# 南京大學

# 本　科　毕　业　论　文

院　　系　数学系

专　　业　统计学

题　　目　仿紧空间的性质与刻画

年　　级　2013　学号　131110066

学生姓名　单铭铭

指导教师　师维学　职称　教授

论文提交日期　二零一七年五月

学　　　　　号: 131110066

论文答辩日期:　　　　年　　月　　日

指　导　教　师:　　　　　　　　(签字)

Dissertation for Bachelor of Science

# Properties and Descriptions of Paracompact Spaces


**Mit Shan**
**Supervised by Professor Weixue Shi**
**Statistics**

Department of Mathematics, Nanjing University


**May, 2017**

# 南京大学本科生毕业论文 (设计) 中文摘要

毕业论文题目: 仿紧空间的性质与刻画

数学系 院系 统计学 专业 2013 级本科生姓名: 单铭铭

指导教师 (姓名、职称): 师维学 教授


## 摘要:

本文主要是我对于仿紧拓扑空间的刻画和性质的一个学习总结, 所有结论均来自教科书和参考资料. 主要证明在满足 $T_3$ 公理的前提下, 几个与拓扑空间仿紧性等价的条件, 比如其中之一是: 拓扑空间 $X$ 是仿紧的, 当且仅当 $X$ 的每个开覆盖有 $\sigma-$ 局部有限开加细. 在完成仿紧性质的基本刻画后, 给出几个仿紧空间的性质, 使仿紧性不再那么神秘.



## 关键词: 仿紧

# 南京大学本科生毕业论文 (设计) 英文摘要

THESIS: Properties and Descriptions of Paracompact Spaces

DEPARTMENT: Department of Mathematics

SPECIALIZATION: Statistics

UNDERGRADUATE: Mit Shan

MENTOR: Professor Weixue Shi

ABSTRACT:

This article is my learning summary of some descriptions and properties of paracompact spaces. All the conclusions come from textbooks and references. Several equivalent conditions of paracompactness under $T_3$ axiom will be proved. One of them is: Topological space $X$ is paracompact, if and only if every open cover of $X$ has $\sigma$-local-finite open refinement. After describing paracompactness, we will show some properties of paracompact space, which will uncover the mystery of paracompactness.

KEYWORDS: paracompact

# 目录

# 第一章　预备及定义

为了方便, 下面我们集中给出本文用的一些定义以及一些记号.

**定义 1.0.1.** 设 $X$ 为拓扑空间.

*(1)* 若 $X$ 满足 $T_2$ 公理, 则称 $X$ 为 ***Hausdorff*** 空间.

*(2)* 若 $X$ 满足 $T_3$ 公理, 则称 $X$ 为**正则**空间.

*(3)* 若 $X$ 满足 $T_4$ 公理, 则称 $X$ 为**正规**空间.

**定义 1.0.2.** 拓扑空间 $X$ 称为 ***Lindelöf*** 的, 如果 $X$ 的任意开覆盖都有可数子覆盖.

**定义 1.0.3.** 拓扑空间 $X$ 称为**可数紧**的, 如果 $X$ 的任意可数开覆盖存在有限子覆盖.

**定义 1.0.4.** $X$ 为一拓扑空间.$\mathscr{U}$,$\mathscr{V}$ 为 $X$ 的两个覆盖. 称 $\mathscr{V}$ 为 $\mathscr{U}$ 的一个**加细**, 如果

$$\forall V \in \mathscr{V}, \exists U \in \mathscr{U}, \text{使得} V \subseteq U, \text{且} \bigcup \mathscr{V} = \bigcup \mathscr{U}.$$

**定义 1.0.5.** $X$ 为一拓扑空间,$\mathscr{A}$ 为 $X$ 的一个子集族. 称 $\mathscr{A}$ 在 $X$ 中是**局部有限**的, 如果

$$\forall x \in X, \exists x\text{的邻域}U, \text{使得}\{A \in \mathscr{A} \mid A \cap U \neq \varnothing\}\text{为有限集}.$$

**定义 1.0.6.** $X$ 为一拓扑空间,$\mathscr{A}$ 为 $X$ 的一个子集族. 称 $\mathscr{A}$ 在 $X$ 中是**$\sigma$-局部有限**的, 如果 $\mathscr{A}$ 是可数多个局部有限族的并.

**定义 1.0.7.** 拓扑空间 $X$ 的子集族 $\mathscr{U}$ 称为**离散的**, 如果对任意 $x \in X$, 存在 $x$ 的邻域 $A$, 使得 $A$ 最多与 $\mathscr{U}$ 中的一个元素相交非空.

**定义 1.0.8.** 设 $\mathscr{U}$ 为拓扑空间 $X$ 的子集族, 称 $\mathscr{U}$ 为**闭包保持**的, 如果

$$\bigcup\{\overline{U} \mid U \in \mathscr{U}\} = \overline{\bigcup\{U \mid U \in \mathscr{U}\}}.$$

**定义 1.0.9.** 拓扑空间 $X$ 是**仿紧**的, 如果它的任意开覆盖都有局部有限开加细.

紧空间是仿紧空间, 因为紧空间的任意开覆盖存在有限子覆盖, 从而是局部有限的, 子覆盖也是一个开加细, 所以是仿紧的.

**定义 1.0.10.** 设 $X$, $Y$ 为拓扑空间, 称映射 $f: X \longrightarrow Y$ 为**完备的**, 如果 $f$ 为闭的连续满映射, 且对 $\forall y \in Y, f^{-1}(y)$ 是 $X$ 的紧子集.

# 第二章　仿紧空间的一些性质 (上)

在我们得到仿紧空间的定义后, 我们立即就可以得到一些基本的性质. 这些性质并不需要对仿紧空间的深度刻画就可以得到证明. 所以在刻画仿紧空间前, 我们把这些性质列出来, 算是初识仿紧性.

下面的命题说明了仿紧性与紧性之间的相似之处.

**命题 2.0.1.** *设 $X$ 是仿紧空间, $A$ 是 $X$ 中的闭集, 则 $A$ 作为子空间也是仿紧的.*

*证明.* 设 $\mathscr{A}$ 是 $A$ 在 $X$ 中的一个开覆盖, 则 $\mathscr{A} \cup \{X \setminus A\}$ 是 $X$ 的一个开覆盖, 由 $X$ 的仿紧性, 存在局部有限开加细 $\mathscr{L}$. 令 $\mathscr{M} = \{U \in \mathscr{L} \mid U \cap A \neq \varnothing\}$, 再令 $\mathscr{N} = \{U \cap A \mid U \in \mathscr{M}\}$, 则 $\mathscr{N}$ 为 $A$ 作为子空间, 开覆盖 $\{U \cap A \mid U \in \mathscr{A}\}$ 的局部有限开加细. 所以 A 作为子空间也是仿紧的. □

同样是和紧致性进行类比, 紧致的 Hausdorff 空间是 $T_3$, 我们有下面的定理.

**定理 2.0.2.** *仿紧 Hausdorff 空间是 $T_3$ 的.*

*证明.* 设 $X$ 为仿紧 Hausdorff 空间, $x_0 \in X, F$ 为 $X$ 中的闭集, 且 $x_0 \notin F$. 对 $\forall y \in F, \exists U_y$为开集且$x_0 \notin \overline{U_y}$. 则 $\{U_y \mid y \in F\} \cup \{X \setminus F\}$ 是 $X$ 的一个开覆盖, 由 $X$ 的仿紧性, 存在局部有限开加细 $\mathscr{V} = \{V_j \mid j \in J\}$. 存在 $x$ 的开邻域 $B$, 存在有限集 $J^{'} \subseteq J$, 使得 $\forall j \in J \setminus J^{'}, V_j \cap B = \varnothing$. 对 $\forall j \in J^{'}, \exists y_j$, 使得$V_j \subseteq U_{y_j}$. 而 $x_0 \notin \overline{U_{y_j}}$, 所以$x_0 \notin \overline{V_j}$. 我们可以观察到,$\mathscr{V}$中的元素要么包含在某个$U_y$中, 要么包含在$X \setminus F$ 中. 令 $\mathscr{A} = \{V_j \in \mathscr{V} \mid V_j \cap F \neq \varnothing\}$, 是 F 的一个开覆盖. 再由上面的观察, 有 $x_0 \notin \bigcup \mathscr{A}$. 而 $\mathscr{A}$ 中只有有限个元素与 B 相交, 且 $x_0$ 不属于这有限个元素的闭包. 所以存在 $x_0$ 的开邻域 $C \subseteq B$, 使得 $C \cap \bigcup \mathscr{A} = \varnothing$. 所以 $X$ 是 $T_3$ 的. □

**引理 2.0.3.** *若 $\{U_i \mid i \in I\}$ 是一个局部有限的子集族, 则*

$$\bigcup_{i \in I} \overline{U_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}\ .$$

证明. (1) $x \in \bigcup_{i\in I}\overline{U_i} \implies x \in \overline{\bigcup_{i\in I}U_i}$： 由条件, $\exists i_0 \in I$, 使得 $x \in \overline{U_{i_0}}$, 从而自然的, $x \in \overline{\bigcup_{i\in I}U_i}$.
(2) $x \in \overline{\bigcup_{i\in I}U_i} \Longrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}\overline{U_i}$ : (反证) 假设 $x \notin \bigcup_{i\in I}\overline{U_i}$. 由局部有限, 存在 $x$ 的开邻域 $A$, 使得对 $i \notin \{i_1, i_2, ..., i_N\} \subseteq I$, 有 $A \cap U_i = \varnothing$. 记 $I' = \{i_1, i_2, ..., i_N\}$, 则对 $\forall i \in I', x_0 \notin \overline{U_i}$. 令 $B = A \cap \overline{U_{i_1}}^c \cap \overline{U_{i_2}}^c \cap \cdots \cap \overline{U_{i_N}}^c$, 则 $B$ 为非空开集, $x_0 \in B$, 且对 $\forall i \in I, B \cap U_i = \varnothing$. 所以 $B \cap \bigcup_{i\in I}U_i = \varnothing$. 再由 $B$ 是开集, 有 $B \cap \overline{\bigcup_{i\in I}U_i} = \varnothing$. 推出 $x \notin \overline{\bigcup_{i\in I}U_i}$, 矛盾. □

这个引理其实就是说, 局部有限集族是闭包保持的. 下面的命题在紧致空间的对应版本是: 紧致 Hausdorff 空间是 $T_4$ 的.

**定理 2.0.4.** *仿紧 Hausdorff 空间是 $T_4$ 的.*

证明. 设 $X$ 是仿紧 Hausdorff 空间,$A$ 和 $B$ 是 $X$ 中的闭集, 且 $A \cap B = \varnothing$. 对 $\forall a \in A$, 由定理2.0.2, $\exists$ 开集 $U_a$, 使得 $\overline{U_a} \cap B = \varnothing$. 令 $\mathscr{A} = \{U_a \mid a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$, 则 $\mathscr{A}$ 为 $X$ 的一个开覆盖, 由 $X$ 的仿紧性, 存在局部有限开加细 $\mathscr{V} = \{V_j \mid j \in J\}$. 令 $J' = \{j \in J \mid V_j \cap A \neq \varnothing\}$, 则 $\mathscr{V}' = \{V_j \mid j \in J'\}$ 是 $A$ 的一个开覆盖. 且对 $\forall j \in J', \exists a \in A$, 使得 $V_j \subseteq U_a$. 所以 $\overline{V_j} \cap B = \varnothing, \forall j \in J'$. 因为 $\mathscr{V}'$ 是局部有限的, 由引理2.0.3, $\overline{\bigcup_{j\in J'}V_j} = \bigcup_{j\in J'}\overline{V_j}$. 所以 $B \cap \overline{\bigcup_{j\in J'}V_j} = \varnothing$. 所以 $X$ 是 $T_4$ 的. □

从上面的性质可以看出, 仿紧性与紧致性是很类似的. 事实上, 仿紧性就是对紧致性放松了一些条件. 仿紧空间不一定是紧的, 比如, 自然数集作为一个离散的拓扑空间, 是仿紧的 (通过下面的刻画可以知道). 但是却不是紧的.

# 第三章　$T_3$ 仿紧空间的一些刻画

接下来, 我们进入本文的正题, 就是对仿紧空间 (附加上一些分离公理) 的刻画, 使仿紧性质更加清晰一些, 而不仅仅只是个定义.

**定理 3.0.1.** *设 $X$ 是 $T_3$ 空间, 则下面各条件等价:*

*(1) $X$ 是仿紧的;*

*(2) $X$ 的任意开覆盖有 $\sigma$-局部有限开加细;*

*(3) $X$ 的任意开覆盖有局部有限加细;*

*(4) $X$ 的任意开覆盖有局部有限闭加细.*

*证明.* (1) $\Rightarrow$ (2) : 由仿紧的定义, 是显然的.

(2) $\Rightarrow$ (3) : 设 $\mathscr{U} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathscr{U}_i$, 其中 $\mathscr{U}_i$ 是局部有限 (非空) 开集族. 对 $\forall i \in \mathbb{N}, \forall U \in \mathscr{U}_i$, 记

$$C(i,U) = U \setminus \bigcup_{k=0}^{i-1} \mathscr{U}_k,$$

$$\mathscr{V}_i = \{C(i,U) \mid U \in \mathscr{U}_i\}.$$

其中 $\mathscr{V}_0 = \mathscr{U}_0$. 下面证 $\mathscr{V} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathscr{V}_i$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限加细. 对 $\forall x \in X$, 记 $n(x) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid x \in \bigcup \mathscr{U}_i\}$. 即存在 $U_x \in \mathscr{U}_{n(x)}$, 使得 $x \in U_x$. 所以有 $x \in C(n(x), U_x)$, $\bigcup \mathscr{V} = X$, $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细. 接着, 对 $\forall i > n(x)$, 有 $U_x \cap \bigcup V_i = \varnothing$. 对 $\forall i \leq n(x), \exists x$ 的领域 $A_i$, 最多只与 $\mathscr{U}_i$ 中的有限个元素相交, 因此也最多只与 $\mathscr{V}_i$ 中的有限个元素相交. 所以 $x$ 存在邻域 $U_x \cap \bigcap_{i=0}^{n(x)} A_i$ 最多和 $\mathscr{V}$ 中的有限个元素相交.

(3) $\Rightarrow$ (4) : 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的一个开覆盖. 对 $\forall x \in X, \exists U_x \in \mathscr{U}$, 使得 $x \in U_x$, 则 $x \notin U_x^c, U_x^c$ 为闭集. 再由 $X$ 满足 $T_3$ 公理, $\exists$ 开集 $V_x$, 使得 $\overline{V_x} \subseteq U_x$. $\mathscr{V} = \{V_x \mid x \in X\}$ 是 $X$ 的一个开覆盖, 而 $\mathscr{V}' = \{\overline{V} \mid V \in \mathscr{V}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细. 由条件, $\mathscr{V}$ 有局部有限加细 $\mathscr{W} = \{W_j \mid j \in J\}$. 因为 $\mathscr{V}'$ 是闭覆盖, 所以 $\mathscr{W}' = \{\overline{W} \mid W \in \mathscr{W}\}$ 是 $\mathscr{V}'$ 的局部有限闭加细, 从而也是 $\mathscr{U}$ 的局部有限闭加细.

(4) $\Rightarrow$ (1) : 设 $\mathscr{A}$ 为 $X$ 的一个开覆盖, 由条件, $\mathscr{A}$ 存在局部有限闭加细 $\mathscr{B}$. 对 $\forall x \in$

$X, \exists x$ 的邻域 $C_x$, 只与 $\mathscr{B}$ 中有限个元素相交. 记 $\mathscr{C} = \{C_x \mid x \in X\}$, 则 $\mathscr{C}$ 为 $X$ 的一个开覆盖. 再由条件, $\mathscr{C}$ 存在局部有限闭加细 $\mathscr{D}$. 对 $\forall B \in \mathscr{B}$, 记 $B' = X \setminus \bigcup\{D \in \mathscr{D} \mid D \cap B = \varnothing\}$. 能看出, $B'$ 为开集且 $B \subseteq B'$. 对 $\forall B \in \mathscr{B}, D \in \mathscr{D}$, 我们有 $B' \cap D = \varnothing$ 当且仅当 $B \cap D = \varnothing$. 对 $\forall B \in \mathscr{B}, \exists A_B \in \mathscr{A}$, 使得 $B \subseteq A_B$. 记 $\mathscr{U} = \{B' \cap A_B \mid B \in \mathscr{B}\}$. 因为对 $\forall B \in \mathscr{B}, \exists U \in \mathscr{U}$, 使得 $B \subseteq U$, 所以 $\mathscr{U}$ 为 $X$ 的一个开覆盖, 从而 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个开加细. 而 $\forall D \in \mathscr{D}, D$ 只与 $\mathscr{U}$ 中有限个元素相交. 加上 $\mathscr{D}$ 是 $X$ 的覆盖, 得出 $\mathscr{U}$ 是局部有限的. 所以 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{A}$ 的局部有限开加细, 所以 $X$ 是仿紧的. □

这个定理说明了, 局部有限开加细其实是一个比较强的条件, 是可以减弱的, 比如是 $\sigma$-局部有限的开加细就可以了. 对于一些特定的情况下, 这个定理对于判断某些空间是不是仿紧的, 就比较方便了.

上面的条件还可以进一步减弱一些. 因为局部有限或者 $\sigma$-局部有限, 同闭包保持比起来, 可能看上去还是要强一些的, 因为前者涉及到局部的性质, 而后者并没有在明处涉及到.

下面我们来看一看闭包保持 (开/闭) 加细和仿紧之间的联系.

**定理 3.0.2.** *设 $X$ 是正则的 Hausdorff 空间, 则下面各条件等价:*

*(1) $X$ 是仿紧的;*

*(2) $X$ 的任意开覆盖有闭包保持开加细;*

*(3) $X$ 的任意开覆盖有闭包保持加细;*

*(4) $X$ 的任意开覆盖有闭包保持闭加细.*

该定理证明的主要部分是 (4) $\Rightarrow$ (1), 而 (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (4) 相对来说容易一些. 为了证明 (4) $\Rightarrow$ (1), 我们需要先证明几个引理. 为了方便, 我们把频繁出现的条件列出来, 避免重复说明.

**条件 3.0.3.** *空间 $X$ 是正则 Hausdorff 空间, 且 $X$ 的任意开覆盖都有闭包保持闭加细.*

**引理 3.0.4.** *在条件3.0.3 下, 如果 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 $X$ 的一个开覆盖, 则 $X$ 存在一个闭包保持闭覆盖 $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$, 使得 $\forall \alpha \in A, C_\alpha \subseteq U_\alpha$.*

证明. 由条件, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 存在一个闭包保持闭加细 $\mathscr{V}$. 对 $\forall V \in \mathscr{V}$, 选取 $\alpha(V) \in A$, 使得 $V \subseteq U_{\alpha(V)}$. 对 $\forall \alpha \in A$, 定义

$$C_\alpha = \bigcup\{V \in \mathscr{V} \mid \alpha(V) = \alpha\}.$$

则 $C_\alpha \subseteq U_\alpha$. 由 $\mathscr{V}$ 是闭包保持闭加细, $C_\alpha$ 是闭集, 且 $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是闭包保持的. □

**引理 3.0.5.** *在条件3.0.3 下, $X$ 是正规的.*

*证明.* 设 $E_1, E_2$ 是 $X$ 中的两个互不相交的闭集, 则 $\{X\setminus E_1, X\setminus E_2\}$ 是 X 的一个开覆盖. 由引理3.0.4, $X$ 存在闭覆盖 $\{C_1, C_2\}$, 使得 $C_1\subseteq X\setminus E_1, C_2\subseteq X\setminus E_2$. 则 $E_1\subseteq X\setminus C_1, E_2\subseteq X\setminus C_2$, 而 $(X\setminus C_1)\cap(X\setminus C_2)=\varnothing$, 且都是开集. 所以 X 是正规的. □

**引理 3.0.6.** *(Dowker). 设 $X$ 是正规的, $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 $X$ 的离散的开子集族. 如果对 $\forall\gamma\in\Gamma$, 有 $D_\gamma\subseteq V_\gamma$, 且 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}D_\gamma$ 是闭集, 则 $X$ 存在一个离散的开子集族 $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, 使得*

$$D_\gamma\subseteq G_\gamma\subseteq V_\gamma,\ \ \forall\gamma\in\Gamma.$$

*证明.* 记

$$A=\{x\in X\mid x\text{存在邻域至多与一个}V_\gamma\text{相交非空}\}.$$

容易得到 $A$ 为开集, 且 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}D_\gamma\subseteq A$. 因为 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}D_\gamma$ 是闭集, $X$ 是正规的, 所以存在 $X$ 中开集 $B$, 使得

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}D_\gamma\subseteq B\subseteq\overline{B}\subseteq A.$$

令

$$G_\gamma=V_\gamma\cap B.$$

则 $G_\gamma$ 是开集, 且对 $\forall\gamma\in\Gamma, D_\gamma\subseteq G_\gamma\subseteq V_\gamma$. 由 $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是离散的, $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 也是离散的. □

有了上面的准备, 我们终于可以开始这个定理的证明了.

*证明 (定理3.0.2).* (4) ⇒ (1): 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 $X$ 的一个开覆盖, 且 $A$ 是一个良序指标集. 我们需要证明的是 $\{U_\alpha\}_\alpha$ 存在 $\sigma$-局部有限开加细.

Step 1. 我们先构造一列子集族, 对 $\forall i\in\mathbb{N}$, $\{C_{\alpha,i}\}$ 满足下面的条件:
ⓐ $\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$ 是 $X$ 的闭包保持闭覆盖, 且对 $\forall\alpha\in A, C_{\alpha,i}\subseteq U_\alpha$.
ⓑ $C_{\alpha,i+1}\cap C_{\beta,i}=\varnothing$, 对 $\forall\alpha>\beta$.
构造方法如下. 由引理3.0.4, 存在 $\{C_{\alpha,0}\}_{\alpha\in A}$ 满足ⓐ(自然地满足ⓑ), 此时 $i=0$. 假设对 $i\leq n, \{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$ 均满足 ⓐ和ⓑ. 下面我们构造 $\{C_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in A}$. 我们定义

$$U_{\alpha,n+1}=U_\alpha-(\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,n}),\ \ \forall\alpha\in A.$$

因为 $\{C_{\alpha,n}\}_{\alpha\in A}$ 是闭包保持的, 所以 $U_{\alpha,n+1}$ 为开集. 对 $\forall x\in X$, 存在最小的 $\alpha_0$, 使得 $x\in U_{\alpha_0}$, 同时, $x\in U_{\alpha_0,n+1}$, 所以 $\{U_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的一个开覆盖. 再由引理3.0.4, 存在一个闭包保持闭覆盖 $\{C_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in A}$, 使得对 $\forall\alpha\in A, C_{\alpha,n+1}\subseteq U_{\alpha,n+1}$, 从而 $C_{\alpha,n+1}\subseteq U_\alpha$, 因

此ⓐ满足. 由 $U_{\alpha,n+1}$ 的定义, 有 $U_{\alpha,n+1}\cap C_{\beta,n}=\varnothing,\forall\beta<\alpha$. 因为 $C_{\alpha,n+1}\subseteq U_{\alpha,n+1}$, 所以 $C_{\alpha,n+1}\cap C_{\beta,n}=\varnothing,\forall\beta<\alpha$. ⓑ也满足了. 构造成功.

Step 2. 我们继续构造一列子集族. 对 $\forall\alpha\in A,i\in\mathbb{N}$, 定义

$$V_{\alpha,i}=X\setminus(\bigcup_{\beta\neq\alpha}C_{\beta,i}).$$

我们有

ⓒ $\{V_{\alpha,i}\mid\alpha\in A,i\in\mathbb{N}\}$ 是 $X$ 的一个开覆盖, 且对 $\forall\alpha\in A,i\in\mathbb{N},V_{\alpha,i}\subseteq U_\alpha$.

ⓓ $V_{\alpha,i}\cap V_{\beta,i}=\varnothing$, 当 $\alpha\neq\beta$ 时.

因为 $\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$ 是闭包保持的闭覆盖, 所以 $V_{\alpha,i}$ 是开集, 且我们有 $V_{\alpha,i}\subseteq C_{\alpha,i}\subseteq U_{\alpha,i},\forall\alpha,i$. 再由 $V_{\alpha,i}$ 的定义, 可知ⓓ满足. 对于ⓒ, 我们还需要证明 $\{V_{\alpha,i}\mid\alpha\in A,i\in\mathbb{N}\}$ 是 $X$ 的一个覆盖. 任取 $x\in X$, 由集合 $A$ 是良序的, 令

$$\alpha_i=\min\{\alpha\in A\mid x\in C_{\alpha,i}\},\ \ i\in\mathbb{N}.$$

再选取一个自然数 $k$, 使得

$$\alpha_k=\min\{\alpha_i\mid i\in\mathbb{N}\}.$$

由定义, 对 $\forall\alpha<\alpha_k,x\notin C_{\alpha,i}$. 对 $\forall\alpha>\alpha_k$, 由ⓑ, $C_{\alpha,k+1}\cap C_{\alpha_k,k}=\varnothing$, 所以 $x\notin C_{\alpha,k+1}$. 但由于 $\{C_{\alpha,k+1}\}_{\alpha\in A}$ 是 $X$ 的一个覆盖, 所以 $x$ 属于 $C_{\alpha_k,k+1}$. 再由 $V_{\alpha_k,k+1}$ 的定义, 有 $x\in V_{\alpha_k,k+1}$. 所以 $\{V_{\alpha,i}\mid\alpha\in A,i\in\mathbb{N}\}$ 是 $X$ 的覆盖.

Step 3. 由引理3.0.4, 存在 $X$ 的闭包保持闭覆盖 $\{D_{\alpha,i}\mid\alpha\in A,i\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall\alpha,i,D_{\alpha,i}\subseteq V_{\alpha,i}$. 由引理3.0.5, X 是正规的, 对 $\forall i$, 由引理3.0.6, 存在离散开子集族 $\{G_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$, 使得

$$D_{\alpha,i}\subseteq G_{\alpha,i}\subseteq V_{\alpha,i},\ \ \forall\alpha.$$

于是, $\{G_{\alpha,i}\mid\alpha\in A,i\in\mathbb{N}\}$ 是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的 $\sigma$-局部有限开加细. 所以 $X$ 是仿紧的.

(1) $\Rightarrow$ (2) : 因为 $X$ 是仿紧的, 所以任意开覆盖存在局部有限开加细. 由引理2.0.3, 局部有限子集族是闭包保持的, 所以任意开覆盖也存在闭包保持的开加细.

(2) $\Rightarrow$ (3) : 这是显然的.

(3) $\Rightarrow$ (4) : 设 $\mathscr{U}$ 是 $X$ 的一个开覆盖. 因为 $X$ 是正则的, 所以存在 $X$ 的开覆盖 $\mathscr{V}$, 使得 $\{\overline{V}\mid V\in\mathscr{V}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细. 由假设, $\mathscr{V}$ 存在闭包保持加细 $\mathscr{W}$. 而 $\{\overline{W}\mid W\in\mathscr{W}\}$ 是 $\{\overline{V}\mid V\in\mathscr{V}\}$ 的闭包保持闭加细, 所以也是 $\mathscr{U}$ 的闭包保持闭加细. $\square$

到这里, 我们就已经有了好几个 (在一定分离公理下) 仿紧性的等价条件了. 以后判断

一个空间是不是仿紧, 也就没有必要只盯着定义来回思考了, 还可以考虑这么多个等价的条件. 路多了, 总有一条适合你.

# 第四章　仿紧空间的一些性质（下）

同样是仿紧空间的性质, 和上一个性质的集合不一样, 这里的性质需要借助上面对仿紧性质的刻画才能够得到. 这也是为什么会把性质放在两个地方.

**定理 4.0.1.** *满足 $T_3$ 公理的 Lindelöf 空间是仿紧的.*

*证明.* 设 $X$ 是满足 $T_3$ 公理的 Lindelöf 空间. 由定理3.0.1, 要证 $X$ 仿紧, 只要证 $X$ 的任意开覆盖有 $\sigma$-局部有限开加细. 而 $X$ 是 Lindelöf 的, 所以任意开覆盖有可数子覆盖, 自然是 $\sigma$-局部有限开加细, 所以是仿紧的. □

**推论 4.0.2.** *设拓扑空间 $X$ 是 $T_3$ 的和 $C_2$ 的, 则 $X$ 是仿紧的.*

*证明.* 因为 X 是 $C_2$ 的, 设 $\mathscr{B}$ 为 X 的一个可数拓扑基. 则对 X 的任意开覆盖, $\mathscr{B}$ 都是这个开覆盖的一个可数子覆盖. 由此可知, $C_2$ 空间都是 Lindelöf 空间. 再由定理4.0.1, 拓扑空间 X 是仿紧的. □

上面的推论, 说明了仿紧性, 是比较普遍的, 满足了 $T_3$ 和 $C_2$ 即可. 而其实很多拓扑空间, 都会满足. 也就是说仿紧性, 及其可应用的范围是很广的.

我们知道, 紧空间的 $F_\sigma$ 子空间不一定是紧空间, 但是对于仿紧性来说, 就不是这样了. 下面的定理就是说的这样一件事.

**定理 4.0.3.** *设 $X$ 是 $T_3$ 的仿紧空间, 则 $X$ 的 $F_\sigma$ 子空间是仿紧的.*

*证明.* (回忆: $F_\sigma$ 子集是可数个闭子集的并.) 设 $Y$ 为 $X$ 的 $F_\sigma$ 子空间, 则有

$$Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\,,\ \ A_i\text{为 X 中的闭集.}$$

设 $\mathscr{C}$ 为 $Y$ 的一个开覆盖. 因为 $Y$ 是 $X$ 的子空间, 所以存在 $X$ 的开子集族 $\mathscr{C}'$, 使得 $\mathscr{C} = \{Y \cap C \mid C \in \mathscr{C}'\}$. 接下来, 我们通过 $X$ 的仿紧性, 来构造 $\mathscr{C}$ 的 $\sigma$-局部有限开加细. 令

$$\mathscr{W}_i = \mathscr{C}' \cup \{X \setminus A_i\},\ \ i = 1, 2, \ldots .$$

易知, $\mathscr{W}_i$ 为 $X$ 的开覆盖, 由 $X$ 的仿紧性, $\mathscr{W}_i$ 存在局部有限开加细 $\mathscr{F}_i$. 令

$$\mathscr{G}_i = \{F \in \mathscr{F} \mid F \cap A_i \neq \varnothing\}.$$

则 $\mathscr{G}_i$ 是 $\mathscr{C}'$ 的部分加细, 且是 $A_i$ 的开覆盖. 令

$$\mathscr{H}_i = \{G \cap Y \mid G \in \mathscr{G}_i\},$$

则 $\mathscr{H}_i$ 是 $\mathscr{C}$ 的局部有限部分开加细. 令

$$\mathscr{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}_i,$$

因为 $\mathscr{H}_i$ 是 $A_i$ 的开覆盖, 所以 $\mathscr{U}$ 是 $Y$ 的开覆盖. 因为 $\mathscr{H}_i$ 是 $\mathscr{C}$ 的部分开加细, 所以 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{C}$ 的开加细. 而 $\mathscr{U}$ 是 $\sigma$-局部有限的, 可以得到 $Y$ 是仿紧的. □

最后, 我们说明一下乘积空间仿紧性的问题.

**引理 4.0.4.** *设拓扑空间 $X$ 是紧致的. 对任意拓扑空间 $Y$, 投射*

$$p : X \times Y \longrightarrow Y,\ p(x, y) = y$$

*是完备映射.*

*证明.* 首先, $p$ 是连续满映射. 对 $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y) = X \times \{y\}$. 因为 $X$ 是紧的, $\{y\}$ 也是紧的, 所以 $f^{-1}(y)$ 是紧的. 接下来, 只要说明 $p$ 是闭映射即可. 假设 $A$ 是 $X \times Y$ 上的闭集, 任取 $y_0 \in p(A)^c$, 则有 $X \times \{y_0\} \cap A = \varnothing$, 即对 $\forall x \in X, (x, y_0) \notin A$. 由 $A$ 是闭集, 分别存在 $X$ 和 $Y$ 中的开集 $U_x, V_x$, 使得 $(x, y_0) \in U_x \times V_x, (U_x \times V_x) \cap A = \varnothing$. $\{V_x \mid x \in X\}$ 是 $Y$ 的开覆盖, 由 $X$ 的紧性, 存在有限子覆盖 $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}\}$. 令 $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$, 则 $V$ 是 $y_0$ 的开邻域, 且 $(X \times V) \cap A = \varnothing$, 所以 $V \cap p(A) = \varnothing$, 所以 $p(A)$ 是闭集. 从而 $p$ 是完备映射. □

**引理 4.0.5.** *$X$, $Y$ 为拓扑空间. 设 $f : X \longrightarrow Y$ 是完备映射, 且 $Y$ 是仿紧的, 则 $X$ 是仿紧的.*

*证明.* 设 $\mathscr{U}$ 为 $X$ 的开覆盖. 对 $\forall y \in Y, f^{-1}(y)$ 是 $X$ 的紧子集, 从而 $\mathscr{U}$ 存在有限子覆盖 $\mathscr{U}_y$, 使得 $f^{-1}(y) \subseteq \bigcup \mathscr{U}_y$. 由 $f$ 的连续性, 存在 $y$ 的邻域 $V_y$, 使得 $f^{-1}(V_y) \subseteq \bigcap \mathscr{U}_y$. $\{V_y \mid y \in Y\}$ 是 $Y$ 的开覆盖, 由 $Y$ 的仿紧性, 存在局部有限开加细 $\mathscr{V}$. 对 $\forall V \in \mathscr{V}, \exists y(V) \in Y$, 使得

$V \subseteq V_{y(V)}$. 我们定义

$$\mathscr{A} = \{f^{-1}(V) \cap W \mid V \in \mathscr{V}, W \in \mathscr{U}_{y(V)}\}.$$

易知, $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细. 因为 $\mathscr{V}$ 是局部有限的, $f$ 是完备映射, 所以 $\{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{V}\}$ 在 $X$ 中是局部有限的. 而 $\mathscr{U}_{y(V)}$ 都是有限子集族, 所以可得 $\mathscr{A}$ 也是局部有限的. 所以 $X$ 是仿紧的. □

**命题 4.0.6.** *设 $X$ 是紧空间, $Y$ 是仿紧空间, 则 $X \times Y$ 是仿紧空间.*

*证明.* 记投射

$$p : X \times Y \longrightarrow Y,\ p(x, y) = y.$$

由引理4.0.4, $p$ 是完备映射. 因为 Y 是仿紧的, 由引理4.0.5, $X \times Y$ 是仿紧的. □

# 参考文献

[1] 蒋继光. 一般拓扑学专题选讲, 四川教育出版社, 1991 年

[2] 尤承业. 基础拓扑学讲义, 北京大学出版社, 1997 年

[3] 儿玉之宏, 永见启应. 拓扑空间论, 2001 年

[4] Ernest Michael. A Note on Paracompact Spaces(1953)

[5] Ernest Michael. Another Note on Paracompact Spaces(1956)

[6] Marco Manetti. Topology(2015) p133-135

[7] Lisa Jeffrey. Notes on Paracompactness(2015)

[8] Wikipedia. Paracompact Space

[9] Wikipedia. Cover(topology)

# 致　谢

感谢南大这四年的栽培. 感谢师维学老师在拓扑学上的教学与指导. 感谢这么多年室友对我的包容. 最后感谢家人对我的支持, 没有他们也就没有今天的我.