ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΣΤΟΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟ ΕΛΕΓΧΟ - 1^η ΣΕΙΡΑ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ

Βουδριάς Δημήτρης

1. ***Δώστε τη βασική περιγραφή ενός βιολογικού νευρώνα. Ποια είναι η ουσιώδης διαφορά του ανθρώπινου εγκεφάλου από τους σημερινούς ταχύτατους υπολογιστές των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων;***

Ο νευρώνας (neuron) είναι η θεμελιώδης κυτταρική δομική μονάδα του ανθρώπινου εγκεφάλου. Πρόκειται για ένα απλό στοιχείο επεξεργασίας, το οποίο δέχεται και συνδυάζει (επεξεργάζεται) σήματα από άλλους νευρώνες μέσα από μονοπάτια εισόδων που καλούνται δενδρίτες (dendrites). Αν το συνδυασμένο σήμα εισόδου είναι αρκετά ισχυρό προκαλεί ενεργοποίηση του νευρώνα, ο οποίος παράγει με τη σειρά του ένα σήμα εξόδου. Το σήμα αυτό διαδίδεται μέσω του άξονα, ο οποίος συνδέεται με τους δενδρίτες αρκετών άλλων νευρώνων.

Η επεξεργασία της πληροφορίας (σημάτων) στους εγκεφαλικούς νευρώνεςκαι τους συναπτικούς δεσμούς γίνεται με τη βοήθεια ηλεκτροχημικών διεργασιών που είναι κατά πολύ βραδύτερες από την ηλεκτρονική επεξεργασία στα σύγχρονα ολοκληρωμένα κυκλώματα. Παρόλα αυτά ο ανθρώπινος εγκέφαλος είναι ικανός να φέρνει σε πέρας πολύ σύνθετες εργασίες σε εξαιρετικά σύντομο χρονικό διάστημα.Το πλεονέκτημα του ανθρώπινου εγκεφάλου είναι ότι τα διάφορα υποσυστήματά του (ομάδες νευρώνων) λειτουργούν **παράλληλα** με αποτέλεσμα ξεχωριστές μεταξύ τους λειτουργίες να εκτελούνται στο ίδιο χρονικό διάστημα και στη συνέχεια να γίνεται η σύνδεσή τους.

2. ***Περιγράψτε τη βασική δομή ενός Τεχνητού Νευρώνα. Αναφέρατε τα ουσιώδη συστατικά στοιχεία ενός μοντέλου Τεχνητού Νευρωνικού Δικτύου (ΤΝΔ).***

Ένας Τεχνητός Νευρώνας είναι μια μονάδα επεξεργασίας, η οποία μπορεί να κατέχει μια τοπική μνήμη και να διεκπεραιώνει λειτουργίες τοπικής επεξεργασίας πληροφορίας. Οι τεχνητοί νευρώνες είναι διασυνδεδεμένοι μεταξύ τους μέσω καναλιών πολλών διευθύνσεων, τα οποία καλούνται και συνδέσεις. Κάθε μονάδα έχει μια μοναδική έξοδο που κατευθύνεται σε όσες συνδέσεις είναι επιθυμητό, όπου κάθε σύνδεση μεταφέρει το ίδιο σήμα - το σήμα εξόδου (μπορεί να είναι οποιουδήποτε επιθυμητού μαθηματικού τύπου). Η επεξεργαζόμενη πληροφορία η οποία φτάνει σε κάθε μονάδα επεξεργασίας μπορεί να οριστεί αυθαίρετα με τον περιορισμό όμως ότι αυτή θα είναι εντελώς τοπική. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να εξαρτάται μόνο από τις τρέχουσες τιμές των σημάτων εισόδου που φτάνουν στην μονάδα επεξεργασίας μέσω των συνδέσεων και με τιμές που αποθηκεύονται στην τοπική μνήμη της μονάδας.

Ένα Τεχνητό Νευρωνικό Δίκτυο είναι μια παράλληλη διάταξη, που επεξεργάζεται διανεμημένες πληροφορίες, αποτελείται από **μονάδες επεξεργασίας.**

Υπάρχουν πολλά μοντέλα ΤΝΔ αλλά το κάθε μοντέλο μπορεί να οριστεί επακριβώς από τα εξής οκτώ βασικά στοιχεία

1. Ένα σύνολο μονάδων επεξεργασίας.

2. Μια κατάσταση ενεργοποίησης για την κάθε μονάδα.

3. Μια συνάρτηση εξόδου για κάθε μονάδα.

4. Ένα πρότυπο σύνδεσης ανάμεσα στις μονάδες ή την τοπολογία του δικτύου.

5. Ένα κανόνα διάδοσης, ή μια συνάρτηση συνδυασμού, για να διαδίδει τις ενέργειες των μονάδων μέσω του δικτύου.

6. Έναν κανόνα ενεργοποίησης για να αναπροσαρμόζει τις ενέργειες κάθε μονάδας χρησιμοποιώντας την τρέχουσα τιμή ενεργοποίησης και τις εισόδους που έρχονται από άλλες μονάδες.

7. Ένα εξωτερικό περιβάλλον που παρέχει πληροφορίες στο δίκτυο και/ή αλληλεπιδρά με αυτό.

8. Έναν κανόνα μάθησης για να τροποποιεί το πρότυπο των συνδέσεων χρησιμοποιώντας πληροφορίες από το εξωτερικό περιβάλλον.

3. ***Αναφέρατε τις βασικές κατηγορίες ΤΝΔ σύμφωνα με την προσέγγιση μάθησης που ακολουθείται. Σε ποια κατηγορία θα μπορούσαν να ενταχθούν τα λεγόμενα δίκτυα ενισχυτικής μάθησης (reinforcement learning), σε τι συνίσταται αυτή;***

Το εξωτερικό περιβάλλον αλληλεπιδρά με το δίκτυο κατά τη διάρκεια της μάθησης του ΤΝΔ. Στη φάση αυτή, χρησιμοποιείται ένας **κανόνας μάθησης** για να αλλάξει τα στοιχεία του πίνακα **W.** Ο ρόλος του πίνακα βαρών **W** είναι ιδιαίτερα σημαντικός, εφόσον αντιπροσωπεύει την κωδικοποιημένη γνώση του δικτύου, και γι' αυτό λέγεται ότι ο πίνακας W περιέχει τη μνήμη του δικτύου (Long Term Memory - LTM). Στα μοντέλα ΤΝΔ, το εξωτερικό περιβάλλον παρέχει τα διανύσματα εισόδου μάθησης. Υπάρχουν δυο βασικοί τύποι μάθησης : ο εποπτευόμενος και ο μη- εποπτευόμενος.

Στην **εποπτευόμενη μάθηση**, το εξωτερικό περιβάλλον παρέχει τις επιθυμητές εξόδους για κάθε ένα από τα διανύσματα εισόδου μάθησης και λέγεται ότι το εξωτερικό περιβάλλον συμπεριφέρεται ως ‘’δάσκαλος’’.

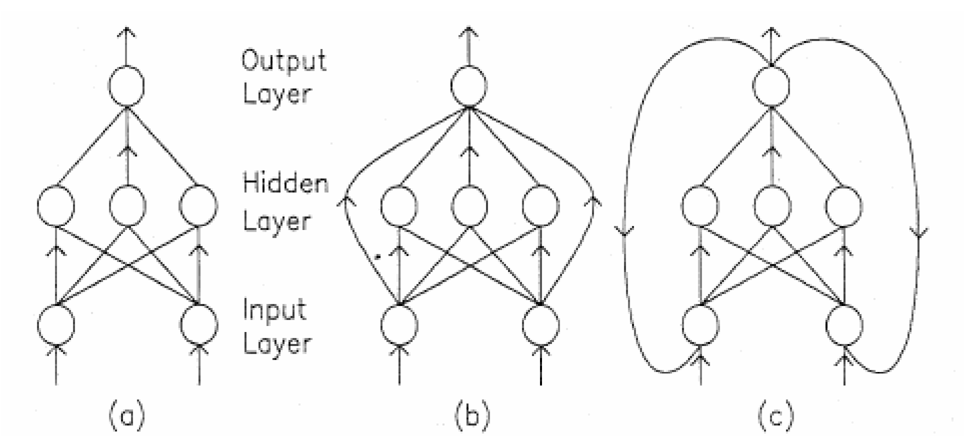
Μια ειδική περίπτωση της εποπτευόμενης μάθησης είναι η **ενισχυτική μάθηση** (reinforcement learning) όπου το εξωτερικό περιβάλλον παρέχει μόνο την πληροφορία ότι η έξοδος του δικτύου είναι καλή ή κακή, αντί να δίνει τη σωστή έξοδο. Στην περίπτωση της ενισχυτικής μάθησης λέγεται ότι το εξωτερικό περιβάλλον συμπεριφέρεται ως ''κριτής'' (critic).

Στη **μη-εποπτευόμενη** μάθηση, το εξωτερικό περιβάλλον δεν παρέχει την επιθυμητή έξοδο του δικτύου, ούτε την πληροφορία για το εάν αυτή είναι καλή ή κακή. Χρησιμοποιώντας τη συσχέτιση (correlation) του διανύσματος εισόδου, ο κανόνας μάθησης αλλάζει τα βάρη του δικτύου με σκοπό να ομαδοποιήσει το διάνυσμα εισόδου σε ομάδες (clusters) έτσι ώστε παρόμοια διανύσματα εισόδου να παράγουν παρόμοιες εξόδους του δικτύου, εφόσον ανήκουν στην ίδια ομάδα.

4. Αναφέρατε τις βασικές κατηγορίες ΤΝΔ σύμφωνα με την τοπολογία τους.

Ανάλογα με την τοπολογία, ένα ΤΝΔ μπορεί να διακριθεί σε διαδιδόμενο προς τα μπροστά, ή αλλιώς **προσο-τροφοδοτούμενα** ΤΝΔ (feedforward network-FF), είτε σε ΤΝΔ **ανατροφοδότησης** (feedback(FB) or recurrent network). Στην πρώτη κατηγορία οι μονάδες στέλνουν τις εξόδους τους σε μονάδες από τις οποίες δεν λαμβάνουν είσοδο αμέσως ή εμμέσως (μέσω άλλων μονάδων δηλαδή) . Με άλλα λόγια, δεν υπάρχουν βρόγχοι ανάδρασης.

Στην πρώτη κατηγορία (feedforward network-FF), όπου οι μονάδες είναι συνδεδεμένες μόνο με τις αντίστοιχες που βρίσκονται στο επόμενο κατά σειρά επίπεδο λέγεται αυστηρά προσοτροφοδοτούμενο ΤΝΔ (strictly feedforward network).



(a) strictly feedforward network
(b) feedforward network
(c) feedback(FB) or recurrent network

5. ***Δώστε τη μαθηματική έκφραση του κανόνα ανανέωσης βαρών του Hebb και αναφέρατε τη φυσική παρατήρηση στην οποία στηρίχτηκε η επινόησή του. Αναφέρατε τον τροποποιημένο κανόνα Hebb και εξηγήστε με συντομία σε τι βελτιώνει τον αρχικό κανόνα.***

Ο κανόνας του Hebb (Hebbian rule) και οι περισσότεροι κανόνες μάθησης μπορούν να θεωρηθούν ως παραλλαγές του. Ο νόμος του Hebb μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως εξής:

$$\Delta w_{ij} = \eta y_i(x) x_j \quad (1)$$

όπου $x = [x_1\ x_2 \ldots\ldots x_p]^T$ είναι το διάνυσμα εισόδου, $y = [y_1\ y_2 \ldots\ldots y_q]^T$ είναι το διάνυσμα εξόδου και το $\eta > 0$, που καλείται και ρυθμός μάθησης, ελέγχει το μέγεθος κάθε βήματος μάθησης και p και q είναι αντίστοιχα ο αριθμός των μονάδων εισόδου και εξόδου.

Ο κανόνας του Hebb στηρίχτηκε σε μία φυσική παρατήρηση, η οποία περιγράφεται στο βιβλίο του ''The organization of Behavior'' :
Όταν ο άξονας ενός κύτταρου Α είναι αρκετά κοντά ώστε να διεγείρει ένα κύτταρο Β και συμμετέχει είτε διαρκώς είτε περιστασιακά στην ενεργοποίηση του, τότε παρατηρείται κάποια διαδικασία ανάπτυξης ή μεταβολικής αλλαγής είτε στο ένα είτε και στα δυο κύτταρα, τέτοια ώστε η αποτελεσματικότητα του Α ως ενός από τα κύτταρα ενεργοποίησης του Β, αυξάνεται.

Από τη σχέση (1) βλέπουμε ότι, κάτω από ορισμένες συνθήκες το υπό ανανέωση βάρος λαμβάνει, μετά από ένα αριθμό επαναλήψεων, πολύ μεγάλες τιμές και έτσι η δράση του νευρώνα οδηγείται σε κορεσμό. Για να αποφευχθεί η κατάσταση αυτή, εισάγεται συνήθως ένας παράγοντας λήθης α και ο κανόνας μεταβολής των βαρών γράφεται :

$$\Delta w_{ij} = \eta y_i(x) x_j - a y_i(x) w_{ij} \quad (2)$$

η αλλιώς

$$\Delta w_{ij} = a y_i(x)(c x_j - w_{ij}) \quad , \qquad c = \eta / a \quad (3)$$

Η παραπάνω εξίσωση υποδηλώνει ότι, σε όλες τις συνάψεις για τις οποίες ισχύει ότι $x < w/c$ (δηλαδή η είσοδος έχει τιμή μικρότερη από ένα (υπο)πολλαπλάσιο του βάρους της σύναψης) το βάρος της σύναψης μειώνεται με μέγεθος ανάλογο της εξόδου y του νευρώνα.

6. ***Διαβάστε το κεφ. 3.4 από το κεφάλαιο 3 του βιβλίου του Haykin και μεταφέρετε εν συντομία τη φιλοσοφία και τον τρόπο λειτουργίας του αλγορίθμου μάθησης με error correction.***

Για τη βελτιώση της επίδοσης την μνήμης ενός ΤΝΔ εφαρμόζεται ένας μηχανισμός διόρθωσης του σφάλματος που παρουσιάζεται στην περίπτωση που ή έξοδος ενός νευρώνα διαφέρει από μια επιθυμητή τιμή εξόδου. Ο μηχανισμός που ενσωματώνεται στην μνήμη ονομάζεται error correction και περιγράφεται ακολούθως.
Εστω οτι θελουμε να δομήσουμε ένα πινακα μνήμης που εκπαιδεύται από τις συσχετίσεις των ανυσμάτων εισόδου-εξόδου:

$a_k \to b_k$, k=1,2…q

Ξεκινάμε από ένα πίνακα με αρχικά μηδενικά βάρη και χτίζουμε την μνήμη εφαρμόζοντας το ζεύγος (είσοδος X^k, επιθυμητή έξοδος D_k) μια φορά για κάθε k σύμφωνα με :

$\Delta W(k) = W(k) - W(k-1) = D^k [X^k]^T, 1 \le k \le M$, όπου συνεπάγεται

$$W = D^1[X^1]^T + D^2[X^2]T + \ldots + D^M[X^M]^T$$

Τώρα εφαρμόζουμε μια επαναληπτική διαδικασία υπολογίζοντας το διάνυσμα σφάλματος για κάθε ζεύγος:

$$e^k(n) = Y^k - W(n)X^k$$

όπου το γινόμενο $W(n)X^k$ περιγράφει την πραγματική έξοδο.
Το διάνυσμα σφάλματος $e^k(n)$ χρησιμοποιείται για τη ρύθμιση του πίνακα μνήμης ακολουθώντας τον κανόνα:

$$(Adjustment) = (learning\ rate) \cdot (error) \cdot (input)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να θεωρήσουμε:

$$\Delta W(n) = \eta e^k(n)[X^k]^T = \eta[Y^k - W(n)X^k][X^k]^T$$

Η ρύθμιση χρησιμοποιείται για να προσαυξήσει την παλιά τιμή του πίνακα μνήμης δίνοντας ως αποτέλεσμα την ανανεωμένη τιμή:

$$W(n+1) = W(n) + \Delta W(n) = W(n) + \eta[Y^k - W(n)X^k][X^k]^T$$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι το σφάλμα να γίνει αμελητέο.

7. <u>Ασκηση 3.4</u>

Μια μνήμη ενός ΤΝΔ (πίνακας βαρών) εκπαιδεύεται με τα ακόλουθα διανύσματα:

$$a_1 = \frac{1}{4}[-2, -3, \sqrt{3}]^T$$
$$a_2 = \frac{1}{4}[2, -2, -\sqrt{8}]^T$$
$$a_3 = \frac{1}{4}[3, -1, \sqrt{6}]^T$$

(a) Υπολογίστε τις γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων. Πόσο κοντά στην ορθοκανονικότητα είναι το ένα σε σχέση με το άλλο;
(b) Χρησιμοποιώντας τον γενικό κανόνα του Hebb (δηλ. το outer product rule), υπολογίστε τον πίνακα μνήμης του δικτύου. Ως εκ τούτου εκτιμήστε πόσο κοντά βρίσκεται στην ιδανική κατάσταση.
(c) Μια άλλη έκδοση του διανύσματος a_1

$$a = [0, -3, \sqrt{3}]^T$$

εφαρμόζεται στην μνήμη. Υπολογίστε την απόδοση της μνήμης και συγκρίνετε τα αποτελέσματα με την επιθυμητή απόκριση a_1.

(α) Για τον υπολογισμό της γωνίας των διανυσμάτων χρησιμοποιούμε τη σχέση του εσωτερικού γινομένου:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \qquad \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Τα μέτρα των διανυσμάτων είναι:

$$|a_1| = \sqrt{(1/4)^2 \cdot [(-2)^2 + (-3)^2 + (\sqrt{3})^2]} = \sqrt{(1/4)^2 \cdot (4+9+3)} = 1$$

$$|a_2| = \sqrt{(1/4)^2 \cdot [(2)^2 + (-2)^2 + (-\sqrt{8})^2]} = \sqrt{(1/4)^2 \cdot (4+4+8)} = 1$$

$$|a_3| = \sqrt{(1/4)^2 \cdot [(3)^2 + (-1)^2 + (\sqrt{6})^2]} = \sqrt{(1/4)^2 \cdot (9+1+6)} = 1$$

Τα εσωτερικά γινόμενα μεταξύ τους:

$$\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}=\frac{1}{16}[(-2)\cdot(2)+(-3)\cdot(-2)+(\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{8})]=\frac{1}{16}[-4+6-\sqrt{24}]=-0.1812$$

$$\vec{a_1}\cdot\vec{a_3}=\frac{1}{16}[(-2)\cdot(3)+(-3)\cdot(-1)+(\sqrt{3})\cdot(\sqrt{6})]=\frac{1}{16}[-6+3+\sqrt{18}]=0.0777$$

$$\vec{a_2}\cdot\vec{a_3}=\frac{1}{16}[(2)\cdot(3)+(-2)\cdot(-1)+(-\sqrt{8})\cdot(\sqrt{6})]=\frac{1}{16}[6+2-\sqrt{48}]=0.0670$$

Αντίστοιχα προκύπτει:

$$\cos(\vec{a_1},\vec{a_2})=\frac{-0.1812}{1\cdot 1}=-0.1812 \Rightarrow \quad angle(\vec{a_1},\vec{a_2})=100.44$$

$$\cos(\vec{a_1},\vec{a_3})=\frac{0.0777}{1\cdot 1}=0.0777 \Rightarrow \quad angle(\vec{a_1},\vec{a_3})=85.55$$

$$\cos(\vec{a_2},\vec{a_3})=\frac{0.067}{1\cdot 1}=0.067 \Rightarrow \quad angle(\vec{a_2},\vec{a_3})=86.16$$

Δηλαδή φαίνεται ότι τα διανύσματα δεν είναι μακριά από την ορθοκανονικότητα αν και υπάρχει μια πιο αισθητή διαφορά μεταξύ των α_1 και α_2.

(β) Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Hebb θεωρώντας οτι τα διανύσματα εισόδου είναι περίπου ορθοκανονικά με αρχικά μηδενικά βάρη. Σαν έξοδο θέλουμε τα διανύσματα:

$$b_1=\frac{1}{4}[-2,-3,\sqrt{3}]^T$$
$$b_2=\frac{1}{4}[2,-2,-\sqrt{8}]^T$$
$$b_3=\frac{1}{4}[3,-1,\sqrt{6}]^T$$

Ο πίνακας βαρών σύμφωνα με τη σχέση $W=B\cdot A^T$ προκύπτει με τη βοήθεια του Matlab:

```
a1=1/4*[-2 -3 sqrt(3)]';
a2=1/4*[2 -2 -sqrt(8)]';
a3=1/4*[3 -1 sqrt(6)]';
```

```
b1=transpose(a1);
b2=transpose(a2);
b3=transpose(a3);
W=a1*b1+a2*b2+a3*b3
```

$$W = \begin{bmatrix} 1.0625 & -0.0625 & -0.1108 \\ -0.0625 & 0.8750 & -0.1243 \\ -0.1108 & -0.1243 & 1.0625 \end{bmatrix}$$

Με το διαμορφωμένο πίνακα βαρών ελέγχουμε το διανύσματα εξόδου σύμφωνα με τη σχέση $b_k = W \cdot a_k$

Προκύπτει :

	<u>Επιθυμητές έξοδοι</u>
$b_1 = [-0.5323\ \ -0.6788\ \ 0.6087]$	$b_1 = [-0.5000\ \ -0.7500\ \ 0.4330]$
$b_2 = [0.6408\ \ -0.3809\ \ -0.7445]$	$b_2 = [\ 0.5000\ \ -0.5000\ \ -0.7071]$
$b_3 = [0.7447\ \ -0.3417\ \ 0.5986]$	$b_3 = [0.7500\ \ -0.2500\ \ 0.6124]$

Παρατηρούμε κάποια αισθητή απόκλιση από την επιθυμητή κατάσταση αλλά δεν παρουσιάζονται ακραίες μεταβολές.

(c) Εφαρμόζεται ή είσοδος $a = [0, -3, \sqrt{3}]^T$

Σε αυτή την περίπτωση $b_1 = [-0.0044\ \ -2.8403\ \ 2.2132]$ και φαίνεται ξεκάθαρα ότι βρισκόμαστε πολύ μακριά απο την επιθυμητή έξοδο $b_1 = [-0.5000\ \ -0.7500\ \ 0.4330]$

Εφαρμόζουμε την μέθοδο Gram-Schmidt orthogonalization

Η ορθοκανικοποίση γίνεται με τη βοήθεια του Matlab

```
% Υπολογίζονται τα μέτρα των διανυσμάτων
n1=norm(a1);
n2=norm(a2);
n3=norm(a3);
% Μοναδιαία διανύσματα
e1=a1/n1;
e2=a2/n2;
e3=a3/n3;
% Συνημίτονα γωνιών μεταξύ των διανυσμάτων όπως υπολογίστηκαν στο προηγούμενο %βήμα
cos1_2=-0.1812; % Συνημίτονο μεταξύ των a1,a2
cos1_3=0.0777;  % Συνημίτονο μεταξύ των a1,a3
cos2_3=0.067;   % Συνημίτονο μεταξύ των a2,a3

% προβολές των διανυσμάτων
proj_a2_a1=e1*n2*cos1_2; % Προβολή του a2 στο a1
proj_a3_a1=e1*n3*cos1_3; % Προβολή του a3 στο a1
proj_a3_a2=e2*n3*cos2_3; % Προβολή του a3 στο a2

% Ορθοκανονικοποιημένα διανύσματα
v1=a1
v2=a2-proj_a2_a1
v3=a3-(proj_a3_a1+proj_a3_a2)
```

Προκύπτει

$$v_1 = [-0.5000 \quad -0.7500 \quad 0.4330]$$
$$v_2 = [0.4094 \quad -0.6359 \quad -0.6286]$$
$$v_3 = [0.7553 \quad -0.1582 \quad 0.6261]$$

(a) Επανάληψη ερωτήματος a με τη βοήθεια του Matlab

```
v1=[-0.500   -0.7500   0.4330];
v2=[0.4094   -0.6359   -0.6286];
v3=[0.7553   -0.1582   0.6261];
% Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων
a=dot(v1,v2)
b=dot(v1,v3)
c=dot(v2,v3)
% Υπολογισμός  γωνιών μεταξύ των διανυσμάτων
th1=acosd(a/(n1*n2))
th2=acosd(b/(n1*n3))
th3=acosd(c/(n2*n3))
```

Προκύπτει:

$$angle(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}) = 89.99$$
$$angle(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_3}) = 89.30$$
$$angle(\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}) = 89.05$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι λόγω υπολογιστικών σφαλμάτων οι γωνίες διαφέρουν ελάχιστα από τις 90 και τα διανύσματα είναι ορθοκανονικοποιημένα.

(β) Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Hebb όπως και προηγουμένως:

```
v1=[-0.500   -0.7500   0.4330]';
v2=[0.4094   -0.6359   -0.6286]';
v3=[0.7553   -0.1582   0.6261]';
b1=transpose(v1);
b2=transpose(v2);
b3=transpose(v3);
W=v1*b1+v2*b2+v3*b3
```

Ο νεός πίνακας βαρών τώρα είναι:

$$W = \begin{bmatrix} 0.9881 & -0.0048 & -0.0010 \\ -0.0048 & 0.9919 & -0.0241 \\ -0.0010 & -0.0241 & 0.9746 \end{bmatrix}$$

Με το διαμορφωμένο πίνακα βαρών ελέγχουμε το διανύσματα εξόδου σύμφωνα με τη σχέση $b_k = W \cdot a_k$

Προκύπτει :

	<u>Επιθυμητές έξοδοι</u>
$b_1 = [-0.4908 \quad -0.7519 \quad 0.4405]$	$b_1 = [-0.5000 \quad -0.7500 \quad 0.4330]$
$b_2 = [\ 0.4082 \quad -0.6176 \quad -0.5977]$	$b_2 = [\ 0.5000 \quad -0.5000 \quad -0.7071]$
$b_3 = [\ 0.7465 \quad -0.1756 \quad 0.6133]$	$b_3 = [0.7500 \quad -0.2500 \quad 0.6124]$

Παρατηρούμε οτι έχει βελτιωθεί η απόκλιση από την επιθυμητή κατάσταση.

(c) Εφαρμόζεται ή είσοδος $a=[0,-3,\sqrt{3}]^T$ με επιθυμητή $b_1=[\text{-}0.5000\ \ \text{-}0.7500\ \ 0.4330]$

Σε αυτή την περίπτωση $b_1=[0.0128\ \ \text{-}3.0174\ \ 1.7603]$ ενώ πριν την ορθοκανικοποίηση $b_{1old}=[\text{-}0.0044\ \ \text{-}2.8403\ \ 2.2132]$ Επειδή το διάνυσμα α έχει μεγάλη απόκλιση από το εύρος διαστήματος εισόδου δεν μπορούμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα.

8. Η μνήμη του προβλήματος 7 τροποποιείται ώστε να συμπεριλαμβάνει τον μηχανισμό error-correction. Ο ρυθμός μάθησης δίνεται η=0.1 .

(α) Υπολογίστε τον τροποποιημένο πίνακα μνήμης. Ως εκ τούτου εκτιμήστε πόσο κοντά βρίσκεται στην ιδανική κατάσταση συγκρίνοντας με το ερώτημα β της άσκησης 7.

(β) Επαναλάβετε το ερώτημα c της άσκησης 7.

(α) Υπολογίζουμε το διάνυσμα σφάλματος $e^k(n)=Y^k-W(n)X^k$ για κάθε k και ακολουθώντας την επαναληπτική διαδικασία που περιγράφηκε στο ερώτημα 5 υπολογίζουμε τον νέο πίνακα W.

Πρόγραμμα Matlab

```
a1=1/4*[-2 -3 sqrt(3)]';
a2=1/4*[2 -2 -sqrt(8)]';
a3=1/4*[3 -1 sqrt(6)]';
b1=transpose(a1);
b2=transpose(a2);
b3=transpose(a3);
W=a1*b1+a2*b2+a3*b3;

% Υπολογισμός σφάλματος


a1=1/4*[-2 -3 sqrt(3)]';
a2=1/4*[2 -2 -sqrt(8)]';
a3=1/4*[3 -1 sqrt(6)]';
b1=transpose(a1);
b2=transpose(a2);
b3=transpose(a3);
```

```
W=a1*b1+a2*b2+a3*b3;
a=[a1 a2 a3];
W_n=W;

% loop 3 φορές για κάθε ζευγάρι εισόδου εξόδου όπου ο πίνακας W_n ανανεώνεται σε κάθε επανάληψη.

for k=1:3
e(:,k)=a(:,k)-W_n*a(:,k);
adj=0.1*a(:,k)*e(:,k)';
W_n=W_n+adj;
end
W_n
```

Προκύπτει ο πίνακας:

$$W\_n = \begin{bmatrix} 1.0546 & -0.0579 & -0.0996 \\ -0.0584 & 0.8835 & -0.1129 \\ -0.0998 & -0.1147 & 1.0536 \end{bmatrix}$$

Παρουσιάζονται πάλι τα αποτελέσματα χωρίς την ενσωμάτωση σφάλματος :

$b_1 = [-0.5323\ \ -0.6788\ \ 0.6087]$
$b_2 = [0.6408\ \ -0.3809\ \ -0.7445]$
$b_3 = [0.7447\ \ -0.3417\ \ 0.5986]$

Ελέγχουμε ξανά τα διανύσματα :

$b_1 = [-0.5270\ \ -0.6823\ \ 0.5921]$
$b_2 = [\ 0.6267\ \ -0.3911\ \ -0.7375]$
$b_3 = [0.7445\ \ -0.3339\ \ 0.5990]$

<u>Επιθυμητές έξοδοι</u>

$b_1 = [-0.5000\ \ -0.7500\ \ 0.4330]$
$b_2 = [0.5000\ \ -0.5000\ \ -0.7071]$
$b_3 = [0.7500\ \ -0.2500\ \ 0.6124]$

Ειναι εμφανές ότι όλα τα διανύσματα βελτιώθηκαν.

(b) Εφαρμόζεται ή είσοδος $a = [0, -3, \sqrt{3}]^T$ με επιθυμητή $b_1 = [-0.5000\ \ -0.7500\ \ 0.4330]$

Σε αυτή την περίπτωση $b_1 = [\ 0.0014\ \ -2.8462\ \ 2.1690]$ ενώ προηγουμένως υπολογίστηκε $b_{1old} = [-0.0044\ \ -2.8403\ \ 2.2132]$

Εδώ παρατηρούμε οτι δεν υπάρχει καμία βελτίωση ενδεχομένως διότι το διάνυσμα α δεν συμμετείχε στην τροποποίηση του πίνακα.