$$

Заметим, что последнее слагаемое в этом равенстве зависит только от начальных данных задачи. Обозначим его через C . Учитывая последнюю формулу, сделаем следующее тождественное преобразование функционала (1.6), которое справедливо для любых допустимых процессов ω и функции $\Psi \in \gamma_-$:

$$J(u) = \int_0^T [\mathcal{H}(t) - H(t)] dt - \int_0^T [\Psi_t(t) + \mathcal{H}(t)] dt +$$

$$+ C + F_0(x(T)) + \Psi(T, x(T), y(T)) - \Psi(0, x(0), y(0)), \quad (1.25)$$

где $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(t, x(t), y(t), \Phi(t, x, (t))),$
 $H(t) = H(t, x(t), y(t), u(t), \Phi(t, x(t))).$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функция $\Psi(t, x, y) \in \gamma$, если $\Psi(t, x, y) \in \gamma_-$ и удовлетворяет на множестве неравенству Гамильтона-Якоби

$$\Psi_t(t, x, y) + \mathcal{H}(t, x, y, \Phi(t, x)) \leq 0, \quad \forall (t, x, y) \in G.$$

Из формулы (1.25) вытекает

Теорема 1.2. Пусть существует функция $\Psi \in \gamma$ и процесс $\omega_0 \in W$, такие, что при всех $t \in \Gamma$:

- 1) $\mathcal{H}(t, x_0(t), y_0(t), \Phi(t, x_0(t))) = H(t, x_0(t), y_0(t), u_0(t), \Phi(t, x_0(t)))$;
- 2) $\Psi_t(t, x_0(t), y_0(t)) + \mathcal{H}(t, x_0(t), y_0(t), \Phi(t, x_0(t))) = 0$;
- 3) $L(\Psi) = \inf_{x \in X_1, y \in X(T-h)} \{F_0(x) + \Psi(T, x, y)\} =$
 $= F_0(x_0(T)) + \Psi(T, x_0(T), y_0(T))$.

Тогда процесс ω_0 — глобально оптимальный в задаче (1.1)–(1.6) и

$$J(u_0) = L(\Psi) + C - \Psi(0, x(0), x(-h)) := \ell(\Psi).$$

Отсюда и из представления (1.25) следует, что $\forall \omega \in W$ и $\Psi \in \gamma$ имеет место двойственное неравенство $J(u) \geq \ell(\Psi)$. Поэтому наряду с исходной задачей (1.1)–(1.6) можно рассмотреть двойственную к ней задачу (D)

$$\ell(\Psi) \rightarrow \sup, \quad \Psi \in \gamma.$$

Двойственная задача независимо от свойств исходной задачи является выпуклой. Это позволяет в случае строгой двойственности, т.е. при условии, что $J(u) = \ell(\Psi)$, найти оптимальное значение минимизируемого функционала (1.6), а в общем случае — его нижнюю оценку. Основываясь на этом подходе, можно получить условия локального минимума, требуя выполнения условий теоремы 1.2 в области G_ε , определяемой оптимальной траекторией

$$G_\varepsilon = \{(t, x, y) \in G : t \in \Gamma, |x - x_0(t)| < \varepsilon, |y - x_0(t-h)| < \varepsilon\}.$$

В некоторых случаях удобнее пользоваться иным формализмом. Опишем его. Заметим, что для любых $\omega \in W$, $\Psi \in \gamma$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^T [F_1(t) - \Psi_t(t) - \Psi'_x(t)\dot{x}(t) - \Psi'_y(t)\dot{x}(t-h)]dt + \\ &+ F_0(x(T)) + \Psi(T) - \Psi(0), \end{aligned} \tag{1.26}$$

где

$$F_1(t) = F_1(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad \Psi(T) = \Psi(T, x(T), x(T-h)),$$

$$\Psi(0) = \Psi(0, \varphi(0), \varphi(-h)).$$

Введем функции

$$R(t, x, y, u) = -F_1(t, x, y, u) + \Psi_t(t, x, y) + \Phi'(t, x)f(t, x, y, u); \quad (1.27)$$

$$M(x, y) = F_0(x) + \Psi(T, x, y). \quad (1.28)$$

Сделаем замену переменной $\tau = t - h$ в последнем интеграле в выражении (1.26) и учтем (1.27). Получим следующее представление минимизируемого функционала:

$$J(u) = - \int_0^T R(t, x(t), x(t-h), u(t)) dt + M(x(T), y(T)) + C, \quad (1.29)$$

где C — некоторая постоянная, зависящая только от начальных данных задачи.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть существует функции $\psi \in \gamma_-$ и последовательность $\omega_i \in W$, $i = 1, 2, \dots$, такие, что:

$$1) \quad \int_0^T R(t, x(t), x(t-h), u(t)) dt \leq 0, \quad \forall \omega \in W;$$

$$2) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^T R(t, x_i(t), x_i(t-h), u_i(t)) dt = 0;$$

$$3) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} M(x_i(T), y_i(T)) = \inf_{x \in X, y \in X(T-h)} M(x, y) = m.$$

Тогда последовательность ω_i , $i = 1, 2, \dots$ является минимизирующей для задачи (1.1)–(1.6).

Справедливость теоремы 1.3 вытекает из формулы (1.29), а также может быть выведена из теоремы 1.1.

Если в задаче (1.1)–(1.6) существует оптимальный процесс ω_0 , то теорема 1.3 останется справедливой при $x_i(t) = x_0(t)$, $u_i(t) = u_0(t)$, $i = 1, 2, \dots$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Для выполнения условия 2 теоремы 1.3 достаточно, чтобы последовательность $R_i(t) = R(t, x_i(t), x_i(t-h), u_i(t))$,

$i = 1, 2, \dots$ была равномерно ограничена снизу для всех $t \in \Gamma$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} R_i(t) = 0$ при почти всех $t \in \Gamma$, а в случае существования оптимального процесса ω_0 достаточно, чтобы

$$R(t, x_0(t), x_0(t-h), u_0(t)) = 0.$$

Условие 1 теоремы 1.3, в частности, имеет место, если

$$R(t, x, y, u) \leq 0, \quad \forall (t, x, y) \in G, \quad u \in U(t, x).$$

В этой форме оно используется ниже при решении задач.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Каждая компонента фазового вектора $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ в задаче (1.1)–(1.6) может иметь различные величины запаздывания h_i . Тогда соотношения (1.1), (1.2), (1.6) содержат выражения, зависящие от $y_i = x_i(t-h)$, $i = 1, \dots, n$. В этом случае теоремы 1.2, 1.3 останутся верными, если выполнены все их требования с функцией Ψ вида

$$\Psi(t, x, y) = \Psi_0(t, x) + \sum_{i=1}^h \Psi_i(t, y_i),$$

причем $\Psi_i(t, y_j) \equiv 0$ для $t \geq T$. При этом функцию $R(t, x, y, u)$ нужно определить следующим образом:

$$R(t, x, y, u) = R_j(t, x, y, u), \quad t \in [T - h_{j+1}, T - h_j], \quad h_0 = 0, \\ h_{n+1} = T, \quad h_1 < h_2 < \dots < h_n, \quad j = 0, \dots, n;$$

$$R_j = -F_1(t, x, y, u) + \Psi_i(t, x, y) + \sum_{i=1}^n \Psi_{0x_i}(t, x) f_i(t, x, y, u) + \\ + \sum_{i=1}^j \Psi_{ix_i}(t + h_i, x_i) f_i(t, x, y, u), \quad j = 1, \dots, n;$$

$$R_0 = -F_1(t, x, y, u) + \Psi_i(t, x, y) + \sum_{i=1}^n \Psi_{0x_i}(t, x) f_i(t, x, y, u).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Множество γ можно расширить, рассматривая кусочно-непрерывные функции $\Psi(t, x, y)$. Пусть существует разбиение отрезка $\Gamma = [0, T]$ точками $\tau_j : 0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{p+1} = T$

на полуинтервалы $[\tau_j, \tau_{j+1})$, а функция $\Psi(t, x, y) = \Psi_0(t, x) + \Psi_1(t, y)$ непрерывно дифференцируема на внутренних точках $G_j = \{(t, x, y) \in G : t \in [\tau_j, \tau_{j+1})\}$, $j = 0, \dots, p$ и может быть непрерывно продолжена на $\overline{G_j}$, $j = 0, \dots, p$. В этом случае теорема 1.2 останется в силе, если функцию $R(t, x, y, u)$ определить, как и ранее, по формуле (1.27), а функцию $M(x, y)$ следующим образом:

$$M(x_j, y_j) = F_0(x_{p+1}) + \Psi(t_{p+1}) + \sum_{j=1}^p \Delta \Psi(\tau_j),$$

где

$$\Delta \Psi(\tau_j) = \Psi(\tau_j - 0, x_j, y_j) - \Psi(\tau_j + 0, x_j, y_j), \quad x_j = x(\tau_j), \quad y_j = y(\tau_j).$$

Эта ситуация типична для задач с фазовыми и смешанными ограничениями.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Если в задаче (1.1)–(1.6) время T окончания процесса не фиксировано, то условие 3 в теореме 1.3 следует записать в виде

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M(T_i, x_i(\tau_j), y_i(\tau_j)) = \inf_{\{t > 0, x_j \in X(\tau_j), y_i \in X(\tau_j - h)\}} M(t, x_j, y_j) = m_1$$

или в случае существования оптимального процесса —

$$M(T, x_0(\tau_j), y_0(\tau_j)) = m_1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Задача оптимального управления (1.1)–(1.6) с дискретным запаздыванием по фазовой переменной может быть сведена к задаче оптимального управления системой без последействия путем увеличения размерности фазового вектора следующим образом.

Обозначим через N целую часть числа Th^{-1} . Отметим, что достаточно рассмотреть случай $N \geq 1$, ибо при $N = 0$ система (1.1) не содержит последействия. Рассмотрим функции $x^i(t), u^i(t)$ на отрезке $[0, h]$, определенные формулами

$$\begin{aligned} x^i(t) &= x(t + ih), \quad u^i(t) = u(t + ih), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad t \in [0, h], \\ x^N(t) &= x(t + Nh), \quad u^N(t) = u(t + Nh), \quad 0 \leq t \leq T - Nh. \end{aligned}$$

В терминах новых фазовых переменных x^i и управлений u^i исходная задача (1.1)–(1.6) может быть переписана следующим образом. Критерий качества имеет вид

$$\int_0^h \sum_{i=0}^{N-1} F_i(t + ih, x^i(t), x^{i-1}(t), u^i(t)) dt + F_0(x^N(T - Nh)) + \\ + \int_{Nh}^T F_1(t, x^N(t), x^{N-1}(t), u^N(t)) dt \rightarrow \inf.$$

Дифференциальные уравнения для функций x^i —

$$\dot{x}^i(t) = f(t + ih, x^i(t), x^{i-1}(t), u^i(t)), \quad 0 \leq t \leq h, \quad i = 0, \dots, N-1, \\ \dot{x}^N(t) = f(t + Nh, x^N(t), x^{N-1}(t), u^N(t)), \quad 0 \leq t \leq T - Nh,$$

начальные и терминальные условия —

$$x^{-1}(t) = \varphi(t - h), \quad 0 \leq t \leq h, \quad x^i(h) = x^{i+1}(0), \quad i = 0, \dots, N-1,$$

фазовые ограничения и ограничения на управление —

$$x^i(t) \in X(t + ih), \quad u^i(t) \in U(t + ih, x^i(t)).$$

Достаточные условия оптимальности

Рассмотрим задачу оптимального управления с постоянным запаздыванием $h > 0$ в аргументе функции состояния и сформулируем для неё достаточные условия оптимальности.

Требуется найти минимум функционала

$$J(u) = \int_0^T f_0(t, x(t-h), x(t), u(t)) dt + \Phi(x(T)) \quad (1.30)$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t-h), x(t), u(t)), \quad t \in [0, T]; \quad (1.31)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0]; \quad (1.32)$$

$$u(t) \in U(t) \subset R^k, \text{ п. в. } t \in [0, T]. \quad (1.33)$$

Далее введем обозначения:

$$x_h(t) = x(t-h), (y, x) \in N_\varepsilon(\bar{x}_h(t)) \times N_\varepsilon(\bar{x}(t)),$$

$$N_\varepsilon(\bar{x}(t)) = x \in R^n \mid |x - \bar{x}(t)| < \varepsilon,$$

$$N_\varepsilon(\bar{x}_h(t)) = \begin{cases} y \in R^n : |y - \bar{x}(t-h)| < \varepsilon, t \geq h, \\ \varphi(t-h), t \leq h. \end{cases}$$

$$f(t) = f(t, x_h(t), x(t), u(t)), \tilde{f}(t) = f(t, \bar{x}_h(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)),$$

$$H(t) = (p(t), f(t)) - f_0(t),$$

$I(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0, T-h]$.

Краевая задача принципа максимума при стандартных предположениях гладкости в задаче оптимального управления имеет вид:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial p} \equiv f(t, \bar{x}(t-h), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ п. в. } t \in [0, T]; \quad (1.34)$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0]; \quad (1.35)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \bar{H}(t)}{\partial x} - I(t) \frac{\partial \bar{H}(t+h)}{\partial y}, t \in [0, T]; \quad (1.36)$$

$$p(T) = -\frac{\partial \Phi(\bar{x}(T))}{\partial x}; \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} H(t, \bar{x}_h(t), \bar{x}(t), u(t), p(t)) &\leq \\ &\leq H(t, \bar{x}_h(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t)) \text{ п. в. } t \in [0, T], \forall u(t) \in U(t) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Здесь (\bar{x}, \bar{u}) — строгий локальный минимум в задаче (1.30)–(1.33).

Если U — выпуклое подмножество, а функция Понтрягина дифференцируема по u , то неравенство (1.38) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial \bar{H}(t)}{\partial u}, \nu - \bar{u}(t) \right) \leq 0, \quad \forall \nu \in U \quad \text{п. в. } t \in [0, T]. \quad (1.39)$$

Теорема 1. Предположим, что функции $f_0(t)$, $f(t)$ измеримы, (\bar{x}, \bar{u}) — допустимый процесс, для которого функционал $J(\bar{u})$ конечен. Тогда процесс (\bar{x}, \bar{u}) доставляет слабый локальный минимум в задаче (1.30)–(1.33), если существует $\varepsilon > 0$, абсолютно непрерывная функция $p(t)$ и абсолютно непрерывная симметричная $n \times n$ матрица $Q(t)$, такие, что для почти всех $t \in [0, T]$, для всех

$(x, y) \in N_\varepsilon(\bar{x}_h(t), \bar{x}(t))$ и для любого $u \in N_\varepsilon(\bar{u}(t)) \cap U$ выполнены условия:

$$\begin{aligned} 1. & (p(t) - Q(t)(x - \bar{x}(t)), f(t, y, x, u) - \bar{f}(t)) - f_0(t, x, y, u) + \\ & + \bar{f}_0(t) \leq (\dot{p}(t), x - \bar{x}(t)) + \frac{1}{2} (x - \bar{x}(t), \dot{Q}(t)(x - \bar{x}(t))) ; \quad (1.40) \end{aligned}$$

$$2. \Phi(\bar{x}(T) + \tau) - \Phi(\bar{x}(T)) \geq (p(T), \eta) + \frac{1}{2} (\eta, Q(T)\eta) , \quad (1.41)$$

$$\forall \eta \in R^n : |\eta| < \varepsilon .$$

В случае если функции f_0, f непрерывно дифференцируемы по y, z , процесс (\bar{x}, \bar{y}) допустимый, а функционал $J(\bar{u})$ конечен, то для оптимальности (слабой локальной) процесса (\bar{x}, \bar{u}) достаточно существования $\varepsilon > 0$, абсолютно непрерывной функции $p(t)$ и абсолютно непрерывной симметричной $n \times n$ матрицы $Q(t)$, таких, что для почти всех $t \in [0, T]$ для всех $(x, y) \in N_\varepsilon(\bar{x}_h(t), \bar{x}(t))$, для всех $u \in U \cap N_\varepsilon(\bar{u}(t))$ выполняются условия (1.41), (1.42), (1.43):

$$\begin{aligned} -\dot{p}(t) = & \left(\frac{\partial \bar{f}(t)}{\partial x} \right)^T p(t) - \frac{\partial \bar{f}_0(t)}{\partial x} + \\ & + I(t) \left[\left(\frac{\partial \bar{f}(t+h)}{\partial y} \right)^T p(t+h) - \frac{\partial \bar{f}_0(t+h)}{\partial y} \right] ; \quad (1.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (p(t) - Q(t)(x - \bar{x}(t)), f(t, y, x, u) - \bar{f}(t)) - f_0(t, x, y, u) + \\ & + \bar{f}_0(t) \left(\frac{\partial \bar{f}(t)}{\partial y} \right)^T p(t) - \frac{\partial \bar{f}_0(t)}{\partial y}, y - \bar{x}_h(t) \Big) + \\ & + \left(\frac{\partial \bar{f}(t)}{\partial x}^T p(t) - \frac{\partial \bar{f}_0(t)}{\partial x}, x - \bar{x}(t) \right) + \\ & + \frac{1}{2} (x - \bar{x}(t), \dot{Q}(t)(x - \bar{x}(t))) . \quad (1.43) \end{aligned}$$

Если условия (1.40), (1.41) выполняются для всех $u \in U$, то процесс (\bar{x}, \bar{u}) доставляет сильный локальный минимум в задаче (1.30)-(1.33).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (x, y) — допустимый процесс, принадлежащий окрестности процесса (\bar{x}, \bar{y}) : $\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon, \|u(t) - \bar{u}(t)\| < \varepsilon$ для почти всех t .

В условии (1.40) заменим (t, y, x, u) на $(t, x_h(t), x(t), u(t))$ и, интегрируя это выражение на отрезке $[0, T]$, получим :

$$\int_0^T (\bar{f}_0 - f) dt \leq \left[(\bar{x} - x, p) + \frac{1}{2} ((x - \bar{x}) Q (x - \bar{x})) \right]_0^T \leq \Phi(x(T)) - \Phi(\bar{x}(T)),$$

или $J(\bar{u}) \leq J(u)$, что завершает доказательство первой части. Заметим, что здесь доказана слабая локальная оптимальность. Случай сильной локальной оптимальности доказывается аналогично.

Заменяя в (1.43) (t, x, y, u) на $(t, x_h(t), x(t), u(t))$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T (\bar{f}_0 - f) dt &\leq \int_0^T \left[(\dot{\bar{x}} - \dot{x}, p) + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right)^T p - \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial y}, x_h - \bar{x}_h \right] + \\ &+ \left(\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \right)^T p - \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial x}, x - \bar{x} \right) + \\ &+ ((\dot{x} - \bar{x}), Q(x - \bar{x})) + \frac{1}{2} \left((x - \bar{x}), Q(x - \bar{x}) \right) \Big] dt = \\ &= \int_0^T [(\dot{\bar{x}} - \dot{x}, p)] dt + \frac{1}{2} ((x - \bar{x}), Q(x - \bar{x})) |_0^T \leq \\ &\leq \Phi(x(T)) - \phi(\bar{x}(T)). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Таким образом, $J(\bar{u}) \leq J(u)$ и процесс (\bar{x}, \bar{u}) доставляет слабый локальный минимум .Условие (1.41) можно рассматривать как усиление условия трансверсальности, а условие (1.43)-как усиление принципа максимума.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Если $\Phi(x)$ — выпуклая непрерывно дифференцируемая функция и выполнено условие (1.37), то условие (1.41) имеет место при $Q(T) \leq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Если $\Phi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $\bar{x}(T)$ и выполнено условие (1.37), то (1.41) имеет место при

$$Q(T) < \frac{\partial^2 \Phi(\bar{x}(T))}{\partial x^2}. \quad (1.45)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Если функция Понтрягина выпукла по u , а функция Φ выпукла по x , то теорема 1 выполняется при $Q(t) \equiv 0$, при этом функция $p(t)$ удовлетворяет системе (1.36) с граничными условиями (1.37).

§2. Сравнение двух типов двойственных задач

В этом параграфе построена двойственная задача, использующая выпуклые свойства исходной задачи. Приведено сравнение двух типов двойственных задач. Вопросам двойственности в задачах оптимального управления без учета запаздывания посвящены, например, работы [1; 2; 3], а в моделях с запаздыванием в аргументе функции состояния — [4; 5].

Определение двойственной задачи

Наряду с двойственной задачей (\mathcal{D}) рассмотрим двойственную по Фенхелю-Рокафеллеру задачу, обозначаемую (\mathcal{P}^*) . Эта задача строится следующим образом.

Пусть X, Y — линейные топологические пространства, X^*, Y^* — линейные топологические пространства, находящиеся в двойственности относительно биличных форм $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ соответственно. Для функции $\Phi(x, p) : X \times P \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ построим двойственную к ней $\Phi^*(x^*, p^*) : X^* \times Y^* \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, определяемую равенством

$$\Phi^*(x^*, p^*) = \sup_{x \in X, p \in P} \{ \langle x^*, x \rangle_X + \langle p^*, p \rangle_Y - \Phi(x, p) \}. \quad (2.1)$$

Обозначим через $\inf(\mathcal{P})$ нижнюю грань в задаче (\mathcal{P}) :

$$\inf_{x \in X} \Phi(x, 0) = \inf(\mathcal{P}),$$

а через $\sup(\mathcal{P}^*)$ — верхнюю грань в задаче (\mathcal{P}^*) :

$$\sup_{p^* \in Y^*} [-\Phi^*(0, p^*)] = \sup(\mathcal{P}^*).$$

Тогда, используя определение сопряженной функции, заключаем, что справедливо неравенство [6]:

$$-\Phi^*(0, p^*) \leq \Phi(x, 0), \quad \forall p^* \in Y^*, \quad \forall x \in X.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\sup(\mathcal{P}^*) \leq \inf(\mathcal{P}).$$

Последнее неравенство, как и в §1, будем называть двойственным. Пусть $\wedge : X \rightarrow Y$ — линейный непрерывный оператор; $\wedge^* : Y^* \rightarrow$

X^* — сопряженный с \wedge линейный непрерывный оператор, функции $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $E : Y \rightarrow \mathbb{R}$. Построим двойственную задачу для случая, когда функция $\Phi(x, 0)$ разлагается в сумму

$$\Phi(x, 0) = F(x) + E(\wedge x).$$

В этом случае задача (\mathcal{P}) имеет вид

$$\inf_{x \in X} [F(x) + E(\wedge x)].$$

Используя определение (2.1), видим, что двойственная к (\mathcal{P}) задача может быть представлена в виде

$$\sup_{p^* \in Y^*} [-F^*(\wedge^* p^*) - E(-p^*)],$$

где $F^* : V^* \rightarrow \mathbb{R}$, $E^* : Y^* \rightarrow \mathbb{R}$ — функции, сопряженные к F и E соответственно.

Далее показано, что при некоторых предположениях выпуклости исходной задачи двойственная задача (\mathcal{P}^*) является частным случаем задачи (\mathcal{D}) , двойственной к (\mathcal{P}) . В качестве исходной (\mathcal{P}) рассмотрим задачу (1.1)–(1.6). Для сравнения упомянутых двух типов двойственности перейдем от задачи (\mathcal{P}) к обобщенной вариационной задаче (\mathcal{V}) . Введем следующие функции и множества:

$$L : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$L(t, \xi, \eta, V) = \begin{cases} \inf_u F_1(t, \xi, \eta, u), & u \in U(t, \xi), \quad V = f(t, \xi, \eta, u), \\ & \xi \in X(t), \quad \eta \in X(t-h), \\ \infty, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\mathcal{X} = \{x(\cdot) \in W_1^1(\Gamma, \mathbb{R}^n) : x(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0]\}, \quad \Gamma = [0, T],$$

где $W_1^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ — пространство функций на Γ со значениями в \mathbb{R}^n и абсолютно интегрируемой первой производной. Не ограничивая общности, положим $\varphi(t) = 0$, в противном случае достаточно рассмотреть новую функцию, равную разности

$$x(t) - \varphi(t), \quad t \in \Gamma.$$

В этих обозначениях задача (\mathcal{V}) принимает форму

$$\int_0^T L(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \inf x(\cdot) \in \mathcal{X}. \quad (2.2)$$

Пусть выполняются следующие предположения A относительно функции $L(t, \xi, \eta, v)$:

A_1 : функция $L(t, \xi, \eta, v)$ измерима на Γ при любых $\xi, \eta, v \in \mathbb{R}^{3n}$, полуунпрерывна снизу на \mathbb{R}^{3n} при любом $t \in \Gamma$;

A_2 : $L(t, \xi, \eta, v)$ выпукла по ξ, η, v при любом $t \in \Gamma$ на \mathbb{R}^{3n} ;

A_3 : $L(t, \xi, \eta, v) > c(t)$ при любых $\xi, \eta, v \in \mathbb{R}^{3n}$, где $c(t)$ — некоторая измеримая функция.

Утверждение 1. Если выполнены предположения $A_1 - A_3$, то задача (\mathcal{V}) определена и эквивалентна задаче (\mathcal{P}) в смысле равенства минимальных значений их функционалов [6].

Построение двойственной задачи и двойственное неравенство

Построим для задачи (\mathcal{V}) двойственную задачу (\mathcal{P}), используя подход Фенхеля-Рокафеллара. Введем следующие операторы и функции:

$$\wedge : W_1^1(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow W_1^1(\Gamma, \mathbb{R}^{2n}) \times L_1(\Gamma, \mathbb{R}^n),$$

$$\wedge x(t) = (x(t), x(t-h), \dot{x}(t)),$$

$$E(\wedge x) = \int_0^T L(t, \wedge x(t)) dt,$$

$F(x) = \chi(x)$ — индикаторная функция на множестве \mathcal{X} .

В этих обозначениях задача (2.2) эквивалентна следующей задаче оптимизации:

$$F(x) + E(\wedge x) \rightarrow \inf, \quad x(\cdot) \in W_1^1(\Gamma, \mathbb{R}^n).$$

Двойственная к ней по Фенхелю-Рокаффелару представима в виде

$$-F^*(\wedge^* p^*) - E(-p^*) \rightarrow \sup,$$

где

$$p^*(t) = (p_1^*(t), p_2^*(t), p_3^*(t)), \quad p_i^*(t) \in L_\infty^n(\Gamma), i = 1, 2$$

$$p_3^*(t) \in W_\infty^1(\Gamma, \mathbb{R}^n),$$

$W_0^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ — пространство n -мерных вектор-функций на Γ с ограниченной первой производной.

Короче это условие записывается в виде $p^* \in Y^*$. Рассмотрим далее задачу определения конкретного вида сопряженных функций и операторов в задаче (\mathcal{P}^*) .

Согласно [6],

$$E^*(p^*) = \int_0^T L^*(t, -p^*(t)) dt.$$

По определению сопряженной функции справедливо равенство

$$L^*(t, p^*(t)) = \sup_{\xi, \eta, v \in \mathbb{R}^n} \{ \xi' p_1^*(t) + \eta' p_2^*(t) + vp_3^*(t) - L(t, \xi, \eta, v) \},$$

где $p^*(t) \in Y^*$.

Используя определение L и то, что множество допустимых процессов $W \neq \emptyset$, получим

$$L(t, -p^*(t)) = \sup_{\xi \in X(t), \eta \in X(t-h)} \{ -\xi' p_1^*(t) - \eta' p_2^*(t) + H(t, \xi, \eta, -p_3^*(t)) \}. \quad (2.3)$$

Определим функцию $F^*(\wedge^* p^*)$:

$$F^*(\wedge^* p^*) = \sup_{x \in \mathcal{X}} [\langle \wedge^* p^*, x \rangle - \chi(x)],$$

здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $W_1^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$.

Используя определение сопряженного оператора индикаторной функции, имеем

$$F^*(\wedge^* p^*) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \langle \wedge^* p^*, x \rangle = \sup_{x \in \mathcal{X}} \langle p^*, \wedge x \rangle_Y. \quad (2.4)$$

Раскрывая скалярное произведение, получим следующее представление сопряженной функции:

$$F^*(\wedge^* p^*) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \int_0^T [p_1^*(t)x(t) + \dot{x}'(t)p_3(t)] dt + \int_{-h}^0 x'(t)p_2^*(t+h) dt \right\}.$$

Если предположить дополнительно, что $p_3^*(t) \in W_1^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ и положить $p_2(s) = 0, s \geq T$, то

$$F^*(\wedge^* p^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_3^*(t) = p_1^*(t) + p_2^*(t+h), \\ & t \in [0, T], p_3(T) = 0; \\ \infty, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Теперь двойственная задача к (\mathcal{P}) , а также к (\mathcal{V}) может быть представлена как задача максимизации функционала

$$-\int_0^T [\sup_{\xi \in X, \eta \in X(t-h)} \{\xi' p_1^*(t) + \eta' p_2^*(t) + \mathcal{H}(t, \xi, \eta, p_3^*(t))\}] dt \quad (2.6)$$

на множестве, задаваемом ограничениями

$$\dot{p}_3^*(t) = p_1^*(t) + p_2^*(t+h), \quad t \in [0, T], \quad (2.7)$$

$$p_3^*(T) = 0, \quad p^*(t) \in Y^*. \quad (2.8)$$

Назовем задачу (2.6)–(2.8) задачей (\mathcal{P}^*) . Верхнюю грань в этой задаче обозначим через $\sup(\mathcal{P}^*)$. При этом $\sup(\mathcal{P}^*) \leq \inf(\mathcal{P})$.

Добавим к функционалу (2.6) выражение $z(T) - z(0) - \int_0^T \dot{z}(t) dt$, где $z(t) \in W_\infty^1(T, \mathbb{R})$. Рассмотрим новую задачу (\mathcal{D}_k) определения минимума линейного функционала

$$z(T) - z(0) \quad (2.9)$$

на множестве функций $(z, p^*) \in W_\infty^{1,n}(I) * Y^*$, удовлетворяющих неравенству

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) + \xi' p_1^*(t) + \eta' p_2^*(t) + \mathcal{H}(t, \xi, \eta, p_3^*(t)) &\leq 0, \\ n.e. \quad t \in I, \xi \in X(t), \eta \in X(t-h). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Положим теперь в задаче (\mathcal{D})

$$\psi(t, \xi, \eta) = a(t) + \xi' \psi^1(t) + \eta' \psi^2(t), \quad (2.11)$$

где $\psi^i(t)$, $i = 1, 2$ непрерывные, почти всюду непрерывно дифференцируемые функции, причем $p_i^*(t) = \dot{\psi}^i(t)$, $i = 1, 2$, $a(t) = z(t)$, $t \in \Gamma$. Тогда двойственная задача (\mathcal{P}^*) совпадает с двойственной задачей (\mathcal{D}_k) .

Заметим, что задача (\mathcal{P}^*) построена в предположении выпуклости функции $L(t, \xi, \eta, v)$ по ξ, η, v . Для построения задачи (\mathcal{D}) выпуклые свойства задачи (\mathcal{P}) не требуются, тем не менее двойственная задача всегда выпукла.

Если выполнены предположения $A_1 - A_3$ и дополнительные условия (2.7), (2.8), то имеет место система неравенств

$$\sup(\mathcal{D}_k) \leq \sup(\mathcal{P}^*) \leq \inf(\mathcal{P}) = \inf(\mathcal{V}). \quad (2.12)$$

Доказательство первого неравенства содержится в работе [7]. Важной является проблема, когда в этой цепочке неравенств стоят равенства, т.е. проблема строгой двойственности, обсуждаемая в §3.

§3. Строгая двойственность

В этом параграфе формулируются условия, при которых имеет место строгая двойственность между задачами (\mathcal{P}) и (\mathcal{D}) .

Постановка задачи

Теорема о структуре неотрицательных мер Радона. Предположим дополнительно, что множество допустимых значений управления не зависит от точек (t, ξ) , $X(t) = \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим задачу (\mathcal{D}_k) как исходную и построим к ней двойственную. Для этого исследуем следующую задачу в банаховом пространстве. Требуется найти минимум линейного функционала

$$J_1(\mu) = \int_{\Sigma} f_0(t, \xi, \eta, v) d\mu(t, \xi, \eta, v) \quad (3.1)$$

среди всех неотрицательных мер Радона μ , удовлетворяющих при любых $(a, g_1, g_2, g_3) \in K$, равенству

$$\int_{\Sigma} [\dot{a}(t) + \xi' g_1(t) + \eta' g_2(t) + f'(t, \xi, \eta, v) g_3(t)] d\mu(t, \xi, \eta, v) = \int_0^T \dot{z}(t) dt. \quad (3.2)$$

Здесь:

$$K = \{(a, g_1, g_2, g_3) \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^{3n+1}) : \\ g_3(t) = g_1(t) + g_2(t+h), t \in \Gamma, g_3(T) = 0\},$$

$C^1(\Gamma, \mathbb{R}^{3n+1})$ — пространство непрерывно дифференцируемых на Γ функций со значением в \mathbb{R}^{3n+1} . Обозначим задачу (3.1), (3.2) через (D_k^*) .

ЛЕММА 3.1. Задача (D_k^*) является двойственной к задаче (D_k) , и имеет место строгая двойственность

$$\sup(D_k) = \inf(D_k^*). \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача (D_k) является задачей линейного программирования, в которой выполнено условие Слейтера, т.е. при $g_i(t) = 0, i = 1, 2, 3, \dot{a}(t) < \alpha(t)$ имеет место строгое неравенство

$$\dot{a}(t) + \xi' g_1(t) + \eta' g_2(t) + f'(t, \xi, \eta, v) g_3(t) < f_0(t, \xi, \eta, v).$$

Поэтому, согласно теореме 1.1, с учетом предположений $A_1 - A_3$ имеет место равенство (3.3). \square .

ЛЕММА 3.2. Множество всех неотрицательных мер Радона, удовлетворяющих условию (3.2), имеет структуру

$$\int_{\Sigma} g(t, \xi, \eta, v) d\mu(t, \xi, \eta, v) = \int_0^T \int_{\Omega} g(t, \xi, \eta, v) d\mu_t(\xi, \eta, v) dt, \quad (3.4)$$

где $g(t, \xi, \eta, v)$ — любая непрерывная на Σ функция;

$\Omega = X \times X \times U; \mu = \{\mu_t | t \in [0, T]\}$ есть семейство вероятностных мер, обладающих следующими свойствами:

- 1) носитель меры μ_t содержится в множестве Ω ;
- 2) для любой непрерывной на Σ функции h функция $f_n(t)$, определенная равенством

$$f_n(t) = \int_{\Omega} h(t, \xi, \eta, v) d\mu_t(\xi, \eta, v),$$

принадлежит пространству $L_1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$.

Множество мер μ , обладающих свойствами 1 и 2, обозначим через \mathfrak{M} .

Доказательство. Положим в (3.2) $g = (g_1, g_2, g_3) = 0$. Тогда для любой непрерывно дифференцируемой функции $a(t): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\int_{\Sigma} \dot{a}(t) d\mu(t, \xi, \eta, v) = \int_0^T \dot{a}(t) dt.$$

Рассмотрим следующие множества, заданные в пространстве линейных непрерывных функционалов:

$$L := \{\Phi \in C^*(\Sigma) : \Phi \geq 0, \Phi(f) = \int_0^T \int_{\Omega} f(t, \xi, \eta, v) d\mu_t(\xi, \eta, v) dt, \mu \in \mathfrak{M}\},$$

$$M := \{\Phi \in C^*(\Sigma) : \Phi \geq 0, \Phi(\dot{a}) = \int_0^T \dot{a}(t) dt, a(t) \in C_1(\Gamma, \mathbb{R})\},$$

$C^*(\Sigma)$ — двойственное пространство функций на Σ , сопряженных к пространству непрерывных функций на Σ . В силу равенства (3.2) имеет место включение $L \subset M$.

Покажем, что $\bar{L} = M$, где замыкание осуществляется в смысле слабой топологии в пространстве $C^*(\Sigma)$. Здесь $C^*(\Sigma)$ — пространство линейных непрерывных функционалов на Σ . Заметим, что L — выпуклое множество.

Пусть $\bar{L} \neq M$. Тогда существует элемент $\hat{\Phi} \in M$, который не принадлежит \bar{L} . В этом случае $\hat{\Phi}$ может быть строго отделен от \bar{L} . Это означает, что существует функционал $\hat{f} \in [C^*(\Sigma)]^* = C(\Sigma)$, такой, что $\forall \Phi \in \bar{L}$ справедливы два неравенства:

$$\hat{\Phi}(\hat{f}) = \int_{\Omega} \hat{f}(t, \xi, \eta, v) d\hat{\mu}(t, \xi, \eta, v) \geq \alpha, \quad (3.5)$$

$$\Phi(\hat{f}) = \int_0^T \int_{\Omega} \hat{f}(t, \xi, \eta, v) d\mu_t(\xi, \eta, v) dt < \alpha. \quad (3.6)$$

Введем функцию $\hat{g}(t) \in C(\Gamma, \mathbb{R}^n)$:

$$\hat{g}(t) = \max\{\hat{f}(t, \xi, \eta, v) : (\xi, \eta, v) \in \Omega\}. \quad (3.7)$$

Тогда

$$\int_{\Omega} \hat{g}(t) d\hat{\mu}(t, \xi, \eta, v) = \int_0^T \hat{g}(t) dt = \beta \geq \alpha. \quad (3.8)$$

По лемме Филиппова [8], существуют измеримые функции $(\hat{\xi}(\cdot), \hat{\eta}(\cdot), \hat{v}(\cdot))$, такие, что

$$\hat{g}(t) = f(t, \hat{\xi}(t), \hat{\eta}(t), \hat{v}(t)).$$

Возьмем в качестве $\mu_t(\xi, \eta, v)$ функцию Дирака

$$\mu_t(\xi, \eta, v) = \delta(\xi - \hat{\xi}(t), \eta - \hat{\eta}(t), v - \hat{v}(t)).$$

Тогда равенство (3.8) примет вид

$$\int_0^T \int_{\Omega} \hat{f}(t, \xi, \eta, v) d\hat{\mu}_t(\xi, \eta, v) dt = \int_0^T \hat{g}(t) dt = \beta \geq \alpha.$$

Из последнего неравенства следует, что существование функционала $\hat{\Phi} \in L$, однозначно соответствующего $\hat{\mu}$ и удовлетворяющего условию (3.5), противоречит строгому неравенству (3.6). Полученное противоречие доказывает лемму. Итак, множество L выпукло и замкнуто, т.е. слабо компактно, и $L = M$. \square

Достаточные условия существования строгой двойственности

Таким образом, согласно лемме 3.2, двойственная задача эквивалентна задаче определения минимума функционала

$$\int_0^T \int_{\Omega} f_0(t, \xi, \eta, v) d\mu_t(\xi, \eta, v) dt \quad (3.9)$$

относительно всех мер $\mu \in \mathfrak{M}$, таких, что $\forall (a, g_1, g_2, g_3) \in K$ имеем

$$\int_0^T \int_{\Omega} [\xi' g_1(t) + \eta' g_2(t) + f'(t, \xi, \eta, v) g_3(t)] d\mu_t(\xi, \eta, v) dt = 0. \quad (3.10)$$

Выберем $g_3(t) = 0$, т.е. $g_1(t) = -g_2(t + h)$. Тогда

$$\int_0^T \int_{\Omega} \xi' g_1(t) d\mu_t(\xi, \eta, v) dt = \int_{-h}^{T-h} \int_{\Omega} \eta' g_1(t) d\mu_{t+h}(\xi, \eta, v) dt. \quad (3.11)$$

Отсюда следует, что почти всюду на $[0, T-h]$ имеет место равенство

$$\int_{\Omega} \xi^i d\mu_t(\xi, \eta, v) dt = \int_{\Omega} \eta^i d\mu_{t+h}(\xi, \eta, v) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.12)$$

Вернемся еще раз к равенству (3.10), учитывая условие (3.12). Получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T \{(g_1(t) + g_2(t+h))' \int_{\Omega} \xi d\mu_t(\xi, \eta, v) + \\ & + g_3'(t) \int_{\Omega} f(t, \xi, \eta, v) d\mu_t(\xi, \eta, v)\} dt = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Положим

$$z(t) = \int_{\Omega} \xi d\mu_t(\xi, \eta, v).$$

Тогда из (3.10) следует, что для всех $g_3(t) \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих граничному условию $g_3(T) = 0$, имеет место равенство

$$\int_0^T [(g_3'(t)z(t) + g_3'(t) \int_{\Omega} f(t, \xi, \eta, v) d\mu_t(\xi, \eta, v))] dt = 0. \quad (3.14)$$

Пусть в (3.14) $g_3^j(t) = 0$, $j \neq i$, $g_3^i(t) \in C^{01}(\Gamma, \mathbb{R})$.

Тогда для любого $z^i(t) \in W_1^1(\Gamma, \mathbb{R})$ получим

$$z^i(t) = \int_{\Omega} f^i(t, \xi, \eta, v) d\mu_t(\xi, \eta, v), \quad \text{n.e. } t \in \Gamma, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Положим в (3.14) $g_3^j(t) = 0$, $j \neq i$, $j = 1, \dots, n$, $g_3^i(t) \in C^1(\Gamma, \mathbb{R})$, $g_3(T) = 0$. С учетом (3.15) имеем $g_3'(0)z(0) = 0$. Это означает, что $z(0) = 0$.

В силу равенств (3.12)–(3.14) и условия $z(0) = 0$ двойственная задача (\mathcal{D}_k^*) эквивалентна следующей:

$$\int_0^T \int_{\Omega} f_0(t, \xi, \eta, v) d\mu_t(\xi, \eta, v) dt \rightarrow \inf, \quad (3.16)$$

$$\mu \in \mathfrak{M}, \quad z \in W_1^1(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad (3.17)$$

$$\dot{z}(t) = \int_{\Omega} f(t, \xi, \eta, v) d\mu_t(\xi, \eta, v), \quad n.e.t \in \Gamma, \quad (3.18)$$

$$z(t) = \int_{\Omega} \xi d\mu_t(\xi, \eta, v), \quad n.e.t \in \Gamma, \quad (3.19)$$

$$z(t-h) = \int_{\Omega} \eta d\mu_t(\xi, \eta, v), \quad n.e.t \in \Gamma, \quad (3.20)$$

$$z(0) = 0.$$

Обозначим задачу (3.16)–(3.21) через $(\bar{\mathcal{P}})$. Задачу $(\bar{\mathcal{P}})$ можно рассматривать как задачу определения обобщенного управления $\mu \in \mathfrak{M}$. В силу компактности множества допустимых значений управлений и непрерывности функций f_0, f обобщенное решение в этой задаче существует. Если в задаче $(\bar{\mathcal{P}})$ существует допустимый процесс $(z, \hat{\mu})$, у которого мера μ_t представима в виде

$$\mu_t(\xi, \eta, v) = \delta(\xi - x(t), \eta - x(t-h), v - u(t)), \quad n.e.t \in \Gamma, \quad (3.21)$$

то процесс $(x(t), u(t))$ является допустимым в исходной задаче (\mathcal{P}) . Можно рассматривать задачу $(\bar{\mathcal{P}})$ как расширение задачи (\mathcal{P}) по аргументам (ξ, η, v) [9, 10].

Итак, установлены следующие соотношения:

$$\sup(\mathcal{D}_k) = \min(\mathcal{D}_k^*) = \min(\bar{\mathcal{P}}) \leq \inf(\mathcal{P}). \quad (3.22)$$

В случае, если множества X, U и функция $f_0(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ выпуклы на $t \in \Gamma$, $\min(\bar{\mathcal{P}}) = \inf(\mathcal{P})$ [6]. Сформулируем достаточные условия существования строгой двойственности между задачами (\mathcal{D}_k) и $(\bar{\mathcal{P}})$.

Теорема 3.1. Пусть $\inf(\mathcal{P}) = \min(\bar{\mathcal{P}})$. Тогда между задачами (\mathcal{P}) и (\mathcal{D}_k) имеет место строгая двойственность, т.е.

$$\sup(\mathcal{D}_k) = \inf(\mathcal{P}).$$

§4 . Примеры задач оптимального управления с запаздыванием по фазовой переменной

Далее применим теорему о достаточных условиях оптимальности для решения разрывных задач с постоянным запаздыванием с фиксированным и нефиксированным временем.

Линейная задача оптимального управления с фиксированным временем

Требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \int_0^T [a'_0(t)x(t) + a'_1(t)x(t-h) + \frac{1}{2}u'N_1(t)u]dt + c'_1x(T) \quad (4.1)$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t)x(t-h) + B(t)u(t), \quad t \in \Gamma = [0, T], \quad (4.2)$$

$$x(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad \Theta \in [-h, 0],$$

$$u(t) = \mathbb{R}^r, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \quad (4.3)$$

Здесь $A(t)$, $D(t)$ — матрицы размерности $n \times n$; функции $a_i(t) \in \mathbb{R}^n$; $N_1(t)$ — положительно определенная матрица размерности $r \times r$; $B(t)$ — прямоугольная $n \times r$ -матрица, вектор $c_1 \in \mathbb{R}^n$. Предполагается, что все указанные функции измеримы по t .

Для исследования этой задачи применим теорему 1.3. Выберем функцию $\psi(t, x, y)$ следующим образом:

$$\psi(t, x, y) = a(t) + x'\psi_0(t) + y'\psi_1(t-h), \quad (4.4)$$

где $a(t), \psi_0(t), \psi_1(t-h)$ — непрерывные, почти всюду непрерывно дифференцируемые функции. Таким образом, согласно определению 1.1, имеет место равенство $\psi(t, y) = y'(t-h)$. Зависимость функции ψ_1 от аргумента $t-h$ в правой части равенства выбрана для удобства дальнейших выкладок. Зададим функцию $R(t, x, y, u)$ с помощью соотношений

$$R = \dot{a}(t) + x'\dot{\psi}_0(t) + y'\dot{\psi}_1(t-h) + \Phi'(t)(A(t)x + D(t)y + B(t)u) - \\ - x'a_0(t) - a'_1y - \frac{1}{2}u'N_1(t)u,$$

где

$$\Phi(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t), \quad \psi_1(s) \equiv 0, \quad s \in (T-h, T].$$

Согласно теореме 1.3, достаточно потребовать, чтобы

$$R(t, x, y, u) \leq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r,$$
$$R(t, x_0(t), y_0(t), u_0(t)) = 0$$

для почти всех $t \in \Gamma$, где $(x_0(t), u_0(t))$ — оптимальный процесс. Поэтому при каждом $t \in \Gamma$ можно решать конечномерную задачу нелинейного программирования, определяя максимум функции $R(t, x, y, u)$ на множестве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$. В точках дифференцируемости функции $\psi_0(t), \psi_1(t-h)$ удовлетворяют системе

$$\dot{\psi}_0(t) = a_0(t) - A'(t)\Phi(t), \quad (4.5)$$
$$\dot{\psi}_1(t-h) = a_1(t) - D'(t)\Phi(t).$$

Оптимальное управление определяется равенством

$$u_0(t) = N_1^{-1}(t)B'(t)\Phi(t). \quad (4.6)$$

Построим функцию $M(x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$:

$$M(x, y) = c'_1 x + a(T) + x' \psi_0(T) + y'_1 \psi_1(T-h).$$

Используя условие 3 теоремы 1.3 и непрерывность функций ψ_i , получим граничные условия (или условия трансверсальности) для функций $\psi_i, i = 0, 1$:

$$\psi_0(T) = -c_1, \quad \psi_1(T-h) = 0. \quad (4.7)$$

Опишем алгоритм построения оптимального решения задачи (4.1)–(4.3). Интегрируя систему (4.5) с граничными условиями (4.7), определяем функции ψ_i . Затем, согласно (4.6), строим оптимальное программное управление $u_0(t)$, подставляя которое в систему (4.2), найдем оптимальную траекторию $x_0(t)$. Если в задаче (4.1)–(4.3) присутствуют фазовые ограничения $\beta(t) \leq x(t) \leq \alpha(t), -h \leq t \leq T$, где

$\alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{R}^n$ — заданные непрерывные функции, то система (4.5) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_0(t) &= a_0(t) - A'(t)\Phi(t) + \lambda(t) - \mu(t); \\ \dot{\psi}_1(t-h) &= a_1(t) - D'(t)\Phi(t) + \lambda(t-h) - \mu(t-h); \\ \lambda^i(t)(\beta^i(t) - x_0^i(t)) &= 0, \quad \lambda^i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \mu^i(t)(x_0^i(t) - \alpha^i(t)) &= 0, \quad \mu^i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Здесь $x_0^i(t)$ — компоненты вектора $x_0(t)$.

Функции ψ_i ищем в классе кусочно-непрерывных функций. Построим функцию $M(x_j, y_j)$, используя замечание 1.3:

$$\begin{aligned}M(x_j, y_j) &= c'_1 x_{p+1} + a(t_{p+1}) + x'_{p+1} \psi_0(t_{p+1}) + y'_{p+1} \psi_1(t_{p+1}-h) + \\ &+ \sum_{j=1}^p [x'_j(\psi_0(\tau_j-0) - \psi_0(\tau_j+0)) + y'_j(\psi_1(\tau_j-h-0) - \\ &\quad \psi_1(\tau_j-h+0))]\end{aligned}$$

где $x_j = x(\tau_j)$.

Из условия минимума функции M на множестве

$$Q = \{x(t) \in C(\Gamma, \mathbb{R}^n) : \beta(t) \leq x(t) \leq \alpha(t), t \in \Gamma\}$$

получим условия трансверсальности и условия скачка в точках разрыва функций:

$$\begin{aligned}C_1 - \psi_0(T) - \hat{\mu}(T) + \hat{\lambda}(T) &= 0; \\ \psi_1(T-h) - \hat{\mu}(T-h) + \hat{\lambda}(T-h) &= 0; \\ \psi_0(\tau_j-0) - \psi_0(\tau_j+0) - \hat{\mu}(\tau_j) + \hat{\lambda}(\tau_j) &= 0; \\ \psi_1(\tau_j-h-0) - \psi_1(\tau_j-h+0) - \hat{\mu}(\tau_j-h) + \hat{\lambda}(\tau_j-h) &= 0; \\ \hat{\mu}^\ell(\tau_j)[\beta^\ell(\tau_j) - x_0^\ell(\tau_j)] &= 0, \quad \hat{\mu}^\ell(\tau_j) \geq 0; \\ \hat{\lambda}^\ell(\tau_j)[x_0^\ell(\tau_j) - \alpha^\ell(\tau_j)] &= 0, \quad \hat{\lambda}^\ell(\tau_j) \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Из условий (4.8), (4.9) видно, что уже при наличии линейных фазовых ограничений нельзя сначала построить функции $\psi_0(t), \psi_1(t-h)$

и оптимальное управление, а затем, интегрируя систему (4.2), (4.3), найти оптимальную траекторию. В таком случае системы (4.2), (4.3) с граничными условиями (4.3), (4.9) должны решаться одновременно, что представляет собой достаточно сложную задачу, ибо в этой системе присутствует запаздывающий и опережающий аргумент, а граничные условия заданы в начальной и конечной точках. Аналогичная ситуация возникает при минимизации функционала, квадратичного по фазовым переменным.

Так, если минимизируется функционал

$$J(u) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} x'(t) N_2(t) x(t) + \frac{1}{2} u'(t) N_1(t) u(t) + a'_0(t) x(t) + \right. \\ \left. + a'_1(t) x(t-h) \right] dt + c'_1 x(T) + x'(T) N_0 x(T), \quad (4.10)$$

где $N_0, N_1(t), N_2(t), t \in \Gamma$ — положительно определенные матрицы при ограничениях, задаваемых условиями (4.1)–(4.3), то оптимальное управление определяется формулой (4.6), а функции ψ ; — граничными условиями (4.7) и системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_0(t) = a_0(t) + N_2(t)x(t) - A'(t)\Phi(t), \\ \dot{\psi}_1(t-h) = a_1(t) - D'(t)\Phi(t). \quad (4.11)$$

Задача оптимального управления с нефиксированным временем

Требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \varepsilon(t) u^2 dt + \beta T \quad (4.12)$$

на траекториях скалярной системы

$$\dot{x}(t) = \alpha(t)x(t) + d(t)x(t-h) + b(t)u, \quad (4.13)$$

$$x(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad \Theta \in [-h, 0], \quad x(T) = c_1. \quad (4.14)$$

Постоянные $\beta > 0$, c_1 и непрерывные функции $\varepsilon(t) > 0$, $\alpha(t)$, $d(t)$, $b(t)$ заданы.

Положим $\psi(t, x, y) = a(t) + \psi_0(t)x + \psi_1(t-h)y$,

$$R = \dot{a}(t) + x\dot{\psi}_0(t) + y\dot{\psi}_1(t-h) - \frac{\varepsilon(t)}{2}u^2 + \\ + \Phi(t)[\alpha(t)x + d(t)y + b(t)u], \quad \psi_1(s) \equiv 0, \quad s > T-h, \quad (4.15)$$

где $\Phi(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t)$.

Из условия максимума функции $R(t, x, y, u)$ на $G \times U$ найдем оптимальное управление

$$u_0(t) = b(t)\varepsilon^{-1}(t)\Phi(t), \quad t \in \Gamma. \quad (4.16)$$

Подставляя управление (4.16) в функцию R , из условия $R_x = R_y = 0$ определяем систему уравнений для функции ψ_i в точках их дифференцируемости

$$\dot{\psi}(t) = -\alpha(t)\Phi(t), \quad (4.17)$$

$$\dot{\psi}_1(t-h) = -d(t)\Phi(t). \quad (4.18)$$

Построим функцию M , используя замечание 1.4:

$$M(T, x, y) = \beta T + a(T) + \psi_0(T)x + \psi_1(T-h)y. \quad (4.19)$$

В силу произвольности $y(T)$ имеем $\psi_1(T-h) = 0$.

Из условия $R(t, x_0(t), y_0(t), u_0(t)) = 0$ находим функцию $a(t)$:

$$a(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \varepsilon^{-1}(\tau)(b(\tau)\Phi(\tau))^2 d\tau.$$

Отсюда следует, что

$$m = \inf_T [\beta T + c_1 \psi_0(T) + a(T)].$$

Согласно замечанию 1.4, оптимальное значение T_0 может быть определено из условий

$$\dot{a}(T_0) + c_1 \dot{\psi}(T_0) + \beta = 0, \quad \ddot{a}(T_0) + c_1 \ddot{\psi}_0(T_0) > 0.$$

Первое из этих условий с учетом (4.17) и выражения для $a(t)$ приводит к равенству

$$\frac{1}{2}\varepsilon(T_0)(\psi_0(T_0)b(T_0))^2 - c_1\alpha(T_0)\psi_0(T_0) + \beta = 0. \quad (4.20)$$

Рассматривая выражение (4.20) как уравнение относительно ψ_0 , заключаем, что оно имеет положительные действительные корни, если

$$c_1^2\alpha^2(T_0) - 2\varepsilon^{-1}(T_0)(b(T_0))^2 > 0.$$

Опишем алгоритм построения решения этой задачи.

1. Выберем произвольное допустимое значение T . Решая краевую задачу $\dot{\psi}_0(t) + \alpha(t)\psi_0(t) = 0$, $\psi_0(T) = p$, где p — корень уравнения (4.20), построим функцию $\psi_0(t)$, $t \in [T-h, T]$.

2. Интегрируя уравнение $\dot{\psi}_1(t-h) = -d(t)\psi_0(t)$ с начальным условием $\psi_1(T-h) = 0$, построим $\psi_1(t)$, $t \in [T-2h, T-h]$.

3. Далее интегрируем уравнение $\dot{\psi}_0(t) = -\alpha(t)(\psi_0(t) + \psi_1(t))$ на отрезке $[T-2h, T-h]$ (полученном на шаге 1) условием $\psi_0(T-h)$ и строим функцию $\psi_0(t)$ при $t \in [T-2h, t-h]$.

4. Решая краевую задачу $\dot{\psi}_1(t-h) = -d(t)(\psi_0^1(t) + \psi_1^2(t))$, $t \in [T-3h, T-2h]$, находим $\psi_1(t)$, $t \in [T-3h, T-2h]$ и т.д. Таким образом определим функцию ψ_i , $i = 0, 1$ на всем отрезке Γ .

5. Согласно (4.16), находим оптимальное управление, подставляя которое в систему (4.13), найдем оптимальную траекторию и вычислим значение функционала (4.12) вдоль найденного оптимального процесса при фиксированном выбранном значении T .

6. Изменяя T с достаточно малым шагом $\Delta > 0$ на интервале $[0, T]$, найдем значения $J(u, T)$ и определим то значение T_0 , при котором достигается минимум этого функционала. Точность может быть обеспечена за счет уменьшения шага Δ .

Линейная задача оптимального быстродействия

Требуется минимизировать время T перехода скалярной системы

$$\dot{x}(t) = \alpha(t)x(t) + d(t)x(t-h) + u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad (4.21)$$

$$x(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad \Theta \in [-h, 0]$$

из заданного начального состояния φ в конечное $x(T) = c_1$. Используя представление $\psi(t, x, y) = a(t) + \psi_0(t)x + \psi_1(t-h)y$, построим функцию

$$R(t, x, y, u) = \dot{a}(t) + \dot{\psi}_0(t)x + \dot{\psi}_1(t-h)y + \Phi(t)(\alpha(t)x + d(t)y + u),$$

$$\psi_1(s) \equiv 0, \quad s > T-h,$$

где

$$\Phi(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t),$$

и функционал

$$m = \inf_{y \in R, T > 0} [a(T) + \psi_0(T)c_1 + \psi_1(T-h)y + T].$$

Требованиям теоремы 1.3 удовлетворяют следующие функции:

$$u_0(t) = \text{sign}\Phi(t), \quad t \in \Gamma,$$

$$\dot{\psi}_0(t) = -\alpha(t)\Phi(t), \quad \dot{\psi}_1(t-h) = -d(t)\Phi(t), \quad \psi_1(T-h) = 0,$$

$$a(t) = \int_0^t |\Phi(s)|ds.$$

Оптимальное значение T_0 определяется из условия

$$\min_{T>0} \left\{ T + \int_0^T |\Phi(s)|ds + \psi_0(T)c_1 \right\} = T_0 + \int_0^{T_0} |\Phi(s)|ds + \psi_0(T_0)c_1.$$

§5. Оптимальное управление системами с переменным запаздыванием

Во многих реальных задачах запаздывания $h(t)$ зависит от времени. Рассмотрим некоторые задачи управления системами.

Задача оптимального управления системой с переменным запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad t \in [0, T] = \Gamma, \\ x(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь $h(t)$ — положительная, непрерывно дифференцируемая функция, причем $\dot{h}(t) < 1$. Отсюда, в частности, следует, что функция $t - h(t)$ монотонно возрастает и для нее существует обратная функция $\tau(\tau)$, являющаяся решением уравнения $\tau = t - h(t)$. Зададим начальные условия для системы (5.1)

$$x(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad \Theta \in E_0, \tag{5.2}$$

где E_0 — заданное начальное множество.

Границное условие имеет вид $x(T) \in X_T \subset \mathbb{R}^n$.

Управление является измеримой на Γ функцией и удовлетворяет включению

$$u(t) \in U(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^r, \quad n.e.t \in \Gamma = [0, T]. \quad (5.3)$$

Требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \int_0^T F_1(t, x(t), x(t-h), u(t)) dt + F_0(x(t)) \quad (5.4)$$

на множестве всех допустимых процессов. Функции f, F_0, F_1 удовлетворяют тем же предположениям, что и в §1. При сделанных предположениях решение системы уравнений (5.1), (5.2) может быть построено при каждом фиксированном допустимом управлении $u(t) \in U(t, x(t)), t \in \Gamma$.

Достаточные условия оптимальности

Пусть функция $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит множеству γ_- (см. §1) и $\psi_2(t, y) = 0, t \geq T - h(T)$. Вычислим полную производную функции $\psi(t, xy) \in \gamma_-$ в силу системы (5.1)

$$\dot{\psi}(t) = \psi_t + \psi'_x f(t) + \psi'_y \frac{d}{dt}[y(t)],$$

где $y(t) = x(t - h(t)), \psi(t) = \psi(t, x(t), y(t)), f(t) = f(t, x(t), y(t), u(t))$.

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до T и делая в последнем слагаемом замену переменных $\tau = t - h(t)$, получим

$$\begin{aligned} \psi(T) - \psi(0) &= \int_0^{T-h(T)} [\psi_t(t) + \psi'_x(t)f(t) + \psi'_y(r(t))f(t)\dot{r}(t)] dt + \\ &+ \int_{T-h(T)}^T [\psi_t(t) + \psi'_x(t)f(t)] dt + C. \end{aligned}$$

Здесь C зависит только от начальных данных задачи (см. §1). Положим

$$\begin{aligned} R(t, x, y, u) &= -F_1(t, x, y, u) + \psi_t(t, x, y) + \Phi'(t, x)f(t, x, y, u), \\ \Phi(t, x) &= \psi_x(t, x) + \psi_y(r(t), x)\dot{r}(t). \end{aligned}$$

Тогда справедливо равенство (1.24) и теорема 1.3 остается в силе с учетом нового определения функции $R(t, x, y, u)$.

Пусть U — выпуклое, замкнутое, ограниченное множество в \mathbb{R}^r и теорема 1.3 выполняется для следующей функции $\psi \in \gamma_-$:

$$\psi(t, x, y) = a(t) + \psi'_0(t)x + \psi'_1(t - h(t))y, \quad \psi_1(s) \equiv 0, \quad s \geq T - h(T).$$

Тогда

$$\begin{aligned} R(t, x, y, u) &= \dot{a}(t) + \dot{\psi}'_0(t)x + y' \frac{d}{dt}(\psi_1(t - h(t))) + \\ &+ \Phi'(t)f(t, x, y, u) - F_1(t, x, y, u), \\ \Phi(t) &= \psi_0(t) + \psi_1(t)\dot{r}(t), \quad t \in \Gamma. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Оптимальное управление определяется формулой

$$u_0(t, x, y) = \arg \max_{u \in U} [\Phi'(t)f(t, x, y, u) - F_1(t, x, y, u)]. \tag{5.6}$$

В точках дифференцируемости функции $\psi_i(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0(t) &= F_{1x}(t) - f'_x(t)\Phi(t), \\ \frac{d}{dt}[\psi_2(t - h(t))] &= F_{1y}(t) - f'_y(t)\Phi(t), \quad t \in \Gamma, \end{aligned} \tag{5.7}$$

с граничными условиями

$$\psi_1(T) = -F_{0x}(x_0(T)), \quad \psi_2(T - h(T)) = 0. \tag{5.8}$$

Введем функцию H для задачи (5.1)–(5.4):

$$H(t, x, y, u, \psi) = -F_1(t, x, y, u) + \psi'(t)f(t, x, y, u).$$

Для любого допустимого процесса ω справедливо равенство

$$J(u) = - \int_0^T [H(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)) - \dot{\psi}'(t)x(t)]dt + M(x(T)),$$

где $M(x(T)) = F_0(x(T)) + \psi'(T)x(T) - \psi'(0)x(0)$.

Положим далее $||\Delta x|| = \max_t |x(t) - \bar{x}_0(t)|$, $t \in \Gamma$.

Считая $||\Delta x||$ достаточно малой величиной и раскладывая функцию Понtryгина H в ряд Тейлора по степеням $\Delta x, \Delta y$ в окрестности точки $(t, x_0(t), y_0(t), u_0(t))$, найдем приращение функционала (5.4), где $x_0(t)$ и $u_0(t)$ — оптимальные траектория и управление:

$$J(u) - J(u_0) = \int_0^T [H(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)) - H(t, x_0(t), y_0(t), u_0(t), \psi(t))] dt - \\ - \int_0^T [\dot{\psi}'(t)x(t) + H'_{0x}(t)\Delta x(t) + H'_{0y}(t)\Delta y(t)] dt + M'_x(x(t))\Delta x(T) + \delta[|\Delta x|],$$

где $H_0(t) = H(t, x_0(t), y_0(t), u_0(t), \psi(t))$. Используя это равенство, заключаем, что необходимым условием локального минимума функционала в точке $u_0(t)$ является существование нетривиальной вектор-функции $\psi(t)$, удовлетворяющей системе уравнений

$$-\dot{\psi}(t) = H_{0x}(t) + H_{0y}(r(t))\dot{r}(t), \quad t \in \Gamma, \quad (5.9)$$

с граничными условиями

$$\psi(T) = -F_{0x}(x_0(T)), \quad \psi(s) \equiv 0, \quad s > T. \quad (5.10)$$

Вводя обозначения $\psi(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t)$ и полагая $\psi_1(t) \equiv 0$, $t > T - h(T)$, убеждаемся в эквивалентности условий (5.7), (5.8) и (5.9), (5.10). Условие для определения оптимального управления в терминах функции H имеет вид

$$u_0(t, x, y) = \arg \max_{u \in U} H(t, x, y, u, \psi). \quad (5.11)$$

Таким образом, если теорема 1.3 справедлива для линейной по x и y функции $\psi \in \gamma_-$, то необходимые и достаточные условия локального минимума в задаче совпадают. Более того, найденное решение доставляет абсолютный минимум функционалу (5.4). Если $h(t) = h = \text{Const}$, то $\dot{r}(t) = 1$, $r(t) = t + h$ и условия (5.7)–(5.11) совпадают с принципом максимума Понtryгина для систем с постоянным запаздыванием.

§6. Оптимизация систем с запаздыванием в аргументе функции управления

Получены необходимые и достаточные условия оптимальности для систем с запаздыванием в управлении. Решена линейная квадратичная задача.

Формула для приращения функционала

Рассмотрим задачу оптимального управления системой с запаздыванием в управлении. Такие задачи возникают в теории автоматического регулирования, а также при построении оптимального фильтра.

Абсолютно непрерывная функция состояния $x(t) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ и измеримая функция управления $u(t) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^r$ удовлетворяют ограничениям

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), u(t-h)), \quad t \in [0, T] = \Gamma; \quad (6.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad u(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad \Theta \in [-h, 0], \quad x(T) \in X_T; \quad (6.2)$$

$$x(t) \in X(t) \subset \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in U(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^r. \quad (6.3)$$

Требуется найти допустимый процесс ω , доставляющий глобальный или локальный минимум функционалу

$$J(u) = \int_0^T F_1(t, x(t), u(t), u(t-h)) dt + F_0(x(T)). \quad (6.4)$$

Предположим, что функции $f(t, x, u, v), f_x(t, x, u, v), F_1(t, x, u, v)$ измеримы по t , непрерывны по u, v, x , функция $F_0(x)$ — непрерывно дифференцируема. Если правая часть системы (6.1) и функция F_1 не зависят явно от $u(t)$, то задача (6.1)–(6.4) сводится к задаче без запаздывания введением функции $v(t) = u(t-h)$.

Пусть, далее, ω_0 — оптимальный процесс. Тогда для любого допустимого процесса ω и любой абсолютно непрерывной функции $\Phi(t)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_0) &= \int_0^T [H(t, x_0(t), u_0(t), v_0(t), \Phi(t)) - \\ &\quad - H(t, x(t), u(t), v(t), \Phi(t)) - \dot{\Phi}'(t) \Delta x(t)] dt + \\ &\quad + F_0(x(T)) - F_0(x_0(T)) + \Phi'(T) \Delta x(T), \end{aligned} \quad (6.5)$$

где $H(t, x, u, v, \Phi) = -F_1(t, x, u, v) + \Phi' f(t, x, u, v)$, $\Delta x = x(t) - x_0(t)$.

Положим

$$\dot{\Phi}(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), v_0(t), \Phi(t)), \quad \Phi(T) = -F_{0x}(x(T)). \quad (6.6)$$

С учетом (6.6) формула (6.5) имеет вид

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_0) &= \int_0^T [H(t, x_0(t), u_0(t), v_0(t), \Phi(t)) - \\ &\quad - H(t, x(t), u(t), v(t), \Phi(t))] dt + \\ &+ \int_0^T \delta(|\Delta x(t)|) dt + \delta(|\Delta x(T)|), \end{aligned}$$

где $\delta(|\Delta x(t)|)$ есть величина, стремящаяся к нулю при $|\Delta x(t)| \rightarrow 0$. Используя формулу (6.5), можно доказать принцип максимума для задачи (6.1)–(6.3).

Пусть функция $\Psi(t, x)$ непрерывна и почти всюду непрерывно дифференцируема по совокупности аргументов. Положим

$$\begin{aligned} R(t, x, u, v) &= -F_1(t, x, u, v) + \Psi_t(t, x) + \Psi'_x(t, x)f(t, x, u, v), \\ M(x) &= F_0(x) + \Psi(T, x) - \Psi(0, x(0)). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_0) &= \int_0^T [R(t, x_0(t), u_0(t), v_0(t), \Phi(t)) - \\ &\quad - H(t, x(t), u(t), v(t), \Phi(t))] dt + \\ &+ M(x(T)) - M(x_0(T)). \end{aligned}$$

Из последнего равенства вытекает справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть существуют непрерывные, почти всюду непрерывно дифференцируемая функция $\Psi(t, x)$ и процесс ω_0 , такие, что*

- 1) $\int_0^T R(t, x(t), u(t), v(t)) dt \leq 0, \quad \forall \omega \in W;$
- 2) $R(t, x_0(t), u_0(t), v_0(t)) = 0, \quad n.s.t \in \Gamma;$
- 3) $M(x_0(T)) = \inf_{x \in X_T} M(x).$

Тогда процесс ω_0 — оптимальный и $J(u_0) = M(x_0(T))$.

Теорема 6.1 не дает конструктивного метода построения оптимального процесса. С ее помощью можно проверять, является ли данный процесс оптимальным или нет. Сформулируем достаточные условия оптимальности для различных типов задач.

Достаточные условия оптимальности для линейных задач

Рассмотрим линейную по фазовым координатам управляемую систему, в которой запаздывание присутствует как в фазовой переменной, так и в управлении:

$$J(u) = \int_0^T [a'_0(t)x(t) + g_0(t, u(t))]dt + b'x(T) \rightarrow \inf; \quad (6.7)$$

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + B_0(t, u(t)) + \\ + B_1(t, u(t-h)); \quad (6.8)$$

$$x(\Theta) = \varphi(\Theta), \Theta \in [-h, 0], u(\Theta_1) = \varphi_0(\Theta_1), \Theta_1 \in [-h_1, 0]; \quad (6.9)$$

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \text{ п.в. } t \in \Gamma = [0, T]. \quad (6.10)$$

Здесь $x(t) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n, u(t) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^r, g_0(t, u) : \Gamma \times U \rightarrow \mathbb{R}, A_0(t), A_1(t) — n \times n$ -матрицы, $B_0(t, u), B_1(t, v), a_0(t), b$ — n -мерные измеримые по t и непрерывные по u и v функции $\varphi(\Theta) \in \mathbb{R}^n, \varphi_0(\Theta) \in \mathbb{R}^r$ — заданные непрерывные функции.

Пусть

$$\Psi(t, x) = a(t) + p'(t)x, \quad (6.11)$$

где $a(t)$ — непрерывная, $p(t)$ — абсолютно непрерывная функция.

Аналогично §1, используя представление (6.11), построим двойственную задачу. Для любого допустимого процесса ω и функции $\Psi(t, x)$, определяемой согласно (6.11), справедливо равенство

$$J(u) = \int_0^{T-h} [x'(t)(a_0(t) + \dot{p}(t) + A'_0(t)p(t) + A'_1(t+h)p(t+h))]dt + \\ + \int_{T-h}^T (a_0(t) + \dot{p}(t) + A'_0(t)p(t))'x(t)dt + \int_0^T [p'(t)B_0(t, u(t)) + g_0(t, u(t))]dt + \\ + \int_{-h_1}^{T-h_1} [p'(t+h_1)B_1(t+h_1, u(t))]dt + \int_{-h}^0 (A'_h(t+h)p(t+h))'\varphi(t)dt +$$

$$+b'x(T) + p'(T)x(T) - p'(0)x(0). \quad (6.12)$$

Положим $p(t) = 0$ для $t < 0$, а при $t \geq 0$ определим функцию $p(t)$ как решение системы уравнений

$$-\dot{p}(t) = A'_0(t)p(t) + A'_1(t+h)p(t+h) + a_0(t), \quad t \in \Gamma : \quad (6.13)$$

$$p(T) = -b, \quad p(s) = 0, \quad s > T. \quad (6.14)$$

При сделанных предположениях существует абсолютно непрерывное решение этой системы.

Если ω_0 — оптимальный процесс, то $\Delta J \geq 0$. С учетом (6.13), (6.14) выражение для ΔJ представимо в виде

$$\begin{aligned} \Delta J = J(u) - J(u_0) = & \int_0^T [p'(t)(B_0(t, u_0(t)) - B_0(t, u(t))) + \\ & + g_0(t, u_0(t)) - g_0(t, u(t)) + p'(t+h_1)(B_1(t+h_1, u_0(t)) - \\ & - B_1(t+h_1, u(t))] dt. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Из равенства (6.15) следует соотношение принципа максимума. Если $u(t)$ на отрезке $[-h_1, 0]$ не задано, то для $t \in [-h_1, T]$

$$u_0(t) = \arg \max_{u \in U} [p'(t)B_0(t, u) + p'(t+h_1)B_1(t+h_1, u) + g_0(t, u)]. \quad (6.16)$$

Приведем теперь для системы (6.8) соотношения принципа максимума при следующих предположениях:

$$u(\Theta_1) = \varphi_0(\Theta_1), \quad \Theta_1 \in [-h_1, 0] — заданная измеримая функция,$$

$$g_0(t, u) = \frac{1}{2}u'N_1(t)u, \quad U = \mathbb{R}^r, \quad B_0(t, u) = B_0(t)u,$$

$$B_1(t, v) = B_1(t)v, \quad X_T = \mathbb{R}^n.$$

Здесь $N_1(t)$ — непрерывная симметричная положительно определенная $r \times r$ -матрица, $B_i(t)$ — $n \times r$ -матрица с измеримыми ограниченными элементами. Тогда оптимальный процесс $(u_0(t), x_0(t))$ определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned} u_0(t) = & N_1^{-1}(t)B'_0(t)p(t) + N_t^{-1}B'_1(t+h_1)p(t+h_1), \quad t \in \Gamma; \\ \dot{x}(t) = & A_0(t)x_0(t) + A_1(t)x_0(t-h) + B_0(t)N_1^{-1}(t)[B'_1(t+h_1)p(t+h_1) + \\ & + B'_0(t)p(t)] + B'_1(t)N_1^{-1}(t-h_1)[B'_0(t-h_1)p(t-h_1) + \\ & + B'_1(t)p(t)]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

В этой задаче сначала интегрируется система (6.13), (6.14) для $p(t)$, начиная от конечного момента Γ до начального $t = 0$, потом, согласно (6.16), определяется программное оптимальное управление $u_0(t)$, а затем интегрируется система (6.17) с начальным условием (6.9) и находится оптимальная траектория $x_0(t)$.

Линейная система с квадратичным критерием качества

Аналогичным способом можно построить синтез оптимального управления для квадратичного функционала

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [u' N_1(t) u + x' N_2(t) x] dt. \quad (6.18)$$

Здесь $N_1(t), N_2(t)$ — непрерывные, симметричные соответственно $r \times r$ - и $n \times n$ -матрицы, $N_1(t)$ положительно определена, $N_2(t)$ неотрицательно определена. Кроме того, выполнены ограничения, задаваемые условиями (6.8)–(6.10) в предположении (A). В этой задаче функция $p(t) : \Gamma \in \mathbb{R}^n, p(s) = 0, s < 0$ удовлетворяет почти всюду уравнениям

$$-\dot{p}(t) = A'_0(t)p(t) + A'_1(t+h)p(t+h) + N_2(t)x_0(t), \quad t \in \Gamma, \quad (6.19)$$

с граничными условиями

$$p(s) = 0, \quad s \geq T. \quad (6.20)$$

Оптимальное управление $u_0(t)$ определяется выражением (6.16).

Пусть далее для простоты вычислений матрицы N_1, N_2, A_i, B_i постоянные.

Для решения системы (6.19), (6.20) имеет место представление [11]

$$\begin{aligned} p(t) = P(t, \tau, \tau)x(\tau) + \int_{\tau-h}^{\tau} P(t, s+h, \tau)A_1x(s)ds + \\ + \int_{\tau-h_1}^{\tau} P(t, s+h_1, \tau)B_1u(s)ds. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Здесь матричная функция $P(t, s, \tau)$ непрерывна по $(t, s, \tau) \in \Gamma$, непрерывно дифференцируема почти всюду, за исключением точек $t = s$,

$t = T - h$, $s = T - h$, и удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial P(t, s, \tau)}{\partial \tau} = P(t, \tau, \tau)H_0P(\tau, s, \tau) + P(t, \tau + h_1, \tau)H_{01}P(\tau + h_1, s, \tau) + \\ + P(t, \tau + h_1, \tau)H_1P(\tau + h_1, s, \tau); \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial P(t, \tau, \tau)}{\partial \tau} = -P(t, \tau, \tau)A_0 - P(t, \tau + h, \tau)A_1 + P(t, \tau, \tau)H_0P(\tau, \tau, \tau) + \\ + P(t, \tau + h_1, \tau)H_{10}P(\tau, \tau, \tau) + P(t, \tau + h_1, \tau)H_1P(\tau + h_1, s, \tau); \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial P(\tau, \tau, \tau)}{\partial \tau} = -A'_0P(\tau, \tau, \tau) - P(\tau, \tau, \tau)A_0 - A'_1P(\tau + h, \tau, \tau) - \\ - P(\tau, \tau + h, \tau)A_1 - N_2 + P(\tau, \tau, \tau)H_0P(\tau, \tau, \tau) + \\ + P(\tau, \tau + h_1, \tau)H_{10}P(\tau, \tau, \tau) + P(\tau, \tau, \tau)H_0P(\tau + h_1, \tau, \tau) + \\ + P(\tau, \tau + h_1, \tau)H_1P(\tau + h_1, \tau, \tau). \quad (6.24)$$

Границные условия имеют вид

$$P(t, s, \tau) = 0, \quad t, s \geq T, \quad (6.25)$$

$$P(T, T, T) = 0,$$

где

$$H_0 = B_0N_1^{-1}B'_0, \quad H_{01} = B_0N_1^{-1}B'_1, \\ H_{10} = B_1N_1^{-1}B'_0, \quad H_1 = B_1N_1^{-1}B'_1.$$

Оптимальное управление, минимизирующее целевой функционал, существует, является единственным и равняется

$$u_0(t) = -N_1^{-1}B'_0[P(t, \tau, \tau)x(\tau) + \int_{\tau-h}^{\tau} P(t, s + h, \tau)A_1x(s)ds + \\ + \int_{\tau-h_1}^{\tau} P(t, s + h, \tau)B_1u(s)ds] - \gamma(t)N_1^{-1}B'_1[P(t + h_1, \tau, \tau)x(\tau) + \\ + \int_{\tau-h}^{\tau} P(t + h_1, s + h, \tau)A_1x(s)ds + \\ + \int_{\tau-h_1}^{\tau} P(t + h_1, s + h_1, \tau)B_1u(s)ds], \quad (6.26)$$

где

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\tau, T - h_1], \\ 0, & t \in (T - h_1, T]. \end{cases}$$

Синтез управления (или управления с обратной связью) получается, если в выражении (6.26) положить $\tau = t$.

Решение системы уравнений относительно функции $P(t, s, \tau)$ может быть получено с помощью дискретной аппроксимации. Эту систему можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений по τ с фиксированными параметрами t и s . Заметим, что, согласно (6.26), оптимальное управление в момент времени t зависит не только от состояний системы на интервале запаздывания $[t - h, t]$, но и от предшествующего управления на интервале $[t - h_1, t]$.

§7. Необходимые и достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых процессов с запаздыванием

В этом параграфе получены необходимые и достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых процессов с запаздыванием по фазовому вектору и вектору управления. Рассмотрен приближенный метод построения решения и сформулирован дискретный принцип максимума и квазимаксимума. Управление дискретными системами рассматривалось в работе [11], в которой приводится подробная библиография по данному вопросу.

Постановка дискретной задачи. Эквивалентное представление минимизируемого функционала

Задачи дискретного оптимального управления возникают в экономике, исследовании операций, в организации и технологии производства, а также при построении численных методов решения задач оптимального управления непрерывными системами.

Рассмотрим дискретную задачу с запаздыванием по фазовым переменным и управлению, в которой переход из k в $(k+1)$ -е состояние определяется соотношениями

$$x_{k+1} = f_k(x_{k-\nu}, \dots, x_k, u_{k-\mu}, \dots, u_k), \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (7.1)$$

Фазовый вектор x_k и вектор управления u_k на k -м шаге удовлетворяют ограничениям

$$x_k \in X_k \subset \mathbb{R}^n, \quad k = 0, \dots, N, \quad x_k = (x_{1k}, \dots, x_{nk}), \quad (7.2)$$

$$u_k \in U_k \subset \mathbb{R}^r, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad u_k = (u_{1k}, \dots, u_{rk}). \quad (7.3)$$

Начальное состояние системы задается набором векторов

$$x - i = a_i, \quad i = 0, \dots, \nu, \quad (7.4)$$

$$u - j = \varphi_j^0, \quad j = 1, \dots, \mu. \quad (7.5)$$

Допустимый процесс $\omega = (x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_{N-1})$ определен, если заданы начальные условия (7.4), (7.5) и выбраны управлении $u_k \in U_k$, $k = 0, \dots, N-1$ так, что

$$x_{k+1} = f_k(x_{k-\nu}, \dots, x_k, u_{k-\mu}, \dots, u_k) \subset X_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Задача состоит в минимизации на множестве всех допустимых процессов функционала

$$I(u) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k^0(x_{k-\nu}, \dots, x_k, u_{k-\mu}, \dots, u_k) + b(x_N). \quad (7.6)$$

Введем обозначения $z_j = (x_{j-\nu}, \dots, x_j)$, $v_j = (u_{j-\mu}, \dots, u_j)$, $j = 0, \dots, N-1$. Предположим, что функции f_k^0, f_k, b , $k = 0, \dots, N-1$ ограничены снизу в области определения. Заметим, что если начальные условия в задаче (7.1)–(7.6) фиксированы, множества u_k , $k = 0, \dots, N-1$ ограничены и замкнуты, $W \neq \emptyset$, а функции f_k^0, f_k, b , $k = 0, \dots, N-1$ непрерывны по совокупности аргументов в области определения, то, по теореме Вейерштрасса, решение задачи (7.1)–(7.6) существует. Пусть $p_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 0, \dots, N$ — произвольный набор векторов, $\bar{w} \in W$ — оптимальный процесс. Тогда для любого допустимого процесса ω справедливо равенство

$$I(u) = \sum_{k=0}^{N-1} [f_k^0(z_k, v_k) - p'_{k+1} x_{k+1} + p'_k x_k] + b(x_N) + p'_N x_N - p'_0 x_0. \quad (7.7)$$

Вычислим приращение функционала $\Delta I = I(\omega) - I(\bar{u})$, имеем

$$\begin{aligned} \Delta I &= \sum_{k=0}^{N-1} \{H_k(z_k, \bar{v}_k, p_{k+1}) - H_k(z_k, v_k, p_{k+1}) + \\ &+ H_k(\bar{z}_k, \bar{v}_k, p_{k+1}) - H_k(z_k, \bar{v}_k, p_{k+1}) + \\ &+ p'_k(x_k - \bar{x}_k)\} + T(x_N) - T(\bar{x}_N) - p'_0(x_0 - \bar{x}_0), \end{aligned} \quad (7.8)$$

где

$$H_k(z_k, v_k, p_{k+1}) = p'_{k+1} f_k(z_k, v_k) - f_k^0(z_k, v_k), \quad T(x_N) = b(x_N) + p'_N x_N.$$

Разложим функции $H_k(z_k, v_k, p_{k+1})$, $T(x_N)$ в ряд по степеням $\Delta x_k = x_k - \bar{x}_k$ в окрестности точки $(\bar{z}_k, \bar{v}_k, p_{k+1})$ и \bar{x}_N соответственно:

$$\begin{aligned} H_k(z_k, \bar{v}_k, p_{k+1}) &= H_k(\bar{z}_k, \bar{v}_k, p_{k+1}) + \\ &+ \sum_{i=k-\nu}^k [H'_{k_{x_i}}(\bar{z}_k, \bar{v}_k, p_{k+1}) \Delta x_i + \delta(|\Delta x_i|)], \\ T(x_N) &= T(\bar{x}_N) + T'_{x_N}(\bar{x}_N) \Delta x_N + \delta(|\Delta x_N|). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Отметим, что в силу дифференцируемости функций H_k по x_k имеет место равенство

$$\begin{aligned} H_k(z_k, v_k, p_{k+1}) - H_k(\bar{z}_k, v_k, p_{k+1}) &= \\ &= \sum_{j=-\nu}^0 H'_{k_{x_{k+j}}}(\bar{z}_k, v_k, p_{k+1}) \Delta x_{k+j} + \alpha(z_k) |\Delta z_k|, \end{aligned}$$

где

$$\lim_{z_k \rightarrow \bar{z}_k} \alpha(z_k) = 0, \quad \Delta x_k = x_k - \bar{x}_k, \quad k = 0, \dots, N.$$

Подставляя (7.9) в (7.8) и приравнивая нулю коэффициенты при Δx_j , $j = 0, \dots, N$, получим рекуррентные соотношения для определения сопряженных векторов $[p] = (p_0, \dots, p_N)$:

$$\begin{aligned} p_k &= H_{k_{x_k}}(\bar{z}_k, \bar{v}_k, p_{k+1}) + \dots + H_{(k+\nu)_{x_k}}(\bar{z}_{k+\nu}, \bar{v}_{k+\nu}, p_{k+\nu+1}); \\ (7.10) \end{aligned}$$

$$p_N = -b_x(\bar{x}_N), \quad k = 0, \dots, N_1, \quad p_j = 0, \quad j > N.$$

При таком определении векторов p_i формула (7.8) для приращения функции I имеет вид

$$\Delta I = \sum_{k=0}^{N-1} \{H_k(z_k, \bar{v}_k, p_{k+1}) - H_k(z_k, v_k, p_{k+1})\} + \sum_{k=1}^N \delta(|\Delta x_i|). \quad (7.11)$$

Система (7.10) есть линейная система с переменными коэффициентами, которая определена для каждого фиксированного процесса $\bar{\omega}$ и позволяет последовательно построить векторы p_N, \dots, p_0 .

Необходимые условия оптимальности

При выводе формул (7.9)–(7.10) рассматривались лишь те процессы $[x, u]$, которые не нарушают фазовых ограничений задачи, т.е. $x_i \in X_i, i = 0, \dots, N$, более того, $x \in \text{int}X_i$. Это условие выполняется, если X_i — открытые подмножества \mathbb{R}^n или совпадают с \mathbb{R}^n . Способ учета фазовых ограничений (7.2) будет описан ниже.

Задавая набор векторов $[u] = (u_0, \dots, u_{N-1})$, согласно (7.1), (7.4), найдем $[x] = (x_1, \dots, x_N)$ т.е. $[x] = [x(u)]$. Минимизируемая функция (7.6) может рассматриваться как сложная функция набора управлений $[u]$ или $I = I(x(u), u)$.

Пусть сначала в поставленной дискретной задаче отсутствуют фазовые ограничения и ограничения на управление, т.е. $X_i = \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, N, u_i = \mathbb{R}^r, i = 0, \dots, N-1$. Фиксируя набор управлений $[u]$, вычислим величину производной

$$p_i = \frac{dI(x, u)}{dx_i}, \quad (7.12)$$

в которую вкладывается следующий смысл.

Наряду с набором $[x]$ рассмотрим $[\tilde{x}]$. Первые $i-1$ компонента этих наборов совпадают, т.е. $x_\ell = \tilde{x}_\ell, \ell = 1, \dots, i-1, \tilde{x}_i = x_i + \Delta$, а все последующие компоненты $\tilde{x}_\ell, \ell = i+1, \dots, N$ получаются из рекуррентных соотношений (7.1)–(7.5), если в них в качестве вектора x_i взять \tilde{x}_i . Таким образом, формула (7.12) может быть записана в виде

$$p_i = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} |\Delta|^{-1} (I(\tilde{x}, u) - I(x, u)).$$

В силу формул (7.1) ни один из векторов $x_i, i = 0, \dots, N-1$ не зависит от x_N . Поэтому

$$p_N = \frac{dI(x, u)}{dx_N} = -\frac{\partial b(x_N)}{\partial x_N}. \quad (7.13)$$

Учитывая соотношения (7.1), (7.6), вычислим $p_i, i = N-1, \dots, 0$:

$$p_i = \frac{\partial I}{\partial x_i} + \sum_{j=i}^{i+\nu} \frac{\partial x_{j+1}}{\partial x_i} \frac{dI}{dx_{j+1}} \quad (7.14)$$

или

$$p_i = \frac{\partial I}{\partial x_i} + \sum_{j=i}^{i+\nu} \frac{\partial x_{j+1}}{\partial x_i} p_{j+1}.$$

Используя определение функций H_i , формулы (7.14) можно представить в виде

$$p_N = b_x(x_N), \quad p_j = 0, \quad j > N; \quad (7.15)$$

$$p_i = \sum_{j=i}^{i+\nu} H_{j+i}(z_j, v_j, p_{j+1}), \quad i = N-1, \dots, 0.$$

Предположим, что функции f_0, f_k непрерывно дифференцируемы по u_i , $i = 0, \dots, N-1$. Для того чтобы решать задачу минимизации сложной функции $I(x(u), u)$, зависящей от N , переменных на множестве $\mathbb{R}^r \times \dots \times \mathbb{R}^r$, необходимо знать ее производные по u_i , которые обозначим через y_i , $i = 0, \dots, N-1$:

$$y_i = \frac{\partial I(x(u), u)}{\partial u_i} = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} |\Delta|^{-1} (I(\tilde{x}, \tilde{u}) - I(x, u)).$$

Здесь процесс (\tilde{x}, \tilde{u}) строится следующим образом:

$$\begin{aligned} u_\ell &= \tilde{u}_\ell, \quad \ell = 0, \dots, N-1, \quad \ell \neq i, \quad \tilde{u}_i = u_i + \Delta, \\ x_\ell &= \tilde{x}_\ell, \quad \ell = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Векторы \tilde{x}_ℓ , $\ell = i+1, \dots, N$ вычисляются согласно (7.1), (7.4).

Используя формулы (7.8), (7.11) для приращения Δi с учетом выбранного процесса (\tilde{x}, \tilde{u}) , получим

$$y_i = \sum_{j=i}^{i+\mu} H_{j+u_i}(z_j, v_j, p_{j+1}), \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (7.16)$$

Легко видеть, что если в дискретной задаче отсутствуют ограничения (7.2), (7.3), то формулы (7.10), (7.15) совпадают, а условия $y_i = 0$, $i = 0, \dots, N-1$ являются необходимыми условиями минимума в задаче (7.1), (7.4)–(7.6).

Если в задаче присутствуют ограничения (7.3), причем U_k , $k = 0, \dots, N-1$ — компактные выпуклые подмножества \mathbb{R}^r , то оптимальное управление $[\bar{u}]$ должно удовлетворять следующим неравенствам:

$$\sum_{j=i}^{i+\mu} H'_{ju_i}(z_j, v_j, p_{j+1})(u_j - \bar{u}_j) \geq 0, \quad \forall u_i \in U_i, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Если в исходной задаче присутствуют смешанные ограничения вида $h_\ell(x, u) \leq 0$, $\ell = 1, \dots, s$, где $h_\ell(x, u)$ — непрерывно дифференцируемые по x и u функции, то для ее решения представим эти ограничения в дискретном виде:

$$h_\ell(x_j, u_j) \leq 0, \quad \ell = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, q.$$

Далее для численной реализации метода и определения набора векторов $[p]$, $[y]$ определим новую функцию

$$I_H[x(u), u] = I[x(u), u] + \sum_{\ell=1}^s \sum_{j=1}^q \lambda_\ell^j h_\ell(x_j, u_j). \quad (7.17)$$

Задача минимизации функции (7.17) на множестве, задаваемом ограничениями (7.1)–(7.5), является специальной задачей нелинейного программирования, в которой, согласно теореме Куна-Таккера, необходимые условия оптимальности имеют вид

$$\frac{dI_H}{du_i}[x(\bar{u}), \bar{u}] = 0, \quad i = 0, \dots, q-1,$$

$$\lambda_\ell^j h_\ell(\bar{x}_j, \bar{u}_j) = 0, \quad \lambda_\ell^j \geq 0, \quad h_\ell(\bar{x}_j, \bar{u}_j) \leq 0, \quad i = 0, \dots, q, j = 1, \dots, q.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Если все функции в задаче (7.1)–(7.6) дважды непрерывно дифференцируемы по x и u , то можно найти вторые производные сложной функции $R[x(u), u]$ по u и использовать для построения решения задачи (7.1), (7.6) быстросходящиеся методы, аналогичные методу Ньютона. Для получения более высокой точности

интегрирования исходной задачи (7.1)–(7.6) можно использовать схему Рунге–Кутта для вычисления производной и более точные квадратурные формулы для вычисления интегралов.

Дискретный принцип максимума

Пусть $\omega^* = (u_0^*, \dots, u_{N-1}^*, x_0^*, \dots, x_N^*)$ — оптимальный процесс, а ω — допустимый процесс, соответствующий начальным условиям (7.4), (7.5) и набору векторов управления

$$[u] = (u_0^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_{N-1}^*),$$

т.е. $u_k = u_k^*$, $k \neq i$, $k = 0, \dots, N - 1$.

Найдем в этом случае приращение функционала ΔI , используя сопряженные векторы p_k , $k = 0, \dots, N$ (7.10) и формулу (7.11):

$$\begin{aligned} \Delta I = & \sum_{k=i}^{i+\mu} [H_k(z_k, v_k^*, p_{k+1}) - H_k(z_k, v_k, p_{k+1})] + \\ & + \sum_{k=i}^N \alpha(z_k) |\Delta z_k|. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Минимизируемую функцию $I(u)$ при фиксированных начальных условиях (7.4), (7.5) можно рассматривать как функцию набора векторов $[u] = (u_0, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{R}^{rN}$. Минимизация этой функции на множестве $U_0 \times \dots \times U_{N-1}$ является достаточно сложной задачей вследствие большой размерности $[u]$. Используя специальные свойства дискретной задачи оптимального управления (7.1), (7.6), сформулируем условия, аналогичные принципу максимума Понтрягина для непрерывных систем.

Пусть многошаговый процесс описывается соотношениями (7.1)–(7.5) и задача состоит в отыскании i -й составляющей u_i набора векторов $[u]$, которая доставляет минимум функционала

$$I(x(u), u) = b(x_N) \quad (7.19)$$

по всевозможным значениям $u_i \in U_i$, когда все остальные компоненты фиксированы, индекс i — произвольный, меньше $N - 1$.

Обозначим через U_i^* множество решений сформулированной задачи и предположим, что

$$U_i^* = \arg \min_{u_i \in U_i} b(x_N) \neq 0.$$

Функции f_k, b непрерывны по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемы по x_k , $k = 0, \dots, N$. Тогда для каждого вектора $u_i \in U_i$ находится последовательность x_{i+1}, \dots, x_N . Функцию $b(x_N)$ можно рассматривать как сложную функцию аргументов $x_{i+1}(u_i) = a_i, \dots, x_{i+\mu+1}(u_i) = a_{i+\mu}$. Обозначим ее через $B(a_i, \dots, a_{i+\mu})$. При этом

$$a_i = a_i(u_i) = f_i(z_i, v_i), \dots, a_{i+\mu} = a_{i+\mu}(u_i) = f_{i+\mu}(z_{i+\mu}, v_{i+\mu}).$$

Множество U_i^* можно представить в виде

$$U_i^* = \arg \min_{u_i \in U_i} B(a_i(u_i), \dots, a_{i+\mu}(u_i)). \quad (7.20)$$

Вместо минимизации функции $B(a_i(u_i), \dots, a_{i+\mu}(u_i))$ по вектору управления $u_i \in U_i$ можно рассмотреть задачу о минимизации функции $B(a_i, \dots, a_{i+\mu})$ по фазовым векторам $a_i \in a_i(U_i) = \Omega_i, \dots, a_{i+\mu} \in a_{i+\mu}(U_i) = \Omega_{i+\mu}$.

Пусть $u_i^* \in U_i^*$, функция $B(a_i, \dots, a_{i+\mu})$ выпукла на выпуклых множествах $\Omega_i, \dots, \Omega_{i+\mu}$, $a_i^* = a_i(u_i^*), \dots, a_{i+\mu}^* = a_{i+\mu}(u_i^*)$. В этом случае для любых $a_i \in \Omega_i, \dots, a_{i+\mu} \in \Omega_{i+\mu}$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=i}^{i+\mu} \left(\frac{\partial B}{\partial a_j}(a_i^*, \dots, a_{i+\mu}^*) \right)' (a_j - a_j^*) \geq 0. \quad (7.21)$$

Неравенство (7.21) с учетом того, что

$$\frac{\partial B(a_i^*, \dots, a_{i+\mu}^*)}{\partial a_{N-1}} = b_x(x_N) = -p_N, \quad \frac{\partial B}{\partial a_j} = -p_{j+1}, \quad j = N-1, \dots, 0,$$

где векторы $-p_j$, $j = 0, \dots, N$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (7.10) при $z_i = z_i^*$, $v_i = v_i^*$, $i = 0, \dots, N-1$, можно переписать в виде

$$\sum_{j=i}^{i+\mu} p'_{j+1} f_j(z_j, v_j^*) \geq \sum_{j=i}^{i+\mu} p'_{j+1} f_j(z_j, v_j), \quad (7.22)$$

$$\forall u_i \in U_i, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Поскольку $v_j = (u_{j-\mu}, \dots, u_{j-1}, u_j)$, $j = i, \dots, i+\mu$, $u_j = u_j^*$, $j = i$, то это условие в общем случае достаточно сложно использовать для

определения оптимального вектора. Однако если функции $f_k(z_k, v_k)$ можно представить в виде

$$f_k(z_k, v_k) = \sum_{j=k-\mu}^k f_k^j(z_k, u_j), \quad (7.23)$$

то неравенство (7.22) эквивалентно следующему:

$$\sum_{j=i}^{i+\mu} p'_{j+1} f_j^i(z_j, u_j^*) \geq \sum_{j=i}^{i+\mu} p'_{j+1} f_j^i(z_j, u_i), \quad \forall u_i \in U_i. \quad (7.24)$$

Неравенство (7.24) представляет собой дискретный принцип максимума для задачи (7.1)–(7.6) с учетом аддитивного представления правой части рекуррентных соотношений (7.1), определяемых равенствами (7.23). Если минимизируемую функцию можно записать в форме

$$J(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=k-\mu}^k g'_k(z_k, u_i) + b(x_N), \quad (7.25)$$

то аналогично [11, 15] можно показать, что неравенство (7.24) для любого вектора $u_i \in U_i, i = 0, \dots, N-1$ будет иметь вид

$$\sum_{j=i}^{i+\mu} g_j^i(z_i, u_i^*) + p'_{j+1} f_j^i(z_j, u_i^*) \geq \sum_{j=i}^{i+\mu} g_j^i(z_j, u_i) + p'_{j+1} f_j^i(z_j, u_i). \quad (7.26)$$

Принцип квазимаксимума

В случае, если дискретная задача является аппроксимацией непрерывной задачи оптимального управления с постоянным шагом интегрирования h и величиной N , пропорциональной h^{-1} , правая часть в выражениях (7.1)–(7.6) равняется

$$f_k(z_k, v_k) = h \sum_{j=0}^{\mu} g_{kj}(z_k, u_{k-j}), \quad (7.27)$$

$$f_k^0(z_k, v_k) = h \sum_{j=0}^{\mu} g_{kj}^0(z_k, u_{k-j}).$$

Для такой задачи, не используя свойства выпуклости, сформулируем дискретный принцип квазимаксимума, предполагая дополнительно, что функции f_k, f_k^0 непрерывно дифференцируемы по x_k , $k = 0, \dots, N - 1$.

Используя соотношения (7.18), (7.27), запишем приращение минимизируемой функции

$$\Delta I(u_i) = h \sum_{j=0}^{\mu} [H_i(u_i^*) - H_i(u_i)] + \sum_{j=i}^N \alpha_j(x_j) |\Delta x_j|, \quad (7.28)$$

где

$$H_i(u_i) = \sum_{j=0}^{\mu} [p'_{i+j+1} g_{i+j,j}(z_{i+j}, u_i) - g_{i+j,j}^0(z_{i+j}, u_i)]. \quad (7.29)$$

Определим величину $|\Delta x_{k+1}| = |x_{k+1} - x_{k+1}^*|$. Используя рекуррентные соотношения (7.1), (7.27), получим

$$|\Delta x_{k+1}| = |f_k(z_k, v_k) - f_k(z_k^*, v_k^*)| \leq h D_k. \quad (7.30)$$

В (7.30) через D_k обозначены некоторые постоянные. Учитывая (7.22), (7.24) и свойства функций $\alpha_j(x_j)$, получим неравенство, которое справедливо для любого $u_i \in U_i$ и для любого $\varepsilon > 0$:

$$H_i(u_i^*) - H_i(u_i) \geq -\varepsilon, \quad \forall u_i \in U_i, \quad i = 0, \dots, N - 1. \quad (7.31)$$

Неравенство (7.32) выражает дискретный принцип квазимаксимума для задачи (7.1)–(7.6) с учетом представления (7.27). Оно означает, что с точностью до сколь угодно малой величины $\varepsilon > 0$ оптимальное значение управления на i -м шаге может быть найдено из условия максимума функции $H_i(u_i)$, определяемой выражением (7.23) на множестве U_i .

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $U_i, i = 0, \dots, N - 1$ — компактные множества в \mathbb{R}^r , функции $f_k, f_k^0, k = 0, \dots, N - 1$, определяемые соотношениями (7.27), непрерывно дифференцируемы по совокупности аргументов. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется h_0 , такое, что при любом h , удовлетворяющем условию $0 < h < h_0$, оптимальное

управление u_i^* , $i = 0, \dots, N - 1$ существует и удовлетворяет неравенству (7.31), в котором функция $H(u_i)$ определяется формулой (7.29), а набор векторов $[p]$ — соотношениями (7.10).

Линейная задача и условия ее инвариантности по отношению к выбору управления

Рассмотрим линейную по фазовым переменным дискретную задачу, в которой требуется найти минимум функции

$$I(u) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^{\nu} x'_{k-i} a_k^i + b_k^0(u_k) \right] + c_1' x_N \quad (7.32)$$

при условии, что процесс описывается рекуррентными равенствами

$$x_{k+1} = \sum_{i=0}^{\nu} A_k^i x_{k-i} + B_k(u_k), \quad k = 0, \dots, N-1; \quad (7.33)$$

$$x_{-j} = a_j, \quad j = 0, \dots, \nu;$$

$$u_k = (u_{k-\mu}, \dots, u_k), \quad u_{-j} = \varphi_j^0, \quad j = 1, \dots, \mu; \quad (7.34)$$

$$u_k \in U_k, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (7.35)$$

В этой задаче отсутствуют фазовые ограничения, т.е. $X_k = \mathbb{R}^n$, $k = 0, \dots, N$, A_k^i — $n \times n$ -матрицы, a_k^i , c_1 — n -мерные векторы $i = 0, \dots, \nu$, $k = 0, \dots, N-1$.

Формула (7.18) для приращения минимизируемой функции $\Delta I(u_i)$ становится в этой задаче точной и имеет вид

$$\Delta I(x_i) = \sum_{k=i}^{i+\mu} [H_k(z_k, u_k^*, p_{k+1}) - H_k(z_k, u_k, p_{k+1})], \quad (7.36)$$

где

$$H_k(z_k, u_k, p_{k+1}) = p'_{k+1} \left(\sum_{i=0}^{\nu} A_k^i x_{k-i} + B_k(u_k) \right) - \sum_{i=0}^{\nu} x'_{k-i} a_k^i + b_k^0(u_k). \quad (7.37)$$

Подставляя (7.37) в (7.36), получим

$$\Delta I(x_i) = \sum_{k=0}^{N-1} [p'_{k+1} (B_k(u_k^*) - B_k(u_k)) + b_k^0(u_k) - b_k^0(u_k^*)]. \quad (7.38)$$

В частности, если набор $[u]$ отличается от $[u^*]$ только i -й компонентой, то в формуле (7.38) суммирование осуществляется от $k = i$ до $k = i + \mu$.

Система (7.10) для построения векторов p_j имеет вид

$$p_N = -c_1, \quad (7.39)$$

$$p_k = \sum_{i=0}^{\nu} [(A_{k+1}^i)' p_{k+i+1} - a_k^i], \quad k = N-1, \dots, 0.$$

Для того чтобы управление $[u^*]$ было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло принципу максимума

$$\sum_{k=i}^{i+\mu} [p'_{k+1} B_k(\bar{u}_k^*) - b_k^0(u_k^*)] = \max_{u_i \in U_i, j=i} \sum_{k=i}^{i+\mu} [p'_{k+1} B_k(u_k) - b_k^0(u_k)]. \quad (7.40)$$

Использование формулы (7.40) для определения оптимального управления u^* приводит к необходимости решения задачи о максимизации функции $\varphi(u)$, зависящей от Nr переменных, на множестве $U = U_0 \times \dots \times U_{N-1}$, т.е. эта задача представима в виде

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{N-1} [p'_{k+1} B_k(u_k) - b_k^0(u_k)] \rightarrow \max, u \in U.$$

Однако решение существенно упрощается, если функции b_k^0 и B_k аддитивны по u_j , $j = k - \mu, \dots, k$ и имеют вид

$$B_k(u_k) = \sum_{i=k-\mu}^k B_k^i(u_i), \quad b_k^0(u_k) = \sum_{i=k-\mu}^k b_k^{0i}(u_i). \quad (7.41)$$

В этом случае принцип максимума позволяет последовательно построить векторы управления u_i , $i = 0, \dots, N-1$ из соотношения

$$\sum_{i=0}^{i+\mu} [p'_{k+1} B_k^i(u_i^*) - b_k^{0i}(u_i^*)] = \max_{u_i \in U_i} \sum_{i=0}^{i+\mu} [p'_{k+1} B_k^i(u_i) - b_k^{0i}(u_i)]. \quad (7.42)$$

Рассмотрим задачи (7.32)–(7.35) с функциями B_k , $k = 0, \dots, N - 1$, линейными по u_j , $j = k - \mu, \dots, k$, т.е. представимыми в виде

$$B_k(u_k) = \sum_{i=k-\mu}^k B_k^i u_i, \quad k = 0, \dots, N - 1, \quad (7.43)$$

$$b_k^0 \equiv 0.$$

В равенствах (7.43) B_k^i — $n \times r$ -матрицы, b_k^{0i} — n -мерные векторы.

С учетом (7.43) формула (7.38) запишется следующим образом:

$$\Delta I(u_i) = \sum_{k=i}^{i+\mu} p'_{k+1} B_k^i (\bar{u}_i^* - u_i). \quad (7.44)$$

Из формулы (7.44) видно, что $\Delta I(u_i) = 0$, т.е. исходная линейная задача инвариантна по отношению к выбору управления $u_i \in U_i$, если матрицы B_k^i удовлетворяют равенствам

$$\sum_{k=i}^{i+\mu} (B_k^i)' p_{k+1} = 0, \quad i = 0, \dots, N - 1, \quad (7.45)$$

а набор векторов $[p]$ определяется с помощью соотношений (7.39).

Достаточные условия оптимальности для дискретной задачи

Пусть $\varphi_k : X_k \rightarrow \mathbb{R}$. Построим функции $R_k = R_k(z_k, u_k)$:

$$R_k = \varphi_{k+1}(f_k(z_k, u_k)) - \varphi_k(z_k) - f_k^0(z_k, u_k).$$

Справедливо равенство

$$I(\omega) = - \sum_{k=0}^{N-1} R_k(z_k, u_k) + T(x_N) - \varphi_0(x_0),$$

где

$$T(x_N) = \varphi_N(x_N) + b(x_N),$$

$$\Delta I = \sum_{k=0}^{N-1} [R_k(\bar{z}_k, \bar{u}_k) - R_k(z_k, u_k)] + T(x_N) - T(\bar{x}_N) + \varphi(\bar{x}_0) - \varphi(x_0).$$

Из последнего тождества вытекает теорема о достаточных условиях оптимальности допустимого процесса.

Теорема 7.2. Пусть существуют непрерывные функции $\varphi_k : X_k \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, N$ и допустимый процесс $\bar{\omega}$, такие, что выполнены условия:

- 1) $\sum_{k=0}^{N-1} R_k(\bar{z}_k, \bar{u}_k) = \sup_{z_k, u_k, k=0, \dots, N-1} \sum_{k=0}^{N-1} R_k(z_k, u_k) := \mu;$
- 2) $T(\bar{x}_N) = \inf_{x \in X_N} T(x);$
- 3) $\varphi_0(\bar{x}_0) = \sup_{x \in X_0} \varphi_0(x).$

Тогда процесс $\bar{\omega}$ — глобально оптимальный.

Если найдены функции $\varphi_k(x)$, удовлетворяющие теореме 7.2, то функции $\varphi_k(x) = \alpha_k + \varphi_k(x)$, $k = 0, \dots, N$, где α_k — произвольные постоянные, также удовлетворяют этой теореме. Поэтому можно подобрать α_k так, чтобы выполнялись равенства

$$\mu_k = \max_{z_k, u_k} R_k(z_k, u_k), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

В этом случае $I(\bar{\omega}) = T(\bar{x}_N) - \varphi_0(\bar{x}_0)$ и для любого допустимого процесса справедливо двойственное неравенство

$$T(\omega) \geq T(x_N) - \varphi_0(x_0).$$

Если теорема 7.2 справедлива для функций $\varphi_k(x) = a_k + p'_k x$, $k = 0, \dots, N$, то для выполнения условия 1 теоремы 7.2 необходимо, чтобы последовательность векторов p_k , $k = 0, \dots, N$ удовлетворяла системе (7.10). Проиллюстрируем теорему 7.2 примерами.

Пример 7.1. Требуется найти минимум функции

$$I(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} [a'_k x_k + \frac{1}{2} u'_k u_k] + b' x_N$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + C_k u_{k-1}, \quad k = 0, \dots, N-1, \\ x_0 &= a, \quad u_{-1} = u_{-1}^0, \end{aligned}$$

A_k, B_k, C_k — матрицы размерности $n \times n, n \times r, n \times r$ соответственно, a_k, a, b — n -мерные векторы, u_{-1}^0 — r -мерный фиксированный вектор. Положим $\varphi_k = \alpha_k + p'_k x, k = 0, \dots, N$ и построим функции

$$R_k(x_k, u_k, u_{k-1}) = \alpha_{k+1} - \alpha_k + p'_{k+1}(A_k x_k + B_k u_k + C_k u_{k-1}) - \\ - p'_k x_k - a'_k x_k - \frac{1}{2} u'_k u_k, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

$$T(x_N) = \alpha_N + x'_N(p_N + b).$$

Используя теорему 7.2, получим рекуррентные соотношения для построения векторов $[p]$

$$p_k = A_k^T p_{k+1} - a_k, \quad k = N-1, \dots, 0;$$

$$p_N = -b, \quad p_j = 0, \quad j > N,$$

и оптимальное управление

$$\bar{u}_k = C_{k+1}^T p_{k+2} + B_k^T p_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

ПРИМЕР 7.2. Требуется найти минимум функции $J(\omega) = -x_2^2$ при следующих ограничениях:

$$x_{k+1}^1 = x_k^1 + 2u_k, \quad x_{k+1}^2 = -(x_k^1)^2 + (x_{k-1})^2 + (u_k)^2, \quad k = 0, 1,$$

$$x_{-1} = (0, 0), \quad x_0 = (3, 0), \quad |u_k| \leq 5, \quad k = 0, 1.$$

Выберем следующие представленные функции $\varphi_i(x), i = 1, 2$:

$$\varphi_1(x) = a_1 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \gamma_1 (x^1)^2,$$

$$\varphi_2(x) = a_2 + c_2 x^1 + \beta_2 x^2, \quad \varphi_0(x_0) = c_0,$$

где $a_1, a_2, c_1, c_2, c_0, \alpha_2, \beta_2, \gamma_1$ — неизвестные числа.

Построим функции $R_0(z_0, v_0), R_1(z_1, v_1), T(x_2)$:

$$R_0 = (4\gamma_1 + c_2)u_0^2 + 2c_1u_0 + a_1 - 9c_2 - c_0,$$

$$R_1 = \beta_2(u_1)^2 + 2\alpha_2u_1 - (x^1)^2(\beta_2 + \gamma_1) - c_1x_1^1 - c_2x_1^2 + a_2 - a_1 + 3\alpha_2,$$

$$T(x_2) = a_2 + \alpha_2 x_2^1 + (\beta_2 - 1)x_2^2.$$

Используя условие 1 теоремы 7.2, найдем оптимальное управление:

$$\bar{u}_0 = \arg \max_{|u_0| \leq 5} [4\gamma_1 + c_2(u_0)^2 + 2c_1 u_0],$$

$$\bar{u}_1 = \arg \max_{|u_1| \leq 5} [\beta_2(u_1)^2 + 2\alpha_2 u_1].$$

Используя условие 3 теоремы 7.2, получим, что $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 1$. Из условий максимума функций $R_1(z_1, v_1)$ по x_1^1 и x_1^2 следует, что

$$(\beta_2 + \gamma_1) \geq 0, \quad c_2 = 0, \quad c_1 + 2x_1^1(\beta_2 + \gamma_1) = 0.$$

Полагая $\gamma_1 = -1$, найдем $\bar{u}_0 = 0, \bar{u}_1 = \pm 5$.

§8. Приближенные методы решения задач оптимального управления с последействием

Изложенное ранее показывает, что задача оптимального управления с одним дискретным запаздыванием может быть сведена к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений за счет увеличения размерности фазового вектора и вектора управления в $\frac{[0,7]}{h} = N$ раз, где h — величина запаздывания. При этом интервал интегрирования системы дифференциальных уравнений уменьшается также в N раз. Для задачи, линейной по фазовым переменным, численный алгоритм построения решения, как и в случае линейной системы без запаздывания, разделяется на два этапа: сначала решается система дифференциальных уравнений для сопряженных функций, а затем строится оптимальная траектория.

Однако уже с появлением фазовых ограничений и квадратичного по фазовым переменным слагаемого в правой части системы дифференциальных уравнений или в функционале ситуация резко усложняется: исходная задача минимизации функционала на множестве допустимых процессов сводится к решению краевой задачи для системы уравнений с отклоняющимся аргументом, причем среди этих уравнений присутствуют дифференциальные уравнения как с запаздывающим аргументом, так и с опережающим, а граничные условия заданы на обоих концах интервала интегрирования системы. Для решения такой краевой задачи нужны специальные методы. Здесь будут изложены два подхода для решения задачи оптимального управления с

последействием, представляющие собой модификацию соответствующих методов для обыкновенных систем. Первый основан на сведении исходной задачи оптимального управления к конечномерной задаче нелинейного программирования [12].

Второй итерационный алгоритм построения решения основан на последовательном улучшении управляемого процесса.

Отметим, что оба излагаемых алгоритма могут служить основой для численных процедур построения оптимального управления. В главе 5 рассмотрены задачи оптимального управления с запаздыванием на примере нейронной сети.

Сведение исходной задачи к дискретной задаче оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления, в которой запаздывание входит как в управление, так и в фазовые переменные. Требуется найти минимум функционала

$$J(u) = \int_0^T F_1(t, x(t), x(t - h_1), u(t), u(t - h_2)) dt + F_0(x(T)) \quad (8.1)$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - h_1), u(t), u(t - h_2)), \quad t \in \Gamma = [0, T], \quad (8.2)$$

$$x(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad \Theta \in [-h_1, 0], \quad u(\Theta) = \varphi_0(\Theta), \quad \Theta \in [-h_2, 0], \quad (8.3)$$

$$x(t) \in X(t) \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \Gamma, \quad x(T) \in X_T \subset \mathbb{R}^n, \quad (8.4)$$

$$u(t) \in U(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^r, \quad n.e.t \in \Gamma. \quad (8.5)$$

Для построения приближенных методов решения от непрерывной задачи (8.1)–(8.5) перейдем к ее дискретной аппроксимации. Считается, что выполнены все предположения, отмеченные в §1, и решение задачи (8.1)–(8.5) существует. Систему (8.2) будем интегрировать по схеме Эйлера, считая управление кусочно постоянным на каждом шаге и непрерывным справа. Разобьем отрезок интегрирования Γ точками $0 = \tau_0 < \dots < \tau_q = T$ так, что $\Delta\tau = \tau_{i+1} - \tau_i$, $i = 0, \dots, q-1$, и положим

$$x_i = x(\tau_i), \quad u_i = u(\tau_i), \quad h_1 = \Delta\tau\nu, \quad h_2 = \Delta\tau\mu,$$

$$z_i = (\tau_i, x_{i-\nu}, x_i, u_{i-\mu}, u_i), \quad B(z_i) = \Delta\tau F_1(z_i),$$

$$F(z_i) = x_i + \Delta\tau f(z_i).$$

Тогда задача (8.1)–(8.6) заменяется следующей дискретной задачей оптимального управления:

$$I(x, u) = \sum_{i=0}^{q-1} B(z_i) + F_0(x_q) \rightarrow \inf, \quad (8.6)$$

$$x_i = F(z_i), \quad i = 0, \dots, q-1, \quad (8.7)$$

$$x_{-1} = \varphi_i, \quad i = 0, \dots, \nu, \quad u_{-1} = \varphi_0, \quad i = 1, \dots, \mu, \quad (8.8)$$

$$x_i \in X_i = X(\tau_i), \quad i = 0, \dots, q, \quad (8.9)$$

$$u_i \in U_i = U(\tau_i, x_i), \quad i = 0, \dots, q-1. \quad (8.10)$$

В этой задаче процесс $\omega = [x, u] = (x_1, \dots, x_q, u_0, \dots, u_{q-1})$ и функционал (8.6) являются функциями $q(n+r)$ переменных, связанных ограничениями (8.7)–(8.10). Ограничения (8.9), (8.10) можно записать в общем случае как смешанные ограничения типа равенств и неравенств:

$$\Gamma_{1j}^i(x_{i-\nu}, x_i, u_i, u_{i-\mu}, \tau_i) = 0 \quad i = 1, \dots, q-1 \quad j = 1, \dots, \ell_1,$$

$$\Gamma_{2j}^i(x_{i-\nu}, x_i, u_i, u_{i-\mu}, \tau_i) \leq 0 \quad i = 1, \dots, q-1 \quad j = 1, \dots, \ell_2,$$

$$X_q = \{x \in \mathbb{R}^n : \Gamma_{3j}(x) = 0 \quad j = 1, \dots, \ell_3 \quad \Gamma_{4j}(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, \ell_4\}.$$

Задача дискретного оптимального управления с запаздыванием является некоторой специальной задачей нелинейного программирования. Для ее решения можно использовать известные методы нелинейного программирования, основанные на вычислении первых производных: метод внешних штрафных функций, метод параметризации, модифицированной функции Лагранжа, метод линеаризации и др. Эти методы решения задач оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений эффективно реализуются диалоговым комплексом программ ДИСО.

Для применения этого комплекса программ к решению задачи (8.6)–(8.10) необходимо уметь вычислять первые производные функционала (8.6) по x_i , u_i . Опишем способ вычисления этих производных, причем для простоты изложения при вычислении этих производных не будут учитываться ограничения (8.9), (8.10).

Определим вектор $p_i = \frac{dF}{dx_i}$, называемый производной функции $I[x, u]$ по x_i в точке $[x_1, \dots, x_q, u_0, \dots, u_{q-1}]$, с помощью соотношения

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \frac{I(\tilde{x}, u) - I(x, u)}{|\Delta|} = p_i,$$

в котором набор векторов $[u]$ фиксирован, первые $(i-1)$ компоненты набора $[\tilde{x}]$ совпадают с первыми $(i-1)$ компонентами $[x]$, $\tilde{x}_i = x_i + \Delta$, а все последующие компоненты набора $[\tilde{x}]$ строятся с помощью рекуррентных соотношений (8.7) с учетом нового вектора \tilde{x}_i .

Введем функции $H_i(z_i, p_{i+1}) = B(z_i) + p'_{i+1}F(z_i)$, $i = 0, \dots, q-1$. Используя равенство

$$I(x, u) - I(\tilde{x}, u) = \sum_{i=0}^{q-1} [H_i(z_i, p_{i+1}) - H_i(\tilde{z}_i, p_{i+1}) - p'_i \Delta x_i] + \\ + b(x_N) - b(\tilde{x}_N) - p'_N \Delta x_N + p'_0 \Delta x_0,$$

где $\Delta x_j = x_j - \tilde{x}_j \neq 0$, $j \geq i$, получим

$$H_{i+1}(z_i, p_{i+1}) + H_{i+\nu z_i}(z_{i+\nu}, p_{i+\nu+1}), \quad i = 1, \dots, q-1, \\ p_q = F_0 x, \quad p_j = 0, \quad j > q.$$

Если известен процесс ω , то по этим формулам последовательно находятся векторы p_q, \dots, p_0 .

Определим векторы $y_i = \frac{dI(x(u), u)}{du_i}$, $i = 0, \dots, q-1$ с помощью равенства

$$y_i = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \frac{I(\tilde{x}(\tilde{u}), \tilde{u}) - I(x, u)}{|\Delta|}, \quad (8.11)$$

где $\tilde{u}(u_0, \dots, u_{i-1}, u_i + \Delta, u_{i+1}, \dots, u_{q-1})$, $\tilde{x} = (x_0, \dots, x_i, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_q)$, $x_{j+1} = F(\tilde{z}_j)$, $j = i, \dots, q-1$. Используя равенство (8.11) и вычисляя разность $I(\tilde{x}(\tilde{u}), \tilde{u}) - I(x(u), u)$, получим

$$y_i = H_{i+1}(z_i, p_{i+1}) + H_{i+\mu u_i}(z_{i+\mu}, p_{i+\mu+1}), \quad i = 1, \dots, q-1, \\ y_j = 0, \quad j \geq q.$$

Итерационный метод

Рассмотрим задачу оптимального управления (8.1)–(8.5) при условии, что $h_2 = 0$ (т.е. случай запаздывания только по фазовым переменным), функция $R(t, x, y, u)$ и множество γ_- определены в §1.

Идея, излагаемая ниже, основана на итерационном способе улучшения процесса и состоит из следующих этапов:

1. Возьмем произвольную функцию $\psi^0(t, x, y) = \psi_1^0(t, x) + \psi_2^0(t, y) \in \gamma_-$ и найдем

$$u^0(t, x, y) = \arg \max R_{\psi^0}(t, x, y, u), \quad (8.12)$$

где R_{ψ^0} означает, что при построении функции R была использована функция $\psi^0(t, x, y)$.

2. Интегрируя систему (8.2) с начальными условиями (8.3), замкнутую управлением $u^0(t, x(t), y(t))$, построим функцию

$$u^0(t) = u^0(t, x^0(t), y^0(t)), \quad t \in \Gamma, \quad (8.13)$$

при этом $\omega^0 = (x^0(t), u^0(t)) \in W$.

3. Построим функцию $\psi(t, x, y) \in \gamma_-$, которая обеспечивает выполнение следующих условий:

$$R_{\psi^0}(t, x^0(t), y^0(t), u^0(t)) = \min_{x, y} R_\psi(t, x, y, u^0(t)), \quad (8.14)$$

$$M_{\psi^0}(x^0(T), y^0(T)) = \max_{x, y} M_\psi(x, y). \quad (8.15)$$

В этих выражениях функции R_ψ и M_ψ вычисляются с помощью найденной функции $\psi(t, x, y)$. Далее для этой функции повторяются операции 1 и 2. В результате находим процесс

$$\omega = (x(t), u(t)) \in W.$$

ТЕОРЕМА 8.1. Для процессов ω^0 и ω справедливо неравенство $J(\omega) \leq J(\omega^0)$.

Действительно, используя представление (1.8), получим

$$\begin{aligned} J(u^0) - J(u) &= \int_0^T [R_\psi(t, x(t), y(t), u(t)) - R_{\psi^0}(t, x^0(t), y^0(t), u^0(t))] dt + \\ &+ M_{\psi^0}(x^0(T), y^0(T)) - M_\psi(x(T), y(T)). \end{aligned}$$

Из условия (8.15) следует неотрицательность величины

$$M_{\psi^0}(x^0(T), y^0(T)) - M_\psi(x(T), y(T)).$$

Выбор нового управления, согласно (8.8), обеспечивает неотрицательность разности

$$\int_0^T [R_\psi(t, x(t), y(t), u(t)) - R_\psi(t, x(t), y(t), u^0(t))] dt \geq 0.$$

Из условия (8.14) следует неотрицательность величины

$$\int_0^T [R_\psi(t, x(t), y(t), u^0(t)) - R_\psi(t, x^0(t), y^0(t), u^0(t))] dt.$$

Теорема 8.1 доказана.

Указанным методом может быть построена последовательность процессов $\omega_i \in W$ и функций ψ_i , $i = 0, 1, \dots$, такая, что $J(\omega_{i+1}) \leq J(\omega_i)$, $i = 0, 1, \dots$. Для начала построения улучшающей последовательности можно вместо функции $\psi^0(t, x, y)$ задать непосредственно допустимое управление $u^0(t)$ и соответствующую ему функцию $x^0(t)$. Наибольшую трудность в этом методе представляет собой выбор функции $\psi(t, x, y) \in \gamma_-$, удовлетворяющей условиям (8.14), (8.15). В некоторых задачах эту функцию можно искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi(t, x, y) = & a(t) + \psi'_1(t)x + \psi'_2(t-h)y + \\ & + \frac{1}{2}\Delta x' \delta_1(t)\Delta x + \frac{1}{2}\Delta y' \delta_2(t-h)\Delta y. \end{aligned}$$

Здесь $\Delta x = x - x^0(t)$, $\Delta y = y - y^0(t)$, $\delta_i(t)$, $i = 1, 2$, ψ_i , $i = 1, 2$ — непрерывны на Γ и почти всюду непрерывно дифференцируемые $n \times n$ -матрицы и вектор-функции соответственно, подлежащие определению.

Для того чтобы эта функция удовлетворяла теореме 8.1, в случае, если в задаче нет фазовых ограничений и терминальное множество $X_T = \mathbb{R}^n$, необходимо выполнение условий

$$R_{\psi_x}(t, x, y, u)|_{u=u^0(t), x=x^0(t), y=y^0(t)} = 0,$$

$$R_{\psi_y}(t, x, y, u)|_{u=u^0(t), x=x^0(t), y=y^0(t)} = 0,$$

$$M_{\psi_x}(x, y)|_{x=x^0(T), y=y^0(T)} = 0,$$

$$M_{\psi_y}(x, y)|_{x=x^0(T), y=y^0(T)} = 0.$$

Эти условия эквивалентны системе уравнений

$$\dot{\psi}_1(t) = -H_x^0(t), \quad \dot{\psi}_2(t-h) = -H_y^0(t),$$

где $H^0(t) = H(t, x^0(t), y^0(t), u^0(t), \Phi(t))$, $\Phi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$, а функция H определена, как и в §1, с граничными условиями

$$\psi_2(s) = 0, \quad s \geq T - h,$$

$$\psi_1(T) = -F_0 x(x^0(T)).$$

Для выполнения достаточных условий следует найти неотрицательные функции $\varepsilon_i^\ell(t)$, $\ell = 1, 2$, $i = 1, \dots, n$ и отрицательные числа α_i^ℓ , $\ell = 1, 2$, $i = 1, \dots, n$, такие, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R^0(t)}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 R^0(t)}{\partial y_i \partial y_j} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial^2 M^0(t)}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 M^0(t)}{\partial y_i \partial y_j} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial^2 R^0(t)}{\partial x_i \partial x_j} &= \varepsilon_i^1(t), \quad \frac{\partial^2 R^0(t)}{\partial y_i \partial y_j} = \varepsilon_i^2(t), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial^2 M^0(t)}{\partial x_i \partial x_j} &= \alpha_i^1, \quad \frac{\partial^2 M^0(t)}{\partial y_i \partial y_j} = \alpha_i^2, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

где

$$R^0(t) = R(t, x^0(t), y^0(t), u^0(t)), \quad M^0 = M(x^0(T), y^0(T)).$$

Эти условия приводят к задаче Коши с начальными условиями на правом конце для компонент матриц $\delta_i(t)$, $i = 1, 2$.

Для организации предложенного выше итерационного процесса требуется найти функцию $\psi(t, x, y)$, удовлетворяющую нелинейному уравнению в частных производных (8.14) с граничным условием (8.15). Поставим задачу о построении приближенного синтеза оптимального управления $u_k(t, x, y)$, $k = 1, 2$ без решения уравнения (8.14).

Пусть имеется некоторая функция $\psi(t, x, y)$, удовлетворяющая только граничному условию (8.15).

В силу условия (8.12) можно построить синтез $u(t, x, y)$ и найти

$$P(t, x, y) = R_\psi(t, x, y, u(t, x, y)) = \sup_{u \in U(t, x)} R_\psi(t, x, y, u).$$

Затем, интегрируя систему (8.2)–(8.3), построим соответствующую этому управлению траекторию $x(t)$, $t \in \Gamma$.

Оценим величину $|\Delta J| = |I(u) - I(\bar{u})|$. Имеем

$$\begin{aligned} |\Delta J| &\leq \left| \int_0^T [R_\psi(t, x(t), y(t), u(t)) - R_\psi(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t))] dt \right| + |\Delta M_\psi| \leq \\ &\leq \int_0^T \left| \sup_{x, y} P_\psi(t, x, y) - \inf_{x, y} P_\psi(t, x, y) \right| dt + |\Delta M_\psi| = \Delta(\psi), \end{aligned}$$

где

$$\Delta M_\psi = M_\psi(x(T), y(T)) - M_\psi(\bar{x}(T), \bar{y}(T)).$$

Из этого неравенства следует, что если построена последовательность функций $\psi_k(t, x, y)$, такая, что $\Delta(\psi_k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, то соответствующая последовательность процессов $(x_k(t), u_k(t, x_k(t), y_k(t)))$, $k = 1, 2, \dots$ является минимизирующей в задаче (8.1)–(8.4). Этот подход был применен в [18, 19] для решения задачи оптимального управления системой, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями.

§9. Моделирование управляемого процесса распространения заболевания с учетом запаздывания

В этом параграфе исследуется процесс распространения эпидемии в однородном сообществе с учетом времени скрытого периода заболевания. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — количество здоровых людей, подверженных заболеванию, и инфицированных соответственно в момент времени t ; $x_3(t)$ — функция, характеризующая социальную программу "Здоровье", заботу общества об инфицированных людях с помощью рекламы, передач по радио и телевидению, лекций и т. д.; $u_3(t)$ — функция управления программой "Здоровье", удовлетворяющая ограничению $0 \leq u_3(t) \leq A_3$. В заданных обозначениях поведение системы описывается дифференциальными уравнениями с запаздыванием:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -(1 - x_3)f(x_1(t - h), x_2(t - h)), \\ \dot{x}_2 &= (1 - x_3)f(x_1(t - h), x_2(t - h)) - \gamma x_2, \\ \dot{x}_3 &= u_3 - bx_3,\end{aligned}\tag{9.1}$$

где $h > 0$ — время скрытого протекания заболевания. Запаздывание h в аргументе функций $x_i(t)$, $i = 1, 2$ характеризует период, в течение которого инфицированный человек еще не является передающим заболевание, это время, в течение которого бактерии размножаются внутри тела. Здесь и далее в формулах опускается аргумент функции t , если функции вычисляются в момент t . В противном случае указывается момент времени, в который вычисляется та или иная функция.

Функция $f(x_1, x_2)$ характеризует частоту встреч здоровых, но подверженных инфекции $x_1(t)$ (группа 1), и инфицированных людей $x_2(t)$

(группа 2). Рассмотрим однородное общество, в котором люди свободно передвигаются и встречаются друг с другом, и зададим функцию f в виде $f(x_1, x_2) = \beta x_1 x_2$.

Как было отмечено ранее в §5 гл. 1, для борьбы с эпидемией используется вакцинация и введение карантина, которые будем характеризовать положительными функциями $u_1(t)$ и $u_2(t)$. В соответствии с финансовыми и техническими ограничениями эти функции не могут быть сколь угодно велики, т. е.

$$0 \leq u_i(t) \leq A_i, \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T], \quad (9.2)$$

где A_i — заданные положительные числа. Если $A_i = 0$, то это означает, что соответствующее управление отсутствует. С учетом вышеизложенного динамика управляемого процесса распространения эпидемии описывается системой дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1 - x_3)f(x_1(t-h), x_2(t-h)) - u_1, \\ \dot{x}_2 &= (1 - x_3)f(x_1(t-h), x_2(t-h)) - \gamma x_2 - u_2 x_2, \\ \dot{x}_3 &= u_3 - bx_3 \end{aligned} \quad (9.3)$$

и начальными условиями

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, 3, \quad x_i(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad (9.4)$$

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \in [-h, 0], \quad i = 1, 2, \quad (9.5)$$

где $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$ — известные непрерывные функции.

Целью управления является минимизация цены эпидемии, которая выражается следующим интегралом:

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T (x_2 + c_1 u_1 + c_2 u_2 x_2 + c_3 u_3) dt. \quad (9.6)$$

Проведем анализ системы (9.3). Легко видеть, что если $u_3(t) \equiv 0$, $x_3(0) = 0$, то $x_3(t) \equiv 0$, $t \in [0, T]$. Предположим, что запаздывание отсутствует, т. е. $h = 0$, $f(x_1, x_2) = \beta x_1 x_2$, $x_1 \gg x_2$.

В этом случае система (9.3) упрощается:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\beta a_1 x_2 - u_1, \\ \dot{x}_2 &= (\beta a_1 - \gamma)x_2 - x_2 u_2. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Согласно принципу максимума, оптимальное управление $\bar{u}_i(t)$ принимает два значения A_i и 0, $i = 1, 2$.

Интегрируя систему (9.7) при условиях $\bar{u}_i(t) = A_i$, $i = 1, 2$, получим

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{\beta a_1 a_2}{\beta a_1 - \gamma - A_2} (1 - \exp[(\beta a_1 - \gamma - A_2)t]) + a_1 - A_1 t, \\ x_2(t) &= a_2 \exp[(\beta a_1 - \gamma - A_2)t]. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Из выражений (9.8) следует, что число инфицированных не возрастает, если параметры задачи связаны неравенством

$$\beta a_1 - \gamma - A_2 \leq 0. \quad (9.9)$$

В противном случае число инфицированных людей растет экспоненциально. При постоянном управлении $u_3(t) = A_3$ функция $x_3(t)$ имеет вид

$$x_3(t) = a_3 e^{-bt} + A_3 b^{-1} (1 - e^{-bt}). \quad (9.10)$$

По своему смыслу эта функция характеризует эффективность программы "Здоровье" и удовлетворяет неравенству

$$0 \leq x_3(t) \leq 1, \quad (9.11)$$

которое является дополнительным фазовым ограничением и существенно осложняет решение. Однако далее будем предполагать, что параметры задачи удовлетворяют неравенству

$$a_3 + A_3 b^{-1} < 1, \quad (9.12)$$

которое гарантирует выполнение строгих неравенств (9.11).

В общей системе (9.3) при отсутствии управления эпидемия нарастает, если $(1 - x_3)f(x_1(t-h), x_2(t-h)) > \gamma x_2$, и затухает, если знак неравенства заменяется на противоположный. При отсутствии управления данная модель может быть использована для прогнозирования процесса роста заболевания.

Функция Понтрягина задачи (9.2)–(9.6) представляется выражением

$$\begin{aligned} H = & -\lambda_0(x_2 + c_1 u_1 + c_2 u_2 x_2 + c_3 u_3) - \lambda_1(1 - x_3)f(y_1, y_2) - \lambda_1 u_1 + \\ & + \lambda_2(1 - x_3)f(y_1, y_2) - \lambda_2(\gamma + u_2)x_2 + \lambda_3(u_3 - bx_3), \end{aligned} \quad (9.13)$$

здесь $y_i = x_i(t - h)$, $i = 1, 2$.

Введем функции переключения $\Phi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= -\lambda_0 c_1 - \lambda_1, \\ \Phi_2(t) &= (-\lambda_0 c_2 - \lambda_2)x_2, \\ \Phi_3(t) &= -\lambda_0 c_3 + \lambda_3.\end{aligned}\quad (9.14)$$

Используя принцип максимума, найдем оптимальное управление

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} A_i, & \Phi_i(t) > 0, \\ 0, & \Phi_i(t) < 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}, \quad (9.15)$$

оптимальное управление не определено, если $\Phi_i(t) = 0$, $i = 1, 2, 3$ на некотором интервале времени, и принимает любое значение отрезка $[0, A_i]$, $i = 1, 2, 3$.

Интересной проблемой является определение количества переключений функций $\bar{u}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ на отрезке $[0, T]$, которое связано с числом перемен знака функций $\Phi_i(t)$ или $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, 3$.

Уравнения для сопряженных функций имеют вид

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}|_t - \frac{\partial H}{\partial y_i}|_{t+h}, \quad i = 1, 2, 3,$$

или с учетом определения функции Понtryгина:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= (\lambda_1(t+h) - \lambda_2(t+h))(1 - x_3(t+h))\frac{\partial f}{\partial y_1}(x_1(t), x_2(t)), \\ \dot{\lambda}_2 &= (\lambda_1(t+h) - \lambda_2(t+h))(1 - x_3(t+h))\frac{\partial f}{\partial y_2}(x_1(t), x_2(t)) + \\ &\quad + \lambda_2(\gamma + u_2) + \lambda_0 + \lambda_0 c_2 u_2, \\ \dot{\lambda}_3 &= f(x_1(t-h), x_2(t-h))(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_3 b.\end{aligned}\quad (9.16)$$

Условия трансверсальности на правом конце —

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = 0, \quad \lambda_i(t) = 0, \quad t > T. \quad (9.17)$$

Считаем, что в этой задаче параметры подобраны таким образом, что выполняются условия $x_i(t) > 0$, $i = 1, 2, 3$, $t \in [0, T]$. В противном случае задачу (9.2)-(9.6) нужно решать с учетом фазовых ограничений, при этом изменятся уравнения для сопряженной функции и условия трансверсальности.

Задача (Моделирование процесса распространения заболевания в неоднородной среде, состоящей из n социальных групп)

Найти оптимальное управление и записать краевую задачу принципа максимума для следующей управляемой модели.

Процесс распространения заболевания в n социальных группах описывается системой $2n$ дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i(t) = -x_i(t-h) \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}y_j(t-h)}{y_j(t-h) + x_j(t-h)} - v_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T], \\ \dot{y}_i(t) = x_i(t-h) \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}y_j(t-h)}{y_j(t-h) + x_j(t-h)} - \gamma_i y_i(t) - u_i(t)y_i(t), \\ i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (9.18)$$

с начальными условиями, заданными непрерывными функциями $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, на начальном интервале запаздывания $[-h, 0]$:

$$x_i(t) = \alpha_i(t), \quad y_i(t) = \beta_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [-h, 0], \quad (9.20)$$

где $x_i(t)$ — численность населения, восприимчивого к заболеванию в i -й социальной группе, $y_i(t)$ — число инфицированных людей в i -й социальной группе, y_{i_0} , x_{i_0} — численность инфицированного населения и населения, восприимчивого к заболеванию в начале распространения заболевания, $\dot{y}_i(t)$ — скорость роста числа инфицированных людей, n — число социальных групп, $\gamma_i y_i(t)$ — количество людей, восстановивших свое здоровье без воздействия внешних средств карантина, вакцины и т. д. в момент времени t , в i -й социальной группе; γ_i^{-1} — коэффициент, характеризующий время естественного выздоровления, γ_i^{-1} может изменяться от 10 дней (ангина, простуда) до нескольких недель (холера) и др.; h — инкубационный период заболевания; $u_i(t)y_i(t)$ — количество людей, находящихся на карантине в момент времени t ; $u_i(t)$ — функция, характеризующая интенсивность введения карантина в i -й социальной группе.

Модель предполагает, что заболевание передается в случае, когда встречаются инфицированный и здоровый человек, коэффициент a_{ij} характеризует частоту встреч здоровых людей группы i с инфицированными людьми из группы j .

$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\overline{n}}$ — матрица, состоящая из положительных (неотрицательных) элементов и характеризующая частоту встреч людей, принадлежащих к различным социальным группам. В предложенной модели процесс распространения заболевания управляет с помощью введения карантина и вакцинации.

Затраты на проведение карантина и введение вакцины ограничены. Это требование выражается условиями

$$0 \leq u_i(t) \leq B_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$0 \leq v_i(t) \leq A_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где B_i — величина, характеризующая часть инфицированных людей, отправленных на карантин, по своему физическому смыслу эта величина не превосходит единицы, A_i — максимальная скорость введения вакцины в единицу времени.

Целью управления является минимизация количества инфицированных людей, людей, находящихся на карантине, затрат на карантин и введение вакцины во всех социальных группах.

Итак, требуется найти минимум функционала

$$\int_0^T \sum_{i=1}^n (y_i(t) + u_i(t)y_i(t) + c_i u_i(t) + d_i v_i) dt \longrightarrow \inf,$$

здесь T — фиксированное время процесса, c_i — стоимость изоляции одного человека в i -й группе, d_i — стоимость вакцинации в i -й группе.

Функции состояния $x_i(t)$, $y_i(t)$ — абсолютно-непрерывны на $[0, T]$; функции управления $u_i(t)$ — кусочно-непрерывны. Отметим, что в рассматриваемой задаче оптимального управления левый конец фиксирован, а правый — свободен. Параметры задачи подбираются так, что y_i , $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$.

В качестве самостоятельного упражнения решить задачу (9.18)–(9.20) при следующих ограничениях на управляющие функции:

$$\sum_{i=1}^n u_i \leq B, \quad u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n v_i \leq A, \quad v_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1 (быстродействия). Построить оптимальное по быстродействию управление и оптимальную траекторию перехода из данной точки на плоскости в начало координат. Требуется найти

минимум функционала

$$J(u) = T \rightarrow \inf$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\alpha x_1(t-h_1) - \beta x_2(t-h_2) + u(t), \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad t \in [-h_i, 0], \quad i = 1, 2, \\ x_i(T) &= 0, \quad i = 1, 2, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0, T].\end{aligned}$$

Рассмотреть случай, когда $h_1 = h_2$, построить фазовый портрет системы и линии переключения управления в зависимости от параметров задачи α, β . Сравнить найденное решение с аналитическим решением в случае, если величины запаздывания достаточно малы ($h_i \ll T$) и когда $h_i = 0, i = 1, 2$.

Задача 2. Найти минимум функционала

$$J(u) = \int_0^T (u, u) dt + (b, x(T))$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Dx(t-h) + Bu(t), \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \quad h > 0,\end{aligned}$$

где A, D — 2×2 постоянные матрицы, B — прямоугольная 2×1 матрица, $\varphi(t)$ — заданная непрерывная вектор-функция, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, b — двумерный вектор.

Исследовать решение задачи в зависимости от начальных параметров задачи, начальных условий, величины постоянного запаздывания $h > 0$. Отдельно рассмотреть случай малого запаздывания.

Задача 3. Требуется найти минимум терминального функционала

$$J(u) = (x(T), x(T)) \rightarrow \inf$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= g_i(t, x(t), x(t-h)) + f_i(t, x(t), x(t-h))u(t), \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad t \in [-h, 0], \quad i = \overline{1, n}, \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in [0, T].\end{aligned}$$

Рассмотреть следующие случаи:

$$a) \quad g_i(t, x, y) = (a_i, x) + (b_i, y), \quad i = 1, 2,$$
$$f_i(t, x, y) = (c_i, x) + (d_i, y), \quad i = 1, 2,$$

где a_i, b_i, c_i, d_i — заданные векторы в \mathbb{R}^2 ;

$$b) \quad g_i(t, x, y) = B_i(y), \quad i = 1, 2,$$
$$f_i(t, x, y) = D_i(y), \quad i = 1, 2,$$

где $B_i(y), D_i(y)$ — заданные непрерывно дифференцируемые по y функции.

Задача 5 (о распространении заболевания)

В следующих примерах

- 1) выписать необходимые условия оптимальности для непрерывной задачи, найти оптимальное управление, записать краевую задачу принципа максимума;
- 2) построить дискретную аппроксимацию непрерывной задачи оптимального управления;
- 3) выписать необходимые условия оптимальности для дискретной задачи оптимального управления и получить рекуррентные соотношения для вычисления сопряженных переменных;
- 4) осуществить предельный переход в условиях оптимальности;
- 5) записать численный алгоритм.

$$1. \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_0^3 [x_2^2(t) + u^2(t)] dt + \frac{1}{2} x_1^2(2) \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) \cos(x_2(t - 0, 2)) - x_1(t - 0, 2) + u(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t),$$

$$x_i(t) = \varphi_{0i}(t), \quad -0,2 \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2,$$

$$2 \leq u(t) \leq 3.$$

$$2. \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_0^3 [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt + x_2(2) \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t - h) + u(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t - h) \cos(x_2(t)) + x_2(t - h) + u(t),$$

$$x_i(t) = -2e^t, \quad -h \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2,$$

$$-1 \leq u(t) \leq 1.$$

$$3. \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 [x_1^2(t) + u^2(t) + u(t)] dt \rightarrow \inf,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)x_2(t-h) + x_1(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)\sin(x_1(t-1)) + x_2(t) + u_2(t), \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad -1 \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2, \\ u(t) &\geq 0.\end{aligned}$$

$$4. \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_0^r [x^2(t) + u(t)] dt + x_1(T) \rightarrow \inf,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= e^{x_2(t)} - e^{x_2(t-1)} + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= e^{x_2(t)} - e^{x_2(t-1)} + u(t)x_1(t), \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad -1 \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2, \\ -1 &\leq u(t) \leq 1.\end{aligned}$$

$$5. \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_0^2 [x_1^2(t) + u(t) + x_2(t)] dt + x_2^2(2) \rightarrow \inf,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t)x_2(t-h) + x_2(t) + u(t)x_1(t-h), \\ \dot{x}_2(t) &= \sin(x_2(t-h)) + u(t)(t), \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad -h \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2, \\ -1 &\leq u(t) \leq 1.\end{aligned}$$

$$6. \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_0^r [x_1^2(t) + u^2(t)] dt \rightarrow \inf,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)e^{x_2(t)} - x_2(t-0,1)e^{x_2(t-0,1)} + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)e^{x_1(t-0,1)} - x_1(t)x_2(t-0,1), \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad -0,1 \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2, \\ u(t) &\geq 0.\end{aligned}$$

$$7. \quad J(u) = \int_0^1 [x_1^2(t) + u^2(t)] dt + x_2(1) \rightarrow \inf,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) - x_2(t - \tau) - u(t)x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t - \tau)x_1(t - \tau) - x_1(t)x_2(t - \tau), \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2, \\ 0 \leq u(t) &\leq 1.\end{aligned}$$

$$8. \quad J(u) = \int_0^2 [x_1^2(t) + u^2(t)] dt + x_2^2(2) \rightarrow \inf,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t - h)\sin(t) - x_1(t)\cos(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t - h)\sin(x_1(t - h)) - x_1(t)x_2(t), \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad -h \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2, \\ -1 \leq u(t) &\leq 1, \quad t \in [0, 2].\end{aligned}$$

$$9. \quad J(u) = \int_0^1 [x_1^2(t) + u(t)] dt + x_1(1) \rightarrow \inf,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + e^{x_1(t)} - e^{x_1(t-0,1)} + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + e^{x_2(t-0,1)} + x_1(t-0,1)u(t), \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad -0,1 \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2, \\ |u(t)| &\leq 0, 5.\end{aligned}$$

$$10. \quad J(u) = \int_0^1 [x_1^2(t) + u(t)x_2(t)] dt \rightarrow \inf,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2^2(t-0,1) + \sin(x_1(t-0,1)) + x_1(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + x_1(t-0,1)x_2(t-0,1) + u(t), \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad -0,1 \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2, \\ |u(t)| &\leq 1.\end{aligned}$$

$$11. \quad J(u) = \int_0^2 [x_1^2(t) + u(t)x_1(t)] dt + x_2(2) \rightarrow \inf,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \cos(t) - x_1(t) \sin(x_2(t-0,2)) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) \sin(t) + x_2(t-0,2)u(t) + x_1(t-0,2), \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad -0,2 \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2, \\ |u(t)| &\leq 0, 1.\end{aligned}$$

$$12. \quad J(u) = \int_0^r [x_1(t)x^2(t) + u_2^2(t)] dt \rightarrow \inf,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t-h)u_1(t) + u_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t-h)x_1(t) + x_2(t)u_2(t), \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad -h \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2, \\ |u_i(t)| &\leq \alpha, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

$$13. \quad J(u) = \int_0^r [x_2^2(t)u(t) + u^2(t)] dt \rightarrow \inf,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)x_1(t) + x_1(t-h)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t-h)u(t) + x_1(t-h)x_2(t-h), \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad -h \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2, \\ |u_i(t)| &\leq \alpha, \quad i = 1, 2,\end{aligned}$$

$$14. \quad J(u) = \int_0^1 [x_1^2(t) + u^2(t)] dt + x_1(1) \rightarrow \inf,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t-h)x_2(t) + x_1(t)u(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + u^2(t)e^{x_2(t-h)} + x_1(t)x_2(t), \\ x_1(t) &= \alpha, \quad x_2(t) = \varphi(t), \quad -h \leq t \leq 0, \quad i = 1, 2, \\ |u_i(t)| &\leq a.\end{aligned}$$

Список литературы к главе 4

1. Klötzler R. On a general conception of duality in Optimal Control // EQU ADIFF IV. Proceedings. Lecture Notes in Mathematics. Prague, 1977.
2. Klötzler R. Globale Optimierung in der Steuerungstheorie // ZAMM, 1983. V.63.
3. Andreeva E.A., Klötzler R. Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungstheorie // ZAMM, 1984. (64). Teil I. P.35-44; Teil II. P.147-153.
4. Мордухович Б.Ш. К теории двойственности в системах с последействием // Прикл. мат. и мех. 1984. Т.48, вып. 4.
5. Андреева Е.А., Пикенхайн С. Двойственность в задачах оптимального управления с запаздывающим аргументом // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин, 1989.
6. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
7. Pickenhain S. Dualitat bei Steuerungsproblemen mehrfacher Integrale // ZAA. 1987. Bd 6, N 2.
8. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Расширение вариационных задач // Тр. Моск. матем. об-ва. 1968. Т.18.
9. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
10. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шейхет Л.Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992.
11. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
12. Колмановский В.Б. Об аппроксимации линейных управляемых систем с последействием // Проблемы управления и теории информации. 1974. Т.3, N 1.
13. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974.
14. Андреева Е.А. Оптимальное управление системами с запаздывающим аргументом: Препринт. ВЦ АН СССР. М., 1987.
15. Андреева Е.А. Достаточные условия оптимальности для разрывной задачи оптимального управления системой с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1989. N 5.
16. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.

ГЛАВА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

§1. Математическая модель искусственной нейронной сети с запаздыванием

Говоря о проблемах искусственного интеллекта организации базы данных, естественно описать процессы человеческого мозга. В частности, уделить внимание структуре и функциям реальных нейронов, которые связаны с процессом познания, т.е. естественным интеллектом.

Известно, что размер нервной клетки в поперечнике составляет 30 микрон (мк). У тела нервной клетки имеются отростки, представляющие собой ветвящиеся структуры, называемые дендритами, они простираются на 200–300 мк от тела клетки. У большинства нейронов есть также более длинный отросток, называемый аксоном, который бывает протяжённостью от 50 мк до нескольких метров и также может иметь разветвления. Нервные стволы состоят из пучка нервных волокон, окружённых заплатной оболочкой. Эти волокна являются аксонами нервных клеток, переносящими нервные импульсы. Вся нервная клетка, включая дендриты и аксоны, защищена мембраной [5], [10].

Аксон — это отросток нейрона, проводящий нервные импульсы от тела клетки к другим нейронам. На теле нервной клетки и на её дендритах имеются области, в которых на клетку оказывают воздействие аксоны других нейронов (до 10 тысяч точек на 1 нейрон). Эти области называются синапсами. Существуют возбуждающие (стимулирующие деполяризацию нейрона) и тормозящие (затрудняющие деполяризацию нейрона) синапсы.

Форма нейрона и его отростков не статична, его структура меняется в ходе развития, которое продолжается в течение всей активной жизни. Развитие структуры мозга в значительной степени определя-

ется её информационным содержанием. Приобретённые знания "запииваются" непосредственно в структуру системы [10].

Под внешним воздействием нейрон может "сработать", создавая выходной импульс, который далее распространяется по аксону. Обычно это происходит под воздействием импульсов, поступающих из других нейронов через возбуждающие синапсы. Между моментом прихода импульса к данному нейрону и появлением сигнала на его выходе всегда имеется задержка (синаптическая задержка), равная примерно 1 мс. Таким образом, "вычислительные" элементы мозга действуют очень медленно по сравнению с элементами вычислительных машин, где скорости передачи сигналов измеряются в наносекундах.

Высокая "вычислительная эффективность" мозга достигается не за счёт больших скоростей выполнения операций на нейронном уровне, а благодаря одновременному действию большого числа нейронов. В отличие от этого в вычислительных машинах все операции выполняются последовательно.

Важной особенностью естественного интеллекта является его способность к обучению. Процесс обучения в нервной системе, по-видимому, связан с определёнными изменениями физических свойств нейронов. Способность нейрона изменять свойства в зависимости от его предшествующей активности называется пластичностью. Изменения в связях могут произойти в основном двумя путями: путём разрастания новых соединений либо путём демаскирования старых соединений, которые всё время существовали, но не действовали. Нейроны имеют множество соединений, число которых может составлять до 10 тысяч на одну клетку. Поскольку избыточность во взаимных соединениях громадна, открываются широкие возможности для образования новых рисунков соединений, новых топологий путём демаскирования прежде неработавших синапсов.

Ключевое отличие нейронной сети от общепринятой компьютерной системы заключается в том, что искусственные нейронные системы, созданные для выполнения заданных функций, скорее обучаемы, чем программируемы. Обучение включает в себя определение либо значений весовых коэффициентов синаптических узлов, либо специальных правил, по которым весовые коэффициенты могут быть изменены в зависимости от отклика конкретной нейронной сети.

Модель нейронной сети и программа управления искусственной нейронной сетью должны удовлетворять следующим требованиям:

- 1) работать в реальном времени;

- 2) обладать способностью к обучению;
- 3) максимально полно использовать поступающую извне информацию;
- 4) иметь память о прошлых ситуациях;
- 5) обладать способностью непрерывного обобщения и классификации поступающей информации.

Эта постановка требует мгновенной обработки громадных массивов информации, массивов данных. Единственный путь совместной реализации этих условий видится в применении средств параллельных вычислений с использованием параллельно работающей ассоциативной памяти — процессора. Процесс распознавания состоит в том, что "исходный стимул" — вектор, выбранный в качестве начального условия, релаксирует согласно динамической системе к одному из устойчивых состояний системы дифференциальных уравнений. В процессе релаксации каждому начальному состоянию системы ("стимулу") сопоставляется один из векторов, являющийся устойчивым состоянием динамической системы.

В данной главе рассмотрена проблема моделирования и обучения искусственной нейронной сети с достаточно общей топологией, описываемой системой дифференциальных уравнений с запаздыванием, вызванным конечным временем передачи сигнала от входного к выходному синапсу. Для решения этой задачи используется аппарат математической теории оптимального управления, с помощью которого находятся оптимальные весовые коэффициенты непрерывной и дискретной нейронной сети. Заметим, что таким способом может быть решён большой класс задач, включающих создание ассоциативной памяти, модели распознавания образов, прогнозирования и др.

Разработанный здесь подход накладывает незначительные ограничения на топологию нейронной сети и может быть использован без каких-либо дополнительных изменений для работы нейронной сети в непрерывном режиме на заданном интервале времени.

Здесь коэффициенты ω_{ij} характеризуют силу воздействия j -го нейрона на i -й нейрон. Если $\omega_{ij} > 0$, то связь возбуждающая, если $\omega_{ij} < 0$, то связь тормозная, если $\omega_{ij} = 0$, то связь либо нейтральна, либо отсутствует.

Коэффициенты ω_{ij} определяют организацию нейронной сети. Согласно [6], из многообразия организаций можно выделить три основных типа: иерархический тип, локальные сети и дивергентные сети с одним входом.

Иерархическая организация характерна для систем, воспринимающих и проводящих информацию в мозг, а также осуществляющих исполнительскую деятельность. В этих сетях информация передаётся последовательно от одного уровня к другому. Передача осуществляется конвергентно (несколько нейронов одного уровня контактируют с одним нейроном другого уровня) и дивергентно (нейрон одного уровня образует связи с несколькими нейронами другого уровня).

Считается, что конвергенция и дивергенция обеспечивают точность и надёжность передачи информации.

Локальные сети образованы нейронами с короткими аксонами, нейроны этих сетей действуют как фильтры, удерживающие поток информации в пределах определённого иерархического уровня.

Дивергентные сети с одним входом характеризуются тем, что один нейрон образует выходные связи с очень большим числом других элементов, оказывает влияние на множество нейронов и может осуществлять связь со всеми иерархическими уровнями.

В работах [5], [6], [7] рассматривается модульный принцип организации мозга, когда нейроны распадаются на ансамбли, динамически связанные между собой.

Рассмотрим нейронную сеть, состоящую из n нейронов. Состояние i -го нейрона характеризуется функцией $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, и его динамика описывается системой дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}_i(t) = h_i(x(t)) + \sum_{j=1}^n [\omega_{ij}^0 + \omega_{ij}(t)] g_j(x(t - \tau)), \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.1)$$

Здесь $h_i(x)$, $g_i(y)$ — заданные, непрерывно дифференцируемые на \mathbb{R}^n функции, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — абсолютно непрерывная функция, $y(t) = x(t - \tau) = (x_1(t - \tau_1), \dots, x_n(t - \tau_n))$, где $\tau_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, — сосредоточенные запаздывания, равные времени передачи сигнала от i -го нейрона к другим нейронам, постоянные величины ω_{ij}^0 и переменные $\omega_{ij}(t)$ весовые коэффициенты, характеризующие влияние i -го нейрона на j -й нейрон. Предыстория нейронной сети с заданной топологией известна и задается непрерывными функциями $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $x_i(0) = \varphi_i(0)$, так что $x_i(t) = \varphi_i(t)$, $t \in [-\tau, 0]$, $i = \overline{1, n}$, $\tau = \max_{i=1, n} \tau_i$.

Система дифференциальных уравнений (1.1) может быть записана

в векторной форме

$$\dot{x}(t) = h(x(t)) + [W_0 + W(t)]g(x(t - \tau)) \quad (1.2)$$

с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (1.3)$$

здесь $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$; W_0 — постоянная $n \times n$ матрица, составленная из элементов ω_{ij}^0 ; $W(t)$ — переменная $n \times n$ матрица весовых коэффициентов $\omega_{ij}(t)$, которые в дальнейшем мы будем рассматривать как функции управления и на которые могут быть наложены естественные ограничения $|\omega_{ij}(t)| \leq A_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$. Оптимальное управление или оптимальное значение весовых коэффициентов нейронной сети будем выбирать из условия минимума функционала цели:

$$J(\omega(\cdot)) = \Phi(x(T)) + \int_0^T \left[Q(x(t), x(t - \tau)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n r_{ij} \omega_{ij}^2(t) \right] dt. \quad (1.4)$$

В данной модели время протекания процесса $T > 0$ фиксировано, $Q(x, y)$, $\Phi(x)$ — скалярные непрерывно дифференцируемые функции, $y(t) = x(t - \tau)$, коэффициенты $r_{ij} \geq 0$, $i, j = \overline{1, n}$, образуют симметричную положительно определённую матрицу R .

Задача оптимального управления искусственной нейронной сетью состоит в выборе весовых коэффициентов $\omega_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$, таким образом, чтобы функционал (1.4) принимал минимальное значение.

Эта задача относится к классу задач оптимального управления с запаздыванием, для решения которых используем теорему о необходимых условиях оптимальности, рассматривая весовые коэффициенты как функции управления.

Предположим, что $\tau_i = \tau = \text{const} > 0$, $i = \overline{1, n}$. Введём функции переключения $\Phi_{ij}(t)$ по следующему правилу:

$$\Phi_{ij}(t) = p_i(t)g_j(x(t - \tau))r_{ij}^{-1}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (1.5)$$

С помощью принципа максимума, рассматривая только регулярный случай $\lambda_0 = 1$, построим оптимальное управление $\bar{\omega}_{ij}(t)$:

$$\bar{\omega}_{ij}(t) = \begin{cases} A_{ij}, & \Phi_{ij}(t) > A_{ij}, \\ \Phi_{ij}, & |\Phi_{ij}(t)| \leq A_{ij}, \\ -A_{ij}, & \Phi_{ij}(t) < -A_{ij}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Сопряжённые функции $p_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с запаздывающим и опережающим аргументом

$$\begin{aligned}\dot{p}_i(t) &= \frac{\partial Q(x(t), x(t - \tau))}{\partial x_i} + \frac{\partial Q(x(t + \tau), x(t))}{\partial y_i} - \\ &- \sum_{l,j=1}^n p_l(t + \tau) (\omega_{lj}^0 + \omega_{lj}(t + \tau)) \frac{\partial g_j(x(t))}{\partial y_i} - \\ &- \sum_{l=1}^n p_l(t) \frac{\partial h_l(x(t))}{\partial x_i}; \quad i = \overline{1, n},\end{aligned}\quad (1.7)$$

с граничными условиями на правом конце

$$p_i(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x_i}, \quad p_i(t) = 0, \quad t > T, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.8)$$

Часто в процессе обучения искусственной нейронной сети возникает проблема: как построить такое управление, чтобы на выходе нейронной сети вектор-функция состояния $x(T)$ принимала заданное значение θ , т.е. $x(T) = \theta$. Эта постановка приводит нас к необходимости решения краевой задачи принципа максимума (1.1), (1.3), (1.6)–(1.8). Для осуществления такого управления в минимизируемом функционале следует определить терминальное слагаемое по формуле

$$\Phi(x(T)) = -\alpha_1(\theta, x(T)) + \alpha_2(|x(T) - \theta|^2), \quad (1.9)$$

выбирая соответственно положительные множители α_1 , α_2 , усиливать важность соответствия направления вектора $x(T)$ вектору θ или его значения, разного $|\theta|$.

При решении краевой задачи возможны ошибки в вычислении конечного состояния $x(T) = \theta$ при найденных коэффициентах связи, поэтому вызов нужного вектора из памяти полезно осуществлять по корреляции векторов θ и $x(T)$ при заданных значениях θ .

Рассмотрим случай, когда мы стремимся сохранить в ассоциативной памяти только один n -мерный вектор θ . Этот вектор вызывается из памяти, когда текущее состояние нейронной сети в некотором (заданном) смысле близко к θ .

Положим, что в рассматриваемой модели $h_i(x) = -\beta_i x_i$, где $\beta_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ — заданные числа, $g_j(x(t - \tau)) = x_j(t - \tau) = y_j(t)$, $Q = O$, $W_0 = O$, $R = I$, $\Phi(x) = -(\theta, x)$, здесь O , I — нулевая и единичная

$n \times n$ - матрицы соответственно. Тогда исходная задача (1.1)–(1.4) имеет следующий вид:

$$J(\omega(\cdot)) = -(\theta, x(T)) + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij}^2(t) dt; \quad (1.10)$$

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(t) x_j(t-\tau), \quad i = \overline{1, n}; \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} |\omega_{ij}(t)| &\leq A_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad \omega_{ii} = 0, \\ x_i(t) &= \varphi_i(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

В этой задаче выражение $(\theta, x(T))$ в минимизируемом функционале характеризует корреляцию между конечным состоянием нейронной сети $x(T)$ и желаемым вектором θ . Заметим, что задача минимизации отрицательной величины корреляции эквивалентна задаче о максимизации корреляции.

В этом случае оптимальные значения весовых коэффициентов определяются той же формулой (1.6) с учетом того, что функция переключения $\Phi_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$ представляется следующими равенствами:

$$\Phi_{ij}(t) = p_i(t)x_j(t-\tau), \quad i \neq j, \quad (1.13)$$

а сопряженные функции $p_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с опережающим аргументом

$$\dot{p}_i(t) = - \sum_{l=1}^n p_l(t+\tau) \omega_{li}(t+\tau) + \beta_i p_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.14)$$

с граничными условиями

$$p_i(T) = \theta_i, \quad p_i(t) = 0, \quad t > T, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.15)$$

Заметим, что аналогично модели непрерывной нейронной сети может быть построена дискретная модель искусственной нейронной сети, т.е. такая модель, которая описывает состояние нейронной сети в фиксированные моменты времени. В следующем параграфе мы рассмотрим модель нейронной сети с более общей топологией.

§2. Дискретные модели нейронных сетей с учетом запаздывания

Прежде чем перейти к исследованию дискретных моделей, рассмотрим дискретную задачу оптимального управления с запаздыванием по векторам состояния и управления, которая подробно исследована в монографии [1]. Необходимо минимизировать функцию

$$I([u]) = \sum_{k=0}^{q-1} f_k^0(x^{k-n}, \dots, x^k, u^{k-m}, \dots, u^k) + \Phi(x^q) \quad (2.1)$$

с ограничениями, задаваемыми рекуррентными соотношениями

$$x^{k+1} = f_k(x^{k-n}, \dots, x^k, u^{k-m}, \dots, u^k), \quad k = \overline{0, q-1}; \quad (2.2)$$

$$x^k = b^k \in \mathbb{R}^l, \quad k = -n, \dots, 0; \quad (2.3)$$

$$u^k = a^k \in \mathbb{R}^r, \quad k = -m, \dots, 0. \quad (2.4)$$

Введём следующие обозначения:

$$z^k = (x^{k-n}, \dots, x^k, u^{k-m}, \dots, u^k);$$

$$[u] = [u^0, \dots, u^{q-1}], \quad [\tilde{u}] = [u^0, \dots, u^{i-1}, u^i + \Delta, u^{i+1}, \dots, u^{q-1}];$$

$$[x] = [x^0, \dots, x^q], \quad [\tilde{x}] = [x^0, \dots, x^{i-1}, x^i + \Delta, \tilde{x}^{i+1}, \dots, \tilde{x}^q].$$

Дадим приращение вектору $x^i + \Delta$, тогда последующие векторы $\tilde{x}^{i+1}, \dots, \tilde{x}^q$ вычисляются согласно формуле (2.2).

Определим сопряжённый вектор

$$p^i = \frac{dI([x], [u])}{dx^i} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{I([\tilde{x}], [\tilde{u}]) - I([x], [u])}{\Delta}. \quad (2.5)$$

Из (2.5) следует, что если $i = q$, то имеет место равенство

$$p^q = \frac{dI([x], [u])}{dx^q} = \frac{\partial \Phi(x^q)}{\partial x^q}; \quad (2.6)$$

если $i = q - 1$, то

$$\begin{aligned} p^{q-1} &= \frac{\partial I}{\partial x^{q-1}} + \left(\frac{\partial x^q}{\partial x^{q-1}} \right)^T \frac{dI}{dx^{q-1}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{q-1}} \left[f_{q-1}^0(z^{q-1}) + (p^q, f_{q-1}(z^{q-1})) \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В общем случае имеем

$$\begin{aligned}
 p^i &= \frac{\partial I}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial x^{i+1}}{\partial x^i} \right)^T \frac{dI}{dx^i} + \cdots + \left(\frac{\partial x^{i+n+1}}{\partial x^i} \right)^T \frac{dI}{dx^{i+n+1}} = \\
 &= \frac{\partial f_i^0(z^i)}{\partial x^i} + \cdots + \frac{\partial f_{i+n}^0(z^{i+n})}{\partial x^i} + \\
 &+ \left[\frac{\partial f_i(z^i)}{\partial x^i} \right]^T p^{i+1} + \cdots + \left[\frac{\partial f_{i+n}(z^{i+n})}{\partial x^i} \right]^T p^{i+n+1} = \\
 &= \sum_{l=0}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left[f_{i+l}^0(z^{i+l}) + (p^{i+l+1}, f_{i+l}(z^{i+l})) \right], \\
 i &= \overline{1, q-1}, \quad p^j = 0, \quad j > q.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Введём функцию $H_k(z^k, p^{k+1}) = \lambda_0 f_k^0(z^k) + (p^{k+1}, f_k(z^k))$, тогда (2.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 p^i &= \sum_{l=0}^n \frac{\partial H_{i+l}(z^{i+l}, p^{i+l+1})}{\partial x^i}, \quad i = \overline{q-1, 1}; \\
 p^q &= \frac{\partial \Phi(x^q)}{\partial x^q}.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Множество векторов $[x] = [x^1, \dots, x^q]$ зависит от начального данного вектора состояния x^0 и множества допустимых векторов $[u] = [u^0, \dots, u^{q-1}]$, поэтому можно считать $[x] = [x(u)]$ и минимизировать сложную функцию $I = I([x(u)], [u])$ аргумента u . Полная производная функции I по вектору u^i определяется выражением

$$\begin{aligned}
 \frac{dI([x(u)], [u])}{du^i} &= \frac{\partial I([x(u)], [u])}{\partial u^i} + \\
 &+ \sum_{l=0}^m \frac{\partial x^{i+l+1}[u]}{\partial u^i} \frac{dI([x(u)], [u])}{dx^{i+l+1}} = \\
 &= \sum_{l=0}^m \frac{\partial f_{i+l}^0(z^{i+l})}{\partial u^{i+l}} + \left[\frac{\partial f_{i+l}(z^{i+l})}{\partial u^i} \right]^T p^{i+l+1} = \\
 &= \sum_{l=0}^m \frac{\partial}{\partial u^i} H_{i+l}(z^{i+l}, p^{i+l+1}).
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Функция Лагранжа для дискретной задачи оптимального управления (2.1)–(2.4) представлена формулой

$$L([x], [u], [p], \lambda_0) = \sum_{i=0}^{q-1} \left[\lambda_0 f_i^0(z^i) + (p^{i+1}, f_i(z^i) - x^{i+1}) \right] + \lambda_0 \Phi(x^q).$$

Чтобы получить необходимые условия оптимальности, нужно вычислить производные функции Лагранжа по x^i , $i = \overline{1, q}$, u^i , $i = \overline{1, q-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^i} &= \sum_{l=0}^n \frac{\partial H_{i+l}(z^{i+l}, p^{i+l+1})}{\partial x^i} - p^i = 0, \quad i = \overline{1, q-1}, \\ \frac{\partial L}{\partial x^q} &= \lambda_0 \frac{\partial \Phi(x^q)}{\partial x^q} - p^q = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial u^i} &= \sum_{l=0}^m \frac{\partial H_{i+l}(z^{i+l}, p^{i+l+1})}{\partial u^i} = 0, \quad i = \overline{1, q-1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Сравнивая формулы (2.10) и (2.11), получим следующее равенство:

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = \frac{dI([x(u)], [u])}{du^i}, \quad i = \overline{1, q-1}. \quad (2.12)$$

Множители Лагранжа p^i , $i = \overline{1, q}$, согласно (2.5), имеют значение полной производной минимизируемой функции по x^i , $i = \overline{1, q}$.

Формула (2.12) может использоваться для получения приближённого оптимального решения, например, градиентными методами. Этот подход был детально обсуждён в [1], [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если задача (2.1)–(2.4) включает ограничение на вектор управления $u^i \in U_i$, $i = \overline{0, q-1}$, например

$$U_i = \{v \in \mathbb{R}^r : g_l^i(v) \leq 0, l = \overline{1, k}, h_l^i(v) = 0, l = \overline{k+1, s}\}, \quad (2.13)$$

то можно использовать метод Лагранжа с новой функцией Лагранжа. В этом случае новая функция Лагранжа \tilde{L} для задачи (2.1)–(2.4), (2.13) определяется выражением

$$\tilde{L} = L + \sum_{i=0}^{q-1} \left[\sum_{l=0}^k \mu_l^i g_l^i(v) + \sum_{l=k+1}^s \nu_l^i h_l^i(v) \right].$$

Для решения задачи (2.1)–(2.4) можно использовать также метод штрафных функций.

Дискретная задача может быть получена из непрерывной заменой производных, например по схеме Эйлера, и интеграла — по правилу левых прямоугольников или другими методами.

Рассмотрим дискретные модели нейронных сетей, для которых определим полную производную минимизируемой функции и сопряженные векторы.

Модель 1

Рассмотрим дискретную модель нейронной сети с запаздыванием, в которой переход из k -го состояния в $k+1$ осуществляется по следующему правилу:

$$x^{k+1} = h(x^k, x^{k-\nu}) + (W_0 + W_k)g(x^{k-\nu}), \quad (2.14)$$

или в некомпонентном виде —

$$x_i^{k+1} = h_i(x^k, x^{k-\nu}) + \sum_{j=1}^n [\omega_{ij}^0 + \omega_{ij}^k] g_j(x^{k-\nu}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.15)$$

с начальными условиями $x^i = a^i$, $i = -\nu, \dots, 0$; здесь $a^i \in \mathbb{R}^n$, $i = -\nu, \dots, 0$, — заданные векторы в \mathbb{R}^n , h , g — заданные n -мерные векторные непрерывно дифференцируемые функции, W_0 — заданная постоянная матрица, $W^k = \{\omega_{ij}^k\}$, $i, j = \overline{1, n}$ — $n \times n$ -матрица весовых коэффициентов или управлений на k -том шаге, принимающих значения в заданном множестве, например,

$$|\omega_{ij}^k| \leq A_{ij}^k, \quad k = 0, \dots, q-1; \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (2.16)$$

Весовые коэффициенты ω_{ij}^k выбираются из условия минимума функции

$$I = \Phi(x^q) + \sum_{k=0}^{q-1} E_k(x^k, x^{k-\nu}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{i,j=1}^n r_{ij}^k (\omega_{ij}^k)^2. \quad (2.17)$$

В выражении (2.17) коэффициенты $r_{ij}^k > 0$ при каждом $k = \overline{0, q-1}$ образуют положительно определенную матрицу, которую мы обозначим через R_0 , $\omega_{ij}^0, \dots, \omega_{ij}^q$ — набор $n \times n$ матриц, $E_k(x^k, x^{k-\nu})$ —

заданные скалярные функции, $x^{k-\nu} = (x_1^{k-\nu_1}, \dots, x_n^{k-\nu_n})$, т.е. каждая компонента вектора $x^{k-\nu}$ имеет своё запаздывание.

В модели (2.14)–(2.17) оптимальные элементы матрицы $\bar{\omega}_{ij}^k$ определяются равенством

$$\bar{\omega}_{ij}^k = p_i^{k+1} [r_{ij}^k]^{-1} g_j(x^{k-\nu}) \quad (2.18)$$

при условии, что сопряженные векторы $p^k = (p_1^k, \dots, p_n^k)$ выражаются с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} p_i^k &= -\lambda_0 \left[\frac{\partial E_k(\bar{x}^k, \bar{x}^{k-\nu})}{\partial x_i^k} - \frac{\partial E_{k+\nu}(\bar{x}^{k+\nu}, \bar{x}^k)}{\partial x_i^k} \right] + \\ &\quad + p_i^{k+1} \frac{\partial h_i(x^k, x^{k-\nu})}{\partial x_i^k} + \\ &\quad + p_i^{k+1+\nu} \left[\frac{\partial h_{i+\nu}(x^{k+\nu}, x^k)}{\partial x_i^k} + \sum_{j=1}^n \omega_{ij}^{k+1} \frac{\partial g_j(x^k)}{\partial x_i^k} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

с граничными условиями

$$p_i^q = -\lambda_0 \frac{\partial \Phi(\bar{x}^q)}{\partial x_i^q}, \quad i = \overline{1, n}; \quad p_i^s = 0, \quad s > q; \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.20)$$

Алгоритм построения приближённого оптимального решения

1. Зададим произвольный набор матриц

$$(W^k)^{(0)} = \{\omega_{ij}^k\}^{(0)}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{0, q-1},$$

на диагоналях которых стоят нулевые элементы.

2. По рекуррентным соотношениям (2.15), с использованием начальных значений $x^i = a^i, i = -\nu, \dots, 0$, где $a^i \in \mathbb{R}^n, i = -\nu, \dots, 0$, — заданные векторы в \mathbb{R}^n , и набора матриц $(W^k)^{(0)}$ определим $x_i^k, i = \overline{1, n}, k = \overline{1, q}$. В результате получим набор векторов x^1, \dots, x^q , соответствующий выбранным $(W^k)^{(0)}$, который обозначим $(x^k)^{(0)}$.

3. Вычислим значение функции (2.17), используя $(x^k)^{(0)}$ и $(W^k)^{(0)}$, и обозначим эту величину $I^{(0)}$. Здесь верхний индекс в скобках соответствует номеру итерации.

4. Найдем сопряжённые векторы по формулам (2.20) и (2.19), начиная с индекса q и кончая индексом 1.

5. Вычислим коэффициенты ω_{ij}^k , $i, j = \overline{1, n}$, $k = \overline{0, q-1}$, соответствующие первой итерации $(W^k)^{(1)} = \{\omega_{ij}^k\}^{(1)}$, по формуле (2.18) (в общем случае пользуемся методом градиентного спуска с дроблением шага). С полученными значениями весовых коэффициентов переходим ко второму шагу, используя вместо матриц $(W^k)^{(0)}$ улучшенные матрицы $(W^k)^{(1)}$, элементы которых получены по формуле

$$(\omega_{ij}^k)^{(l+1)} = (\omega_{ij}^k)^{(l)} - \alpha^{(l)} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_{ij}^k} \right)^{(l)}, \quad (2.21)$$

где $\alpha^{(l)} > 0$ — величина шага градиентного спуска.

6. Аналогично, согласно (2.15), строим $(x^k)^{(1)}$. Найдём значение минимизируемой функции (2.17), используя $(x^k)^{(1)}$ и $(W^k)^{(1)}$, и обозначим эту величину $I^{(1)}$. Вычислим приращение $\Delta I^{(1)} = I^{(0)} - I^{(1)}$.

7. Если $\Delta I^{(1)} > 0$, то заменяем на втором шаге $(W^k)^{(0)}$ на $(W^k)^{(1)}$; если $\Delta I^{(1)} \leq 0$, то при использовании метода градиентного спуска с дроблением шага уменьшаем шаг в два раза или переходим к новому алгоритму. Вычисления продолжаем до тех пор, пока $\Delta I^{(l)} < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданная точность.

Далее изложенные модели исследуются по той же схеме. Для построения приближенного оптимального решения может быть использован метод проекции градиента, в котором изменение весовых коэффициентов осуществляется по формуле (2.21).

Модель 2

Рассмотрим следующую дискретную модель нейронной сети:

$$I = \sum_{l=0}^{q-1} B^l(x^l, \omega^l) + \Phi(x^q) \rightarrow \inf,$$

$$x_i^{l+1} = F_i^l \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij}^l x_j^l \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad l = \overline{0, q-1},$$

$$x^0 \in \mathbb{R}^n, \quad \omega_{ij}^l \in A_{ij}^l \subset \mathbb{R}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Функция Лагранжа для этой задачи будет иметь следующий вид:

$$L = \lambda_0 \left(\sum_{l=0}^{q-1} B^l(x^l, \omega^l) + \Phi(x^q) \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{l=0}^{q-1} p_i^{l+1} (x_i^{l+1} - F_i^l \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij}^l x_j^l \right)) .$$

Вычислим производные функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_m^k} = \lambda_0 \frac{\partial B^k(x^k, \omega^k)}{\partial x_m^k} + p_m^k - \sum_{i=1}^n p_i^{k+1} \frac{\partial F_i^k}{\partial z_i^k} \omega_{im}^k,$$

$$p_m^q = -\lambda_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_m^q}, \quad k = 1, \dots, q-1, \quad m = \overline{1, n},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \omega_{sp}^k} &= \lambda_0 \frac{\partial B^k(x^k, \omega^k)}{\partial \omega_{sp}^k} - \sum_{i=1}^n p_i^{k+1} \frac{\partial F_i^k}{\partial z_i^k} \frac{\partial z_i^k}{\partial \omega_{sp}^k} = \\ &= \lambda_0 \frac{\partial B^k(x^k, \omega^k)}{\partial \omega_{sp}^k} - p_s^{k+1} \frac{\partial F_s^k}{\partial z_s^k} x_p^k, \\ k &= 0, 1, \dots, q-1, \quad s, p = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где

$$z_i^k = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}^k x_j^k, \quad F_i^k = F_i^k(z_i^k).$$

Модель 3

Рассмотрим следующую дискретную модель нейронной сети с запаздыванием:

$$I = \sum_{l=0}^{q-1} B^l(x^l, \omega^l) + \Phi(x^q) \rightarrow \inf,$$

$$x_i^{l+1} = F_i^l \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij}^{l-\nu} x_j^{l-\nu}, \sum_{j=1}^n \omega_{ij}^{l-\nu-1} x_j^{l-\nu-1}, \dots, \sum_{j=1}^n \omega_{ij}^l x_j^l \right),$$

$x^{-\nu}, x^{-\nu+1}, \dots, x^0 \in \mathbb{R}^n, \quad \omega_{ij}^{-\nu}, \dots, \omega_{ij}^{-1}$ заданы,

$$|\omega_{ij}^l| \leq A_{ij}^l, \quad l = \overline{0, q-1}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет следующий вид:

$$L = \lambda_0 \sum_{l=0}^{q-1} B^l(x^l, \omega^l) + \lambda_0 \Phi(x^q) + \\ + \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=1}^n p_i^{l+1} (x_i^{l+1} - \\ - F_i^l \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij}^{l-\nu} x_j^{l-\nu}, \sum_{j=1}^n \omega_{ij}^{l-\nu-1} x_j^{l-\nu-1}, \dots, \sum_{j=1}^n \omega_{ij}^l x_j^l \right)).$$

Вычислим производные функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_m^k} = \lambda_0 \frac{\partial B^k(x^k, \omega^k)}{\partial x_m^k} + p_m^k - \\ - \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=1}^n p_i^{l+1} \frac{\partial F_i^l(z_i^{l-\nu}, \dots, z_i^l)}{\partial x_m^k} = \\ = \lambda_0 \frac{\partial B^k(x^k, \omega^k)}{\partial x_m^k} + p_m^k - \\ - \sum_{i=1}^n p_i^{k+\nu+1} \frac{\partial F_i^{k+\nu}(z_i^k, \dots, z_i^{k+\nu})}{\partial z_i^k} \frac{\partial z_i^k}{\partial x_m^k} - \\ - \sum_{i=1}^n p_i^{k+\nu} \frac{\partial F_i^{k+\nu-1}(z_i^{k-1}, z_i^k, \dots, z_i^{k+\nu-1})}{\partial z_i^k} \frac{\partial z_i^k}{\partial x_m^k} - \\ - \dots - \sum_{i=1}^n p_i^{k+1} \frac{\partial F_i^k(z_i^{k-\nu}, \dots, z_i^k)}{\partial z_i^k} \frac{\partial z_i^k}{\partial x_m^k}, \\ k = 1, \dots, q-1, \quad m = \overline{1, n},$$

где

$$z_i^k = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}^k x_j^k; \quad \frac{\partial z_i^k}{\partial x_m^k} = \omega_{im}^k, \quad \frac{\partial z_s^k}{\partial \omega_{sp}^k} = x_p^k.$$

Учитывая определения z_i^k , получим следующие выражения для про-

изводных функции Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial x_m^k} = & \lambda_0 \frac{\partial B^k(x^k, \omega^k)}{\partial x_m^k} + p_m^k - \\
 & - \sum_{i=1}^n p_i^{k+\nu+1} \frac{\partial F_i^{k+\nu}(z_i^k, \dots, z_i^{k+\nu})}{\partial z_i^k} \omega_{im}^k - \\
 & - \sum_{i=1}^n p_i^{k+\nu+1} \frac{\partial F_i^{k+\nu-1}(z_i^{k-1}, z_i^k, \dots, z_i^{k+\nu-1})}{\partial z_i^k} \omega_{im}^k - \\
 & - \dots - \sum_{i=1}^n p_i^{k+1} \frac{\partial F_i^k(z_i^{k-\nu}, \dots, z_i^k)}{\partial z_i^k} \omega_{im}^k, \\
 k = & 1, \dots, q-1, \quad i, m = \overline{1, n}; \\
 p_i^q = & -\lambda_0 \frac{\partial \Phi(x^q)}{\partial x_i^q}, \quad p_i^l = 0, \quad l > q, \quad i = \overline{1, n};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \omega_{sp}^k} = & \lambda_0 \frac{\partial B^k(x^k, \omega^k)}{\partial \omega_{sp}^k} - \\
 & - \sum_{i=1}^n p_i^{k+\nu+1} \frac{\partial F_i^{k+\nu}(z_i^k, \dots, z_i^{k+\nu})}{\partial z_i^k} \frac{\partial z_i^k}{\partial \omega_{sp}^k} - \\
 & - \dots - \sum_{i=1}^n p_i^{k+1} \frac{\partial F_i^k(z_i^{k-\nu}, \dots, z_i^k)}{\partial z_i^k} \frac{\partial z_i^k}{\partial \omega_{sp}^k} = \\
 = & \lambda_0 \frac{\partial B^k(x^k, \omega^k)}{\partial \omega_{sp}^k} - \\
 & - p_s^{k+\nu+1} \frac{\partial F_s^{k+\nu}(z_s^k, \dots, z_s^{k+\nu})}{\partial z_s^k} x_p^k - \\
 & - p_s^{k+\nu+1} \frac{\partial F_s^{k+\nu-1}(z_s^{k-1}, z_s^k, \dots, z_s^{k+\nu-1})}{\partial z_s^k} x_p^k - \\
 & - \dots - p_s^{k+1} \frac{\partial F_s^k(z_s^{k-\nu}, \dots, z_s^k)}{\partial z_s^k} x_p^k,
 \end{aligned}$$

$$k = 0, 1, \dots, q-1, \quad s, p = \overline{1, n}.$$

§3. Оптимизация динамики нейронной сети с запаздыванием

Модель 1

На динамическое поведение нейронной сети влияют такие факторы, как входные данные, топология сети и физические свойства отдельного элемента. В нашем случае выходные характеристики нейронной сети являются функцией топологии сети и входных данных. При этом учитывается влияние запаздывания при передаче сигнала от одного нейрона к другому.

Динамика нейронной сети описывается системой дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= -\beta_i x_i(t) + f_i(z_i(t)), \quad i = \overline{1, n}, \\ z_i(t) &= \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(t) x_j(t-h_j), \quad h_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, n},\end{aligned}\quad (3.1)$$

начальные состояния сети заданы и характеризуют индивидуальный вход нейрона:

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \in [-h_i, 0], \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.2)$$

Коллективный вход нейронов обозначен $x_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, где n — число нейронов. Мы предполагаем, что функции $f_i(z) = K_i \operatorname{arctg} z$, $\dot{f}_i(z) = K_i \operatorname{th} z$, где K_i — данные постоянные. Весовые коэффициенты ω_{ij} могут рассматриваться как функции управления, которые выбираются таким образом, чтобы функционал (3.3) был минимальным:

$$J(\omega) = \int_0^T E(t, x(t), x(t-h), \omega(t)) dt + \Phi(x(T)). \quad (3.3)$$

В качестве функции $E(t, x, y, \omega)$ может быть выбрана функция Ляпунова, интеграл вероятности ошибки или другая функция. Например, они могут быть заданы как следующие функции:

$$\begin{aligned}E(x, \omega) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \omega_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n a_i (x_i(t) - Y_i(t))^2, \\ \Phi(x) &= b \|x - Y(T)\|^2,\end{aligned}\quad (3.4)$$

где a_{ij} , a_i — положительные параметры, $Y_i(t)$ — заданные функции.

Задача оптимального управления состоит в определении весовых коэффициентов $\omega_{ij}(t)$, минимизирующих функционал (3.3).

Теорема. Пусть задача (3.1)–(3.3) имеет оптимальное решение, тогда оптимальные функции управления $\bar{\omega}_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial E(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{\omega})}{\partial \omega_{ij}} = p_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial z_i}(\bar{z}_i(t)) \bar{x}_j(t - h_i), \quad (3.5)$$

где сопряженные функции $p_i(t)$ являются решением системы дифференциальных уравнений с опережающим аргументом

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) = & \beta_i p_i(t) - \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial z_l}(z_l(t + h_i)) p_l(t + h_i) \omega_{li}(t + h_i) + \\ & + \left. \frac{\partial E(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{\omega})}{\partial x_i} + \frac{\partial E(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{\omega})}{\partial y_i} \right|_{t+h_i} \end{aligned} \quad (3.6)$$

с граничными условиями

$$p_i(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\bar{x}(T)), \quad p_i(t) = 0, \quad t > T, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.7)$$

Здесь полагаем $\lambda_0 = 1$.

В модели $\omega_{ij}(t)$ могут быть также учтены ограничения на функцию управления. Задача (3.1)–(3.3) может быть решена методом штрафа и градиентным методом с ограничением на функции управления.

Если в (3.1)–(3.3) $h_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, то задачу можно решить, используя принцип максимума для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Функция Понтрягина для этой задачи может быть представлена следующим образом:

$$H(t, x, \omega, p) = -\lambda_0 E(t, x, \omega) + \sum_{l=1}^n p_l f_l \left(\sum_{j=1}^n \omega_{lj} x_j \right) - \sum_{l=1}^n \beta_l x_l p_l.$$

Оптимальные весовые коэффициенты удовлетворяют принципу максимума:

$$\begin{aligned} & -\lambda_0 E(t, \bar{x}(t), \bar{\omega}(t)) + \sum_{l=1}^n p_l(t) \left[f_l \left(\sum_{j=1}^n \bar{\omega}_{lj}(t) \bar{x}_j(t) \right) - \beta_l \bar{x}_l(t) \right] = \\ & = \max_{\omega} \left\{ -\lambda_0 E(t, \bar{x}(t), \omega) + \sum_{l=1}^n p_l(t) \left[f_l \left(\sum_{j=1}^n \omega_{lj} \bar{x}_j(t) \right) - \beta_l \bar{x}_l(t) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где сопряжённые функции $p_l(t)$, $l = \overline{1, n}$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{p}_l(t) &= \lambda_0 \frac{\partial E}{\partial x_l}(t, \bar{x}(t), \bar{\omega}(t)) + \beta_l p_l(t) - \\ &- \sum_{i=1}^n p_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial z_i} \left(\sum_{j=1}^n \bar{\omega}_{ij}(t) x_j(t) \right) \bar{\omega}_{il}(t),\end{aligned}$$

где $z_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} x_j$, $i = \overline{1, n}$, и условиям трансверсальности

$$p_l(T) = -\lambda_0 \frac{\partial \Phi(\bar{x}(T))}{\partial x_l}, \quad l = \overline{1, n}.$$

Если отсутствуют ограничения на функции управления ω_{mk} , $m, k = \overline{1, n}$, то оптимальное управление удовлетворяет следующим уравнениям:

$$-\lambda_0 \frac{\partial E(t, \bar{x}(t), \bar{\omega}(t))}{\partial \omega_{mk}} + p_m(t) \frac{\partial f_m}{\partial z_m} \left(\sum_{j=1}^n \bar{\omega}_{mj}(t) \bar{x}_j(t) \right) \bar{x}_k(t) = 0.$$

Построим для этой непрерывной модели соответствующую дискретную модель, в которой состояние системы на $l+1$ шаге описывается рекуррентными соотношениями вида

$$\begin{aligned}x_i^{l+1} &= x_i^l + \Delta t \left(-\beta_i x_i^l + f_i \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij}^l x_j^{l-\nu_j} \right) \right), \quad l = \overline{0, q-1}; \\ x_i^l &= \varphi_i(t_l), \quad l = -\nu_i, \dots, 0; \quad i = \overline{1, n}, \quad h_i = \nu_i \Delta t.\end{aligned}$$

Минимизируемый функционал аппроксимируется функцией

$$I(x, \omega) = \Delta t \sum_{l=0}^{q-1} E(x^l, x^{l-\nu}, \omega^l) + \Phi(x^q),$$

здесь $x^{l-\nu} = (x^{l-\nu_1}, \dots, x^{l-\nu_n})$, x_i^l — состояние i -го нейрона на l -м шаге; функции $f_i(z_i^l)$, $i = \overline{1, n}$ характеризуют топологию нейронной сети, $z_i^l = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}^l x_j^{l-\nu_j}$.

Оптимальные значения весовых коэффициентов ω_{ij}^l на l -м шаге $l = \overline{0, q-1}$ выбираются из условия минимума функции

$$I(x, w) = \Delta t \sum_{l=0}^{q-1} E(x^l, x^{l-\nu}, \omega^l) + \Phi(x^q).$$

В этом случае оптимальные значения весовых коэффициентов и векторов состояний являются решением системы алгебраических уравнений:

$$\lambda_0 \frac{\partial E}{\partial \omega_{kp}^l} - p_k^{l+1} f_{kz_k^l}(z_k^l) x_p^{l-\nu_p} = 0, \quad k, p = \overline{1, n}, \quad l = \overline{0, q-1},$$

сопряжённые векторы p_m^l , входящие в данную систему, определяются условиями

$$\begin{aligned} p_m^l &= \lambda_0 \frac{\partial E}{\partial x_m^l} + p_m^{l+1} (1 - \beta_m \Delta t) + \\ &+ \Delta t \sum_{i=1}^n \left[p_i^{l+1+\nu_m} \omega_{im}^{l+\nu_m} \frac{\partial f_i}{\partial z_i^{l+\nu_m}} (z_i^{l+\nu_m}) \right], \quad m = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, q-1}; \\ p_m^q &= -\lambda_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_m^q} (x^q), \quad p_m^l = 0, \quad l > q, \quad m = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где

$$z_i^{l+\nu_m} = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}^{l+\nu_m} x_j^{l+\nu_m - \nu_j}.$$

Модель 2

В многих моделях нейронных сетей воздействие запаздывания существенно. Например, система распознавания речи использует нейронные сети, в которых информация накапливается на интервале времени T . Такие модели могут быть описаны системой интегродифференциальных уравнений.

Задача оптимального управления для таких моделей состоит в минимизации функционала

$$J(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} E(y(t), \omega(t)) dt + \Phi(y(t_0), y(t_1)) \quad (3.8)$$

с ограничениями

$$\frac{dy_i}{dt} = -\beta_i y_i(t) + f_i \left(\int_{t-T}^t \sum_{j=-1}^N \omega_{ij}(\tau) y_j(\tau - \delta_j) d\tau \right), \quad (3.9)$$

$$i = 1, \dots, N,$$

где $y_0(t)$, $y_{-1}(t)$, $\omega_{i,-1}(t)$, $\omega_{i0}(t)$, $i = \overline{1, N}$ — данные функции на $[t_0 - T, t_1]$.

Рассмотрим дискретную аппроксимацию начальной задачи, в которой используются правило левых прямоугольников для аппроксимации интеграла и схема Эйлера аппроксимации производных. Выберем шаг интегрирования $\Delta t = (t_1 - t_0)/q$ так, что $T = \nu \Delta t$, $\delta_j = \nu_j \Delta t$, $\nu > \nu_j > 0$, $j = 1, \dots, N$, $t_k = t_0 + k \Delta t$, $k = 0, \dots, q$, $t_q = t_f$.

Дискретная задача оптимального управления состоит в минимизации функции

$$I(\omega, y) = \sum_{k=0}^{q-1} \Delta t E_k(y^k, \omega^k) + \Phi(y^0, y^q) \rightarrow \inf \quad (3.10)$$

при ограничениях

$$y_i^{k+1} = y_i^k (1 - \Delta t \beta_i) + \Delta t f_i \left(\Delta t \sum_{s=k-\nu}^{k-1} \sum_{j=-1}^N \omega_{ij}^s y_j^{s\nu_j} \right), \quad (3.11)$$

$$k = 0, \dots, q-1, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $y_i^k = y_i(t_k)$, $i = \overline{1, N}$, $k = \overline{0, q}$, $\omega_{ij}^s = \omega_{ij}(t_s)$, $i, j = \overline{1, N}$, $s = \overline{0, q}$, а y_0^k , y_{-1}^k , $\omega_{i,-1}^k$, ω_{i0}^k , $k = 0, \dots, q$, — известные начальные условия.

Функция Лагранжа для этой задачи может быть представлена следующим выражением:

$$L(y, \omega, p, \lambda_0) = \lambda_0 \sum_{k=0}^{q-1} \Delta t E(y^k, \omega^k) + \lambda_0 \Phi(y^0, y^q) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{i=1}^N p_i^{k+1} \left[y_i^{k+1} - y_i^k (1 - \Delta t \beta_i) - \right. \\ \left. - \Delta t f_i \left(\Delta t \sum_{s=k-\nu}^{k-1} \sum_{j=-1}^N \omega_{ij}^s y_j^{s\nu_j} \right) \right], \quad (3.12)$$

$$\text{где } z_i^k = \Delta t \sum_{s=k-\nu}^{k-1} \sum_{j=-1}^N \omega_{ij}^s y_j^{s-\nu_j}.$$

Запишем необходимые условия оптимальности для дискретной задачи:

$$\frac{\partial L}{\partial y_l^m} = \lambda_0 \Delta t \frac{\partial E}{\partial y_l^m} + p_l^m - (1 - \Delta t \beta_i) p_l^{m+1} - \quad (3.13)$$

$$- (\Delta t)^2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1+\nu_l+m}^{\nu_l+m} p_i^{k+1} f_{iz_i^k} \left(\Delta t \sum_{s=k-\nu}^{k-1} \sum_{j=-1}^N \omega_{ij}^s y_j^{s-\nu_j} \right) \omega_{il}^{m+\nu_l} = 0,$$

$$l = 1, \dots, N, \quad m = 0, \dots, q-1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_l^q} = p_l^q + \lambda_0 \frac{\partial \Phi(y^0, y^q)}{\partial y_l^q}, \quad l = 1, \dots, N, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_{ip}^m} = \Delta t \sum_{k=1+m}^{n+m} p_i^{k+1} \frac{\partial f_i}{\partial z_i^k} (z_i^k) y_p^{m-\nu_p} + \lambda_0 \frac{\partial E}{\partial \omega_{ip}^m} \Delta t, \quad (3.15)$$

$$l, p = 1, \dots, N, \quad m = 0, \dots, q-1.$$

Используя уравнения $\frac{\partial L}{\partial y_l^m} = 0$, определим производные $\dot{p}_l = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_l^{m+1} - p_l^m}{\Delta t}$. Осуществляя предельный переход в (3.13) при $\Delta t \rightarrow 0$, получим следующую систему интегродифференциальных уравнений для сопряжённых функций:

$$\dot{p}_l(t) = \beta_l(t) p_l(t) - \sum_{i=1}^N \bar{\omega}_{il}(t + \delta_l) \int_{t+\delta_l}^{t+\delta_l+T} p_i(\tau) \frac{\partial f_i}{\partial z_i} (\bar{z}_i(\tau)) d\tau, \quad (3.16)$$

где

$$z_i(\tau) = \sum_{j=-1}^N \int_{\tau-T}^{\tau} \omega_{ij}(s) y_j(s - \delta_j) ds.$$

Интересно сравнить эти формулы с аналогичными в случае, если $\nu_j = 0$, $j = -1, \dots, N$:

$$\dot{p}_l(t) = \beta_l p_l(t) - \sum_{i=1}^N \bar{\omega}_{il}(t) \int_t^{t+T} p_i(\tau) \frac{\partial f_i}{\partial z_i} (\bar{z}_i(\tau)) d\tau. \quad (3.17)$$

Модель 3

Рассмотрим последовательную нейронную сеть, которая состоит из n нейронов, соединённых друг с другом так, что i -й нейрон может влиять только на $i+1$ -й нейрон, что означает матрицу ω_i^j , $i, j = \overline{1, n}$, с элементами $\omega_{i,i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$.

Динамика нейронной сети в этой задаче может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + f_i(\omega_{i-1}(t) \cdot x_{i-1}(t - h_{i-1})), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.18)$$

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \in [-h, 0], \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.19)$$

где $\varphi_i(t)$, $x_0(t)$, $\omega_0(t)$ — заданные функции, $h = \max_i h_i$, $f_i(z)$, $i = \overline{1, n}$, — непрерывно дифференцируемые функции.

Задача оптимального управления состоит в минимизации функционала

$$J(\omega) = \int_0^T \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \omega_i^2(t) dt + \Phi(x(T)), \quad (3.20)$$

где α_i — заданные положительные коэффициенты, $\Phi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Построим функцию Понtryгина:

$$H(t, x, y, \omega, p(t)) = -\lambda_0 \sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i^2 + \sum_{i=1}^n p_i(t) (f_i(\omega_{i-1} \cdot y_{i-1}) - \beta_i x_i) \quad (3.21)$$

и запишем сопряжённую систему:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= \beta_i p_i(t) - \\ &- p_{i+1}(t + h_i) \omega_i(t + h_i) \frac{\partial f_{i+1}(\omega_i(t + h_i) \cdot x_i(t))}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$p_i(T) = -\lambda_0 \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x_i}, \quad p_i(t) = 0, \quad t > T, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.23)$$

Оптимальные весовые коэффициенты удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} 2\lambda_0 \alpha_i \omega_i(t) &= p_{i+1}(t) \frac{\partial f_{i+1}(\omega_i(t) \cdot x_i(t - h_i))}{\partial \omega_i} x_i(t - h_i), \\ i &= \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Если нейроны связаны в кольцо, то это означает, что i -й нейрон действует на $i+1$ -й нейрон и последний n -й нейрон влияет на первый. Тогда вместо (3.18) мы будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\beta_1 x_1(t) + f_1(\omega_n(t) \cdot x_n(t - h_n)), \\ \dot{x}_i(t) &= -\beta_i x_i(t) + f_i(\omega_{i-1}(t) \cdot x_{i-1}(t - h_{i-1})), \quad i = \overline{2, n}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

Цель процесса состоит в том, чтобы выбрать весовые коэффициенты $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, из условия минимума функционала (3.20). Так же интересно рассмотреть задачу быстродействия с функционалом $J(\omega) = T$, где T — время, за которое нейронная сеть достигнет данного состояния $x_i(T) = b_i$, $i = \overline{1, n}$.

Модель 4

Динамические свойства систем связанных "нейронов" могут быть смоделированы системой нелинейных дифференциальных уравнений [9]:

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + f_i \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t) u_j(t) \right), \quad (3.26)$$

$$x_i(0) = a_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T],$$

или

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + f_i \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij}(t) x_j(t) \right) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t) u_j(t). \quad (3.27)$$

Здесь каждая функция $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, есть действительная функция состояния i -го "нейрона", функция u_i , $i = \overline{1, m}$, является внешним воздействием на i -й "нейрон". Коэффициенты $\omega_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$, обозначают веса или "синаптические связи". Функции f_i (функции активации) показывают, как i -й нейрон реагирует на совокупный сигнал. Некоторые авторы полагают, что, изменяя внешний сигнал, можно управлять каждым нейроном, но разумно предположить, что число таких входов гораздо меньше, чем число функций состояния, т.е. $m \ll n$.

Заметим, что, как только нелинейные функции f_i , $i = \overline{1, n}$, определены и сделан выбор модели (3.26) или (3.27) (т.е. как только архитектура сети установлена), весовые коэффициенты $\omega_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$,

интенсивности $b_{ij}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, однозначно определяют динамику сети. Можно рассматривать такие частные случаи моделей, как линейная нейронная сеть при $f_i(z) = k_i z$, $i = \overline{1, n}$, и разрывные модели нейронных сетей, если функции активации f_i , $i = \overline{1, n}$, сигмоидального типа [9]:

$$\dot{x}_i = -\beta_i x_i + \operatorname{sign} \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij}(t)x_j + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)u_j \right), \quad (3.28)$$

$$x_i(0) = a_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T].$$

Во многих приложениях "нейронные сети" с обратной связью или, как они иначе называются, "рекуррентные сети", используются в качестве управляющих или прогнозирующих моделей, в которых входные (выходные) данные являются параметрами модели.

Алгоритмы градиентного спуска могут быть использованы для выбора параметров схемы с помощью минимизации функционала ошибки, который представляет собой штраф за отклонение от заданного процесса. Термин "непрерывное обратное распространение" иногда используется для процедуры градиентного спуска. Мы предполагаем, что минимизируемый функционал имеет конечное множество глобальных минимумов.

Рассмотрим влияние запаздывания при передаче сигнала от одного нейрона к другому в модели (3.26). В этом случае поведение нейронной сети описем нелинейной системой дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + f_i \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij}(t)x_j(t-h_j) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)u_j \right), \quad (3.29)$$

$$i = \overline{1, n},$$

или

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + f_i \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij}(t)x_j(t-h_j) \right) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)u_j, \quad (3.30)$$

$$i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T],$$

с начальными условиями

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \in [-h_i, 0], \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.31)$$

В общем случае каждый нейрон может иметь собственное значение запаздывания h_i , но для простоты мы принимаем, что средняя величина запаздывания нейрона равна h .

Весовые коэффициенты $\omega_{ij}(t)$ и внешние сигналы $u_j(t)$ должны быть выбраны так, чтобы минимизировать заданный функционал

$$J(\omega, u) = \int_0^T E(t, \omega(t), u(t), x(t)) dt + \Phi(x(T)) \quad (3.32)$$

на множестве допустимых процессов, удовлетворяющих условиям (3.29) или (3.30), (3.31), с ограничениями на управление

$$|\omega_{ij}(t)| \leq A_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n} \quad |u_j| \leq B_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.33)$$

где A_{ij} , B_j — заданные положительные числа.

Построим функцию Понтрягина задачи (3.29), (3.31), (3.32), (3.33):

$$\begin{aligned} H(t, x, y, \omega, u, p(t), \lambda_0) = & -\lambda_0 E(t, \omega, u, x) + \\ & + \sum_{i=1}^n p_i(t) \left[f_i \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij} y_j + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t) u_j \right) - \beta_i x_i \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

и сопряжённую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{p}_l(t) = & \lambda_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial x_l} \Big|_t + \beta_l p_l(t) - \sum_{i=1}^n p_i(t+h) \frac{\partial f_i}{\partial z_i} \left(\sum_{j=1}^n \bar{\omega}_{ij} \bar{y}_j + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t) \bar{u}_j \right) \Big|_{t+h} \bar{\omega}_{il}(t+h), \quad l = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\text{где } z_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} y_j + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t) u_j.$$

$$p_l(T) = -\lambda_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} (\bar{x}(T)), \quad p_l(t) = 0, \quad t > T, \quad l = \overline{1, n}. \quad (3.36)$$

Согласно теореме о необходимых условиях оптимальности в задаче оптимального управления с запаздыванием, оптимальное управление

удовлетворяет принципу максимума:

$$\begin{aligned}
 & -\lambda_0 E(t, \bar{x}(t), \bar{\omega}(t), \bar{u}(t)) + \\
 & + \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i \left(\sum_{j=1}^n \bar{\omega}_{ij}(t) \bar{y}_j(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t) \bar{u}_j(t) \right) = \\
 & = \max_{\omega, u} \left\{ -\lambda_0 E(t, \bar{x}(t), \omega, u) + \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij} \bar{y}_j(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t) u_j \right) \right\}, \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

где ω , u изменяются на множество, определяемом неравенствами $|\omega_{ij}| \leq A_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, $|u_j| \leq B_j$, $j = \overline{1, m}$.

Из (3.37) следует, что если в задаче отсутствуют ограничения на управление, то оптимальный процесс удовлетворяет условиям

$$-\lambda_0 \frac{\partial E(t, \bar{x}(t), \bar{\omega}, \bar{u})}{\partial \omega_{ij}} + p_i(t) \frac{\partial f_i(\bar{z}_i)}{\partial z_i} \bar{y}_j = 0, \tag{3.38}$$

$$-\lambda_0 \frac{\partial E(t, \bar{x}(t), \bar{\omega}, \bar{u})}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n p_i(t) \frac{\partial f_i(\bar{z}_i)}{\partial z_i} b_{ik} = 0, \tag{3.39}$$

где $z_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} y_j + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t) u_j$.

При использовании формальных средств оптимальной теории управления для системы с запаздыванием мы можем выводить программу обучения для различных моделей нейронных сетей с запаздыванием. Можно рассматривать случаи с непрерывным и дискретным временем. Задача определения весовых коэффициентов может быть решена выбором минимизируемого функционала. Полезно исследовать положения равновесия системы, устойчивость оптимального решения, сравнить различные решения, соответствующие различным функционалам, влияние времени T на характеристики оптимального процесса.

Здесь, исследуя проблему обучения нейронной сети, для простоты мы полагаем, что сеть хранит только один вектор памяти. Возможно расширить (обобщить) результаты на случай нескольких векторов, которые следует хранить в памяти.

Модель 5

Задача оптимального управления состоит в минимизации функционала

$$J(\omega) = \int_0^T \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n limits_{j=1}^n \alpha_{ij} \omega_{ij}^2(t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (x_i(t) - \psi_i(t))^2 \right] dt + \\ + \sum_{i=1}^n M_i (x_i(T) - A_i)^2 + \sum_{i=1}^n c_i x_i(T). \quad (3.40)$$

Электрическая или химическая нейронные модели взаимодействия нейронов описываются системой дифференциальных уравнений с запаздыванием [6], [7]:

$$\dot{x}_i(t) = -\lambda \left[1 + R_1 \exp(-x_i^2(t)) - R_2 \exp(-x_i^2(t-h_i)) \right] x_i(t) + \\ + \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(t) (x_j(t) - x_i(t)), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.41)$$

$$x_i(t) = \theta_i(t), \quad t \in [-h, 0], \quad h = \max_{i=1, n} h_i, \quad (3.42)$$

$$|\omega_{ij}(t)| \leq a_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad \text{п.в. } t \in [0, T], \quad (3.43)$$

где $\psi_i(t)$, $\theta_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, — заданные непрерывные функции, α_{ij} , ε_i , c_i , M_i , a_{ij} , R_1 , R_2 , λ , h_i — заданные положительные параметры модели.

Запишем необходимые условия оптимальности для случая $h_i = h > 0$, $i = \overline{1, n}$, постоянного запаздывания.

Построим функцию Понтрягина, учитывая, что $y_i = x_i(t-h)$, $i = \overline{1, n}$:

$$H(t, x, y, \omega, p(t), \lambda_0) = -\lambda_0 \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \omega_{ij}^2 + \varepsilon_i (x_i - \psi_i(t))^2 \right] + \\ + \sum_{i=1}^n p_i(t) \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \omega_{ij} (x_j - x_i) - \right. \\ \left. - \lambda [1 + R_1 \exp(-x_i^2) - R_2 \exp(-y_i^2)] x_i \right\}. \quad (3.44)$$

Оптимальные весовые коэффициенты $\bar{\omega}_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$, удовлетворяют принципу максимума:

$$\begin{aligned} & -\lambda_0 \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \bar{\omega}_{ij}^2(t) + \frac{1}{n-1} \sum_{i,j=1}^n p_i(t) \bar{\omega}_{ij}(t) (\bar{x}_j(t) - \bar{x}_i(t)) = \\ &= \max_{|\omega_{ij}| \leq a_{ij}} \left[-\lambda_0 \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \omega_{ij}^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{n-1} \sum_{i,j=1}^n p_i(t) \omega_{ij} (\bar{x}_j(t) - \bar{x}_i(t)) \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

В силу аддитивной структуры функции Понtryгина относительно ω_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, можно записать принцип максимума для каждого весового коэффициента ω_{ij} :

$$\begin{aligned} & -\lambda_0 \alpha_{ij} \bar{\omega}_{ij}^2(t) + \frac{1}{n-1} p_i(t) \bar{\omega}_{ij}(t) (\bar{x}_j(t) - \bar{x}_i(t)) = \\ &= \max_{|\omega_{ij}| \leq a_{ij}} \left[-\lambda_0 \alpha_{ij} \omega_{ij}^2 + \frac{\omega_{ij}}{n-1} p_i(t) (\bar{x}_j(t) - \bar{x}_i(t)) \right], \\ & i, j = \overline{1, n}, \quad \text{п.в. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.46)$$

или для регулярного случая $\lambda_0 = 1$:

$$\bar{\omega}_{ij}(t) = \begin{cases} a_{ij}, & \Phi_{ij}(t) \geq a_{ij}, \\ \Phi_{ij}(t), & |\Phi_{ij}(t)| \leq a_{ij}, \\ -a_{ij}, & \Phi_{ij}(t) \leq a_{ij}, \end{cases} \quad (3.47)$$

где

$$\Phi_{ij}(t) = \frac{p_i(t)(\bar{x}_j(t) - \bar{x}_i(t))}{2(n-1)\alpha_{ij}}. \quad (3.48)$$

Для случая $\alpha_{ij} = 0$ или $\lambda_0 = 0$

$$\bar{\omega}_{ij}(t) = a_{ij} \operatorname{sign} \varphi_{ij}(t), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (3.49)$$

где

$$\varphi_{ij}(t) = \frac{p_i(t)(\bar{x}_j(t) - \bar{x}_i(t))}{n-1}. \quad (3.50)$$

Сопряжённые функции $p_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом:

$$\begin{aligned} \dot{p}_l(t) &= 2\lambda_0 \varepsilon_l (\bar{x}_l(t) - \psi_l(t)) - \\ &- \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n p_i(t) \bar{\omega}_{il}(t) + \frac{p_l(t)}{n-1} \sum_{j=1}^n \bar{\omega}_{lj}(t) + \\ &+ \lambda \left[1 + R_1 \exp(-\bar{x}_l^2(t)) - R_2 \exp(-\bar{x}_l^2(t-h)) \right] p_l(t) + \\ &+ 2\lambda \bar{x}_l(t) \exp(-\bar{x}_l^2(t)) [R_2 \bar{x}_l(t+h) p_l(t+h) - R_1 \bar{x}_l(t) p_l(t)], \\ l &= \overline{1, n}; \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$p_l(T) = -\lambda_0 \left(2M_l(x_l(T) - A_l) - c_l \right), \quad p_l(t) = 0, t > T, \quad (3.52)$$

$$l = \overline{1, n}.$$

Для определения оптимального решения нужно привести исходную задачу (3.41)–(3.43) к дискретной задаче оптимального управления минимизации функции

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \Delta t \sum_{k=0}^{q-1} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (\omega_{ij}^k)^2 + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (x_i^k - \psi_i^k)^2 \right\} + \\ &+ \sum_{i=1}^n [M_i(x_i^q - A_i)^2 + c_i x_i^q] \longrightarrow \inf \end{aligned} \quad (3.53)$$

со следующими ограничениями:

$$\begin{aligned} x_i^{k+1} &= \\ &= x_i^k + \Delta t \left\{ -\lambda \left[1 + R_1 \exp(-(x_i^k)^2) - R_2 \exp(-(x_i^{k-\nu_i})^2) \right] x_i^k + \right. \\ &\left. + \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \omega_{ij}^k (x_j^k - x_i^k) \right\}, \quad k = \overline{0, q-1}, i, j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$x_i^k = \theta_i(t_k), \quad k = -\nu_i, \dots, 0; \quad h_i = \nu_i \Delta t, i = \overline{1, n}, \quad (3.55)$$

$$|\omega_{ij}^k| \leq a_{ij}, \quad k = \overline{0, q-1}, i, j = \overline{1, n}. \quad (3.56)$$

Чтобы применить метод градиентного спуска для нахождения оптимального решения, нужно получить формулы для сопряжённых векторов и градиента минимизируемой функции (3.53) относительно ω_{ij}^k , $i, j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, q - 1}$:

$$\begin{aligned} p_i^k &= p_i^{k+1} - 2\Delta t \lambda_0 \varepsilon_l (x_l^k - \psi_i^k) + \\ &+ \frac{\Delta t}{n-1} \sum_{i=1}^n p_i^{k+1} \omega_{il}^k - \frac{\Delta t}{n-1} p_l^{k+1} \sum_{j=1}^n \omega_{ij}^k - \\ &- \Delta t \lambda \left[1 + R_1 \exp(-(x_l^k)^2) - R_2 \exp(-(x_l^{k-\nu})^2) \right] p_l^{k+1} - \\ &- 2\Delta t \lambda x_l^k \exp(-(x_l^k)^2) [R_2 x_l^{k+\nu} p_l^{k+\nu+1} - R_1 x_l^k p_l^{k+1}], \\ l &= \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, q-1}; \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$p_l^q = -\lambda_0 (2M_l(x_l^q - A_l) - c_l), \quad p_l^k = 0, \quad k > q, \quad (3.58)$$

$$l = \overline{1, n};$$

$$\frac{dI}{d\omega_{ij}^k} = \frac{\partial L}{\partial \omega_{ij}^k} = 2\lambda_0 \Delta t \alpha_{ij} \omega_{ij}^k - \frac{\Delta t}{n-1} p_i^{k+1} (x_j^k - x_i^k), \quad (3.59)$$

$$i, j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, q-1}.$$

§4. Анализ модели последовательной нейронной сети

Рассмотрим последовательную нейронную сеть, состоящую из n нейронов, в которой i -й нейрон оказывает влияние только на $i+1$ -й нейрон. Это влияние характеризуется весовым коэффициентом $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, n}$,

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + f_i(\omega_{i-1}(t) \cdot x_{i-1}(t)),$$

$$t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n},$$

где $f_i(y)$ характеризует топологию сети. Например, $f_i(y) = k_i y$, $f_i(y) = k_i \arctg y$. Рассмотрим оба эти случая.

1. Динамика нейронной сети описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + k_i \arctg(\omega_{i-1}(t) \cdot x_{i-1}(t)), \quad t \in [0, T], \quad (4.1)$$

$$i = \overline{1, n},$$

с начальными условиями

$$x_i(0) = a_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.2)$$

где $x_0(t)$, $\omega_0(t)$ — заданные непрерывные функции.

Задача оптимального выбора весовых коэффициентов состоит в минимизации функционала

$$J(\omega) = \int_0^T \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \omega_i^2(t) dt + \sum_{i=1}^n M_i (x_i(T) - A_i)^2 \quad (4.3)$$

при ограничениях (4.1), (4.2), где α_i , M_i , A_i , β_i , k_i — заданные неотрицательные параметры модели.

Построим функцию Понтрягина для данной задачи:

$$\begin{aligned} H(t, x, \omega, p(t), \lambda_0) = & -\lambda_0 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \omega_i^2 + \\ & + \sum_{i=1}^n p_i(t) (k_i \operatorname{arctg}(\omega_{i-1} \cdot x_{i-1}) - \beta_i x_i). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Оптимальные значения весовых коэффициентов $\bar{\omega}_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, удовлетворяют принципу максимума:

$$\begin{aligned} & -\lambda_0 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \bar{\omega}_i^2(t) + \sum_{i=1}^n p_i(t) k_i \operatorname{arctg}(\bar{\omega}_{i-1}(t) \cdot \bar{x}_{i-1}(t)) = \\ & = \max_{\omega_i} \left[-\lambda_0 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \omega_i^2 + \sum_{i=1}^n p_i(t) k_i \operatorname{arctg}(\omega_{i-1} \cdot \bar{x}_{i-1}(t)) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Нерегулярного решения, соответствующего $\lambda_0 = 0$, не существует, т.к. в этом случае $p(t) \equiv 0$.

В регулярном случае ($\lambda_0 = 1$) оптимальные значения $\bar{\omega}_i(t)$ удовлетворяют нелинейной системе алгебраических уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_i} = -2\alpha_i \omega_i + k_{i+1} p_{i+1}(t) \frac{x_i}{1 + (\omega_i x_i)^2} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Отсюда, решая эту систему уравнений, найдём действительные корни:

$$\bar{\omega}_i(t) = \left(\frac{k_{i+1} p_{i+1}(t)}{4\alpha_i} + \sqrt{D} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{k_{i+1} p_{i+1}(t)}{4\alpha_i} - \sqrt{D} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.6)$$

где

$$D = \left(\frac{1}{3\bar{x}_i^2(t)} \right)^3 + \left(\frac{k_{i+1}p_{i+1}(t)}{4\alpha_i \bar{x}_i(t)} \right)^2 > 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Если $\alpha_i = 0$, то для определения оптимального управления необходимо найти максимум выражения $p_{i+1}(t) \operatorname{arctg}(\omega_i \cdot \bar{x}_i(t))$ по ω_i , который не достигается, если $\bar{x}_i(t) \neq 0$.

Сопряжённые функции $p_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{p}_l(t) = \beta_l p_l(t) - k_{l+1} p_{l+1}(t) \frac{\bar{\omega}_l(t)}{1 + (\bar{\omega}_l(t) \bar{x}_l(t))^2}, \quad l = \overline{1, n-1}; \quad (4.7)$$

$$p_l(T) = -2\lambda_0 M_l(x_l(T) - A_l), \quad p_l(t) = 0, \quad t > T, \quad l = \overline{1, n}. \quad (4.8)$$

Краевая задача принципа максимума включает в себя $2n$ дифференциальных уравнений и $2n$ граничных условий

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + k_i \operatorname{arctg}(\bar{\omega}_{i-1}(t) \cdot x_{i-1}(t)), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n},$$

$$x_i(0) = a_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\dot{p}_i(t) = \beta_i p_i(t) - k_{i+1} p_{i+1}(t) \frac{\bar{\omega}_i(t)}{1 + (\bar{\omega}_i(t) \bar{x}_i(t))^2}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$p_i(T) = -2\lambda_0 M_i(x_i(T) - A_i), \quad i = \overline{1, n},$$

где $\bar{\omega}_i(t)$ определены согласно (4.6).

Рассмотрим положения равновесия динамической системы (4.1) в случае, если все функции $\omega_i(t) = b_i$, где b_i , $i = \overline{1, n}$, — заданные постоянные величины.

Пусть $d = (d_0, d_1, \dots, d_n)$ — положение равновесия системы (4.1), т.е. при $x(t) = d$ имеем

$$-\beta_1 d_1 + \bar{k}_1 = 0, \quad \text{где } \bar{k}_1 = k_1 \operatorname{arctg}(\omega_0 d_0),$$

$$-\beta_i d_i + k_i \operatorname{arctg}(\omega_{i-1} \cdot d_{i-1}) = 0, \quad i = \overline{2, n}.$$

Откуда следует, что вектор d является решением алгебраической системы

$$-\beta_1 d_1 + \bar{k}_1 = 0, \quad (4.9)$$

$$\omega_{i-1} \cdot d_{i-1} = \operatorname{tg} \left(\frac{\beta_i d_i}{k_i} \right), \quad i = \overline{2, n}, \quad (4.10)$$

и его координаты определяются последовательно от d_1 к d_n . Например, для $n = 3$

$$d_1 = \frac{\bar{k}_1}{\beta_1},$$

$$d_2 = \frac{k_2}{\beta_2} \arctg(\omega_1 d_1),$$

$$d_3 = \frac{k_3}{\beta_3} \arctg(\omega_2 d_2),$$

и т.д.

Исследуем устойчивость положения равновесия. Для этого линеаризуем систему (4.1) в окрестности положения равновесия $x = d$. Вычислим частные производные функции

$$f_i(x, \omega) = -\beta_i x_i + k_i \arctg(\omega_{i-1} \cdot x_{i-1}), \quad i = \overline{1, n},$$

стоящей в правой части системы (4.1):

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(d, b) = -\beta_i, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}}(d, b) = \frac{k_i b_{i-1}}{1 + (b_{i-1} \cdot d_{i-1}(t))^2}, \quad i = \overline{2, n};$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(d, b) = 0, \quad j \neq i, j \neq i-1, i, j = \overline{1, n}.$$

Обозначим отклонение от положения равновесия $z = x - d$ или $z_i = x_i - d_i, i = \overline{1, n}$. Линеаризованная система имеет вид

$$\dot{z} = Az,$$

где элементы матрицы $a_{ij} = \frac{\partial f_i(d, b)}{\partial z_j}, i, j = \overline{1, n}$. Таким образом,

$$\dot{z} = f(z + d) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(d)z + o(z).$$

Матрица $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{k_2 b_1}{1 + (b_1 \cdot d_1)^2} & -\beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_3 b_2}{1 + (b_2 \cdot d_2)^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{k_n b_{n-1}}{1 + (b_{n-1} \cdot d_{n-1})^2} & -\beta_n \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Найдём собственные значения матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$. Матрица $A - \lambda E$ имеет следующий вид:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\beta_1 - \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{k_2 b_1}{1+(b_1 \cdot d_1)^2} & -\beta_2 - \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_3 b_2}{1+(b_2 \cdot d_2)^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{k_n b_{n-1}}{1+(b_{n-1} \cdot d_{n-1})^2} & -\beta_n - \lambda \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

$$\det(A - \lambda E) = (-\beta_1 - \lambda) \cdot (-\beta_2 - \lambda) \cdots \cdots (-\beta_n - \lambda) = 0,$$

следовательно,

$$\lambda_i = -\beta_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Так как $\beta_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, то все $\lambda_i < 0$, $i = \overline{1, n}$, следовательно, положение равновесия d системы (4.1), удовлетворяющее условиям (4.9), (4.10), асимптотически устойчиво.

Построим для этой непрерывной модели соответствующую дискретную модель с шагом дискретизации $\Delta t = T q^{-1}$.

Дискретная задача оптимального управления состоит в минимизации функции

$$I(\omega) = \Delta t \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\omega_i^k)^2 + \sum_{i=1}^n M_i (x_i^q - A_i)^2. \quad (4.11)$$

Состояние системы на $k+1$ шаге списывается рекуррентными соотношениями вида

$$\begin{aligned} x_i^{k+1} &= x_i^k + \Delta t (-\beta_i x_i^k + k_i \operatorname{arctg}(\omega_{i-1}^k \cdot x_{i-1}^k)), \\ i &= \overline{1, n}, \quad k = \overline{0, q-1}, \\ x_i^0 &= a_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Запишем функцию Лагранжа:

$$L(x, \omega, p, \lambda_0) = \lambda_0 \Delta t \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\omega_i^k)^2 + \lambda_0 \sum_{i=1}^n M_i (x_i^q - A_i)^2 + \quad (4.13)$$

$$+ \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{i=1}^n p_i^{k+1} \cdot (x_i^{k+1} - x_i^k - \Delta t (-\beta_i x_i^k + k_i \operatorname{arctg}(\omega_{i-1}^k \cdot x_{i-1}^k)))$$

и необходимые условия оптимальности:

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_l^k} = 2\lambda_0 \Delta t \alpha_l \omega_l^k - p_{l+1}^{k+1} \Delta t k_{l+1} \frac{x_l^k}{1 + (\omega_l^k x_l^k)^2} = 0, \quad (4.14)$$

$$l = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, q-1};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_l^k} &= p_l^k - p_l^{k+1} + \Delta t \beta_l p_l^{k+1} - p_{l+1}^{k+1} \Delta t k_{l+1} \frac{\omega_l^k}{1 + (\omega_l^k x_l^k)^2} = \\ &= p_l^k - p_l^{k+1} (1 - \Delta t \beta_l) - p_{l+1}^{k+1} \Delta t k_{l+1} \frac{\omega_l^k}{1 + (\omega_l^k x_l^k)^2} = 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$l = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{1, q-1};$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n^k} = p_n^k - p_n^{k+1} (1 - \Delta t \beta_n) = 0, \quad k = \overline{1, q-1}; \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_l^q} = 2\lambda_0 M_l (x_l^q - A_l) + p_l^q = 0, \quad l = \overline{1, n}. \quad (4.17)$$

Таким образом, сопряжённые векторы определяются соотношениями

$$p_l^k = p_l^{k+1} (1 - \Delta t \beta_l) + p_{l+1}^{k+1} \Delta t k_{l+1} \frac{\omega_l^k}{1 + (\omega_l^k x_l^k)^2}, \quad (4.18)$$

$$l = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{1, q-1};$$

$$p_n^k = p_n^{k+1} (1 - \Delta t \beta_n), \quad k = \overline{1, q-1}; \quad (4.19)$$

$$p_l^q = -2\lambda_0 M_l (x_l^q - A_l), \quad l = \overline{1, n}; \quad (4.20)$$

$$p_l^k = 0, \quad k > q, \quad l = \overline{1, n}.$$

Легко убедиться, что если $\Delta t \rightarrow 0$, то эти соотношения переходят в дифференциальные уравнения для сопряжённых функций (4.7), (4.8).

Алгоритм построения приближённого оптимального решения (метод градиентного спуска с дроблением шага)

1. Зададим произвольный набор векторов:

$$(\omega^k)^{(0)} = \{\omega_i^k\}^{(0)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, q-1},$$

здесь индекс в скобках означает номер итерации, в данной случае — нулевой.

2. Используя начальные значения $x_i^0 = a_i$, $i = \overline{1, n}$, и набор $(\omega^k)^{(0)}$, вычислим x_i^k , $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, q}$, по формуле

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \Delta t (-\beta_i x_i^k + k_i \operatorname{arctg}(\omega_{i-1}^k, x_{i-1}^k)), \\ i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{0, q-1}. \quad (4.21)$$

В результате получим набор векторов x^1, \dots, x^q , соответствующий $(\omega^k)^{(0)}$, который обозначим $(x^k)^{(0)}$.

3. Найдем значение функции (4.11), используя $(x^k)^{(0)}$ и $(\omega^k)^{(0)}$, и обозначим эту величину $I^{(0)}$. Здесь верхний индекс в скобках соответствует номеру итерации.

4. Построим сопряженные векторы по формулам (4.7), (4.8). Вычисление идет начиная с индекса q и кончая индексом 1.

5. Определим коэффициенты ω_i^k , $i = \overline{1, n-1}$, $k = \overline{0, q-1}$, соответствующие первой итерации $(\omega^k)^{(1)} = \{\omega_i^k\}^{(1)}$, по формуле (метод градиентного спуска с дроблением шага)

$$(\omega_i^k)^{(l+1)} = (\omega_i^k)^{(l)} - \alpha^{(l)} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_i^k} \right)^{(l)},$$

где $\alpha^{(l)} > 0$ — величина шага градиентного спуска.

С полученными новыми значениями весовых коэффициентов $(\omega^k)^{(1)}$ переходим ко второму шагу.

6. Аналогично, согласно (4.21), строим $(x^k)^{(1)}$. Найдём значение минимизируемой функции (4.11), используя $(x^k)^{(1)}$ и $(\omega^k)^{(1)}$, и обозначим эту величину $I^{(1)}$. Вычислим приращение $\Delta I^{(1)} = I^{(0)} - I^{(1)}$.

7. Если $\Delta I^{(1)} > 0$, то заменяем на втором шаге $(\omega^k)^{(0)}$ на $(\omega^k)^{(1)}$; если $\Delta I^{(1)} \leq 0$, то уменьшаем шаг градиентного спуска $\alpha^{(l)}$ в два раза и повторяем процесс.

8. Вычисления продолжаем до тех пор, пока $\Delta I^{(l)} < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданная точность.

Если разбиение шага $\alpha^{(l)}$ не позволяет уменьшить минимизирующую функцию, то уменьшаем Δt или переходим к новому алгоритму.

Алгоритм построения приближённого оптимального решения (метод пристрелки)

1. Задаём начальные условия $x_i(0) = a_i$, $i = \overline{1, n}$, и произвольный набор векторов $(\omega)^{(0)}$.

2. Выбираем недостающие начальные условия

$$p_i(0) := s^i, \quad i = \overline{1, n}.$$

3. Решаем задачу Коши — систему $2n$ дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + k_i \operatorname{arctg}(\omega_{i-1}(t, x, p) \cdot x_{i-1}(t)), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\dot{p}_i(t) = \beta_i p_i(t) - k_{i+1} p_{i+1}(t) \frac{\omega_i(t, x, p)}{1 + (\omega_i(t, x, p) x_i(t))^2}, \quad i = \overline{1, n},$$

с начальными условиями $x_i(0) = a_i, p_i(0) := s^i, i = \overline{1, n}$. В результате получим $x_i(t, s), p_i(t, s), t \in [0, T], i = \overline{1, n}$.

4. Решаем задачу минимизации функции

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \sum_{i=1}^n (x_i(T, s) - A_i)^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^n (p_i(T, s) + 2\lambda_0 M_i (x_i(T, s) - A_i))^2 \longrightarrow \inf \end{aligned}$$

градиентным методом.

Последовательность $\{s^{(k)}\}$ строится по правилу

$$(s^i)^{(k+1)} = (s^i)^{(k)} - \alpha^{(k)} \left(\frac{\partial \Phi(s)}{\partial s^i} \right)^{(k)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Условие выхода из итерационного цикла —

$$\Phi(s^{(k+1)}) \leq \Phi(s^{(k)})$$

или

$$\|s^{(k+1)} - s^{(k)}\| < \varepsilon.$$

В результате имеем окрестность начальных условий $[s^i], i = \overline{1, n}$.

5. В полученной окрестности применим метод Ньютона для уточнения решения:

$$F(s) = 0,$$

где

$$F(s) = \begin{pmatrix} p_1^q(s) + 2\lambda_0 M_1 (x_1^q(s) - A_1) \\ p_2^q(s) + 2\lambda_0 M_2 (x_2^q(s) - A_2) \\ \vdots \\ p_n^q(s) + 2\lambda_0 M_n (x_n^q(s) - A_n) \end{pmatrix}.$$

Последовательность $\{s^{(k)}\}$ строится по правилу

$$(s)^{(k+1)} = (s)^{(k)} - \left(\frac{\partial F(s^{(k)})}{\partial s_l} \right)^{-1} \cdot F(s^{(k)}),$$

где $l = \overline{1, n}$, k — номер итерации.

$$\left(\frac{\partial F(s^{(k)})}{\partial s_l} \right)_{l=\overline{1, n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial s_n} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Матрица $\left(\frac{\partial F}{\partial s_l} \right)_{l=\overline{1, n}}$ аппроксимируется матрицей конечных разностей

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta F_1}{\Delta s_1} & \cdots & \frac{\Delta F_1}{\Delta s_n} \\ \frac{\Delta F_2}{\Delta s_1} & \cdots & \frac{\Delta F_2}{\Delta s_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\Delta F_n}{\Delta s_1} & \cdots & \frac{\Delta F_n}{\Delta s_n} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

6. Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока не выполним условие $\|s^{(k+1)} - s^{(k)}\| < \varepsilon$.

7. Используя найденное $s^{(k)}$, находим фазовый вектор $x(t)$, со-пряжённый вектор $p(t)$ (x_i^k, p_i^k , где $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{0, q-1}$), управление $\omega(t)$.

8. Находим значение функционала $J(\omega)$.

2. Если $f_i(y) = k_i y$, $i = \overline{1, n}$, то краевая задача принципа максимума Понтрягина имеет вид

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + k_i \bar{\omega}_{i-1}(t) x_{i-1}(t), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n},$$

$$x_i(0) = a_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\dot{p}_i(t) = \beta_i p_i(t) - k_{i+1} p_{i+1}(t) \bar{\omega}_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

$$p_i(T) = -2\lambda_0 M_i(x_i(T) - A_i), \quad i = \overline{1, n},$$

где $\bar{\omega}_i(t)$ определены согласно принципу максимума. Нерегулярного решения, соответствующего $\lambda_0 = 0$, не существует, т. к. в этом

случае $p(t) \equiv 0$. В регулярном случае ($\lambda_0 = 1$) оптимальные значения весовых коэффициентов

$$\bar{w}_i(t) = k_{i+1} p_{i+1}(t) \frac{x_i}{2\alpha_i}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Для случая $\alpha_i = 0$ оптимальных значений весовых коэффициентов не существует.

Набор сопряжённых векторов $p_l^k, l = \overline{1, n}, k = \overline{1, q}$:

$$p_l^k = p_l^{k+1} (1 - \Delta t \beta_l) + p_{l+1}^{k+1} \Delta t k_{l+1} \omega_l^k, \quad l = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{1, q-1};$$

$$p_n^k = p_n^{k+1} (1 - \Delta t \beta_n), \quad k = \overline{1, q-1};$$

$$p_l^q = -2\lambda_0 M_l (x_l^q - A_l), \quad l = \overline{1, n};$$

$$p_l^k = 0, \quad k > q, \quad l = \overline{1, n}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_l^k} = 2\lambda_0 \Delta t \alpha_l \omega_l^k - p_{l+1}^{k+1} \Delta t k_{l+1} x_l^k, \quad l = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, q-1}.$$

Численные расчеты проведены при следующих значениях параметров:

$$n = 5, \quad T = 11, \quad q = 100, \quad M_i = 100,$$

$$\alpha_i = 1, \quad k_i = 1, \quad \beta_i = 11,$$

$$a_i = 1, \quad A_i = 0, 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

В этом случае функцию Понтрягина H , полученную экспериментально, можно считать с точностью $\frac{\Delta H}{H} \approx 3\%$ константой, т.е. $H \approx \text{const}$. Это говорит о том, что для данной задачи было найдено действительно оптимальное управление.

За свойства получаемого оптимального решения отвечает конструкция минимизируемого функционала.

Параметр задачи $\beta_i, i = \overline{1, n}$, определяет величину начального возбуждения i -го нейрона. Параметр $k_i, i = \overline{1, n}$, характеризует величину воздействия $i-1$ -го нейрона на i -й. В данной задаче если полагать k_i достаточно малым, то возбуждённый i -й нейрон при слабом воздействии предыдущего $i-1$ -го нейрона будет стремиться к своему положению покоя. И наоборот, если k_i велико, то сильное воздействие $i-1$ -го нейрона на i -й не будет давать последнему прийти в состояние покоя.

3. Рассмотрим последовательную нейронную сеть, в которой нейроны связаны в кольцо, т.е. i -й нейрон действует на $i+1$ -й нейрон и последний n -й нейрон влияет на первый.

Динамика этой нейронной сети описывается следующей нелинейной системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\beta_1 x_1(t) + k_1 \operatorname{arctg}(\omega_n(t) \cdot x_n(t)), \\ \dot{x}_i(t) &= -\beta_i x_i(t) + k_i \operatorname{arctg}(\omega_{i-1}(t) \cdot x_{i-1}(t)), \\ i &= \overline{2, n}, \quad t \in [0, T],\end{aligned}\tag{4.22}$$

с начальными условиями

$$x_i(0) = a_i, \quad i = \overline{1, n}.\tag{4.23}$$

Задача оптимального выбора весовых коэффициентов состоит в минимизации функционала

$$J(\omega) = \int_0^T \sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i^2(t) dt + \sum_{i=1}^n M_i (x_i(T) - A_i)^2\tag{4.24}$$

при ограничениях (4.22), (4.23), где α_i , M_i , A_i , β_i , k_i — заданные неотрицательные параметры модели.

Построим функцию Понтрягина для данной задачи:

$$\begin{aligned}H(t, x, \omega, p(t), \lambda_0) &= -\lambda_0 \sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i^2 + \\ &+ p_1(t)(k_1 \operatorname{arctg}(\omega_n \cdot x_n) - \beta_1 x_1) + \\ &+ \sum_{i=2}^n p_i(t)(k_i \operatorname{arctg}(\omega_{i-1} \cdot x_{i-1}) - \beta_i x_i).\end{aligned}\tag{4.25}$$

Оптимальные значения весовых коэффициентов $\bar{\omega}_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, удов-

петворяют принципу максимума:

$$\begin{aligned}
 & -\lambda_0 \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\omega}_i^2(t) + p_1(t) k_1 \operatorname{arctg}(\bar{\omega}_n(t) \cdot \bar{x}_n(t)) + \\
 & + \sum_{i=2}^n p_i(t) k_i \operatorname{arctg}(\bar{\omega}_{i-1}(t) \cdot \bar{x}_{i-1}(t)) = \\
 & = \max_{\omega_i} \left[-\lambda_0 \sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i^2 + p_1(t) k_1 \operatorname{arctg}(\omega_n \cdot \bar{x}_n(t)) + \right. \\
 & \left. + \sum_{i=2}^n p_i(t) k_i \operatorname{arctg}(\omega_{i-1} \cdot \bar{x}_{i-1}(t)) \right]. \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

Нерегулярного решения, соответствующего $\lambda_0 = 0$, не существует, т. к. в этом случае $p(t) \equiv 0$.

В регулярном случае ($\lambda_0 = 1$) оптимальные значения весовых коэффициентов имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega}_i(t) &= \left(\frac{k_{i+1} p_{i+1}(t)}{4\alpha_i \bar{x}_i(t)} + \sqrt{D_1} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{k_{i+1} p_{i+1}(t)}{4\alpha_i \bar{x}_i(t)} - \sqrt{D_1} \right)^{\frac{1}{3}}, \\
 i &= \overline{1, n-1}, \\
 \bar{\omega}_n(t) &= \left(\frac{k_1 p_1(t)}{4\alpha_n \bar{x}_n(t)} + \sqrt{D_2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{k_1 p_1(t)}{4\alpha_n \bar{x}_n(t)} - \sqrt{D_2} \right)^{\frac{1}{3}},
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

где

$$\begin{aligned}
 D_1 \left(\frac{1}{3\bar{x}_i^2(t)} \right)^3 + \left(\frac{k_{i+1} p_{i+1}(t)}{4\alpha_i \bar{x}_i(t)} \right)^2 &> 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\
 D_2 \left(\frac{1}{3\bar{x}_n^2(t)} \right)^3 + \left(\frac{k_1 p_1(t)}{4\alpha_n \bar{x}_n(t)} \right)^2 &> 0.
 \end{aligned}$$

Если $\alpha_i = 0$, то для определения оптимального управления необходимо найти максимум выражения $p_{i+1}(t) \operatorname{arctg}(\omega_i \cdot \bar{x}_i(t))$ по ω_i , который не достигается, если $\bar{x}_i(t) \neq 0$.

Краевая задача принципа максимума Понтрягина включает в себя

$2n$ дифференциальных уравнений и $2n$ граничных условий:

$$\dot{x}_1(t) = -\beta_1 x_1(t) + k_1 \operatorname{arctg}(\bar{\omega}_n(t) \cdot x_n(t)), \quad t \in [0, T],$$

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + k_i \operatorname{arctg}(\bar{\omega}_{i-1}(t) \cdot x_{i-1}(t)), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{2, n},$$

$$x_i(0) = a_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\dot{p}_i(t) = \beta_i p_i(t) - k_{i+1} p_{i+1}(t) \frac{\bar{\omega}_i(t)}{1 + (\bar{\omega}_i(t) \bar{x}_i(t))^2}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\dot{p}_n(t) = \beta_n p_n(t) - k_1 p_1(t) \frac{\bar{\omega}_n(t)}{1 + (\bar{\omega}_n(t) \bar{x}_n(t))^2},$$

$$p_i(T) = -2\lambda_0 M_i(x_i(T) - A_i), \quad i = \overline{1, n},$$

где $\bar{\omega}_i(t)$ определены согласно (4.27).

Набор сопряжённых векторов p_l^k , $l = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, q}$ определяется следующими выражениями:

$$p_l^k = p_l^{k+1} (1 - \Delta t \beta_l) + p_{l+1}^{k+1} \Delta t k_{l+1} \frac{\omega_l^k}{1 + (\omega_l^k x_l^k)^2}, l = \overline{1, n-1}, k = \overline{1, q-1};$$

$$p_n^k = p_n^{k+1} (1 - \Delta t \beta_n) + p_1^{k+1} \Delta t k_1 \frac{\omega_n^k}{1 + (\omega_n^k x_n^k)^2}, k = \overline{1, q-1};$$

$$p_l^q = -2\lambda_0 M_l(x_l^q - A_l), l = \overline{1, n};$$

$$p_l^k = 0, k > q, l = \overline{1, n};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_l^k} = 2\lambda_0 \Delta t \alpha_l \omega_l^k - p_{l+1}^{k+1} \Delta t k_{l+1} \frac{x_l^k}{1 + (\omega_l^k x_l^k)^2}, l = \overline{1, n-1}, k = \overline{0, q-1};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_n^k} = 2\lambda_0 \Delta t \alpha_n \omega_n^k - p_1^{k+1} \Delta t k_1 \frac{x_n^k}{1 + (\omega_n^k x_n^k)^2}, k = \overline{0, q-1}.$$

Список литературы к главе 5

1. Андреева Е. А., Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992.
2. Андреева Е. А., Евтушенко Ю. Г. Численные методы решения задач оптимального управления для систем, описываемых интегродифференциальными уравнениями типа Фредгольма // Модели и методы оптимизации. 1989. N 1. С. 4–13.
3. Андреева Е. А. Оптимизация искусственной нейронной сети // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1996. С. 7–12.

4. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
5. Интеллектуальные процессы и их моделирование: Сб./ Под ред. Е. П. Велихова. М.: Наука, 1987. С. 397.
6. Кашенко С. А., Майоров В. В. Об одном дифференциально-разностном уравнении, моделирующем импульсную активность нейрона // Математическое моделирование. 1993. Т. 5, N 12. С. 13–25.
7. Кашенко С. А., Майоров В. В. Волновые структуры в клеточной сети из формальных нейронов Хатчинсона // Радиотехника и электроника. 1995. Вып. 6. С. 925–936.
8. Мышикис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
9. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Ю. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
10. Эндрю А. Искусственный интеллект. М.: Мир, 1985.
11. Albertini F., Sontag E. For Neural Networks, Function Determines Form // Neural Networks. 1993. V. 6. P. 975–990.

ГЛАВА 6. РАЗРЫВНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В последние годы в связи с обширными приложениями возрастает интерес к дифференциальным уравнениям с разрывной правой частью, позволяющим описывать процессы, скорость которых меняется скачкообразно. Итоги качественного анализа разрывных систем дифференциальных уравнений приведены в монографии А. Ф. Филиппова [13]. Необходимые и достаточные условия оптимальности для разрывных задач оптимального управления даны в работах [1, 2, 7, 8, 11, 12].

Исследование негладких задач вариационного исчисления и оптимального управления связано с изучением необходимых условий оптимальности в точках возможного разрыва производной функции состояния и условий скачка сопряженной функции в случае, если решение задачи существует в классе непрерывных функций. Другое важное направление исследований – существование разрывных экстремалей и построение минимизирующих последовательностей, сходящихся к разрывным функциям состояния. Мало изученными являются достаточные условия оптимальности, особые оптимальные процессы, краевая задача принципа максимума для разрывной системы. В основном в приложениях рассматриваются случаи протыкания траекторией поверхности переключения, не учитывается возможность касания и залегания траектории на поверхности переключения, возникновение скользящего режима и случаи протыкания траекторией нескольких поверхностей переключения.

Численные методы построения оптимального решения для разрывных систем развиты пока слабо. Отдельные задачи, решенные с помощью градиентных методов, описаны в [4, 5, 6, 9, 10].

Далее будут приведены типичные задачи оптимального управления с разрывной правой частью, исследование которых представляет теоретический и практический интерес.

§1. Примеры разрывных задач оптимального управления

Модель соревнования по бегу

На соревнованиях по бегу, плаванию, беговым конькам, велосипедным гонкам результаты спортсменов определяются их возможностями развивать максимальное усилие, запасами энергии, правильным дыханием. Рассмотрим соревнование по беговым конькам. Целью спортсмена является преодоление заданной дистанции за минимальное время. Для этого он должен оптимально использовать свою силу и энергию во время движения. Будем описывать динамику спортсмена как одномерное движение, где $x(t)$ и $v(t)$ обозначают положение центра масс и скорость центра масс.

Пусть M – масса спортсмена, F – сила, развиваемая спортсменом, R – сила сопротивления воздуха. Можно считать, что эти силы пропорциональны массе спортсмена, поэтому уравнение движения Ньютона имеет вид

$$M\ddot{v} = F - R(x, v), \quad (1.1)$$

или, поделив уравнение (1.1) на массу M , получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{v} = f - r(x, v), \quad (1.2)$$

где f – сила, развивающая 1 кг веса тела, r – сопротивление движению на 1 кг веса, $v(t)$ – скорость центра масс. Далее в модели все величины будут отнесены к 1 кг веса бегуна. При этом закон Ньютона имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = f - r^\ell(x, v) - c^\ell v^2, \end{cases} \quad (1.3)$$

здесь f – сила бегуна, приходящаяся на единицу его массы, усредненная за время одного шага, $r^\ell(x, v)$, $\ell=1,2$ – внутренняя диссипация энергии при движении, $c^\ell v^2$ – сопротивление воздуха. В рассматриваемой модели сила сопротивления $r^\ell(x, v)$ может изменяться скачком (например, при переходе с ровной местности на подъем или при ухудшении погодных условий), поэтому система (1.3) представляет собой систему дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Уравнение для анаэробной энергии $E(t)$ является следствием закона сохранения энергии и имеет вид

$$\dot{E} = -\frac{fv}{\eta} + \sigma(t) + d_1(E). \quad (1.4)$$

Изменение аэробной энергии во времени определяется процессами, происходящими в печени и мышцах в результате окисления жиров и глюкозы:

$$\dot{G} = -\sigma(t) - \alpha^\ell \left(\frac{fv}{\eta} - \sigma(t) \right) + d_2(G), \quad (1.5)$$

где $\sigma(t) = \sigma_0(E, G) e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - e^{-\frac{t}{30}} \right)$, $\sigma_0(E, G)$, $d_1(E)$, $d_2(G)$ – заданные непрерывные функции [6].

Параметр α^ℓ , $\ell=1,2$, также может изменяться скачком при достижении некоторого заданного уровня $E_{00}=E(t)$. Механическая мощность спортсмена ограничена:

$$\frac{fv}{\eta} \leq P(E) + \sigma(t), \text{ где } P(E) = \min(P_0, E\rho^{-1}). \quad (1.6)$$

Начальная скорость $v(0)$, положение $x(0)$, энергия $E(0)$, $G(0)$ заданы, причем имеют место ограничения $0 \leq E(t) \leq E(0)$, $0 \leq G(t) \leq G(0)$.

Задача оптимального управления состоит в определении такого управления f , удовлетворяющего ограничению $0 \leq f \leq F$, которое позволяет пройти заданную дистанцию $x(T)$ за минимальное время. Таким образом, модель соревнования по бегу относится к классу разрывных задач оптимального управления. Постановка и анализ этой задачи без учёта разрыва функции $r(x, v)$ проводится в работах [6, 10, 16, 17, 21].

Модель процесса распространения заболевания в нескольких социальных группах

Процесс распространения заболевания в n социальных группах более подробно описан в работах [6, 9, 18, 19] и представляет собой систему $2n$ дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -x_i(t) \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_{ij}^\ell y_j(t)}{y_j(t) + x_j(t)} - v_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T], \\ \dot{y}_i(t) &= x_i(t) \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_{ij}^\ell y_j(t)}{y_j(t) + x_j(t)} - \gamma_i y_i(t) - \\ &\quad - y_i(t) u_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T], \\ x_i(0) &= x_{i0}, \quad y_i(0) = y_{i0}, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $x_i(t)$ – численность населения, восприимчивого к заболеванию в i -й социальной группе, $y_i(t)$ – число инфицированных людей в i -й социальной группе, y_{i0} , x_{i0} – численность инфицированного населения и населения, восприимчивого к заболеванию в начале распространения заболевания, $\dot{y}_i(t)$ – скорость роста числа инфицированных людей, n – число социальных групп, $\gamma_i y_i(t)$ – количество людей, восстановивших свое здоровье без воздействия внешних средств карантина, вакцины и т.д. в момент врем-

времени t в i -й социальной группе, γ_i^{-1} – коэффициент, характеризующий время естественного выздоровления; γ_i^{-1} может изменяться от 10 дней (ангина, простуда) до нескольких недель (холера) и др., $u_i(t)y_i(t)$ – количество людей, находящихся на карантине в момент времени t , $u_i(t)$ – функция, характеризующая интенсивность введения карантина в i -й социальной группе.

Модель предполагает, что заболевание передается в случае, когда встречаются инфицированный и здоровый человек, коэффициент a_{ij}^ℓ характеризует частоту встреч здоровых людей группы i с инфицированными людьми из группы j .

$A^\ell = \{a_{ij}^\ell\}_{i,j=1,n}$, $\ell=1,2$ – матрица, которая состоит из положительных (неотрицательных) элементов, и характеризует частоту встреч людей, принадлежащих к различным социальным группам. Предположим далее, что частота встреч, характеризуемая матрицей A , изменяется скачком, если в группе i число инфицированных становится больше заданного значения N ($x_i \geq N$) или сумма $\sum_{i=1}^n x_i > N$. В этом случае система (1.7) является системой дифференциальных уравнений с разрывной правой частью на поверхности переключения $\sum_{i=1}^n x_i - N = 0$.

В предложенной модели процесс распространения заболевания управляет с помощью установления карантина и введения вакцины. Карантин осуществляется не сразу, а при условии, что $y_i(t) > M_i$, $i=1,n$, где M_i – заданное максимальное количество инфицированных людей в i -й группе. Затраты на карантин и вакцинацию ограничены:

$$\begin{aligned} 0 \leq u_i(t) \leq B_i, i=1,n, \\ 0 \leq v_i \leq A_i, i=1,n, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где B_i – величина, характеризующая часть инфицированных людей, находящихся на карантине. По своему физическому смыслу эта величина не превосходит единицы. A_i – максимальная скорость введения вакцины в единицу времени.

Целью управления является минимизация количества инфицированных людей, людей, находящихся на карантине, затрат на карантин и введение вакцины во всех социальных группах. Стоимость эпидемии выражается функционалом

$$J(u, v) = \int_0^T (y_i(t) + c_i u_i(t) y_i(t) + d_i v_i(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (1.9)$$

здесь T – фиксированное время процесса, c_i – стоимость изоляции одного человека в i -й группе, d_i – стоимость вакцины в i -й группе.

Функции состояния $x_i(t)$, $y_i(t)$ – абсолютно непрерывны на $[0, T]$; функции управления $u_i(t)$ – кусочно-непрерывны. Отметим, что в рассматриваемой задаче оптимального управления левый конец фиксирован, а правый – свободен. Параметры задачи подбираются так, что $x_i(t), y_i(t) > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Задача оптимального управления состоит в минимизации функционала (1.9) при ограничениях (1.7), (1.8).

Теоретический и практический интерес представляет исследование оптимального решения задачи (1.7) – (1.9) в зависимости от матриц $A^\ell = \left\{ a_{ij}^\ell \right\}_{i,j=\overline{1,n}}$, $\ell = 1, 2$, времени протекания процесса T , возможности возникновения скользящих режимов на поверхности переключения. Большое значение имеет разработка численных методов построения оптимального решения.

Модель нейронной сети

Модели нейронных систем приведены в работах [5, 20].

Рассмотрим нейронную сеть, состоящую из n нейронов. Пусть состояние нейронной сети характеризуется абсолютно непрерывной вектор-функцией $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ и изменяется согласно системе дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, где величина запаздывания $h_j > 0$ равна времени передачи сигнала j -м нейроном, а функции f_i , $i = \overline{1, n}$, характеризуют топологию нейронной сети:

$$\dot{x}_i = -\beta_i^\ell x_i + f_i^\ell \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij}(t) x_j(t-h_j) \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.10)$$

$$x_i(t) = \phi_i(t), \quad t \in [-h, 0], \quad i = \overline{1, n}, \quad \ell = 1, 2. \quad (1.11)$$

Функции $\phi_i(t)$ – заданные непрерывные функции, $h = \max_{j=1, n} h_j$. Весовые ко-

эффициенты $\omega_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$, определяющие влияние j -го нейрона на i -й, выбираются из условия минимума функционала $I(w(\cdot))$, в котором функция $E(x, y, \omega)$ выбирается в зависимости от программы обучения. Это может быть функция, характеризующая общую энергию нейронной сети, корреляцию с заданным состоянием системы и т.д.:

$$I(w(\cdot)) = \int_0^T E(x(t), x(t-\tau), w(t)) dt + \Phi(x(T)), \quad (1.12)$$

где $w(t) = \{\omega_{ij}(t)\}, i, j = \overline{1, n}$.

При достижении нейронной сетью некоторого заданного состояния, которое характеризуется функцией $S(t, x)$, свойства нейронной сети могут изменяться. В модели нейронной сети это выразится в том, что изменятся коэффициенты $\beta_i^\ell, i = \overline{1, n}$, и функции $f_i^\ell, i = \overline{1, n}$, описывающие динамику сети, а именно $\ell = 1$, если $S(t, x) < 0$, $\ell = 2$, если $S(t, x) \geq 0$. Таким образом, система дифференциальных уравнений (1.10) представляет собой систему с разрывной правой частью. Весовые коэффициенты $\omega_{ij}(t)$ выполняют роль функции управления. В общем случае на них могут быть наложены ограничения, например $|\omega_{ij}(t)| \leq A_{ij}(t), i, j = \overline{1, n}$, где A_{ij} – заданные положительные функции.

§ 2. Необходимые и достаточные условия оптимальности в разрывных задачах оптимального управления

Постановка задачи, основные предположения

Математическая модель процесса управления разрывной системой представляется системой дифференциальных уравнений с разрывной правой частью

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(t, x(t), u(t)), & S(t, x) < 0, \\ f_2(t, x(t), u(t)), & S(t, x) \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

и начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad (2.2)$$

где $x \in R^n, u \in R^r$ – векторы состояния и управления.

Правая часть системы (2.1) имеет разрывы на поверхности, задаваемой уравнением $S(t, x) = 0$, где $S(t, x)$ – непрерывно дифференцируемая по совокупности аргументов скалярная функция.

Предположим, что $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ является абсолютно непрерывной функцией на $[0, T] = \Gamma$, удовлетворяющей фазовым ограничениям

$$x(t) \in X(t) \subset R^n \quad (2.3)$$

и граничным условиям

$$x(T) \in X_T \subset X(T). \quad (2.4)$$

Измеримое управление $u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$ принимает значения из заданного множества $U(t)$, $t \in \Gamma$:

$$u(t) \in U(t) \subset R^r, \text{ п.в. } t \in \Gamma. \quad (2.5)$$

Вектор-функции $f_i(t, x, u): \Gamma \times R^n \times R^r \rightarrow R^n$, $i=1,2$, измеримы по t , непрерывны по u и непрерывно дифференцируемы по x . Выберем произвольное управление $u(t)$, $t \in \Gamma$, удовлетворяющее условию (2.5), и подставим его в систему (2.1). Интегрируя систему (2.1) с начальными условиями (2.2), найдем траекторию $x(t)$, $t \in \Gamma$, соответствующую выбранному управлению $u(t)$. Пару функций $w=(x(t), u(t))$ назовем допустимым процессом, если она удовлетворяет условиям (2.1) - (2.5). Множество допустимых процессов обозначим W . Предположим, что $W \neq 0$. Последовательность допустимых процессов $w_k \in W$, $k=1,2,\dots$ является минимизирующей, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \inf_{u \in U(\Gamma)} J(u).$$

Задача оптимального управления системой (2.1) - (2.5) заключается в построении такого допустимого процесса (или минимизирующей последовательности), который доставляет абсолютный минимум функционалу $J(u)$ на множестве всех допустимых процессов W .

$$J(u) = \int_0^T F_1(t, x(t), u(t)) dt + F_0(x(T)), \quad (2.6)$$

здесь функции $F_1(t, x, u): \Gamma \times R^n \times R^r \rightarrow R$, $i=1,2$, $F_0(x): R^n \rightarrow R$ непрерывно дифференцируемы по x , непрерывны по u . Предположим дополнительно, что для любого $w \in W$ функционал $J(u)$ конечен.

В разрывной задаче управления возможны следующие случаи протекания процесса: 1) траектория $x(t)$ протыкает поверхность $S(t,x)=0$ при $t=t$, если функция $S(t)=S(t,x(t))$ в любой достаточно малой окрестности точки t меняет знак; 2) имеет правостороннее и левостороннее касание с поверхностью в момент t , если соответственно $\dot{S}(t-0)=0$ или $\dot{S}(t+0)=0$; 3) залегает на поверхности $S(t,x)=0$, если на некотором интервале $t \in [t_1, t_2]$, $S(t, x(t))=0$; 4) может несколько раз протыкать поверхность переключения, залегать на ней или отражаться от поверхности переключения.

Разрывные задачи могут возникать, например, в следующих случаях.

1. Пусть требуется найти минимум недифференцируемого интеграла

$$J(u) = \int_0^T |f_0(t, x(t))| dt.$$

Введем новую функцию

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t |f_0(\tau, x(\tau))| d\tau,$$

удовлетворяющую начальному условию $x_{n+1}(0) = 0$ и дифференциальному уравнению с разрывной правой частью

$$\dot{x}_{n+1} = \begin{cases} -f_0(t, x(t)), & f_0(t, x) < 0, \\ f_0(t, x(t)), & f_0(t, x) \geq 0. \end{cases}$$

В этом случае минимизируемый функционал может быть представлен в следующем виде: $J(u) = x_{n+1}(T)$.

2. Задачи с фазовыми ограничениями могут рассматриваться как частный случай разрывных задач.

3. Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J(u) = \sup_{t \in [0, T]} \Phi(t, x(t)).$$

Введем новую функцию

$$x_{n+1}(t) = \sup_{\tau \in [0, t]} \Phi(\tau, x(\tau)).$$

Эта функция является решением разрывного дифференциального уравнения с двумя поверхностями переключения:

$$\Omega_1(t, x, u) = \Phi_t(t, x) + (\Phi_x(t, \dot{x}), f(t, x, u)) = 0,$$

$$\Omega_2(t, x, u) = \Phi(t, x) - x_{n+1} = 0,$$

где допустимый процесс удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u),$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \begin{cases} \frac{d\Phi(t)}{dt}, & \frac{d\Phi(t)}{dt} > 0, \quad x_{n+1} = \Phi(t, x) \\ 0, & \frac{d\Phi(t)}{dt} \leq 0, \quad x_{n+1} > \Phi(t, x) \end{cases}$$

где

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\partial \Phi(t, x(t))}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Phi(t, x(t))}{\partial x}, f(t, x(t), u(t)) \right).$$

Теорема о необходимых условиях оптимальности

Предположим, что $X(t)$ совпадает со всем пространством R^n или является открытым множеством при любом $t \in \Gamma$. Конечный момент времени T фиксирован, и выполнены все предположения, отмеченные в п. 1.

Не ограничивая общности, рассмотрим задачу минимизации терминального функционала, когда $F_1 \equiv 0$. Тогда задача оптимального управления имеет следующий вид:

$$J(u) = F_0(x(T)), \quad (2.7)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(t, x(t), u(t)), & S(t, x) < 0, \\ f_2(t, x(t), u(t)), & S(t, x) \geq 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.9)$$

$$u(t) \in U(t) \subset R^{\Gamma}, \text{ п. в. } t \in \Gamma, \quad (2.10)$$

$$x(T) \in X_T \subset R^n. \quad (2.11)$$

Обозначим задачу (2.7) - (2.11) через P , а минимальное значение функционала (2.7) на множестве допустимых процессов - $\inf(P)$.

Будем считать, что траектория один раз пересекает поверхность переключения.

Введем функцию Понтрягина:

$$H(t, x, u, p(t)) = \begin{cases} H_1(t, x, u, p_1(t)), & S(t, x) < 0, \\ H_2(t, x, u, p_2(t)), & S(t, x) \geq 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

где

$$p(t) = \begin{cases} p_1(t), & S(t, x) < 0, \\ p_2(t), & S(t, x) \geq 0, \end{cases}$$

$$H_i(t, x, u, p(t)) = (p_i(t), f_i(t, x, u)), \quad i=1,2,$$

сопряженные вектор-функции $p_1(t): [0, \tau] \rightarrow R^n, p_2(t): [\tau, T] \rightarrow R^n$ кусочно абсолютно непрерывны, τ - момент протыкания траекторией поверхности переключения, т.е. $S(\tau, x(\tau)) = 0$.

Сформулируем теорему о необходимых условиях оптимальности для случая протыкания поверхности траекторией.

ТЕОРЕМА 1. Пусть процесс $\bar{w} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t), \tau)$, где τ - точка переключения, является оптимальным. Тогда существуют не равные одновременно нулю функции $p_1(t), p_2(t), \lambda_0 \geq 0$, такие, что выполняются условия:

1) оптимальное управление $\bar{u}(t), t \in [0, T]$ во всех точках непрерывности доставляет максимум функции Понтрягина $H(t, \bar{x}(t), u, p(t)), u \in U(t)$;

$$H_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p_i(t)) = \max_{u \in U(t)} H_i(t, \bar{x}(t), u, p_i(t)), \quad i=1,2;$$

2) сопряженные вектор-функции удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p_i(t))}{\partial x}, \quad i=1,2; \quad (2.13)$$

3) если $X_T = R^n$, то выполняется условие трансверсальности

$$p_2(T) = -\frac{\partial \mathcal{F}_0(\bar{x}(T))}{\partial x}; \quad (2.14)$$

4) в точке пересечения траекторией поверхности переключения выполняется условие скачка сопряженной вектор-функции:

$$p_1(\tau-0) = p_2(\tau+0) + \lambda \frac{\partial S(\tau, \bar{x}(\tau))}{\partial x}, \quad S(\tau, \bar{x}(\tau)) = 0, \quad (2.15)$$

$$H_1(\tau-0) = H_2(\tau+0) - \lambda S_t(\tau, \bar{x}(\tau)), \quad (2.16)$$

$$\lambda = \frac{(f_2(\tau, x(\tau), u(\tau+0)) - f_1(\tau, x(\tau), u(\tau-0)), p_2(\tau))}{\frac{\partial S}{\partial t}(\tau) + \left(\frac{\partial S}{\partial x}(\tau), f_1(\tau, x(\tau), u(\tau-0)) \right)} \quad (2.17)$$

Теорема о достаточных условиях оптимальности

Рассмотрим задачу (2.7) - (2.11). Введем в рассмотрение следующие непрерывно дифференцируемые функции и множества:

$$\psi^i(t, x): G_i \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \quad (2.18)$$

где $G_i = T_i \times \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, $T_1 = [0, \tau]$, $T_2 = [\tau, T]$, τ - момент проникновения допустимой траекторией поверхности $S(t, x)$.

Введем следующие конструкции:

$$R_i(t, x, u) = \psi^i(t, x) + \left(\frac{\partial \psi^i(t, x)}{\partial x}, f_i(t, x, u) \right), \quad (2.19)$$

$$R(t, x, u) = \begin{cases} R_1(t, x, u), & t \in T_1, \\ R_2(t, x, u), & t \in T_2, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$L_\psi(\tau, x(\tau), x(T)) = F_0(x(T)) + \psi^2(T) + \psi^2(\tau) - \psi^1(\tau), \quad (2.21)$$

$$Q = \{x(t) \in C(\Gamma) : x(0) = x_0, x(t) \in X_T, S(\tau, x(\tau)) = 0\}. \quad (2.22)$$

Таким образом, Q представляет собой множество непрерывных по Γ функций, удовлетворяющих начальным и конечным условиям и пересекающих поверхность переключения в точке τ , здесь и далее, по определению, $\psi^i(t) = \psi^i(t, x(t))$, $i = 1, 2$.

Для любого допустимого процесса w и любых функций ψ^i в силу условий (2.19), (2.21) имеем

$$J(u) = - \int_0^T R(t, x(t), u(t)) dt + L_\psi(\tau, x(\tau), x(T)) - \psi^1(0). \quad (2.23)$$

Если $\bar{w} = (\bar{x}, \bar{u})$ - оптимальный процесс, а $w = (x, u)$ - произвольный допустимый процесс, то для любых функций $\psi^i(t)$, $i = 1, 2$ имеет место следующее неравенство:

$$J(u) - J(\bar{u}) = \int_0^T [R(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - R(t, x(t), u(t))] dt + \\ + L_\psi(\tau, x(\tau), x(T)) - L_\psi(\bar{\tau}, \bar{x}(\bar{\tau}), \bar{x}(T)) \geq 0. \quad (2.24)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции ψ^i , $i=1,2$ и последовательность допустимых процессов $w_k \in W$, $k=1,2,\dots$ удовлетворяют условиям:

$$1) \int_0^T R(t, x(t), u(t)) dt \leq 0 \quad \forall w \in W;$$

$$2) \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T R(t, x_k(t), u_k(t)) dt = 0;$$

$$3) \lim_{k \rightarrow \infty} L_\psi(\tau_k, x_k(\tau_k), x_k(T)) = \inf_Q L_\psi(\tau, x(\tau), x(T)) = \tilde{\Gamma}(\psi),$$

тогда последовательность процессов w_k , $k=1,2,\dots$ является минимизирующей в задаче (P).

Справедливость теоремы 2 вытекает из (2.20) и определения глобально оптимального процесса.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для выполнения условия 2 теоремы достаточно, чтобы последовательность $R_k(t) = R(t, x_k(t), u_k(t))$, $k=1,2,\dots$ была равномерно ограничена снизу для всех $k=1,2,\dots$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k(t) = 0$, $t \in \Gamma$. В

случае существования оптимального процесса это условие можно записать в следующем виде:

$$R(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0, \text{ п. в. } t \in \Gamma. \quad (2.25)$$

Условие 1, в частности, имеет место, если выполняется неравенство

$$R(t, x, u) \leq 0, \forall t \in \Gamma, x \in R^n, u \in U(t). \quad (2.26)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть функция $R(t, x, u)$ непрерывна по совокупности аргументов, а $U(t)$ - компактное подмножество в R^r . Тогда, вводя функцию $P(t, x) = \max_{u \in U(t)} R(t, x, u)$, можно записать неравенства (2.25),

(2.26) в форме $P(t, x) \leq 0$, $P(t, \bar{x}(t)) = 0$, $t \in \Gamma$. В этом случае для построения оптимальной траектории можно решать конечномерную задачу оптимизации при каждом фиксированном $t \in \Gamma: P(t, x) \rightarrow \sup, x \in R^n$, используя известный формализм Лагранжа, теорему Куна-Таккера и другие методы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Согласно условию 3 теоремы, функционал $L_\psi(\tau, x(\tau), x(T))$, зависящий от момента протыкания траекторией поверхности τ и значений функции $x(t)$ в точках τ и T , достигает минимума при значениях $\bar{\tau}, \bar{x}(\bar{\tau}), \bar{x}(T)$, соответствующих оптимальному решению. По-

этому для определения этих величин следует решать задачу условной оптимизации

$$L_\psi(\tau, x(\tau), x(T)) \rightarrow \inf,$$

$$x(T) \in X_T, S(\tau, x(\tau)) = 0, \tau \in \Gamma.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема 2 остается справедливой, если вместо минимизирующей последовательности речь идет о существовании оптимального процесса $\bar{W} = (\bar{x}, \bar{u})$, тогда при использовании теоремы следует положить, что $x_k = \bar{x}$, $u_k = \bar{u}$, $k = 1, 2, \dots$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Далее с целью упрощения записи используется обозначение $p(t) = p_1(t)$, если $t \in [0, \tau)$, $p(t) = p_2(t)$, если $t \in [\tau, T]$, где τ - точка переключения. Правое и левое значения функции $p(t)$ в точке τ обозначаются $p(\tau^+)$ и $p(\tau^-)$ соответственно и по определению $p(\tau^+) = \lim_{t \rightarrow \tau^+} p(t)$, $p(\tau^-) = \lim_{t \rightarrow \tau^-} p(t)$. Если $F_1(t, x, u) \neq 0$, то задача может быть све-

дена к задаче с терминальным функционалом с помощью введения новой функции $x^\circ(t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению с нулевым начальным условием $\dot{x}^\circ = F_1(t, x, u)$, $x^\circ(0) = 0$. В этом случае минимизируемый функционал представлен в виде

$$J(u) = x^\circ(T) + F_o(x(T)),$$

и, согласно теореме 4.1, параметр скачка определяется выражением

$$\tilde{\lambda} = \frac{[F_1(\tau, x(\tau), u(\tau-0)) - F_1(\tau, x(\tau), u(\tau+0))] + \lambda}{\frac{\partial S}{\partial t}(\tau) + \left(\frac{\partial S}{\partial x}(\tau), f_1(\tau, x(\tau), u(\tau-0)) \right)} + \lambda,$$

откуда следует, что если функционал F_1 не зависит от $u(\tau)$, то $\tilde{\lambda} = \lambda$.

§ 3. Вычисление параметра скачка сопряженной функции и функции Понтрягина

В этом параграфе определяется величина скачка сопряженной функции в точке пересечения траекторией поверхности переключения.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений и исследуем влияние начальных данных на решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \in [\alpha, t_1], \\ x(\alpha) = y. \end{cases} \quad (3.1)$$

Обозначим через $x(t, \alpha, y)$ решение задачи Коши (3.1).

Введем следующие матрицы:

$$\frac{\partial \hat{x}(t, \alpha, y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}^1(t, \alpha, y)}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \hat{x}^1(t, \alpha, y)}{\partial y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{x}^n(t, \alpha, y)}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \hat{x}^n(t, \alpha, y)}{\partial y^n} \end{pmatrix} = M(t, \alpha);$$

$$\frac{\partial f(t, x(t, \alpha, y))}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial \alpha^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial \alpha^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial \alpha^1} & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial \alpha^n} \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $M(t, \alpha)$ - фундаментальная матрица системы (3.2), которая является линеаризацией системы (3.1) в окрестности решения $x(t, \alpha, y)$

$$\dot{z}(t) = \frac{\partial f(t, x(t, \alpha, y))}{\partial \alpha} z(t), z(\alpha) = E, \quad (3.2)$$

где E – единичная $n \times n$ матрица.

Тогда имеет место равенство

$$\frac{\partial \hat{x}(t, \alpha, y)}{\partial \alpha} = -M(t, \alpha) f(\alpha, y). \quad (3.3)$$

Заметим, что из леммы следует

$$\frac{\partial \hat{x}(\alpha, \alpha, y)}{\partial y} = M(\alpha, \alpha) = E; \quad \frac{\partial \hat{x}(\alpha, \alpha, y)}{\partial \alpha} = -f(\alpha, y).$$

Определим функцию $p(t)$ как решение системы дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial f^T}{\partial \alpha}(t, x(t, \alpha, y)) p(t), \quad (3.4)$$

$$p(t_1) = -\frac{\partial b}{\partial \alpha}(x(t_1, \alpha, y)), \quad (3.5)$$

где $b(x)$ – некоторая заданная непрерывно дифференцируемая на R^n функция.

ЛЕММА 2. Пусть $R(\alpha, y) = b(x(t_1, \alpha, y))$, тогда справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial R(\alpha, y)}{\partial y} = \frac{\partial \hat{x}(t_1, \alpha, y)}{\partial y} \frac{\partial b(x(t_1, \alpha, y))}{\partial \alpha} = p(\alpha), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial R(\alpha, y)}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial \hat{x}(t_1, \alpha, y)}{\partial \alpha}, \frac{\partial b(x(t_1, \alpha, y))}{\partial \alpha} \right) = (p(\alpha), f(\alpha, y)). \quad (3.7)$$

Чтобы доказать эту лемму, введем функции $a_1(t), a_2(t), g(t)$, которые определяем следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= M^T(t, \alpha)p(t), \quad a_2(t) = (g(t), p(t)), \\ g(t) &= \frac{\partial x(t, \alpha, y)}{\partial \tau} = -M(t, \alpha)f(\alpha, y). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Покажем, что $\dot{a}_i(t)=0, i=1,2$. Вычислим эти производные, используя определения (3.8):

$$\begin{aligned} \dot{a}_1(t) &= \dot{M}^T(t, \alpha)p(t) + M^T(t, \alpha)\dot{p}(t) = (f_x M)^T p + M^T(-f_x^T)p = 0; \\ \dot{g}(t) &= -\dot{M}f = -f_x M f = f_x g; g(\alpha) = -f(\alpha, y); \\ \dot{a}_2(t) &= (\dot{g}, p) + (g, \dot{p}) = (f_x^T g, p) - (g, f_x^T p) = 0; \\ g(t_1) &= \frac{\partial x(t_1, \alpha, y)}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Используя постоянство функций $a_i(t), i=1,2$, получим

$$\begin{aligned} a_2(t_1) &= -\left(\frac{\partial x(t_1, \alpha, y)}{\partial \alpha}, \frac{\partial b(x(t_1, \alpha, y))}{\partial \alpha} \right) = -\frac{\partial R(\alpha, y)}{\partial \alpha}, \\ a_2(\alpha) &= (g(\alpha), p(\alpha)) = -(p(\alpha), f(\alpha, y)) = a_2(t_1) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\alpha, y)}{\partial \alpha} &= \left(\frac{\partial x(t_1, \alpha, y)}{\partial \alpha}, \frac{\partial b(x(t_1, \alpha, y))}{\partial \alpha} \right) = (p(\alpha), f(\alpha, y)), \\ a_1(\alpha) &= a_1(t_1) = M^T(\alpha, \alpha)p(\alpha) = p(\alpha) = M^T(t_1, \alpha)p(t_1) = \\ &= \frac{\partial x(t_1, \alpha, y)}{\partial \alpha} \frac{\partial b(x(t_1, \alpha, y))}{\partial \alpha} = \frac{\partial R(\alpha, y)}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом, лемма 2 доказана.

Вернемся к разрывной задаче оптимального управления

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(t, x, u), & S(t, x) < 0, \\ f_2(t, x, u), & S(t, x) \geq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

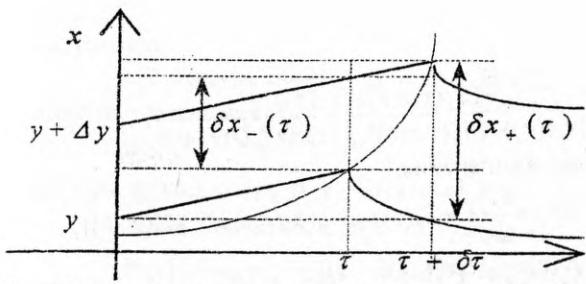
с начальным условием $x(t_0) = y$ и минимизируемым функционалом

$$R(t_0, y) = b(x(t_1, t_0, y)) \rightarrow \inf. \quad (3.10)$$

Рассмотрим эту же задачу с начальным условием $x(\alpha) = y$, тогда минимизируемый функционал будет сложной функцией α и y , а именно $R(\alpha, y) = b(x(t_1, \alpha, y))$.

Пусть τ - точка пересечения функцией $x(t, \alpha, y)$ поверхности переключения.

Дадим достаточно малое приращение Δy вектору $y \in \mathbb{R}^n$ и обозначим через $\bar{x}(t, \alpha, y + \Delta y)$ решение задачи (3.9) с начальным условием $\bar{x}(\alpha) = y + \Delta y$. Эта кривая пересекает поверхность переключения в точке $(\tau + \delta\tau, \bar{x}(\tau + \delta\tau, \alpha, y + \Delta y))$.



Вычислим производную минимизируемого функционала по начальному состоянию

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\tau, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} b(x(t_1, \tau, y))$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\tau, y)}{\partial y} = \frac{\partial x_-(\tau)}{\partial y} \frac{\partial x_+(\tau)}{\partial y} \frac{\partial \bar{x}(t_1, \tau, y)}{\partial x(t_1, \tau, y)}, \quad (3.11)$$

здесь $x_-(\tau) := x(\tau - 0)$, $x_+(\tau) := x(\tau + 0)$.

Согласно лемме, имеем,

где

$$-\dot{p} = \begin{cases} f_{1x}^T p, & S(t, x) < 0 \\ f_{2x}^T p, & S(t, x) \geq 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Вычислим величины приращений справа и слева от точки пересечения траекторией поверхности $S(t, x) = 0$. Согласно определению,

$$\delta x_+(\tau) = \bar{x}(\tau + \delta\tau, \alpha, y + \Delta y) - x(\tau + \delta\tau, \alpha, y), \quad (3.13a)$$

$$\delta x_-(\tau) = \bar{x}(\tau, \alpha, y + \Delta y) - x(\tau, \alpha, y). \quad (3.13b)$$

Используя разложение в ряд Тейлора, получим

$$\bar{x}(\tau + \delta\tau, \alpha, y + \Delta y) = x(\tau, \alpha, y) + \delta x_-(\tau) + f_1(\tau, x(\tau), u(\tau))\delta\tau, \quad (3.14a)$$

$$x(\tau + \delta\tau, \alpha, y) = x(\tau, \alpha, y) + f_2(\tau, x(\tau), u(\tau))\delta\tau. \quad (3.14b)$$

Объединяя (3.13) и (3.14), имеем

$$\delta x_+(\tau) = \delta x_-(\tau) + [f_1(\tau, x(\tau), u(\tau)) - f_2(\tau, x(\tau), u(\tau))] \delta\tau \quad (3.15)$$

или, в более короткой записи,

$$\delta x_+(\tau) = \delta x_-(\tau) + [f_1(\tau) - f_2(\tau)] \delta\tau, \quad (3.16)$$

где $f(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau))$.

Используя следующие равенства $S(\tau + \delta\tau, \bar{x}(\tau + \delta\tau, \alpha, y + \Delta y)) = 0$ и $\bar{x}(\tau + \delta\tau, \alpha, y + \Delta y) = x(\tau, \alpha, y) + \delta x_-(\tau) + f_1(\tau)\delta\tau$, вычислим величину $\delta\tau$ при условии, что $\frac{dS}{dt}(\tau) \neq 0$:

$$\delta\tau = \frac{-(S_x(\tau, x(\tau)), \dot{x}_-(\tau))}{S_t(\tau, x(\tau)) + (S_x(\tau, x(\tau)), f_1(\tau, x(\tau)), U(\tau-0))}. \quad (3.17)$$

Далее введем обозначения:

$$\dot{S}(\tau) = \frac{dS}{dt}(\tau) = S_t(\tau) + (S_x(\tau), f_1(\tau), x(\tau), U(\tau-0)),$$

$$f_1(\tau) = f_1(\tau, x(\tau), U(\tau-0)),$$

$$f_2(\tau) = f_2(\tau, x(\tau), U(\tau+0)).$$

Из условия (3.16) следует, что

$$\dot{x}_+(\tau) = \dot{x}_-(\tau) - [f_1(\tau) - f_2(\tau)](S_x(\tau, x(\tau)), \dot{x}_-(\tau)) \left(\frac{dS}{dt}(\tau) \right). \quad (3.18)$$

Запишем равенство (3.18) в покоординатной форме:

$$\frac{\dot{x}_+(\tau)}{\dot{x}_-(\tau)} = \delta_{ij} - [f_1^j - f_2^j] \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x^i}(\tau, x(\tau)) \left(\frac{dS}{dt}(\tau) \right)^{-1}, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} p(\tau^-) &= p(\tau^+) + ([f_2(\tau, x(\tau), u(\tau+0)) - \\ &- f_1(\tau, x(\tau), u(\tau-0))] \cdot p(\tau^+)) \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}(\tau, x(\tau)) \left(\frac{dS}{dt}(\tau) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $S(t, x) = t - \alpha_0 = 0$, то $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 1, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} = 0$ и

$p^-(\tau) = p^+(\tau), \tau = \alpha_0$, таким образом, функция $p(t)$ непрерывна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $S(t, x) = S(x)$, не зависит от аргумента t , т.е. $S_t = 0$, то функция Понтрягина постоянна и не имеет скачков на оптимальном решении. Действительно, используя определение $\dot{S}(\tau)$, перепишем равенство (3.20) в виде

$$\begin{aligned} (p^-(\tau) - p^+(\tau))(S_x(\tau, x(\tau)), f_1(\tau)) &= ([f_2(\tau, x(\tau), u(\tau^+)) - \\ &- f_1(\tau, x(\tau), u(\tau))] \cdot p^+(\tau)) \times \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}(\tau, x(\tau)), \end{aligned} \quad (3.21)$$

откуда следует, что

$$(p^-(\tau), f_1(\tau)) = (p^+(\tau), f_2(\tau)),$$

или непрерывность функции Понтрягина в точке τ .

ПРИМЕР 1. Рассмотрим пример линейной разрывной задачи оптимального управления. Требуется найти минимум функционала

$$J(u) = \int_0^T x dt$$

при динамических ограничениях

$$\dot{x} = \begin{cases} k_1 x + u, & x < \alpha, \\ k_2 x + u, & x \geq \alpha, \end{cases}$$

начальном условии

$$x(0)=a, \text{ где } a < \alpha, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 2,$$

ограничении на управление

$$|u| \leq 1.$$

Построим функции H_i , $p_i(t)$, $\bar{u}(t)$, $i=1,2$:

$$H_1 = -x + p_1(x+u), \quad H_2 = -x + p_2(2x+u), \quad \dot{p}_1(t) = 1 - p_1,$$

$$\dot{p}_2(t) = 1 - 2p_2, \quad p_2(T) = 0, \quad \bar{u}(t) = \operatorname{sign} p_1(t),$$

здесь $i=1$, если $t \in [0, \tau]$; $i=2$, если $t \in [\tau, T]$.

Заметим, что здесь мы рассматриваем только регулярный случай ($\lambda_0 = 1$). Найдем решение для сопряженных функций:

$$p_1(t) = 1 + \rho e^{-t}, \quad p_2(t) = \frac{1 - e^{2(T-t)}}{2}.$$

Легко проверить, что $p_2(t) < 0, t \in [\tau, T]$, поэтому на этом отрезке $\bar{u}(t) = -1$.

Вычислим величину скачка сопряженной функции:

$$p_1(\tau) = p_2(\tau) + v, \quad x(\tau) = \alpha.$$

С учетом вида динамической системы получим

$$v = \left(\frac{u^- - u^+ - \alpha}{\alpha + u^-} \right) p_2(\tau) = \left(\frac{1 + u^- - \alpha}{\alpha + u^-} \right) p_2(\tau).$$

Функция Понtryгина этой задачи непрерывна, из условия $H_1(\tau) = H_2(\tau)$ следует, что $p_1(\tau)(\alpha + u^-) = p_2(2\alpha - 1)$ или $p_1(\tau) = 2v$. Функция $p_2(t) < 0, t \in [\tau, T]$, поэтому $p_1(\tau) < p_2(\tau) < 0, \dot{p}_1(t) = -\rho e^{-t}$, где $\rho < 0$, и функция $p_1(t)$ является строго возрастающей на отрезке $[0, \tau]$ и поэтому всюду отрицательной, т.е. $\bar{u}(t) = -1, t \in [0, \tau]$, тогда $v = \frac{\alpha}{1 - \alpha} p_2(\tau)$.

Итак,

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} -e^t + 1, & t \in [0, \tau), \\ \frac{1}{2}(1 + e^{2(t-\tau)}) - e^{2t-\tau}, & t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

Заметим, что в этой задаче рассматривается случай однократного протыкания поверхности переключения.

Задание. Провести анализ решения в случае произвольных параметров задачи $\alpha, k_i, i=1,2$.

ПРИМЕР 2. Требуется найти максимум функционала

$$J(u(\cdot)) = x(T)$$

при динамических ограничениях

$$\dot{x} = v,$$

$$\dot{v} = u - \begin{cases} a_1, & x < A, \\ a_2, & x \geq A, \end{cases}$$

$$x, v > 0, x(0) = 0, v(0) = v_0,$$

ограничениях на управление

$$0 \leq u \leq u_m.$$

Применим теорему 2 § 4 для построения решения:

$$H_i = \lambda_0 v + \lambda_1 (u - a_i), i=1,2,$$

$$\dot{\lambda}_0 = 0, \dot{\lambda}_1 = -\lambda_0, \lambda_0(T) = 1, \lambda_1(T) = 0.$$

Легко видеть, что функция $\lambda_1(t)$ является непрерывной, а функция $\lambda_0(t)$ в точке $x(\tau) = A$ испытывает скачок: $\lambda_0(\tau^-) = \lambda_0(\tau^+) + v$,

$$\frac{dS}{dt}(\tau^-) = v(\tau) > 0, \quad v = \frac{T-t}{v(\tau)} - (u^- - u^+ - a_1 + a_2).$$

Оптимальное управление $\bar{u}(t)$ определяется знаком функций $\lambda_1(t)$:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_m, & \lambda_1(t) > 0, \\ 0, & \lambda_1(t) < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что при $t \in [\tau, T]$ $\lambda_0(t) = 1, \lambda_1(t) = T-t > 0$, поэтому $u^+ = u_m = \bar{u}(t)$.

$\lambda_0(t) = \lambda_0(\tau^-) = 1+v, t \in [0, \tau], \lambda_1(t)$ – линейная функция. Это означает, что на интервале $t \in [0, \tau]$ возможно не более одного переключения управления. Легко проверить, что $\bar{u}(t) = u_m, t \in [0, \tau]$. Зная оптимальное управление и интегрируя линейную систему, легко построить оптимальную траекторию и вычислить оптимальное значение функционала.

Приведённые ниже примеры без учёта поверхности разрыва рассмотрены в работах [5], [9], [10], [42] соответственно. Здесь проиллюстрирована особенность построения сопряженной системы, возникающая вследствие наличия поверхности переключения.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим разрывную задачу оптимального управления, возникающую при моделировании и анализе нейронных сетей (§1).

Требуется найти минимум нелинейного функционала

$$I(\omega) = \int_0^T E(x, \omega) dt + \Phi(x(T)), \quad (3.22)$$

зависящего от управления $\omega = \{\omega_i\}, i, j = \overline{1, n}$, при динамических ограничениях, заданных разрывной системой дифференциальных уравнений с фиксированными начальными условиями и моментом окончания процесса T :

$$\dot{x}_i = \begin{cases} -x_i \beta_i^{(1)} + f_i^{(1)} \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij} x_j \right), & S(t, x) < 0, \\ -x_i \beta_i^{(2)} + f_i^{(2)} \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij} x_j \right), & S(t, x) \geq 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Построим функцию Понтрягина:

$$H^{(\ell)} = -E(\omega, x) + \sum_{i=1}^n p_i (f_i^{(\ell)} \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij} x_j \right) - x_i \beta_i^{(\ell)}), \quad \ell = 1, 2. \quad (3.24)$$

Запишем систему дифференциальных уравнений для сопряженных функций:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H^{(\ell)}}{\partial x_i} = \frac{\partial E(\omega, x)}{\partial x_i} + \beta_i^{(\ell)} p_i - \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial}{\partial x_i} f_k^{(\ell)} \left(\sum_{j=1}^n \omega_{kj} x_j \right) = \\ &= \frac{\partial E(x, \omega)}{\partial x_i} + \beta_i^{(\ell)} p_i - \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial f_k^{(\ell)}}{\partial x_i} \omega_{ki}, \quad \ell = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $z_k = \sum_{j=1}^n \omega_{kj} x_j$.

Условия скачка имеют вид

$$\begin{aligned} p_i(\tau^-) &= p_i(\tau^+) + v \frac{\partial \mathcal{S}(\tau, x(\tau))}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}; \\ H^1(\tau^-) &= H^2(\tau^+) - v \frac{\partial S}{\partial t}(\tau, x(\tau)). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Используя формулу (3.20), вычислим параметр скачка в случае протыкания траекторией поверхности переключения $S(t, x) = 0$ в точке τ :

$$\begin{aligned} &= \left\{ \sum_{i=1}^n [(\beta_i^{(1)} - \beta_i^{(2)}) x_i(\tau) + f_i^{(2)}(z_i^+) - f_i^{(1)}(z_i^-)] p_i(\tau^+) + \right. \\ &\quad \left. + E(\omega(\tau^-), x(\tau)) - E(\omega(\tau^+), x(\tau)) \right\} \left[\frac{dS}{dt}(\tau, x(\tau)) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

здесь $z_i^- = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(\tau^-) x_j(\tau)$, $z_i^+ = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(\tau^+) x_j(\tau)$.

В случае, если в задаче (3.22)-(3.23) не заданы граничные условия, краевая задача принципа максимума (3.25)-(3.26) должна дополниться условиями трансверсальности. Оптимальное управление $\omega_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, l}$ выбирается из условия максимума функции Понтрягина. Аналогичная задача без разрыва на поверхности переключения решена в работе [5].

ПРИМЕР 4. Рассмотрим задачу оптимизации усилий во время соревнований по бегу, сформулированную в § 1, построим краевую задачу

принципа максимума. Для того чтобы применить теорему о необходимых условиях оптимальности к задаче 1 § 1, введём в минимизируемый функционал смешанные ограничения в виде функции штрафа с параметром A_k . Тогда задача оптимального управления разрывной системой имеет следующий вид:

$$J(u) = A_k \int_0^T \left[\max \left\{ 0, \frac{uv}{\eta} - P(E) - \sigma(t, E, G) \right\} \right]^2 dt - x(T) \rightarrow \inf, \quad (3.28)$$

$$\dot{x} = v, \quad (3.29)$$

$$\dot{v} = u - r^\ell(x, v), \quad (3.30)$$

$$\dot{E} = -\frac{uv}{\eta} + \sigma(t, E, G) + d_1(E), \quad (3.31)$$

$$\dot{G} = -\sigma(t, E, G) - a \left(\frac{uv}{\eta} - \sigma(t, E, G) \right) + d_2(G), \quad (3.32)$$

$$0 \leq u \leq F, \quad (3.33)$$

$\ell=1$, если $S(t, x) < 0$, $\ell=2$, если $S(t, x) \geq 0$; начальные неотрицательные значения $x(0)=0$, $v(0)=v_0$, $E(0)=E_0$, $G(0)=G_0$, $F > 0$ заданы.

Построим функцию Понtryгина:

$$\begin{aligned} H^\ell &= p_1 v + p_2 (u - r^\ell(x, v)) + p_3 \left(-\frac{uv}{\eta} + \sigma(t, E, G) + d_1(E) \right) + \\ &+ p_4 \left(-\sigma(t, E, G) - a \left(\frac{uv}{\eta} - \sigma(t, E, G) \right) + d_2(G) \right) - \\ &- \lambda_0 A_k \left[\max \left\{ 0, \frac{uv}{\eta} - P(E) - \sigma(t, E, G) \right\} \right]^2; \end{aligned} \quad (3.34)$$

здесь $\ell=1$, если $S(t, x) < 0$, $\ell=2$, если $S(t, x) \geq 0$.

Запишем сопряжённую систему:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H^\ell}{\partial x} = p_2 \frac{\partial r^\ell(x, v)}{\partial x}, \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H^\ell}{\partial v} = -p_1 + p_2 \frac{\partial r^\ell(x, v)}{\partial v} + p_3 \frac{u}{\eta} + \frac{au}{\eta} p_4 + \\ &+ 2\lambda_0 A_k \frac{u}{\eta} \max \left(0, \frac{uv}{\eta} - P(E) - \sigma(t, E, G) \right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\dot{p}_3 = -\frac{\partial H^t}{\partial E} = -p_3 \frac{\partial}{\partial E} (\sigma(t, E, G) + d_1(E)) - p_4 \frac{\partial}{\partial E} \sigma(t, E, G) + \\ + 2\lambda_k A_k \frac{\partial}{\partial E} (\sigma(t, E, G) + P(E)) \max \left(0, \frac{uv}{\eta} - P(E) - \sigma(t, E, G) \right), \quad (3.37)$$

$$\dot{p}_4 = -\frac{\partial H^t}{\partial G} = -p_3 \frac{\partial}{\partial G} \sigma(t, E, G) - p_4 (a-1) \frac{\partial}{\partial E} \sigma(t, E, G) - p_4 \frac{\partial}{\partial G} d_2(G) - \\ - 2\lambda_k A_k \frac{\partial}{\partial G} \sigma(t, E, G) \max \left(0, \frac{uv}{\eta} - P(E) - \sigma(t, E, G) \right). \quad (3.38)$$

Условия трансверсальности имеют вид

$$p_1(T) = 1, \quad p_i(T) = 0, \quad i=2,3,4. \quad (3.39)$$

Оптимальное управление $\bar{u}(t)$ определяется из условия максимума функции Понtryгина аналогично тому, как это сделано в работе [42], на отрезках времени $[0, \tau]$ и $[\tau, T]$.

Скачок сопряжённой функции имеет место только у первой компоненты сопряжённой функции:

$$p_1(\tau^-) = p_1(\tau^+) + \lambda \frac{\partial S(\tau, x(\tau))}{\partial x}, \quad (3.40)$$

где параметр скачка λ вычисляется по формуле

$$\lambda = \left\{ \left(u^+ - u^- + r^{(1)} - r^{(2)} \right) p_2(\tau) + \frac{(u^- - u^+)v}{\eta} (p_3(\tau) + \alpha p_4(\tau)) + \right. \\ + A_k \left[\max \left\{ 0, \frac{u^- v}{\eta} - P(E) - \sigma(t, E, G) \right\} \right]^2 - \\ \left. - A_k \left[\max \left\{ 0, \frac{u^+ v}{\eta} - P(E) - \sigma(t, E, G) \right\} \right]^2 \right] \left[\frac{dS}{dt}(\tau, x(\tau)) \right]^{-1}. \quad (3.41)$$

Оптимальное управление находится согласно принципу максимума.

Если $\frac{uv}{\eta} - P(E) - \sigma(t, E, G) \leq 0$, то оптимальное управление определяется

знаком функции $\Phi(t) = p_2(t) - \frac{v}{\eta} p_3(t) - \alpha \frac{v}{\eta} p_4(t)$, т.е.

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Phi(t) < 0, \\ F, & \text{если } \Phi(t) > 0. \end{cases}$$

Если $\frac{uv}{\eta} - P(E) - \sigma(t, E, G) > 0$, то оптимальное управление определяется равенством

$$\bar{u}(t) = \frac{\Phi(t)\eta^2}{2\lambda_0 A_k v^2} + \frac{\eta}{v} (P(E) + \sigma(t, E, G)).$$

Случай $\Phi(t)=0$, подробно исследованный в работе [16], также может иметь место в разрывной задаче оптимального управления.

§ 4. Дискретная аппроксимация разрывной задачи оптимального управления

Рассмотрим разрывную задачу оптимального управления, описанную системой

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(t, x(t), u(t)), & S(t, x) < 0, \\ f_2(t, x(t), u(t)), & S(t, x) \geq 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0 \quad (4.2)$$

и ограничениями на управление

$$u(t) \in U(t) \subset R^r, \text{ п. в. } t \in [t_0, t_1]. \quad (4.3)$$

Задача оптимального управления заключается в минимизации терминального функционала

$$J(u) = \Phi(x(t_1)). \quad (4.4)$$

Считаем, что в задаче (4.1) - (4.4) выполнены все предположения гладкости и множество допустимых процессов не пусто.

Перейдем от непрерывной к дискретной задаче оптимального управления. Разобьем отрезок $[t_0, t_1]$ точками $\tau_i, i = \overline{0, q}$. Предполагая, что $t_0 = \tau_0, t_1 = \tau_q$ и что любой отрезок разбиения имеет длину

$$\Delta \tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i, \quad i = \overline{0, q-1},$$

введем следующие обозначения:

$$x^i := x(\tau_i); x^q := x(\tau_q); u^i := u(\tau_i),$$

причем

$$u(t) = u(t_i) = u^i, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}].$$

В этих обозначениях минимизируемый функционал имеет вид

$$\Phi(x^q) \rightarrow \inf. \quad (4.5)$$

Далее производная аппроксимируется по схеме Эйлера. Рассмотрим следующие три случая:

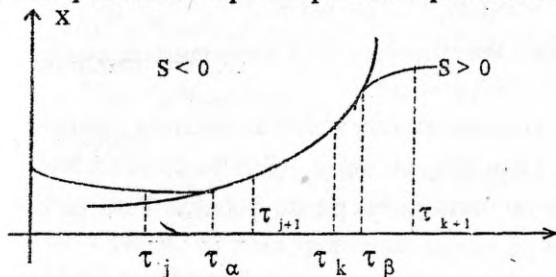
- протыканье траекторией поверхности переключения в точке τ ;
- залегание траектории на поверхности переключения на отрезке $[\tau, y]$;

в) касание траекторией поверхности переключения в точках τ , γ .

Далее, не ограничивая общности рассмотрения, положим,

$$S(\tau_0, x^0) < 0.$$

а. Случай протыкания траекторией поверхности переключения



Допустим, что в точках τ_0, \dots, τ_j $S(\tau_i, x^i) < 0$, $i = \overline{0, j-1}$, тогда движение системы до точки τ_j определяется рекуррентным выражением

$$x^{i+1} = x^i + \Delta\tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i), \quad i = \overline{0, j-1}. \quad (4.6)$$

Пусть точка переключения τ находится на отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ и $S(\tau_i, x^i) > 0$, $i = \overline{j+1, q}$, т.е. траектория только один раз пересекает поверхность переключения.

После пересечения траекторией поверхности переключения поведение системы описывается рекуррентными соотношениями

$$x^{i+1} = x^i + \Delta\tau_i f_2(\tau_i, x^i, u^i), \quad i = \overline{j+1, q}. \quad (4.7)$$

Рассмотрим переход из точки x^j в точку x^{j+1} , используя метод касательных.

Легко видеть, что имеют место следующие равенства:

$$x(\tau_\alpha) = x^j + (\tau_\alpha - \tau_j) f_1(\tau_j, x^j, u^j), \quad (4.8)$$

$$x^{j+1} = x(\tau_\alpha) + (\tau_{j+1} - \tau_\alpha) f_2(\tau_\alpha, x(\tau_\alpha), u(\tau_\alpha + 0)). \quad (4.9)$$

Обозначим через $\alpha = (\tau_\alpha - \tau_j)$, $x^\alpha = x(\tau_\alpha)$, $u^\alpha = u(\tau_\alpha + 0)$ и выразим x^{j+1} , учитывая, что управление может изменяться скачком в точке τ_α . $u(t) \in u^\alpha$, $t \in [\tau_\alpha, \tau_{j+1}]$:

$$x^{j+1} = x^j + \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j) + (\Delta\tau_j - \alpha) f_2(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha). \quad (4.10)$$

Объединяя полученные выше равенства, запишем рекуррентные формулы для вычисления траектории:

$$x^{i+1} = \begin{cases} x^i + \Delta\tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{0, j-1}, \\ x^i + \alpha f_1(\tau_i, x^i, u^i) + (\Delta\tau_i - \alpha) f_2(\tau_i + \alpha, x^\alpha, u^\alpha), & i = j, \\ x^i + \Delta\tau_i f_2(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{j+1, q}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Неизвестными в этих рекуррентных соотношениях являются векторы $x^i \in R^n$, $i = \overline{1, q}$, u^i , $i = \overline{0, q-1}$, u^α .

Заметим, что дополнительным условием является равенство

$$S(\tau_\alpha, x^\alpha) = 0 \text{ или } S(\tau_\alpha, x^j + \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j)) = 0.$$

Разложим левую часть равенства по формуле Тейлора с точностью до $o(\alpha^2)$:

$$\begin{aligned} S(\tau_j + \alpha, x^j + \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j)) &= S(\tau_j, x^j) + \alpha \frac{\partial S(\tau_j, x^j)}{\partial t} + \\ &+ \alpha \left(\frac{\partial S(\tau_j, x^j)}{\partial x^j}, f_1(\tau_j, x^j, u^j) \right) + o(\alpha^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Выразим α из последнего равенства (4.12) при условии, что знаменатель в точке τ_j не обращается в нуль:

$$\alpha = \frac{-S(\tau_j, x^j)}{\frac{\partial S(\tau_j, x^j)}{\partial t} + \left(\frac{\partial S(\tau_j, x^j)}{\partial x^j}, f_1(\tau_j, x^j, u^j) \right)}.$$

Из последнего уравнения видно, что α является функцией, зависящей от переменных τ_j, x^j или $\alpha(\tau_j, x^j)$, а знаменатель равен полной производной $\frac{dS}{dt}(\tau_j)$.

Сформулируем дискретную аппроксимацию разрывной задачи оптимального управления (4.1)-(4.4). Дискретная задача оптимального управления состоит в нахождении минимума функции

$$I(u) = \Phi(x^q) \rightarrow \inf \quad (4.13)$$

при ограничениях

$$x^{i+1} = \begin{cases} x^i + \Delta\tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{0, j-1} \\ x^i + \alpha f_1(\tau_i, x^i, u^i) + (\Delta\tau_i - \alpha) f_2(\tau_i + \alpha, x^\alpha, u^\alpha), & i = j \\ x^i + \Delta\tau_i f_2(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{j+1, q} \end{cases} \quad (4.14)$$

где

$$\alpha(\tau_j, x^j) = -S(\tau_j, x^j) [\frac{dS}{dt}(\tau_j)]^{-1};$$

$$x^0 = a \in R^n;$$

$$u^i \in U \subset R^r, i = \overline{0, q-1}.$$

Для решения дискретной задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа:

$$L = \lambda_0 \Phi(x^q) + \sum_{i=0}^{j-1} (p^{i+1}, x^{i+1} - x^i - \Delta\tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i)) + \\ + (p^{j+1}, x^{j+1} - x^j - \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j) - (\Delta\tau_j - \alpha) f_2(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha)) + \\ + \sum_{i=j+1}^{q-1} (p^{i+1}, x^{i+1} - x^i - \Delta\tau_i f_2(\tau_i, x^i, u^i)). \quad (4.15)$$

Неизвестными в этой задаче являются следующие векторы:

$$x^i, j = \overline{1, q}; u^i; i = \overline{0, q-1}; p^i; i = \overline{1, q}; u^\alpha.$$

Таким образом, система уравнений имеет $3q + 1$ неизвестных и состоит из $3q + 1$ уравнений.

Запишем условие стационарности функции Лагранжа по $x^i, i = \overline{1, q}$:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = p^i - p^{i+1} - \Delta\tau_i \left(\frac{\partial f_1(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial x^i} \right)^T p^{i+1} = 0, \quad i = \overline{1, j-1}; \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^j} = p^j - p^{j+1} + \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} ([f_2(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha) - f_1(\tau_j, x^j, u^j)], p^{j+1}) + \\ + \left((\alpha - \Delta\tau_j) \frac{\partial f_2(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha)}{\partial x^j} - \alpha \frac{\partial f_1(\tau_j, x^j, u^j)}{\partial x^j} \right)^T p^{j+1} = 0, \quad (4.17)$$

Как уже упоминалось, α зависит от переменных τ_j, x^j , поэтому частную производную функции L по x_j нужно вычислять как производную сложной функции:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = p^i - p^{i+1} - \Delta\tau_i \left(\frac{\partial f_2(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial x^i} \right)^T p^{i+1} = 0, \quad i = \overline{j+1, q-1}; \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^q} = \lambda_0 \frac{\partial \Phi(x^q)}{\partial x^q} + p^q = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = -\Delta\tau_i \left(\frac{\partial f_1(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial u^i} \right)^T p^{i+1}, \quad i = \overline{0, j-1}; \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^j} = -\Delta\tau_i \left(\frac{\partial f_2(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial u^i} \right)^T p^{i+1}, \quad i = \overline{j+1, q-1}; \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = (\alpha - \Delta\tau_j) \left(\frac{\partial f_2(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha)}{\partial u^\alpha} \right)^T p^{j+1}. \quad (4.22)$$

Используя соотношения (4.18)-(4.22), выпишем рекуррентные формулы для вычисления импульсов $p^i, i = \bar{i}, \bar{q}$:

$$p^q = -\lambda_0 \frac{\partial \Phi(x^q)}{\partial x^q}, \quad (4.23)$$

$$p^i = p^{i+1} + \Delta \tau_i \left(\frac{\partial f_2(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial x^i} \right)^T p^{i+1}, \quad i = \overline{q-1, j+1}; \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} p^j &= p^{j+1} - \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} ([f_2(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha) - f_1(\tau_j, x^j, u^j)], p^{j+1}) - \\ &- \left((\alpha + \Delta \tau_j) \frac{\mathcal{F}_2(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha)}{\partial x^j} - \alpha \frac{\mathcal{F}_1(\tau_j, x^j, u^j)}{\partial x^j} \right)^T p^{j+1}; \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$p^i = p^{i+1} + \Delta \tau_i \left(\frac{\mathcal{F}_1(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial x^i} \right)^T p^{i+1}, \quad i = \overline{j-1, 1}. \quad (4.26)$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ в выражениях (4.24)-(4.26), получим уравнения для сопряженной системы, условие трансверсальности и условие скачка:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(\frac{\mathcal{F}_1(t, x(t), u(t))}{\partial x} \right)^T P(t), \quad t \in [t_0, \tau]; \\ \dot{P}(t) &= - \left(\frac{\mathcal{F}_2(t, x(t), u(t))}{\partial x} \right)^T P(t), \quad t \in [\tau, t_1]; \\ P(T) &= -\lambda_0 \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x(T)}, \\ p(\tau-0) &= p(\tau+0) - ([f_2(\tau, x(\tau), u(\tau+0)) - f_1(\tau, x(\tau), u(\tau-0))], p(\tau+0)) \times \\ &\times \frac{\partial \alpha(\tau, x(\tau))}{\partial x}, \end{aligned}$$

где

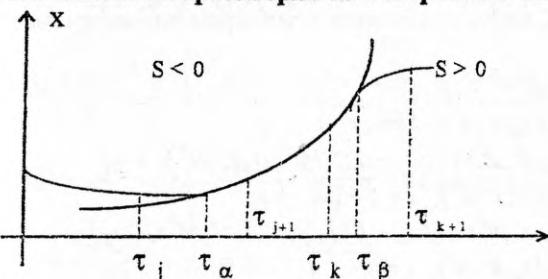
$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha(\tau, x)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-S(\tau, x) \left(\frac{dS(\tau, x)}{dt} \right)^{-1} \right) = \\ &= -\frac{\mathcal{D}(\tau, x)}{\partial x} \left(\frac{dS(\tau, x)}{dt} \right)^{-1} - S(\tau, x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dS(\tau, x(\tau))}{dt} \right)^{-1} = \\ &= -\frac{\mathcal{D}(\tau, x(\tau))}{\partial x} \left(\frac{dS(\tau, x(\tau))}{dt} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, скачок сопряженной функции в точке разрыва определяется выражением

$$p(\tau-0) = p(\tau+0) + \left([f_2(\tau, x(\tau), u(\tau+0)) - f_1(\tau, x(\tau), u(\tau-0))] \cdot p(\tau+0) \right) \times \\ \times \frac{\partial S(\tau, x(\tau))}{\partial x} \left(\frac{dS(\tau, x(\tau))}{dt} \right)^{-1}$$

и совпадает с выражением (5.20), полученным в §5.

5. Случай залегания траектории на поверхности переключения



Аналогично тому, как это было сделано в пункте А, запишем рекуррентные формулы для вычисления траектории в случае ее залегания на поверхности переключения:

$$x^{i+1} = \begin{cases} x^i + \Delta\tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{0, j-1}, \\ x^i + \alpha f_1(\tau_i, x^i, u^i) + (\Delta\tau_i - \alpha) f_1(\tau_i + \alpha, x^\alpha, u^\alpha), & i = j, \\ x^i + \Delta\tau_i f_2(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{j+1, k-1}, \\ x^i + \beta f_2(\tau_i, x^i, u^i) + (\Delta\tau_i - \beta) f_2(\tau_i + \beta, x^\beta, u^\beta), & i = k, \\ x^i + \Delta\tau_i f_2(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{k+1, q}. \end{cases} \quad (4.27)$$

Неизвестными в этих рекуррентных соотношениях являются x^i , $i = \overline{1, q}$, u^i , $i = \overline{0, q-1}$, α, β , u^α, u^β .

Заметим, что дополнительным условием являются равенства, с помощью которых определяется точка входа τ_β траектории с поверхности переключения:

$$S(\tau_\alpha, x^\alpha) = 0 \text{ или } S(\tau_\alpha, x^j + \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j)) = 0,$$

$$S(\tau_\beta, x^\beta) = 0 \text{ или } S(\tau_\beta, x^k + \beta f_1(\tau_k, x^k, u^k)) = 0.$$

Разложим левые части равенств по формуле Тейлора с точностью до $o(\alpha^2)$ и $o(\beta^2)$ и выразим α и β в предположении, что знаменатели в этих выражениях не равны нулю:

$$\frac{dS(\tau_\alpha, x^\alpha)}{dt} = 0, \quad (4.28)$$

$$\frac{dS(\tau_\beta, x^\beta)}{dt} = 0. \quad (4.29)$$

Из последнего уравнения видно, что α является функцией, зависящей от переменных τ_j, x^j , а величина $\beta = \beta(\tau_k, x^k)$.

Сформулируем дискретную задачу оптимального управления разрывной системы для случая залегания траектории на поверхности переключения:

$$J(u) = \Phi(x^q) \rightarrow \inf$$

$$x^{i+1} = \begin{cases} x^i + \Delta\tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{0, j-1} \\ x^i + \alpha f_1(\tau_i, x^i, u^i) + (\Delta\tau_i - \alpha) f_1(\tau_i + \alpha, x^\alpha, u^\alpha), & i = j \\ x^i + \Delta\tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{j+1, k-1} \\ x^i + \beta f_1(\tau_i, x^i, u^i) + (\Delta\tau_i - \beta) f_2(\tau_i + \beta, x^\beta, u^\beta), & i = k \\ x^i + \Delta\tau_i f_2(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{k+1, q} \end{cases}$$

$$S(\tau_\alpha, x^j + \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j)) = 0;$$

$$S(\tau_\beta, x^k + \beta f_1(\tau_k, x^k, u^k)) = 0;$$

$$x^0 = a \in R^n;$$

$$u^i \in U \subset R^r, i = \overline{0, q-1}.$$

Для решения дискретной задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} L = & \lambda_0 \Phi(x^q) + \sum_{i=0}^{j-1} (p^{i+1}, x^{i+1} - x^i - \Delta\tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i)) + \\ & + (p^{j+1}, x^{j+1} - x^j - \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j) - (\Delta\tau_j - \alpha) f_1(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha)) + \\ & + \sum_{i=j+1}^{k-1} (p^{i+1}, x^{i+1} - x^i - \Delta\tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i)) + \\ & + (p^{k+1}, x^{k+1} - x^k - \beta f_1(\tau_k, x^k, u^k) - (\Delta\tau_k - \beta) f_2(\tau_k + \beta, x^\beta, u^\beta)) + \\ & + \sum_{i=k+1}^{q-1} (p^{i+1}, x^{i+1} - x^i - \Delta\tau_i f_2(\tau_i, x^i, u^i)). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Неизвестными в этой задаче являются следующие величины:

$$x^i, i = \overline{1, q}, \quad u^i, i = \overline{0, q-1}, \quad p^i, i = \overline{1, q}, \quad u^\alpha, u^\beta, \alpha, \beta, \mu_1, \mu_2.$$

Запишем условия стационарности функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = p^i - p^{i+1} - \Delta\tau_i \left(\frac{\partial f_1(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial x^i} \right)^T p^{i+1} = 0, \quad i = \overline{1, j-1}, \quad \overline{j+1, k-1}; \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha^j} = & p^j - p^{j+1} + \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha^j} [f_1(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha) - f_1(\tau_j, x^j, u^j)], p^{j+1} + \\ & + \left((\alpha - \Delta\tau_j) \frac{\partial f_1(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha)}{\partial \alpha^j} - \alpha \frac{\partial f_1(\tau_j, x^j, u^j)}{\partial \alpha^j} \right)^T p^{j+1} = 0; \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = p^k - p^{k+1} + \frac{\partial \beta}{\partial x^k} ([f_2(\tau_k + \beta, x^\beta, u^\beta) - f_1(\tau_k, x^k, u^k)], p^{k+1}) + \\ + \left((\beta - \Delta \tau_k) \frac{\partial f_2(\tau_k + \beta, x^\beta, u^\beta)}{\partial x^k} - \beta \frac{\partial f_1(\tau_k, x^k, u^k)}{\partial x^k} \right)^T p^{k+1} = 0, \quad (4.33)$$

где

$$\frac{\partial f_1(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha)}{\partial x^j} = \frac{\partial f_1(\tau_j + \alpha, x^j + \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j), u^\alpha)}{\partial x^j},$$

$$\frac{\partial f_1(\tau_k + \beta, x^\beta, u^\beta)}{\partial x^k} = \frac{\partial f_1(\tau_k + \beta, x^k + \beta f_1(\tau_k, x^k, u^k), u^\beta)}{\partial x^k}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = p^i - p^{i+1} - \Delta \tau_i \left(\frac{\partial f_2(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial x^i} \right)^T p^{i+1} = 0, i = \overline{k+1, q-1}; \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^q} = \lambda_0 \frac{\partial \Phi(x^q)}{\partial x^q} + p^q = 0; \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} = -\Delta \tau_i \left(\frac{\partial f_1(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial u^i} \right)^T p^{i+1}, i = \overline{0, j-1, j+1, k-1}; \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^j} = \left[(\alpha - \Delta \tau_j) \left(\frac{\partial f_1(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha)}{\partial u^j} \right)^T - \alpha \left(\frac{\partial f_1(\tau_j, x^j, u^j)}{\partial u^j} \right)^T \right] p^{j+1}; \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^k} = \left[(\beta - \Delta \tau_k) \left(\frac{\partial f_1(\tau_k + \beta, x^\beta, u^\beta)}{\partial u^k} \right)^T - \beta \left(\frac{\partial f_1(\tau_k, x^k, u^k)}{\partial u^k} \right)^T \right] p^{k+1}; \quad (4.38)$$

$$\frac{dL}{du^i} = -\Delta \tau_i \left(\frac{df_2(\tau_i, x^i, u^i)}{du^i} \right)^T p^{i+1}, i = \overline{k+1, q-1}; \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha} = (\alpha - \Delta \tau_j) \left(\frac{\partial f_1(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha)}{\partial u^\alpha} \right)^T p^{j+1}; \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\beta} = (\beta - \Delta \tau_k) \left(\frac{\partial f_2(\tau_k + \beta, x^\beta, u^\beta)}{\partial u^\beta} \right)^T p^{k+1}. \quad (4.41)$$

Из условий стационарности функции Лагранжа по переменным x^i выпишем рекуррентные формулы для вычисления сопряженных векторов-импульсов:

$$p^q = -\lambda_0 \frac{\partial \Phi(x^q)}{\partial x^q}, \quad (4.42)$$

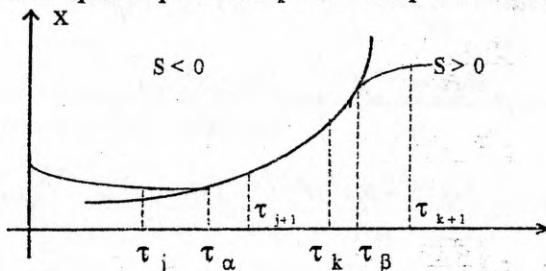
$$p^i = p^{i+1} + \Delta \tau_i \left(\frac{\partial f_2(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial x^i} \right)^T p^{i+1}, i = \overline{q-1, k+1}. \quad (4.43)$$

$$p^k = p^{k+1} - \frac{\partial \beta}{\partial x^k} ([f_2(\tau_k + \beta, x^\beta, u^\beta) - f_1(\tau_k, x^k, u^k)], p^{k+1}) - \\ - \left((\beta - \Delta \tau_k) \frac{\partial f_2(\tau_k + \beta, x^\beta, u^\beta)}{\partial x^k} - \beta \frac{\partial f_1(\tau_k, x^k, u^k)}{\partial x^k} \right)^T p^{k+1}, \quad (4.44)$$

$$p^i = p^{i+1} + \Delta \tau_i \left(\frac{\partial f_1(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial x^i} \right)^T p^{i+1}, \quad i = \overline{1, j-1, j+1, k-1}; \quad (4.45)$$

$$p^j = p^{j+1} - \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} ([f_1(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha) - f_1(\tau_j, x^j, u^j)], p^{j+1}) - \\ - \left((\alpha - \Delta \tau_j) \frac{\partial f_1(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha)}{\partial x^j} - \alpha \frac{\partial f_1(\tau_j, x^j, u^j)}{\partial x^j} \right)^T p^{j+1}. \quad (4.46)$$

в. Случай касания траекторией поверхности переключения



Рекуррентные формулы для вычисления траектории в случае касания имеют следующий вид:

$$x^{i+1} = \begin{cases} x^i + \Delta \tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{0, j-1}; \\ x^i + \alpha f_1(\tau_i, x^i, u^i) + (\Delta \tau_i - \alpha) f_1(\tau_i + \alpha, x^\alpha, u^\alpha), & i = j; \\ x^i + \Delta \tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{j+1, k-1}; \\ x^i + \beta f_1(\tau_i, x^i, u^i) + (\Delta \tau_i - \beta) f_2(\tau_i + \beta, x^\beta, u^\beta), & i = k; \\ x^i + \Delta \tau_i f_2(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{k+1, q}. \end{cases} \quad (4.47)$$

Неизвестными в этих рекуррентных соотношениях являются $x^i, i = \overline{1, q}; u^i, i = \overline{0, q-1}, \alpha, \beta, u^\alpha, u^\beta$.

Заметим, что в точках входа и выхода траектории на поверхность переключения выполняются равенства

$$S(\tau_\alpha, x^\alpha) = 0 \text{ или } S(\tau_\alpha, x^j + \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j)) = 0, \quad (4.48)$$

$$S(\tau_\beta, x^\beta) = 0 \text{ или } S(\tau_\beta, x^k + \beta f_1(\tau_k, x^k, u^k)) = 0. \quad (4.49)$$

В данном случае траектория касается поверхности $S(t, x)$ в точках τ_α, τ_β , поэтому имеют место равенства.

$$\frac{dS(\tau_\alpha, x^\alpha)}{dt} = 0, \quad \frac{dS(\tau_\beta, x^\beta)}{dt} = 0.$$

Сформулируем дискретную задачу оптимального управления для разрывной системы в случае касания траекторией поверхности переключения в точках τ_α и τ_β :

$$I(u) = \Phi(x^q) \rightarrow \inf,$$

$$x^{i+1} = \begin{cases} x^i + \Delta\tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{0, j-1}; \\ x^i + \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j) + (\Delta\tau_j - \alpha) f_1(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha), & i = j; \\ x^i + \Delta\tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{j+1, k-1}; \\ x^i + \beta f_1(\tau_k, x^k, u^k) + (\Delta\tau_k - \beta) f_2(\tau_k + \beta, x^\beta, u^\beta), & i = k; \\ x^i + \Delta\tau_i f_2(\tau_i, x^i, u^i), & i = \overline{k+1, q}; \end{cases}$$

$$S(\tau_\alpha, x^j + \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j)) = 0;$$

$$S(\tau_\beta, x^k + \beta f_1(\tau_k, x^k, u^k)) = 0;$$

$$x^0 = a \in R^n;$$

$$u^i \in U \subset R^r, \quad i = \overline{0, q-1}.$$

Для решения дискретной задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} L = & \lambda_0 \Phi(x^q) + \sum_{i=0}^{j-1} (p^{i+1}, x^{i+1} - x^i - \Delta\tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i)) + \\ & + (p^{j+1}, x^{j+1} - x^j - \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j) - (\Delta\tau_j - \alpha) f_1(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha)) + \\ & + \sum_{i=j+1}^{k-1} (p^{i+1}, x^{i+1} - x^i - \Delta\tau_i f_1(\tau_i, x^i, u^i)) + \\ & + (p^{k+1}, x^{k+1} - x^k - \beta f_1(\tau_k, x^k, u^k) - (\Delta\tau_k - \beta) f_2(\tau_k + \beta, x^\beta, u^\beta)) + \\ & + \sum_{i=k+1}^{q-1} (p^{i+1}, x^{i+1} - x^i - \Delta\tau_i f_2(\tau_i, x^i, u^i)) + \mu_1 S(\tau_\alpha, x^j + \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j)) + \\ & \mu_2 S(\tau_\beta, x^k + \beta f_1(\tau_k, x^k, u^k)). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Эта задача имеет следующие неизвестные величины:

$$x^i, \quad i = \overline{1, q}, \quad u^i, \quad i = \overline{0, q-1}, \quad p^i, \quad i = \overline{1, q}, \quad u^\alpha, \quad u^\beta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \mu_1, \quad \mu_2.$$

Запишем условия стационарности:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = p^i - p^{i+1} - \Delta\tau_i \left(\frac{\partial f_1(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial x^i} \right)^T p^{i+1} = 0, \quad i = \overline{1, j-1, j+1, k-1}; \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u^j} = & p^j - p^{j+1} + \left((\alpha - \Delta\tau_j) \frac{\partial f_1(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha)}{\partial u^j} - \alpha \frac{\partial f_1(\tau_j, x^j, u^j)}{\partial u^j} \right)^T p^{j+1} + \\ & + \mu_1 \left(\frac{\partial S(\tau_\alpha, x^j + \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j))}{\partial u^j} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = p^k - p^{k+1} + \left((\beta - \Delta \tau_k) \frac{\mathcal{F}_2(\tau_k + \beta, x^\beta, u^\beta)}{\partial x^k} - \beta \frac{\mathcal{F}_1(\tau_k, x^k, u^k)}{\partial x^k} \right)^T p^{k+1} + \\ + \mu_2 \left(\frac{\mathcal{D}(\tau_\beta, x^k + \mathcal{F}_1(\tau_k, x^k, u^k))}{\partial x^k} \right) = 0; \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = p^i - p^{i+1} - \Delta \tau_i \left(\frac{\mathcal{F}_2(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial x^i} \right)^T p^{i+1} = 0, i = \overline{k+1, q-1}; \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^q} = \lambda_0 \frac{\partial \Phi(x^q)}{\partial x^q} + p^q = 0, \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = -\Delta \tau_i \left(\frac{\mathcal{F}_1(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial u^i} \right)^T p^{i+1}, i = \overline{0, j-1, j+1, k-1}; \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^j} = \left[(\alpha - \Delta \tau_j) \left(\frac{\mathcal{F}_1(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha)}{\partial u^j} \right)^T - \alpha \left(\frac{\mathcal{F}_1(\tau_j, x^j, u^j)}{\partial u^j} \right)^T \right] p^{j+1}; \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^k} = \left[(\beta - \Delta \tau_k) \left(\frac{\mathcal{F}_1(\tau_k + \beta, x^\beta, u^\beta)}{\partial u^k} \right)^T - \beta \left(\frac{\mathcal{F}_1(\tau_k, x^k, u^k)}{\partial u^k} \right)^T \right] p^{k+1}; \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = -\Delta \tau_i \left(\frac{\mathcal{F}_2(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial u^i} \right)^T p^{i+1}, i = \overline{k+1, q-1}; \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha} = (\alpha - \Delta \tau_j) \left(\frac{\mathcal{F}_1(\tau_j + \alpha, x^\alpha, u^\alpha)}{\partial u^\alpha} \right)^T p^{j+1}; \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\beta} = (\beta - \Delta \tau_k) \left(\frac{\mathcal{F}_2(\tau_k + \beta, x^\beta, u^\beta)}{\partial u^\beta} \right)^T p^{k+1}. \quad (4.61)$$

Используя (4.51) - (4.61), выпишем рекуррентные формулы для расчета импульсов $p_i, i = \overline{1, q}$:

$$p^q = -\lambda_0 \frac{\partial \Phi(x^q)}{\partial x^q}; \quad (4.62)$$

$$p^i = p^{i+1} + \Delta \tau_i \left(\frac{\mathcal{F}_2(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial x^i} \right)^T p^{i+1}, i = \overline{k+1, q-1}; \quad (4.63)$$

$$p^k = p^{k+1} - \left((\beta - \Delta \tau_k) \frac{\mathcal{F}_2(\tau_k + \beta, x^\beta, u^\beta)}{\partial x^k} - \beta \frac{\mathcal{F}_1(\tau_k, x^k, u^k)}{\partial x^k} \right)^T p^{k+1} - \\ - \mu_2 \left(\frac{\mathcal{D}(\tau_\beta, x^k + \mathcal{F}_1(\tau_k, x^k, u^k))}{\partial x^k} \right); \quad (4.64)$$

$$p^i = p^{i+1} + \Delta \tau_i \left(\frac{\partial f_1(\tau_i, x^i, u^i)}{\partial x^i} \right)^T p^{i+1}, \quad i = \overline{1, j-1, j+1, k-1}; \quad (4.65)$$

$$p^j = p^{j+1} - \left((\alpha - \Delta \tau_j) \frac{\partial f_1(\tau_j + \alpha, x^a, u^a)}{\partial x^j} - \alpha \frac{\partial f_1(\tau_j, x^j, u^j)}{\partial x^j} \right)^T p^{j+1} - \mu_1 \left(\frac{\partial \bar{f}_1(\tau_a, x^j + \alpha f_1(\tau_j, x^j, u^j))}{\partial x^j} \right). \quad (4.66)$$

Заметим, что аналогичный подход развивается в работах [14], [15].

§ 5. Задача о мягкой посадке ракеты на поверхность Луны

Рассмотрим задачу о мягкой посадке двухступенчатой ракеты на поверхность планеты или ее спутников, например Луны.

Введем следующие обозначения. Расположение ракеты над поверхностью Луны характеризуется координатой $x_1(t)$, причем на поверхности Луны $x_1(T)=0$, скорость движения ракеты $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$, $x_3(t)$ - масса ракеты в момент времени t . Отсоединение второй ступени ракеты происходит после того, как первая ступень выполнит свою задачу, израсходовав весь запас топлива, предназначенный для двигателя первой ступени. Каждая ступень ракеты имеет свою суммарную массу M_i , $i=1,2$, запас топлива F_i , скорость истечения топлива w_i , максимальную тягу \bar{u}_i , $i=1,2$. Далее, g - ускорение свободного падения в поле тяжести Луны, $u(t)$ - скорость истечения топлива или тяга двигателя, которая является управляемой функцией.

Уравнения движения и изменения массы первой ступени ракеты имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g + \frac{\omega_1}{x_3} u, \quad \dot{x}_3 = -u. \quad (5.1)$$

В начальный момент времени заданы высота $x_1(0)=h$, скорость $x_2(0)=v_0 < 0$ и общая масса двух ступеней ракеты $x_3(0):=M_1 + M_2 + F_1 + F_2$.

Уравнения движения и изменения массы второй ступени ракеты после отсоединения первой ступени имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g + \frac{\omega_2}{x_3 - M_1} u, \quad \dot{x}_3 = -u. \quad (5.2)$$

В фиксированный конечный момент времени T выполняются следующие граничные условия:

$$x_1(T) = x_2(T) = 0, \quad (5.3)$$

которые означают, что в момент посадки ракеты на Луну ее скорость равна нулю, что и означает мягкую посадку.

Управление или тяга двигателей первой и второй ступени соответственно выбираются из условия

$$0 \leq u(t) \leq \bar{u}_i, \quad i = 1, 2, \quad (5.4)$$

где \bar{u}_i — заданная максимальная величина тяги реактивного двигателя.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы осуществить мягкую посадку с минимальным расходом топлива, который выражается с помощью функционала

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u(t) dt. \quad (5.5)$$

По своей формализации эта задача относится к разрывным задачам оптимального управления, а поверхность переключения имеет вид

$$S(t, x) = x_3 - M_0, \quad M_0 := M_1 + M_2 + F_2. \quad (5.6)$$

Для построения оптимального управления будем использовать теорему о необходимых условиях оптимальности, согласно которой запишем функцию Понтрягина $H_1(t)$ до момента пересечения траекторией поверхности переключения $t \in [0, \tau]$:

$$H_1(t, x, u, p) = -\lambda_0 u + p_1 x_2 + p_2 \left(\frac{w_1 u}{x_3} - g \right) - p_3 u, \quad \lambda_0 \geq 0 \quad (5.7)$$

и после пересечения траекторией поверхности переключения $t \in [\tau, T]$:

$$H_2(t, x, u, p) = -\lambda_0 u + p_1 x_2 + p_2 \left(\frac{w_2 u}{x_3 - M_1} - g \right) - p_3 u. \quad (5.8)$$

Введем функции переключения управления:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= -\lambda_0 + p_2 \frac{w_1}{x_3} - p_3, \quad t \in [0, \tau); \\ \varphi_2(t) &= -\lambda_0 + p_2 \frac{w_2}{x_3 - M_1} - p_3, \quad t \in [\tau, T]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Используя определения функций переключения, преобразуем выражение для функции Понтрягина:

$$H_i(t, x, u, p) = p_1 x_2 - p_2 g + \varphi_i(t) u, \quad i = 1, 2. \quad (5.10)$$

Согласно принципу максимума, оптимальное управление $\bar{u}(t)$ имеет вид

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} \bar{u}_i, & \varphi_i(t) > 0 \\ 0, & \varphi_i(t) < 0, \end{cases} \quad (5.11)$$

где $i = 1$, если $t \in [0, \tau]$, $i = 2$, если $t \in [\tau, T]$.

Оптимальное управление не определено, если на некотором интервале $\varphi_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2$.

Система дифференциальных уравнений для сопряженных функций имеет разрывную правую часть:

$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = -p_1, \quad (5.12)$$

$$\dot{p}_3 = \begin{cases} p_2 \frac{w_1}{x_3^2} u, & x_3 < M_0; \\ p_2 \frac{w_2}{(x_3 - M_1)^2} u, & x_3 \geq M_0. \end{cases} \quad (5.13)$$

В конечной точке выполнено условие трансверсальности $p_3(T) = 0$.

Анализ сопряженной системы показывает, что $p_1(t) = const = a$, $t \in [0, T]$; $p_2(t) = -at + b$, $t \in [0, T]$ являются непрерывными функциями, а функция $p_3(t)$ имеет разрыв в точке τ пересечения траекторией поверхности переключения $x_3(\tau) = M_2 + F_2 + M_1$. Обозначая через v величину скачка сопряженной функции, запишем условие скачка сопряженной функции:

$$\varphi_1(\tau^-) - \varphi_1(\tau^+) = p_2(\tau) \left(\frac{\omega_1}{M_0} - \frac{\omega_2}{M_0 - M_1} \right),$$

$$p_3(\tau^-) = p_3(\tau^+) + v.$$

Функция Понtryгина является непрерывной в точке τ , поэтому $H_1(\tau^-) = H_2(\tau^+)$ или $\varphi_1(\tau^-)u(\tau^-) = \varphi_1(\tau^+)u(\tau^+)$:

$$-u^- + p_2(\tau) \frac{\omega_1 u^-}{M_0} - p_3(\tau^-)u^- = -u^+ + p_2(\tau) \frac{\omega_2 u^+}{M_0 - M_1} - p_3(\tau^+)u^+.$$

Согласно теореме 1 (§4), величина скачка определяется выражением

$$= \begin{pmatrix} u^+ - u^- \\ 0 \\ \frac{\omega_1}{M_0} u^- - \frac{\omega_2}{M_0 - M_1} u^+ \\ u^+ - u^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ p_1(\tau^+) \\ p_2(\tau^+) \\ p_3(\tau^+) \end{pmatrix} \times \left[\frac{dS}{dt}(\tau^-) \right]^{-1}, \quad (5.14)$$

$$\text{где } \frac{dS}{dt}(\tau^-) = -u(\tau^-) = -u^-, \quad u(\tau^+) = u^+.$$

Учитывая непрерывность функции Понtryгина и сопряженных функций $p_i(\tau^-) = p_i(\tau^+)$, $i = 1, 2$, предполагая, что $u^- > 0$, получим

$$= p_2(\tau) \left[\frac{\omega_1}{M_0} - \frac{\omega_2}{M_0 - M_1} \frac{u^+}{u^-} \right] + \left(\frac{u^+}{u^-} - 1 \right) p_3(\tau^+) + \frac{u^+}{u^-}. \quad (5.15)$$

Итак, краевая задача принципа максимума включает в себя исходную систему разрывных дифференциальных уравнений (5.1)-(5.2) и сопряженную систему (5.12)-(5.13), начальные и граничные условия. Оптимальное управление выбирается согласно принципу максимума (5.11).

Для анализа оптимального решения вычислим первую и вторую производные функции переключения $\phi_i(t)$, $i=1,2$:

$$\dot{\phi}_1(t) = -p_1(t) \frac{\omega_1}{x_3(t)}, \quad \ddot{\phi}_1(t) = -p_1(t) \frac{\omega_2}{x_3(t) - M_1}. \quad (5.16)$$

Так как $p_1(t) = a$, $\omega_1/x_3 > 0$, $\omega_2/(x_3 - M_1) > 0$, то функции $\dot{\phi}_i(t)$, $i=1,2$ не изменяют знака, т.е. функции $\phi_i(t)$, $i=1,2$ одновременно являются либо монотонно возрастающими, либо монотонно убывающими в области определения. Поэтому на каждом из участков $I_1 = [0, \tau]$, $I_2 = [\tau, T]$ возможно не более одного переключения управления с максимального значения на нуль или с нулевого значения на максимальное.

Если $a \neq 0$, то $\phi_i(t) = 0$, $i=1,2$. Если $c_i \neq 0$, то на каждом из участков I_1 , I_2 управление постоянно. Если $c_i = 0$, то имеет место вырождение принципа максимума. В таком случае для построения оптимального решения полезно вычислить вторую производную функций переключения и проверить условия Лежандра-Клебша:

$$\ddot{\phi}_1(t) = -p_1 \frac{\omega_1}{x_3^2} u, \quad t \in [0, \tau], \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2 \mathcal{H}}{dt^2} = -a \frac{\omega_1}{x_3^2} \geq 0. \quad (5.18)$$

Вторая производная функции переключения после отсоединения первой ступени вычисляется аналогично:

$$\ddot{\phi}_2(t) = -p_1 \frac{\omega_1}{(x_3 - M_1)^2} u, \quad t \in [\tau, T] \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2 \mathcal{H}}{dt^2} = -a \frac{\omega_1}{(x_3 - M_1)^2} \geq 0. \quad (5.20)$$

Отсюда следует, что для существования особого оптимального управления необходимо, чтобы $a \leq 0$.

В силу непрерывности функции Понтрягина выполняется равенство $\phi_1(\tau^-)u(\tau^-) = \phi_2(\tau^+)u(\tau^+)$.

Если $a < 0$, то оптимальное управление равно нулю при $t \in [0, \tau_1]$, $0 \leq \tau_1 \leq \tau$, затем выключается двигатель, и оптимальное управление равно своему максимальному значению \bar{u}_i , $t \in [\tau_1, \tau]$. Происходит отсоединение

первой ступени. После этого аналогичное управление осуществляется второй ступенью, а именно $\bar{u}(t) = 0$, $t \in [\tau_1, \tau_2]$, $\bar{u}(t) = \bar{u}_2$, $t \in [\tau_2, T]$. Заметим, что возможны случаи, когда $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = T$, причем для того чтобы включился второй двигатель, необходимо отсоединение первой ступени, которое происходит в тот момент, когда будет израсходовано топливо первой ступени.

Рассмотрим произвольный интервал $[t_1, t_2]$, где $\bar{u}(t) = \bar{u}_i = const$, считая, что в момент t_1 известны величины $x_3(t_1)$, $x_2(t_1)$, $x_1(t_1)$. На этом интервале

$$x_3(t) = x_3(t_1) - u_i(t - t_1) > 0, \quad (5.21)$$

$$x_2(t) = x_2(t_1) - g(t - t_1) - \omega_i \ln \frac{m_i - u_i(t - t_1)}{m_i}, \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t_1) + x_2(t_1)(t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2 + \\ &+ \omega_i \frac{m_i}{u_i} \left(1 - \frac{u_i}{m_i}(t - t_1) \right) \times \ln \left(1 - \frac{u_i}{m_i}(t - t_1) \right) + \\ &+ \omega_i(t - t_1), \text{ если } u_i \neq 0, \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$x_1(t) = x_1(t_1) + x_2(t_1)(t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2, \text{ если } u_i = 0. \quad (5.24)$$

В формулах (5.21)–(5.24) $m_i = x_3(t_1)$, если $[t_1, t_2] \subset [0, \tau]$, $m_i = x_3(t_1) - M_1$, если $[t_1, t_2] \subset [\tau, T]$, $i = 1, 2$.

Полученные выше формулы позволяют записать уравнения движения и установить связи между параметрами задачи, которые должны быть подобраны таким образом, чтобы множество допустимых процессов W было не пусто и поставленная цель могла быть достигнута.

Суммируя доказанные выше утверждения, запишем оптимальный процесс:

$$t \in [0, \tau_1]: \bar{u}(t) = 0, x_3(t) = x_3(0) = x_3(\tau_1),$$

$$x_2(t) = v_0 - gt, x_1(t) = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2};$$

$$t \in [\tau_1, \tau]: \bar{u}(t) = \bar{u}_1, x_3(t) = x_3(0) - \bar{u}_1(t - \tau_1),$$

$$x_2(t) = v_0 - g\tau_1 - g(t - \tau_1) - \omega_1 \ln[1 - \alpha_1(t - \tau_1)],$$

$$x_1(t) = x_1(\tau_1) + x_2(\tau_1)(t - \tau_1) - \frac{g}{2}(t - \tau_1)^2 + \\ + \frac{\omega_1}{\alpha_1} [1 - \alpha_1(t - \tau_1)] \ln [1 - \alpha_1(t - \tau_1)] + \varphi_1(t - \tau_1);$$

$$t \in [\tau, \tau_2]: \bar{u}(t) = 0, \quad x_3(t) = x_3(\tau) = x_3(\tau_2) = M_2 + F_2,$$

$$x_2(t) = x_2(\tau) - g(t - \tau),$$

$$x_1(t) = x_1(\tau) + x_2(\tau)(t - \tau) - \frac{g}{2}(t - \tau)^2;$$

$$t \in [\tau_2, T]: \bar{u}(t) = \bar{u}_2, \quad x_3(t) = x_3(\tau_2) - \bar{u}_2(t - \tau_2),$$

$$x_2(t) = x_2(\tau_2) - g(t - \tau_2) - \omega_2 \ln [1 - \alpha_2(t - \tau_2)],$$

$$x_1(t) = x_1(\tau_2) + x_2(\tau_2)(t - \tau_2) - \frac{g}{2}(t - \tau_2)^2 +$$

$$+ \frac{\omega_2}{\alpha_2} [1 - \alpha_2(t - \tau_2)] \ln [1 - \alpha_2(t - \tau_2)] + \varphi_2(t - \tau_2),$$

где

$$\alpha_1 = \bar{u}_1 x_3^{-1}(0) = \bar{u}_1 (M_1 + M_2 + F_1 + F_2)^{-1}$$

$$\alpha_2 = \bar{u}_2 x_3^{-1}(\tau_2) = \bar{u}_2 (M_2 + F_2)^{-1}.$$

С учетом граничных условий (5.3) и уравнения поверхности переключения можно определить τ_1 , τ , τ_2 :

$$\tau = \tau_1 + F_1 \bar{u}_1^{-1},$$

$$\tau_2 = T - \alpha_2^{-1} \left(1 - \exp \left[\frac{v_0 - gT}{\omega_2} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \ln \left[1 + \frac{F_1}{M_1 + M_2 + F_2} \right] \right] \right).$$

Условие $x_1(T) = 0$ позволяет записать уравнение для определения параметра τ_1 . Момент переключения управления τ_2 вследствие ограниченного запаса топлива второй ступени удовлетворяет неравенствам $0 < T - \tau_2 \leq F_2 \bar{u}_2^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Оптимальное управление $\bar{u}(\tau^-)$ не равно нулю. На участке, где оптимальное управление равно нулю, масса ракеты не изменяется. Это означает, что в таком случае τ не есть момент пересечения траекторией поверхности переключения. Если в выражении для сопряженных функций $p_1(t) = a$, $p_2(t) = -at + b$ постоянная a равна нулю, то функции переключения $\varphi_i(t) = l_i$, $i = 1, 2$, и оптимальное управление постоянны на каждом из интервалов I_1, I_2 и равны своему максимально возможному зна-

чению, если $c_i > 0$, $i = 1, 2$, либо нулю, если $c_i < 0$, $i = 1, 2$. Если $c_i < 0$, $i = 1, 2$, то $\varphi_i(t) = 0$, $t \in I_i$, $i = 1, 2$ при этом $p_1(t) = 0$, $t \in [0, T]$; $p_2(t) = b$, $t \in [0, T]$; $p_3(t) = -1 + b\varpi_1 M_o^{-1}$, $t \in I_1$; $p_3(t) = -1 + b\varpi_2(M_o - M_1)^{-1}$, $t \in I_2$; $\dot{p}_3(t) = 0$, $t \in [0, T]$, $p_3(T) = 0$.

Легко видеть, что в данной задаче сопряженная вектор-функция не равна тождественно нулю, найденное оптимальное решение удовлетворяет необходимым и достаточным условиям оптимальности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Задачу (5.1)-(5.6) можно решать с нефиксированным временем посадки T или в качестве минимизируемого функционала рассматривать время маневра при заданном максимальном расходе топлива. Границное условие $x_2(T) = 0$ можно заменить более мягким условием $0 \leq x_2(T) \leq v_{\max}$. Аналогичный подход позволяет рассмотреть задачу о мягкой посадке k -ступенчатой ракеты на заданную поверхность.

§ 6. Модель процесса распространения заболевания, описываемая разрывной системой дифференциальных уравнений

1. Обозначим через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ число людей, подверженных заболеванию, инфицированных и выздоравливающих соответственно. Пусть функция $f(x, y)$ характеризует число встреч людей, подверженных заболеванию (класс 1), и инфицированных людей (класс 2), (например, функция $f(x, y) = \beta xy$), при этом предполагается, что заболевание передается только при встрече инфицированного и здорового человека, а коэффициент β характеризует частоту встреч людей группы 1 и группы 2. Функция $f(x, y)$ может быть выбрана в виде $f(x, y) = \frac{\beta xy}{x + y}$, здесь β есть вероятность того, что человек из группы 1 встречает человека из группы 2, при этом величина $y(x + y)^{-1}$ есть вероятность того, что встреченный им человек принадлежит ко второй группе.

Динамика процесса распространения заболевания описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = -f(x, y), \quad \dot{y} = f(x, y) - \gamma y, \quad \dot{z} = \gamma y, \quad (6.1)$$

здесь величина $\gamma > 0$ характеризует среднюю скорость выздоровления, а именно γ^{-1} есть время, необходимое для выздоровления инфицированного

человека, или средняя продолжительность болезни, $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$ - известные значения числа людей, подвергенных заболеванию, инфицированных и выздоравливающих в начальный момент времени.

В общем случае функция $f(x, y)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} f(0,0) = 0, \quad f(x, y) > 0, \quad x, y > 0; \\ f_{xx}, f_{yy} \leq 0, \quad x, y > 0; \quad f_x, f_y > 0, \quad x, y > 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Заметим, что $x + y + z = \text{const}$. Если людям, подвергнутым заболеванию, вводится вакцина, уменьшающая в единицу времени число людей, подвергнутых заболеванию, на величину $u(t)$, то первое дифференциальное уравнение в системе (6.1) должно быть заменено уравнением с управлением $u(t)$:

$$\dot{x} = -f(x, y) - u. \quad (6.3)$$

Кусочно-непрерывная функция $u(t)$ является функцией управления. Вследствие ограниченных технических и финансовых средств скорость введения вакцины ограничена, т.е. в задаче имеет место ограничение на управление:

$$0 \leq u(t) \leq u_0, \quad (6.4)$$

где u_0 - максимальное число людей, которому может быть введена вакцина в единицу времени.

Цена заболевания складывается из цены ухода за инфицированными людьми, затрат на вакцину и её введение.

Принимая стоимость ухода за больным человеком равной единице, запишем общую стоимость эпидемии за фиксированное время T :

$$I(u) = \int_0^T (y(t) + cu(t)) dt. \quad (6.5)$$

Обычно относительная стоимость вакцинации достаточно мала, $c < 1$. Задача оптимального управления процессом распространения заболевания состоит в построении измеримого или кусочно-непрерывного оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, T]$, которое минимизирует функционал (6.5) при ограничениях (6.1)-(6.3).

Как уже было отмечено выше, функция $f(x, y)$ в результате проведения лекций, радиопередач программы "Здоровье" может скачком изменяться. Например, если число инфицированных людей станет достаточно велико, больше некоторого порогового значения N , то число встреч, а значит, и число инфицированных в единицу времени уменьшится.

$$f(x, y) = \begin{cases} f^1(x, y), & y < N, \\ f^2(x, y), & y \geq N. \end{cases} \quad (6.6)$$

В таком случае задача (6.1)–(6.5) с учетом (6.6) относится к разрывным задачам оптимального управления, и для её решения может быть использована теорема 1 (§ 2).

Введем функцию Понтрягина:

$$H_i = -\lambda_0(y + cu) - \lambda_1(f^i + u) + \lambda_2(f^i - \gamma y), \quad i=1,2, \quad \lambda_0 \geq 0.$$

Запишем систему дифференциальных уравнений для сопряженных функций:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2)f'_x, \quad i=1,2, \\ \dot{\lambda}_2 &= \lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_2)f'_y - \lambda_2 y, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Задача (6.1)–(6.6) является задачей оптимального управления со свободным правым концом, поэтому если $x(T) > 0, y(T) > 0$, то

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0. \quad (6.8)$$

Если $\lambda_0 = 0$, то в силу однородности системы (6.7) и граничных условий (6.8) все множители $\lambda_i, i=1,2$, равны нулю одновременно, это означает, что в задаче нерегулярных решений нет и можно положить $\lambda_0 = 1$.

Согласно принципу максимума, оптимальное управление определяется условием (6.9):

$$\bar{u}(t) = \arg \max_{0 \leq u \leq u_0} [(-c - \lambda_1)u]. \quad (6.9)$$

Введём функцию переключения $\varphi(t) \equiv -c - \lambda_1$, с помощью которой запишем оптимальное управление:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_0, & \text{если } \varphi(t) > 0, \\ 0, & \text{если } \varphi(t) < 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Если на некотором интервале времени $\varphi(t) = 0$, то принцип максимума не позволяет определить оптимальное управление, которое может принимать любое значение из отрезка $[0, u_0]$. Функция $\lambda_1(t)$ является непрерывной на отрезке $[0, T]$.

Используя теорему о необходимых условиях оптимальности, вычислим величину скачка ν сопряженной функции $\lambda_2(t)$ в точке τ , $y(\tau) = N$:

$$\nu = \frac{(f^1(x, N) - f^2(x, N))(\lambda_1(\tau) - \lambda_2(\tau + 0)) + (u^- - u^+)(\lambda_1(\tau) + c)}{f^1(x, N) - \gamma N}.$$

Легко видеть, что функция Понтрягина является непрерывной, $H_1(\tau) = H_2(\tau)$, $\varphi(T) = -c < 0$, поэтому оптимальное управление в окрестности точки T равно нулю. Функция переключения также является непрерывной. Она может иметь разрыв производной лишь в точке пересечения траекторий поверхно-

сти переключения $S(t, y) = y - N$. Найдём производную функции переключения:

$$\phi = (\lambda_2 - \lambda_1) f_x^i, i=1,2.$$

Для того чтобы понять, сколько раз следует переключать оптимальное управление, нужно выяснить знак разности $\lambda_2 - \lambda_1$ на каждом из отрезков $[0, \tau]$, $[\tau, T]$.

Введём функцию $\psi = \lambda_1 - \lambda_2$ и вычислим её производную. Учитывая систему дифференциальных уравнений для сопряженных функций (6.7), получим

$$\psi' = \psi(f_x^i - f_y^i + \gamma) - \gamma\lambda_1 - 1, \quad \psi(T) = 0, \quad (6.11)$$

откуда следует, что $\psi'(T) = -1$. Это означает, что в некоторой окрестности T имеет место неравенство $\psi(t) > 0$. Пусть это неравенство нарушается в точке $t_1 < T$, $t_1 \geq \tau$, так что $\psi(t_1) = 0$ и $\psi'(t_1) \geq 0$. Из условия $\psi'(t_1) \geq 0$ следует, что $-\gamma\lambda_1(t_1) - 1 \geq 0$.

Вычисляя функцию Понтрягина в точке t_1 , получим неравенство

$$H(t_1) = \phi(t_1)u(t_1) - \psi(t_1)(f^i - \gamma y) - y(t_1)(1 + \lambda_1 y) \geq 0,$$

которое несовместимо с условием $H(T) = -y(T) < 0$. Из приведенного выше доказательства следует, что $\psi(t) \geq 0$, $t \in [\tau, T]$.

Уравнение для функции $\lambda_1(t)$ запишем в виде $\dot{\lambda}_1 = \gamma f_x^2$. Из положительности производной на отрезке $t \in [\tau, T]$ следует, что функция $\lambda_1(t)$, а следовательно, и функция $\phi(t)$ строго монотонны на отрезке $t \in [\tau, T]$. Поэтому может существовать только одна точка переключения управления $t^* \in [\tau, T]$, в которой $\phi(t^*) = 0$, и поэтому оптимальное управление $\bar{u}(t) = u_0$, если $t \in [\tau, t^*]$, и $\bar{u}(t) = 0$, если $t \in [t^*, T]$.

Функция $\psi(t)$ имеет скачок в точке τ , так что $\psi(\tau^-) = \psi(\tau^+) - v$, и анализ поведения $\psi(t)$ на интервале $[0, \tau)$ требует дополнительных исследований. Приведённые ниже замечания можно рассматривать как задачи с разрывной функцией $f(x, y)$ для самостоятельного решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Задачу оптимального управления (6.1)-(6.6) можно решать в предположении, что функция, определяющая поверхность переключения, имеет вид

$$S(t, x, y) = x - qy,$$

где параметр q характеризует допустимую часть инфицированных людей по отношению к общему числу здоровых людей.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотренная модель может быть расширена с учётом предположения, что цена вакцинации зависит от x и при этом $c'(x) \leq 0$, а также можно дополнительно предположить, что $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Усилия по проведению вакцинации могут изменяться со временем, тогда исходная система дифференциальных уравнений (6.1) может быть заменена следующей:

$$\dot{x} = -f(x, y) - ug(x), \quad g(x) > 0, \quad g'(x) > 0, \quad (6.12)$$

$$\dot{y} = f(x, y) - y, \quad (6.13)$$

а целевой функционал в этом случае имеет вид

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T (y(t) + du(t) + cg(x)y(t)) dt. \quad (6.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В некоторых ситуациях только часть инфицированных людей ответственны за перенос болезни, в этом случае во втором уравнении вместо функции f следует использовать функцию pf , где параметр p удовлетворяет неравенствам $0 < p < 1$. Тогда задача оптимального управления имеет вид

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T (y(t) + cu(t)) dt, \quad (6.15)$$

$$\dot{x} = -f - u, \quad \dot{y} = pf - y, \quad 0 < p < 1. \quad (6.16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Здесь была рассмотрена задача с фиксированным временем процесса T и случаем одноразового прокалывания траекторией поверхности переключения. Важно исследовать влияние этих предположений на оптимальное решение, в частности установить, при каких параметрах задачи реализуется залегание траектории на поверхности $S(t, x, y)$ или многократное её пересечение, как ведёт себя оптимальное решение с нефиксированным временем окончания процесса.

2. Рассмотрим задачу оптимального управления, моделирующую процесс распространения заболевания (при условии, что $x \gg y$, $x \equiv x(0)$, $A_i = \beta_i x(0)$, $i=1,2$), который контролируется с помощью введения карантина. Требуется найти минимум функционала

$$J(u) = \int_0^T (y + cuy) dt \quad (6.17)$$

при ограничениях

$$\dot{y} = A_i y - uy, \quad y(0) = y_0, \quad i=1,2, \quad (6.18)$$

$$0 \leq u \leq u_0 \text{ п.в. } t \in [0, T], \quad (6.19)$$

Применим теорему 1 (§4) для решения этой задачи. Функция Понtryгина имеет вид

$$H_i = -\lambda_0 u + A_i u p - y(p + \lambda_0 c)u, \quad i=1,2. \quad (6.20)$$

Запишем сопряженное уравнение:

$$\dot{p} = (-A_i + u)p + \lambda_0 + c\lambda_0 u, \quad i=1,2, \quad p(T) = 0 \quad (6.21)$$

и условие скачка в точке $y(\tau) = N$:

$$p(\tau^-) = p(\tau^+) + v, \quad (6.22)$$

где

$$v = \left(\frac{A_2 - u^+}{A_1 - u^-} - 1 \right) p(\tau^+) + c \frac{u^- - u^+}{A_1 - u^-} \quad (6.23)$$

или $p(\tau^-) = p(\tau^+) \frac{A_2 - u^+}{A_1 - u^-} + c \frac{u^- + u^+}{A_1 - u^-}$.

В формулах (6.20), (6.21) $\lambda_0 = 1$ в противном случае из условия $\lambda_0 = 0$ следует, что $p(t) \equiv 0$. Оптимальное управление $\bar{u}(t)$ зависит от знака функции переключения $\varphi(t) = -c - p(t)$:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_0, & \varphi(t) > 0, \\ 0, & \varphi(t) < 0, \\ [0, u_0], & \varphi(t) \equiv 0. \end{cases} \quad (6.24)$$

Легко видеть, что $\varphi(T) = -c < 0$, и если $\tau < T$, то имеется окрестность точки T , в которой $\bar{u}(t) = 0$. Если бы существовал интервал времени, на котором $\varphi(t) \equiv 0$ или $p(t) \equiv -c$, то на нем, согласно сопряженной системе, должно выполняться условие $1 + cA_i = 0$, $i=1,2$, что невозможно, т. к. $c, A_i > 0$. Поэтому оптимальное управление почти всюду определено и принимает значения u_0 или 0, что позволяет проинтегрировать сопряженное уравнение на каждом из интервалов постоянства $\bar{u}(t)$. Общее решение дифференциального уравнения (6.21) имеет следующий вид:

$$p(t) = D \exp[(u - A_i)t] - \frac{1 + cu}{u - A_i}. \quad (6.25)$$

Напоминание. Формула Коши для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с заданным начальным условием

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (6.26)$$

имеет вид

$$x(t) = \Phi(t) \left[x_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(t)b(t)dt \right], \quad (6.27)$$

имеет вид

$$x(t) = \Phi(t) \left[x_0 + \int_{t_0}^t [\Phi^{-1}(t)b(t)] dt \right], \quad (6.27)$$

где $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений системы (6.26), удовлетворяющая условиям

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi, \quad \Phi(t_0) = E, \quad (6.28)$$

E - единичная матрица, Φ^{-1} - матрица, обратная к фундаментальной матрице решений системы (6.26).

Когда вместо начального условия задано условие на конце отрезка $x(T) = x_1$, в формулах (6.27), (6.28) вместо t_0 нужно подставить T , вместо вектора x_0 - вектор x_1 .

Решение сопряженного уравнения на отрезке, где $u = \text{const}$, имеет вид

$$\begin{aligned} p(t) &= \exp[(u - A_2)(t - T)] \cdot \int_T^t \exp[(u - A_2)(T - t)](1 + cu)dt = \\ &= \frac{1 + cu}{A_2 - u} [1 - \exp[(u - A_2)(t - T)]] < 0. \end{aligned}$$

Заметим, что функция $p(t)$ в силу формулы Коши всегда отрицательна, а её производная - положительна:

$$\dot{p}(t) = (1 + cu)\exp[(u - A_2)(t - T)] > 0.$$

В силу того, что $\dot{\phi} = -\dot{p}$, функция переключения является монотонно убывающей функцией. Это означает, что на том множестве, где $\phi(t)$ непрерывна, возможно лишь одно переключение оптимального управления. Пусть τ_2 - точка переключения управления, $\tau < \tau_2 < T$, так что $\bar{u}(t) = 0$, $t \in [\tau_2, T]$;

$\bar{u}(t) = u_0$, $t \in [\tau, \tau_2]$. На отрезке $t \in [\tau_2, T]$, $\bar{u}(t) = 0$, $p(t) = \frac{1}{A_2}(1 - \exp[A_2(T - t)])$ и в

точке τ_2 выполнено условие $p(\tau_2) = -c$, поэтому $\tau_2 = T - A_2^{-1} \ln(1 + cA_2)$. Для точек $\tau < t \leq \tau_2$ функция $p(t)$ удовлетворяет уравнению (6.21), и её решение представимо в виде

$$p(t) = \Phi(t) \left[-c + \int_{\tau}^t [\Phi^{-1}(t)(1 + cu)] dt \right], \quad (6.29)$$

$$\Phi(\tau_2) = E, \quad \dot{\Phi} = (u - A_2)\Phi$$

или

$$P(t) = \frac{1+cu_0}{A_2-u_0} - c \exp[(u_0-A_2)(t-\tau_2)],$$

$\dot{P}(\tau_2) = 1 + A_2 c > 0$, т.е. функция $P(t) < c$, - убывающая для $t < \tau_2$ при любом постоянном управлении, а $\phi(t) > 0$. Из приведенных рассуждений следует, что на этом интервале оптимальное управление, согласно принципу максимума, действительно равно u_0 .

В точке пересечения поверхности $y(\tau) = N$ функция $p(t)$ имеет разрыв, так что

$$P(\tau^-) = \frac{1+cu_0}{A_1-u_0} - \frac{c(A_2-u_0)}{A_1-u^-} \exp[(u_0-A_2)(\tau-\tau_2)]. \quad (6.30)$$

Решим уравнение (6.21) для $t < \tau^-$ с учётом значения $p(\tau^-)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1+cu}{A_1-u} + \left[P(\tau^-) - \frac{1+cu}{A_1-u} \right] \exp[(u-A_1)(t-\tau)] \\ \dot{p}(t) &= \left[P(\tau^-) - \frac{1+cu}{A_1-u} \right] (u-A_1) \exp[(u-A_1)(t-\tau)]. \end{aligned}$$

Пусть $t \in [\tau_1, \tau]$: $\bar{u}(t) = u = \text{const}$, тогда, интегрируя сопряженную систему

$$\dot{p} = (u-A_1)p + 1 + cu, \quad p(\tau) = P(\tau^-)$$

найдём функцию $p(t)$:

$$p(t) = \Phi(t) \left[P(\tau^-) + \int \Phi^{-1}(s)(1+cu)ds \right],$$

где $\Phi(t) = \exp(u-A_1)(t-\tau)$, или

$$p(t) = \left[P(\tau^-) - \frac{1+cu}{A_1-u} \right] \exp[(u-A_1)(t-\tau)] + \frac{1+cu}{A_1-u}, \quad (6.31)$$

$$\dot{p}(t) = \left[P(\tau^-)(u-A_1) + 1 + cu \right] \exp[(u-A_1)(t-\tau)].$$

Если $-p(\tau^-)(A_1-u) + 1 + cu > 0$, то $\dot{p}(t) > 0$, функция переключения монотонна, $\dot{\phi}(t) < 0$ и возможно лишь одно переключение оптимального управления в точке τ_1 : $p(\tau_1) = -c$ ($\tau_1 \leq \tau^-$). Если $\bar{u}^- = 0$, то

$$p(t) = \left[P(\tau^-) - \frac{1}{A_1} \right] \exp[-A_1(t-\tau)] + \frac{1}{A_1}, \quad t \in [\tau_1, \tau], \quad (6.32)$$

$$\tau_1 = \tau - \frac{1}{A_1} \ln \left(\frac{-cA_1 + 1}{1 - p(\tau^-)A_1} \right). \quad (6.33)$$

Если $t \in [0, \tau_1]$, то оптимальное управление $\bar{u}(t) = u_0$ и сопряженная функция являются решением задачи Коши:

$$\dot{p} = p(A_1 - u_0) + 1 + cu_0, \quad p(\tau_1) = -c,$$

$$p(t) = \Phi(t) \left[p(\tau_1) + \int_{\tau_1}^t \Phi^{-1}(s)(1 + cu_0) ds \right],$$

где $\Phi(t) = \exp[(u_0 - A_1)(t - \tau_1)]$, или

$$p(t) = \left[p(\tau_1) - \frac{1 + cu_0}{A_1 - u_0} \right] \exp[(u_0 - A_1)(t - \tau_1)] + \frac{1 + cu_0}{A_1 - u_0}. \quad (6.34)$$

Точки τ и τ_1 удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\tau = \frac{u_0 \tau_1 + \ln \frac{N}{y_0}}{A_1}, \quad (6.35)$$

Найдем решение уравнения (6.18) с учетом величины оптимального управления:

$$t \in [0, \tau_1]: \bar{u}(t) = u_0, y(t) = y_0 \exp[(A_1 - u_0)t], \quad (6.36)$$

$$t \in [\tau_1, \tau]: \bar{u}(t) = 0, y(t) = y_0 \exp[A_1 t - u_0 \tau]$$

причем $y(\tau) = N$, откуда следует, что

$$\begin{aligned} \tau &= \left(u_0 \tau_1 + \ln \frac{N}{y_0} \right) (A_1)^{-1}; \\ t \in [\tau, \tau_2]: \bar{u}(t) &= u_0, y(t) = N \exp[(A_2 - u_0)(t - \tau)], \\ t \in [\tau_2, T]: \bar{u}(t) &= 0, y(t) = N \exp[A_2(t - \tau) + u_0 \tau], \end{aligned} \quad (6.37)$$

где $\tau_2 = T - (A_2)^{-1} \ln(cA_2 + 1)$.

Необходимые условия оптимальности позволили однозначно построить решение задачи оптимального управления в зависимости от параметров задачи c, A_i, u_0, T, y_0 , что позволяет исследовать устойчивость решения и вычислить стоимость процесса в зависимости от величины этих параметров.

Модель процесса распространения заболевания с учетом рождения и смертности населения

Пусть $x(t)$ - число людей, подверженных заболеванию, $y(t)$ - число инфицированных людей, $z(t)$ - число восстановившихся после заболевания людей в момент времени t . Далее Λ - скорость рождения людей, μ^{-1} - продолжительность жизни, γ^{-1} - время восстановления инфицированного человека без применения карантина или вакцинации или средняя продолжительность заболевания. В этом случае динамика заболевания описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -f(x, y) + \Lambda - \mu x, \\ \dot{y} = f(x, y) - (y + \mu)y, \\ \dot{z} = \gamma y - \mu z. \end{cases} \quad (6.38)$$

Складывая эти уравнения и обозначая сумму $x + y + z = N$, получим

$$\dot{N} = \Lambda - \mu N, \quad (6.39)$$

откуда следует, что решение уравнения (6.39) представимо в виде $N(t) = ce^{-\mu t} + \Lambda \mu^{-1}$ и стремится к величине $\Lambda \mu^{-1}$ при $t \rightarrow \infty$.

Далее будем предполагать, что общая численность населения не изменяется, т.е. поддерживается равновесное состояние, что означает $N = \Lambda \mu^{-1} = \text{const}$. Нормируя систему (6.38) на величину N и переходя к исходным обозначениям, придём к следующей системе дифференциальных уравнений, описывающей динамику заболевания, контролируемую с помощью введения вакцины:

$$\begin{cases} \dot{x} = -f(x, y) + \mu - \mu x - u(t), \\ \dot{y} = f(x, y) - (y + \mu)y, \end{cases} \quad (6.40)$$

где $x, y \geq 0$, $x + y \leq 1$, управляющая функция $u(t)$ положительна, ограничена величиной u_m и удовлетворяет неравенству

$$0 \leq u(t) \leq u_m. \quad (6.41)$$

Стоимость процесса определяется функционалом

$$J(u) = \int_0^T (y(t) + cu(t)) dt. \quad (6.42)$$

В этой модели также можно учесть тот факт, что инфицированные люди, выделяя, снова переходят в группу людей, подверженных заболеванию, т.е. могут быть повторно инфицированы. Тогда первое уравнение системы (6.40) примет вид

$$\dot{x} = -f(x, y) + \mu - \mu x + \gamma y - u. \quad (6.43)$$

В этом случае $x + y = 1$ и функцию $y(t)$ можно исключить из системы (6.40), (6.43) и функционала (6.42), при этом задача оптимального управления примет вид

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T [1 - x(t) + cu(t)] dt \rightarrow \inf, \quad (6.44)$$

$$\dot{x} = -f(x, 1-x) + (\mu + \gamma)(1-x) - u, \quad (6.45)$$

$$x(0) = x_0, 0 \leq u \leq u_m, t \in [0, T], 0 \leq x \leq 1. \quad (6.46)$$

Предположим далее, что при достижении некоторого заданного максимального отношения числа здоровых людей к числу инфицированных часто-

та встреч людей из первой и второй группы уменьшается. Это уменьшение может быть также результатом организации программы "Здоровье", состоящей в проведении ряда радио- и телепередач, лекций и т.п. В такой модели функция $f(x, y)$ разрывна и, в частности, может быть определена с помощью следующего выражения:

$$f(x, y) = \begin{cases} \beta_1 xy, & S(t, x, y) < 0, \\ \beta_2 xy, & S(t, x, y) \geq 0, \end{cases} \quad (6.47)$$

где поверхность переключения задаётся непрерывно дифференцируемой функцией $S(t, x, y) = e^{-\alpha t}(y - kx)$, в которой параметр $0 < k \ll 1$, коэффициент α учитывает влияние времени на восприятие информации об опасности заболевания, причем $y=1-x$.

Построим функцию Понтрягина:

$$H_i = -\lambda_0(1-x-cu) + p(t)[(\mu+\gamma)(1-x) - \beta_i x(1-x) - u], \quad i=1,2.$$

Введём функцию переключения $\varphi_i(t) = -\lambda_0 c - p(t)$, $i=1,2$, с помощью которой функция Понтрягина запишется в виде

$$H_i = \varphi_i(t)u + (1-x)\{-\lambda_0 + p(t)[\mu + \gamma - \beta_i x]\},$$

здесь $i=1$, если $t \in [0, \tau]$, $i=2$, если $t \in [\tau, T]$.

Задачу будем решать при условии, что функция $x(t)$ один раз пересекает поверхность переключения $S(t, x) = e^{-\alpha t}(1-(k+1)x)$ в точке τ : $x(\tau) = (k+1)^{-1}$. Согласно принципу максимума, оптимальное управление

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u^*, & \varphi_i(t) > 0, \\ 0, & \varphi_i(t) \leq 0, \end{cases} \quad i=1,2. \quad (6.48)$$

Сопряжённая система и условие трансверсальности на правом конце имеют вид

$$\dot{p}(t) = p(t)[\mu + \gamma + \beta_i(1-2x)] - \lambda_0, \quad p(T) = 0. \quad (6.49)$$

Запишем условие скачка функции $p(t)$ в точке пересечения поверхности переключения τ :

$$p(\tau^-) = p(\tau^+) + \lambda \frac{\partial S}{\partial x}(\tau), \quad (6.50)$$

$$\lambda = \left\{ p(\tau^+) \left[u^- - u^+ + \frac{k(\beta_1 - \beta_2)}{(k+1)^2} \right] + c(u^- - u^+) \right\} \cdot \left[\frac{dS}{dt}(\tau^-) \right]^{-1}, \quad (6.51)$$

где

$$\frac{\partial S}{\partial x}(\tau) = -(k+1)e^{-\alpha \tau},$$

Значение управления на каждом из интервалов $[0, \tau]$ и $[\tau, T]$ определяется знаком функции $\varphi(t)$. Если эта функция монотонна, то на каждом из интервалов может быть не более одного переключения.

Вычислим $\dot{\varphi}(t) = -\dot{p}(t) = -pA + 1$, где $A = \mu + \gamma + \beta(1 - 2x)$. Используя представление решения для функции $p(t)$ с помощью формулы Коши, легко видеть, что $\dot{p}(t) < 0$, поэтому $\dot{\varphi}(t) > 0$ и оптимальное управление имеет вид

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_m, & t \in [0, \tau_1], \\ 0, & t \in [\tau_1, \tau], \end{cases} \quad (6.52)$$

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_m, & t \in [\tau, \tau_2], \\ 0, & t \in [\tau_2, T]. \end{cases} \quad (6.53)$$

Точки переключения управления τ_1, τ_2 определяются из условий $\varphi_1(\tau_1) = 0$, $\varphi_2(\tau_2) = 0$ аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере.

Для построения оптимального решения необходимо решить краевую задачу, которая включает в себя исходные дифференциальные уравнения (6.45), сопряженное дифференциальное уравнение (6.49) с краевыми условиями $x(0) = x_0$, $p(T) = 0$ и условием скачка (6.51), в которых оптимальное управление определяется с помощью соотношений (6.52), (6.53). Таким образом, построенная краевая задача имеет разрывную правую часть в точках τ_1, τ, τ_2 и может быть решена методом проекции градиента или методом многократного шунтирования.

§ 7. Метод пристрелки для решения разрывных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Линейная неоднородная система обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y' = T(x)y + g(x) \quad (7.1)$$

с граничным условием

$$Ay(a) + By(b) = C \quad (7.2)$$

где $T(x)$, A , B - матрицы размерности $n \times n$; C - вектор размерности n ; $g(x)$: $[a, b] \rightarrow R^n$ - непрерывная вектор-функция, матрица $T(x)$ имеет непрерывные компоненты.

Обозначим через вектор $y(x, s)$ решение задачи Коши для системы (7.1) с начальными условиями в точке $x=a$; $y(a)=s$, где $s=(s_1, s_2, \dots, s_n)$, или с учетом введенного обозначения это начальное условие запишется в виде

$$y(a, s)=s.$$

Покажем, что решение задачи Коши $y(x, s)$ представимо в следующем виде:

$$y(x, s)=Y(x)s + y(x, 0), \quad x \in [a, b], \quad (7.3)$$

где $Y(x)$ - фундаментальная матрица решений системы

$$\begin{cases} Y'(x) = T(x)Y(x), \\ Y(a) = I. \end{cases} \quad (7.4)$$

Для доказательства подставим в исходную систему (7.1) представление $y(x, s)$ с помощью (7.3). Введем функцию

$$u(x, s)=Y(x)s + y(x, 0). \quad (7.5)$$

Продифференцируем по x выражение (7.5):

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx}(x, s) &= T(x)Y(x)s + \frac{dy}{dx}(x, 0) = T(x)Y(x)s + T(x)y(x, 0) + g(x) = \\ &= T(x)[Y(x)s + y(x, 0)] + g(x) = T(x)U(x, s) + g(x). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функция (7.5) удовлетворяет системе (7.1).

Начальное условие выполняется: $u(a, s)=Y(a)s + y(a, 0)=s$. Следовательно, решение задачи Коши представимо в виде (7.3). Далее будем использовать метод Ньютона. Построим вектор-функцию $F(s)$, которая представляет собой невязку системы линейных уравнений (7.2):

$$F(s)=As + By(b, s) - C. \quad (7.6)$$

Для построения решения задачи (7.1) - (7.2) нам необходимо найти такое s , чтобы $F(s)=0$.

В общем случае эта задача решается методом Ньютона. В данном случае $F(s)$ линейна по s и допускает явное выражение для вектора s .

Подставляя в формулу (7.6) функции $y(b, s)$ ее представление (7.3), получим

$$F(s)=As + B[Y(b)s + y(b, 0)] - C=0,$$

или

$$F(s)=[A+BY(b)]s + By(b, 0) - C=0.$$

Это уравнение является линейным по s и имеет решение:

$$\bar{s} = -[A + BY(b)]^{-1} \times [By(b, 0) - C]. \quad (7.7)$$

Зная \bar{s} , мы можем найти решение задачи (7.1) - (7.2) как решение задачи Коши $y(x, \bar{s})$.

Составная система обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим составную систему дифференциальных уравнений с одним переключением в точке τ

$$\begin{cases} y' = T_1(x)y + g_1(x), x \in [a, \tau], \\ y' = T_2(x)y + g_2(x), x \in [\tau, b], \end{cases} \quad (7.8)$$

с граничным условием

$$Ay(a) + By(b) = C. \quad (7.9)$$

Обозначим через

$y^1(x, s^1)$ - решение задачи на $[a, \tau]$,

$y^2(x, s^2)$ - решение задачи на $[\tau, b]$.

Согласно доказанному выше представлению (7.3), решение задачи Коши имеет вид

$$y^1(x, s^1) = Y_1(x)s^1 + y^1(x, 0), x \in [a, \tau], \quad (7.10)$$

$$y^2(x, s^2) = Y_2(x)s^2 + y^2(x, 0), x \in [\tau, b], \quad (7.11)$$

где $Y_i(x)$ - матрица фундаментальных решений системы на отрезке $[a, \tau]$:

$$\begin{cases} Y_1'(x) = T_1(x) \cdot Y_1(x), \\ Y_1(a) = I, \end{cases}$$

$Y_2(x)$ - матрица фундаментальных решений системы на отрезке $[\tau, b]$:

$$\begin{cases} Y_2'(x) = T_2(x) \cdot Y_2(x), \\ Y_2(\tau) = I. \end{cases}$$

Условие непрерывности решения имеет вид

$$y^1(\tau, s^1) = y^2(\tau, s^2). \quad (7.12)$$

Построим вектор-функцию $F(s) = (F_1(s), F_2(s))$, используя пограничные условия и условия непрерывности решения:

$$F(s) = \begin{cases} F_1(s) \\ F_2(s) \end{cases} = \begin{cases} Ay^1(a, s^1) + By^2(b, s^2) - C \\ y^1(\tau, s^1) - y^2(\tau, s^2) \end{cases}. \quad (7.13)$$

Используя представления (7.10), (7.11), перепишем $F(s)$ в виде

$$F(s) = \begin{cases} As^1 + BY_2(b)s^2 + By^2(b, 0) - C, \\ Y_1(\tau)s^1 - Y_2(\tau)s^2 + y^1(\tau, 0) - y^2(\tau, 0) \end{cases}. \quad (7.14)$$

Учитывая, что $s = (s^1, s^2)$, равенство $F(s) = 0$ можно переписать в форме:

$$F(s) = \begin{pmatrix} A & BY_2(b) \\ Y_1(\tau) & -Y_2(\tau) \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} By^2(b, 0) - C, \\ y^1(\tau, 0) - y^2(\tau, 0) \end{pmatrix} = 0. \quad (7.15)$$

Решая (7.15), найдем выражение для $s = (s^1, s^2)$:

$$s = -\begin{bmatrix} A & BY_2(b) \\ Y_1(\tau) & -Y_2(\tau) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} By^2(b, 0) - C, \\ y^1(\tau, 0) - y^2(\tau, 0) \end{bmatrix} = 0. \quad (7.16)$$

Если $Y_i(x)$ неизвестны, можно определить решение (7.13) приближенно. Для уточнения приближенного значения s можно использовать алгоритм метода Ньютона:

$$s^{(i+1)} = s^{(i)} - [DF(s^{(i)})]^{-1} \cdot F(s^{(i)}), \quad (7.17)$$

где $DF(s)$ - матрица производных вектор-функции $F(s)$ по вектору s . Более подробно эта формула имеет следующий вид:

$$s^{(i+1)} = s^{(i)} - \begin{bmatrix} A & BY_2(b) \\ Y_1(\tau) & -Y_2(\tau) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{bmatrix} A & BY_2(b) \\ Y_1(\tau) & -Y_2(\tau) \end{bmatrix} s^{(i)} + \begin{bmatrix} By^2(b, 0) - C, \\ y^1(\tau, 0) - y^2(\tau, 0) \end{bmatrix} \right].$$

Вычислив \bar{s} , находим решение задачи Коши $y(x, \bar{s})$, используя представления (7.10) и (7.11).

Линейная неоднородная составная система с двумя точками переключения

Рассмотрим систему с двумя точками переключения τ_1, τ_2 :

$$\begin{cases} y' = T_1(x)y + g_1(x), & x \in [a, \tau_1], \\ y' = T_2(x)y + g_2(x), & x \in [\tau_1, \tau_2], \\ y' = T_3(x)y + g_3(x), & x \in [\tau_2, b] \end{cases} \quad (7.18)$$

с граничным условием

$$Ay(a) + By(b) = C. \quad (7.19)$$

Обозначим решение этой задачи через

$$\begin{aligned} y^1(x, s^1) &\text{ на отрезке } [0, \tau_1], \\ y^2(x, s^2) &\text{ на отрезке } [\tau_1, \tau_2], \\ y^3(x, s^3) &\text{ на отрезке } [\tau_2, b]. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Условия непрерывности решения в точках τ_1, τ_2 для этой задачи имеют вид

$$\begin{cases} y^1(\tau_1, s^1) = y^2(\tau_1, s^2), \\ y^2(\tau_2, s^2) = y^3(\tau_1, s^3). \end{cases} \quad (7.21)$$

Используя представление (7.3), запишем решение задачи (7.18) на отрезках $[a, \tau_1]$, $[\tau_1, \tau_2]$, $[\tau_2, b]$:

$$\begin{aligned} y^1(x, s^1) &= Y_1(x)s^1 + y^1(x, 0), x \in [a, \tau_1], \\ Y_1(x); \begin{cases} Y'_1(x) = T_1(x)Y_1(x), \\ Y_1(a) = I, \end{cases} \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} y^2(x, s^2) &= Y_2(x)s^2 + y^2(x, 0), x \in [\tau_1, \tau_2], \\ Y_2(x); \begin{cases} Y'_2(x) = T_2(x)Y_2(x), \\ Y_2(\tau_1) = I, \end{cases} \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} y^3(x, s^3) &= Y_3(x)s^3 + y^3(x, 0), x \in [\tau_2, b], \\ Y_3(x); \begin{cases} Y'_3(x) = T_3(x)Y_3(x), \\ Y_3(\tau_2) = I. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Построим вектор-функцию $F(s)$:

$$F(s) = \begin{cases} Ay'(a, s^1) + By^3(b, s^3) - C \\ y^1(\tau_1, s^1) - y^2(\tau_1, s^2) \\ y^2(\tau_2, s^2) - y^3(\tau_1, s^3) \end{cases}.$$

Используя представления (7.22)–(7.24), получим уравнение

$$F(s) = \begin{cases} As^1 + B[Y_3(b)s^3 + y^3(b, 0)] - C \\ Y_1(\tau_1)s^1 + y^1(\tau_1, 0) - Y_2(\tau_1)s^2 - y^2(\tau_1, 0) \\ Y_2(\tau_2)s^2 + y^2(\tau_2, 0) - Y_3(\tau_2)s^3 - y^3(\tau_2, 0) \end{cases} = 0 \quad (7.25)$$

или

$$F(s) = \begin{pmatrix} A & 0 & BY_3(b) \\ Y_1(\tau_1) & -Y_2(\tau_1) & 0 \\ 0 & Y_2(\tau_2) & -Y_3(\tau_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} By^3(b, 0) - C \\ y^1(\tau_1, 0) \\ y^2(\tau_2, 0) \end{pmatrix} = 0. \quad (7.26)$$

Отсюда находим $s = (s^1, s^2, s^3)$:

$$F(s) = \begin{pmatrix} A & 0 & BY_3(b) \\ Y_1(\tau_1) & -Y_2(\tau_1) & 0 \\ 0 & Y_2(\tau_2) & -Y_3(\tau_2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} By^3(b, 0) - C \\ y^1(\tau_1, 0) \\ y^2(\tau_2, 0) \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

Рассмотрим, как преобразуется формула (7.27), если

$$T_1(x) = T_2(x) = T_3(x) = T(x).$$

Используя формулы (7.22)–(7.24), найдем решение на $[0, \tau_1]$:

$$y^1(x, s^1) = Y_1(x)s^1 + y^1(x, 0), x \in [0, \tau_1], \quad (7.28)$$

где $Y_1(x)$ – фундаментальная матрица решений системы

$$\begin{cases} Y'_1(x) = T(x)Y_1(x), \\ Y_1(a) = I, \end{cases} \quad (7.29)$$

где $y^1(x,0) = Y_1(x) \cdot \int_a^x Y_1^{-1}(t) g_1(t) dt$.

Решение на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$:

$$y^2(x, s^2) = Y_2(x) s^2 + y^2(x, 0), x \in [\tau_1, \tau_2], \quad (7.30)$$

где

$$Y_2(x) : \begin{cases} Y'_2(x) = T(x) Y_2(x) \\ Y_2(\tau_1) = I, \end{cases} \quad (7.31)$$

$$y^2(x, 0) = Y_2(x) \cdot \int_{\tau_1}^x Y_2^{-1}(t) g_2(t) dt. \quad (7.32)$$

Решение на отрезке $[\tau_2, b]$:

$$y^3(x, s^3) = Y_3(x) s^3 + y^3(x, 0), x \in [\tau_2, b],$$

$$Y_3(x) : \begin{cases} Y'_3(x) = T(x) Y_3(x) \\ Y_3(\tau_2) = I \end{cases} \quad (7.33)$$

$$y^3(x, 0) = Y_3(x) \cdot \int_{\tau_2}^x Y_3^{-1}(t) g_3(t) dt.$$

Из определений (7.29), (7.31), (7.33) следует, что матрицы $Y_1(x), Y_2(x), Y_3(x)$ различаются на постоянные множители.

Пусть $Y(x)$ - фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения. Тогда $Y_1(x), Y_2(x), Y_3(x)$ можно выразить через $Y(x)$:

$$\begin{cases} Y_1(x) = Y(x), \\ Y_2(x) = Y(x) \cdot Y^{-1}(\tau_1), \\ Y_3(x) = Y(x) \cdot Y^{-1}(\tau_2). \end{cases} \quad (7.34)$$

Используя (7.34), запишем решение системы на отрезках $[a, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], [\tau_2, b]$:

$$y^1(x, s^1) = Y(x) s^1 + Y(x) \int_a^x Y^{-1}(t) g_1(t) dt; x \in [a, \tau_1], \quad (7.35)$$

$$y^2(x, s^2) = Y(x) \cdot Y^{-1}(\tau_1) s^2 + y^2(x, 0), x \in [\tau_1, \tau_2], \quad (7.36)$$

$$y^3(x, s^3) = Y(x) \cdot Y^{-1}(\tau_2) s^3 + y^3(x, 0), x \in [\tau_2, b], \quad (7.37)$$

$$y^3(x, 0) = Y(x) \cdot Y^{-1}(\tau_2) \cdot \int_{\tau_2}^x (Y(t) \cdot Y_3^{-1}(t)) g_3(t) dt.$$

В данном случае формула (7.27) для решения уравнения $F(\bar{s}) = 0$ имеет вид

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} A & 0 & BY_3(b) \\ Y_1(\tau_1) & -Y_2(\tau_1) & 0 \\ 0 & Y_2(\tau_2) & -Y_3(\tau_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} By^3(b,0) - C \\ y^1(\tau_1,0) \\ y^2(\tau_2,0) \end{bmatrix}, \quad (7.38)$$

или, учитывая (7.34), получим

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} A & 0 & BY(b)Y^{-1}(\tau_2) \\ Y_1(\tau_1) & -I & 0 \\ 0 & Y_2(\tau_2) & -I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} By^3(b,0) - C \\ y^1(\tau_1,0) \\ y^2(\tau_2,0) \end{bmatrix}. \quad (7.39)$$

Аналогичные формулы можно вывести для случая, если краевая задача имеет конечное число точек разрыва правой части системы дифференциальных уравнений. Эта ситуация типична для краевой задачи принципа максимума Понтрягина.

Задачи для самостоятельной работы

ЗАДАЧА 1 (о сервомеханизме)

Динамика сервомеханизма описывается дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{x} + \alpha_i \dot{x} + \beta_i x = u(t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T],$$

где $x(t)$ - отклонение от положения равновесия, $\alpha_i \dot{x}(t)$ - сила сопротивления, $\beta_i x(t)$ - упругая сила, $u(t)$ - внешнее воздействие, на которое наложено ограничение $|u(t)| \leq 1$. Предположим, что коэффициенты сопротивления и упругости могут скачком изменяться при переходе через заданную поверхность переключения $S(t, x) = 0$, так что $i = 1$, если $S(t, x) < 0$, $i = 2$, если $S(t, x) \geq 0$. В начальный момент времени известно отклонение от положения равновесия $x(0) = \xi_1$, скорость $\dot{x}(0) = \xi_2$, а в конечный момент времени T требуется перевести систему в новое состояние, например, $\dot{x}(T) = x(T) = 0$. Задача оптимального управления ставится следующим образом. Перевести систему из точки с координатами (ξ_1, ξ_2) в точку $(0,0)$ за минимальное время. Таким образом, задача оптимального управления имеет вид

$$J(u) = T \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha_i x_2 - \beta_i x_1 + u(t),$$

$$x_i(0) = \xi_i, \quad x_i(T) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, T],$$

$$i = \begin{cases} 1, & S(t, x_1, x_2) < 0, \\ 2, & S(t, x_1, x_2) \geq 0. \end{cases}$$

При анализе решения требуется исследовать количество переключений оптимального управления, построить краевую задачу принципа максимума, функцию Ляпунова, изобразить траекторию на фазовой плоскости, полагая $S(t, x) = x_i - M_i$, $i = 1, 2$ где M_i - заданные значения отклонения или скорости.

ЗАДАЧА 2 (о линейных оптимальных быстродействиях)

Задачи оптимального быстродействия для линейных моделей, описываемых системами линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, рассматривались Л.С. Понtryагиным, В.Г. Болтянским и др. Рассмотрим разрывную задачу быстродействия для линейной системы второго порядка:

$$\begin{aligned} J(u) &= T \rightarrow \inf, \\ \dot{x} &= A^\ell x + b^\ell u, \\ x(0) &= a, \quad x(T) = 0, \quad |u^\ell| \leq 1, \quad i = 1, 2, \\ \ell &= \begin{cases} 1, & S(t, x) < 0, \\ 2, & S(t, x) \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

где B^ℓ , A^ℓ , $\ell = 1, 2$ - матрицы размерности 2×2 , a - двумерный вектор, $S(t, x)$ - заданная поверхность переключения. Требуется исследовать оптимальное решение задачи в зависимости от собственных векторов матриц

A^ℓ , $\ell = 1, 2$, выбирая в качестве поверхности переключения следующие случаи: а) $x_1 + M_1 = 0$, б) $x_2 + M_2 = 0$, в) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + M = 0$. Построить решение и линии переключения управления на фазовой плоскости.

ЗАДАЧА 3 (об оптимизации весовых коэффициентов нейронной сети (см. гл. 5)). Исследовать оптимальное решение в зависимости от параметров задачи и возможность залегания решения на поверхности переключения.

$$\begin{aligned} J(w) &= \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i,j=1}^n w_{i,j}^2(t) + \varepsilon \sum_{i=1}^n (x_i(T) - N_i)^2 \rightarrow \inf, \\ \dot{x}_i &= -\beta_i x_i + f_i^\ell \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j \right), \quad i = \overline{1, n}, \\ \ell &= \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n x_i < A, \\ 2, & \sum_{i=1}^n x_i \geq A, \end{cases} \\ x_i(0) &= a_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ |w_{ij}(t)| &\leq A_i, \quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Рассмотреть следующие способы задания функции активации:

- а) $f_i^\ell(z) = K_i^\ell z$, $\ell = 1, 2$, $i = \overline{1, n}$,
 б) $f_i^\ell(z) = K_i^\ell \operatorname{arctg} z$, $\ell = 1, 2$, $i = \overline{1, n}$,
 в) $f_i^1(z) = K_i^1 z$, $i = \overline{1, n}$,
 $f_i^2(z) = K_i^2 z$, $i = \overline{1, n}$,
 г) $f_i^1(z) = K_i^1 \operatorname{arctg} z$, $i = 1, 2$,
 $f_{i_0}^2(z) = 0$, если $x_{i_0} > M$,
 $f_i^2(z) = K_i^2 z$, $i = \overline{1, n}$, $i \neq i_0$.

ЗАДАЧА 4

Динамические свойства систем связанных "нейронов" могут быть сформулированы следующими системами нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\text{а) } \dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + f_i^t \left(\sum_{j=1}^n w_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t) u_j(t) \right),$$

$$\text{б) } \dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + f_i^t \left(\sum_{j=1}^n w_{ij}(t) x_j(t) \right) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t) u_j(t),$$

$$\text{в) } \dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + \operatorname{sign} \left(\sum_{j=1}^n w_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t) u_j(t) \right),$$

$$x_i(0) = a_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T]$$

$$\ell = \begin{cases} 1, & S(t, x) < 0, \\ 1, & S(t, x) \geq 0. \end{cases}$$

Здесь каждая функция $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, есть действительная функция состояния i -го "нейрона", функция $u_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, является внешним воздействием на i -й "нейрон". Коэффициенты $w_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$, обозначают веса или "синаптические связи", b_{ij} - интенсивность внешних воздействий. Функции f_i (функции активации) характеризуют, как i -й "нейрон" реагирует на совокупный сигнал. Некоторые авторы полагают, что, изменяя внешний сигнал, можно управлять каждым нейроном, но разумно предположить, что число таких входов гораздо меньше, чем число функций состояния, т.е. $m \ll n$.

Весовые коэффициенты $w_{ij}(t)$ и внешние сигналы $u_i(t)$ должны быть выбраны так, чтобы минимизировать заданный функционал

ЗАДАЧА 5

$$J(w) = \int_0^T \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} w_{ij}^2(t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (x_i(t) - \psi(t))^2 \right] dt + \\ + \sum_{i=1}^n M_i (x_i(T) - A_i)^2 + \sum_{i=1}^n c_i x_i(T).$$

Электрическая или химическая нейронная модель взаимодействия нейронов описывается системой дифференциальных уравнений [6], [7]:

$$\dot{x}_i(t) = -\lambda [1 + R \exp(-x_i^2(t))] x_i(t) + \\ + \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n w_{ij}(t) (x_j(t) - x_i(t)), \text{ если } \sum_{i=1}^n x_i < M,$$

$$\dot{x}_i(t) = 0, \text{ если } \sum_{i=1}^n x_i \geq M,$$

$$x_i(0) = a_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ |w_{ij}(t)| \leq a_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \text{ п.в. } t \in [0, T],$$

где $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ - заданные непрерывные функции, α_{ij} , ε_i , c_i , M_i , a_{ij} , R , λ - заданные положительные параметры.

Построить краевую задачу принципа максимума, записать дискретную аппроксимацию и алгоритм нахождения приближенного решения.

Список литературы к главе 6

1. Андреева Е.А. Оптимальное управление системами, описываемыми функционально дифференцируемыми уравнениями. Тверь: ТГУ, 1990.
2. Андреева Е.А. Достаточные условия оптимальности для разрывной задачи оптимального управления с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1989. № 7. С. 59-66.
3. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Методы оптимизации. Тверь, ТГУ, 1995. Ч. 1,2.
4. Андреева Е.А. Оптимальное управление системами с запаздывающим аргументом. Препринт ВЦ АН СССР. М., 1987.
5. Андреева Е.А. Оптимизация искусственной нейронной сети// Функциональный анализ и его приложения: Сб. науч. тр. Тверь: ТГУ, 1996.
6. Андреева Е.А., Бенке Х. Оптимизация управляемых систем. Тверь: ТГУ, 1996.
7. Андреева Е.А., Евтушенко Ю.Г. Численные методы решения задач оптимального управления для систем, описываемых интегро-

- дифференциальными уравнениями типа Фредгольма // Модели и методы оптимизации. 1989. № 1. С. 4-13.
8. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шейхет Л.Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992.
9. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Оптимальное управление процессом распространения эпидемии // Применение функционального анализа в теории приближений: Сб. науч. тр. Тверь: ТГУ, 1997. С. 5 - 20.
10. Андреева Е.А., Шеретова Ю.В. Математическая модель соревнования по бегу // Применение функционального анализа в теории приближений: Сб. науч. тр. Тверь: ТГУ, 1997. С. 21 - 29.
11. Ашепков Л.А. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск, 1987.
12. Величенко В.В. О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями // Автоматика и телемеханика. 1966. № 7. С. 20-30.
13. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
14. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М., 1982.
15. Грачев Н.И., Фильков А.Н. Алгоритмические основы оптимизации управляемых систем с разрывной правой частью. Препринт ВЦ АН СССР. М., 1988.
16. Andreeva E.A., Behncke H. Competitive running on a hilly track // International Series of Numerical Mathematics. Basel, 1998. V. 24. P. 241-250.
17. Behncke H. Optimization model for the force and energy in competitive sport // Math. Meth. Appl. Sci. 1987. V. 9. P. 218-311.
18. Behncke H. The Control of Deterministic Epidemics // Math. Appl. Sci. 1993. V.3. P. 298-311.
19. Farkas A., Farkas M., Szabo G. Multiparameter bifurcation diagrams in predator-prey models with time lag. // J. Math. Biol. 1988. V. 26. P. 93-103.
20. Farotimi O., Dembo A., Kailath T. A general weight matrix formulation using optimal control // IEEE Transactions on neural networks. 1991. V. 2. N. 3.
21. Keller J.B. A Theory of Competitive running // Phys. Today. 1973. V. 26. P. 43-47.
22. Neustadt L. Optimization. Princeton: Princeton Univ. Press, 1976.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 4. Условия оптимальности детерминированных систем с последействием.....	178
§ 1. Условие оптимальности для систем с постоянным запаздыванием.....	178
§ 2. Сравнение двух типов двойственных задач.....	195
§ 3. Страга двойственность.....	200
§ 4. Примеры задач оптимального управления с запаздыванием по фазовой переменной.....	206
§ 5. Оптимальное управление системами с переменным запаздыванием.....	212
§ 6. Оптимизация систем с запаздыванием в аргументе функции управления.....	216
§ 7. Необходимые и достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых процессов с запаздыванием.....	222
§ 8. Приближенные методы решения задач оптимального управления с последействием.....	237
§ 9. Моделирование управляемого процесса распространения заболевания с учетом запаздывания.....	244
Задачи для самостоятельной работы.....	249
Список литературы к главе 4.....	255
Глава 5. Моделирование искусственной нейронной сети.....	256
§ 1. Математическая модель искусственной нейронной сети с запаздыванием.....	256
§ 2. Дискретные модели нейронных сетей с учетом запаздывания.....	263
§ 3. Оптимизация динамики нейронной сети с запаздыванием.....	272
§ 4. Анализ модели последовательной нейронной сети.....	286
Список литературы к главе 5.....	298
Глава 6. Разрывные задачи оптимального управления.....	300
§ 1. Примеры разрывных задач оптимального управления.....	301
§ 2. Необходимые и достаточные условия оптимальности в разрывных задачах оптимального управления.....	305
§ 3. Вычисление параметра скачка сопряженной функции и функции Понтрягина.....	311
§ 4. Дискретная аппроксимация разрывной задачи оптимального управления.....	321

§ 5. Задача о мягкой посадке ракеты на поверхность Луны.....	332
§ 6. Модель процесса распространения заболевания, описываемая разрывной системой дифференциальных уравнений.....	338
§ 7. Метод пристрелки для решения разрывных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.....	349
Задачи для самостоятельной работы.....	355
Список литературы к главе 6.....	358

Учебное издание

АНДРЕЕВА Елена Аркадьевна

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ
ДИНАМИЧЕСКИМИ
СИСТЕМАМИ

Часть II

Отпечатано с оригинала автора

Подписано в печать 14.01.2016. Формат 60x84 $1/16$.

Усл. печ. л. 11,75. Тираж 100. Заказ № 8.

Редакционно-издательское управление

Тверского государственного университета

Адрес: 170100, г. Тверь, Студенческий пер. 12, корпус Б.

Тел. РИУ (4822) 35-60-63.