3 人勝ち抜き戦で何人が金メダルをもらえるか？

庄司　充@ mitstream

2018 年 12 月 16 日

1　問題の背景

剣道の試合で個人戦といえば通常はトーナメント戦だが、中には 3 人勝ち抜き戦というのがある。これは文字通り 1 人の選手が 3 試合連続で試合に勝てば表彰されるという方式である。例を説明しよう。参加選手に 1 から順番に 1,2,3... と番号とつける。第 1 試合は選手 1 と選手 2 が戦う。もし選手 2 が勝った場合、選手 1 は敗退となる。選手 2 は続いて選手 3 と試合をする。ここで選手 3 が勝てば選手 2 は敗退となる。選手 3 は続いて選手 4 と試合をする。ここで選手 3 が再び勝てば、選手 4 は敗退し、選手 3 は引き続き選手 5 と対戦する。ここでも選手 3 が勝てば、選手 5 は敗退し、選手 3 は勝ち抜きとなり金メダルをもらえる。次の試合は選手 6 と選手 7 で行われ、同様に負けた選手は敗退し、勝った選手は残って次の相手と対戦する。 引き分けはない。

さて、この試合を主催者側から見てみよう。3 人勝ち抜く選手が出るごとに金メダルを 1 つ進呈しなければならない。参加者が N 人いる場合、主催者は金メダルをいくつ準備しておけば良いのだろうか？これが今回考察すべき問題である。

2　方針

簡単のため、まずは全ての試合が五分五分であるとする。すなわち全ての試合において対戦する両者の各々が 1/2 の確率で勝つとする。勝敗の確率については後で考察する。実は 2 戦目、3 戦目に勝ち進むほど、その選手が勝つ期待が高まるので、全ての確率を 1/2 とする仮定は現実を反映していないのだが、最初から妥当な確率を用いて計算すると表記が煩雑になってしまうため、まずは簡単なところで考え方を確認することにした。

試合は状態 1 から状態 3 の 3 種類に分類することができる。状態 1 は対戦する両者が初戦の場合、状態 2 は一方が 2 試合目で相手は初戦の場合、状態 3 は一方が 3 試合目で相手は初戦の場合と定める。ある選手が 3 連勝するとは、状態 3 の状態で 3 勝目を上げることであり、その次の試合は必ず状態 1 である。すなわち、3 人勝ち抜いて金メダルをもらう選手の数を知りたければ、状態 1 の試合が何回出現したかを数えれば良い。第 1 試合を除き、状態 1 の試合が出現したということは、その前の試合で勝ち抜き者が出現したということになるからである。よって方針として状態 1 の試合が出現する期待値を求めることとする。

3　具体的な計算

3.1　記号の定義

第 n 試合目が状態 1 である確率を x_n、状態 2 である確率を y_n、状態 3 である確率を z_n とする。試合はこの 3 つの状態のいずれかにしかならないから、$x_n + y_n + z_n = 1$ である。今後の表記のために、3 つの状態を 1 つにまとめて

$$\boldsymbol{p}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

と表記することとする。第 1 試合は対戦する両者とも初戦なので、

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

である。また、第 2 試合は第 1 試合の結果、必ずいずれか一方が勝ち残り（この選手を選手 2 とする)、新たな相手（この選手を選手 3 とする）と対戦することになるので、状態 2 以外にはなり得ない。すなわち、

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

第 3 試合からは、第 2 試合の結果に応じて状態が異なる。仮に選手 2 が勝った場合、第 3 試合は選手 2 対新たな選手（選手 4）である。これは状態 3 に該当する。逆に第 2 試合で選手 3 が勝った場合、第 3 試合は選手 3 対選手 4 であるが、これは選手 3 の履歴を考えれば状態 2 に該当する。

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

である。

一般に第 $n+1$ 試合における試合の状態は 1 つ前の試合、つまり第 n 試合の状態に依存し、それぞれ

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2} z_n \\ y_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2} y_n + \dfrac{1}{2} z_n \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2} y_n \end{cases} \tag{5}$$

と表される。この関係は表 1 にまとめた。

今後のために行列表記を導入し

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

と表すと、式 (5) は

$$\boldsymbol{p}_{n+1} = A\boldsymbol{p}_n \tag{7}$$

と簡潔な形に書ける。

3.2 計算の道すじ

式 (7) より

$$\boldsymbol{p}_n = A^{n-1}\boldsymbol{p}_1 \tag{8}$$

と分かるので、我々は単純な線形代数の問題（式 (8)）を解くことで、第 n 試合目が状態 1 となる確率 x_n を知ることができる。「方針」のところで述べた通り、状態 1 の出現数が勝ち抜き者数と等しいので（厳密には第 1 試合があるので 1 つ違うが)、N 人が参加する大会における勝ち抜き者数の期待値 E は

$$E = -1 + \sum_{n=1}^{L} x_n \tag{9}$$

で求められる。-1 は第 1 試合を除くため、また和の上限 L は、N 人参加の場合の試合数を意味する。試合数は試合が終わった選手の数を数え上げることで $\boldsymbol{p}_n$ と次の式で関係づけられる。

$$N = \sum_{n=1}^{L} (2x_n + y_n + z_n) - 1 \tag{10}$$

すなわち、状態 1 の試合が始まるということは、その直前の試合が終了したことで勝敗に関わらず 2 名が出番を終え、その他の状態では敗者のみが出番を終える。ただしここでも第 1 試合だけは例外なので -1 の項がつく。$x_n + y_n + z_n = 1$ に留意すると式 (10) より

表 1　試合状態の前後関係

第 $n-1$ 試合	勝者	第 n 試合
状態 1	初戦の選手	状態 2
状態 2	初戦の選手	状態 2
	2 戦目の選手	状態 3
状態 3	3 戦目の選手	状態 1
	初戦の選手	状態 2

$$
\begin{aligned}
N+1 &= \sum_{n=1}^{L}(1+x_n) \\
&= L+E+1 \\
\Leftrightarrow \quad L &= N-E
\end{aligned} \tag{11}
$$

期待値を求めるための和の上限が期待値によるという一見するとややこしい状況になってしまったが、これは後ほど x_n の具体的な形を求めたあとで解決を図る。

3.3 A^{n-1} の計算

まずは定石に則って行列 A の対角化を試みる。そのためにまずは固有値と固有ベクトルを求める。固有値とは

$$
A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{12}
$$

を満たす λ のことであり、それに対応するゼロベクトルでない $\boldsymbol{x}$ を固有ベクトルという。今は A が 3×3 行列なので（重複を許して）固有値は 3 つある。もし固有値に重複があれば A は対角化できず、ジョルダン標準形を求めなければばならないが、幸いにして今回のケースでは固有値の重複はない。ただし固有値が複素数となるため計算は面倒だ。

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} &\Leftrightarrow (A-\lambda E)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\
&\Leftrightarrow \det(A-\lambda E) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^2\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda = 0
\end{aligned} \tag{13}
$$

これより

$$
\lambda = 1, \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}, \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} \tag{14}
$$

と 3 つの固有値が求められる。これらに対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} \\ 1 \\ \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} \\ 1 \\ \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} \end{pmatrix} \tag{15}
$$

と求められる。これより

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} & \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} & \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} \end{pmatrix} \tag{16}$$

を用いて、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} \end{pmatrix} \tag{17}$$

と表せる。念のため、P^{-1} は P の逆行列である。対角化は行列の n 乗を計算する際の常套手段である。なぜならば対角化された行列の積は計算が容易だからである。さらに

$$\begin{aligned} \left(P^{-1}AP\right)^n &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots AP \\ &= P^{-1}A^nP \end{aligned} \tag{18}$$

という計算を踏まえると、

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}\right)^n \end{pmatrix} \tag{19}$$

すなわち

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}\right)^n \end{pmatrix}P^{-1} \tag{20}$$

と簡単に（少なくとも直接 A を掛ける操作を n 回するよりは…）A^n を計算できる。必要なのは P^{-1} を求めて、具体的に式 (20) の右辺をすることである。ここでは煩雑さを避けるために途中の計算を省略するが、P^{-1} は余因子行列 $\tilde{P}$ と P の行列式 $\mathrm{det}P$ を用いて

$$
\begin{aligned}
P^{-1} &= \frac{\tilde{P}}{\mathrm{det}P} \qquad (21)\\
&= \begin{pmatrix}
\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} & \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} & \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} \\
\dfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} & \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} & \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} - \dfrac{1}{4} \\
\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} - \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} & \dfrac{1}{4} - \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と求められる。

さて、本来我々が求めたいのは $\boldsymbol{p}_n$、もっと言えば x_n である。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_n &= A^{n-1}\boldsymbol{p}_1 \\
&= P \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}\right)^{n-1} & 0 \\
0 & 0 & \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}\right)^{n-1}
\end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

をひたすら計算すれば答えにたどり着く。(割と大変な計算をすることになる…。)

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{4}{7}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}}{4} + \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}}{2}\right)^n - 4\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}}{2}\right)^n + 4\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}}{2}\right)^{n+1}\right\} \\
&= \frac{4}{7}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}}{4} + \frac{1}{2^n}\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}n\pi\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}n\pi\mathrm{i}}\right) - \frac{1}{2^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}n\pi\mathrm{i}}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{7} + \frac{\sqrt{3}}{21}\frac{1}{2^{n-3}}\left\{\sin\frac{2n\pi}{3} - 2\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}\right\} \\
&= \frac{1}{7} + \frac{\sqrt{3}}{21}\frac{1}{2^{n-3}}\left(2\sin\frac{2n\pi}{3} - \sqrt{3}\cos\frac{2n\pi}{3}\right) \qquad (22)
\end{aligned}
$$

途中で

$$
\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = 2\mathrm{i}\sin z \qquad (23)
$$

を用いた。式 (22) は第 n 試合目に 3 人勝ち抜きを決めた選手が現れる確率を表す。

3.4　勝ち抜き者数の期待値 E の計算

x_n が求められたので、式（9）を用いて期待値の計算を進めることができる。すなわち

$$
\begin{aligned}
E &= -1 + \sum_{n=1}^{L} x_n \\
&= -1 + \sum_{n=1}^{L} \left\{ \frac{1}{7} + \frac{\sqrt{3}}{21} \frac{1}{2^{n-3}} \left(2\sin\frac{2n\pi}{3} - \sqrt{3}\cos\frac{2n\pi}{3} \right) \right\} \\
&= -1 + \frac{1}{7}L + \sum_{n=1}^{L} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{21} \frac{1}{2^{n-3}} \left(2\sin\frac{2n\pi}{3} - \sqrt{3}\cos\frac{2n\pi}{3} \right) \right\}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

であるが、ここで試合数 L の取り扱いが問題になる。この問題は真正面から取り組んでもどうにもならないので、ここでは抜け道を使って困難を回避する。

まず和の部分であるが、これはよく見ると $1/2^{n-3}$ のおかげで、n の増加に伴い急速にある値に収束することが期待される。よって n がある程度より大きければ、和の上限をいくつにしても収束する値にほとんど影響しない。そこで思い切って $L \to \infty$ としてしまう。

式（24）の中の三角関数は n を 3 で割った余りによって 3 通りの値を取る。

$$
2\sin\frac{2n\pi}{3} - \sqrt{3}\cos\frac{2n\pi}{3} =
\begin{cases}
\frac{3\sqrt{3}}{2} & n \equiv 1 \pmod 3 \\
-\frac{\sqrt{3}}{2} & n \equiv 2 \pmod 3 \\
-\sqrt{3} & n \equiv 0 \pmod 3
\end{cases}
\tag{25}
$$

これを踏まえて以下の通り和の部分を計算する。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{L} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{21} \frac{1}{2^{n-3}} \left(2\sin\frac{2n\pi}{3} - \sqrt{3}\cos\frac{2n\pi}{3} \right) \right\} \\
&\simeq \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{21} \frac{1}{2^{n-3}} \left(2\sin\frac{2n\pi}{3} - \sqrt{3}\cos\frac{2n\pi}{3} \right) \right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{21} \left(\frac{1}{2^{3k+1-3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2^{3k+2-3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2^{3k+3-3}} \times \sqrt{3} \right) \right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{21} \left(\frac{6\sqrt{3}}{8^k} - \frac{\sqrt{3}}{8^k} - \frac{\sqrt{3}}{8^k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{21} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{8^k} \\
&= \frac{4}{7} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} \\
&= \frac{32}{49}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

これと式（24）および式（11）より

$$
\begin{aligned}
E \simeq & -1+\frac{1}{7}L+\frac{32}{49} \\
\simeq & -1+\frac{1}{7}(N-E)+\frac{32}{49} \\
\Leftrightarrow E \simeq & \frac{N}{8}-\frac{17}{56}
\end{aligned} \tag{27}
$$

4　残された問題の回収ー勝敗の確率をどう見積もるか

N 人が参加して行う 3 人勝ち抜き戦において、全ての選手の勝率が五分とした場合に 3 人抜きを達成する選手の数は概ね $N/8$ 人であると予想された。これは $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$（五分の試合で 3 連勝する確率）という単純な直感にほぼ合致しているが、その背景を紐解いていくのは、それなりに骨の折れる計算であった。

さて、全ての確率を 1/2 とおいてここまで計算を進めてきたが、実際はどうだろうか？ある選手が勝つ確率を考えることで、もう少し妥当な確率の値を見積もることができる。まず、引き分けがないということから、全ての選手に序列が付けられると考えることができる。あからさまな表現をすれば、n 人の選手に対して弱い順に $1,2,3,\cdots,n$ と順番が付くということである。序列 i,j の選手が対戦する際に $i<j$ ならば序列 j の選手が勝つ。ここである選手が勝つ確率を考える。自分の出番が来た時点で自分も含めて n 人の選手が試合を控えていると考える。この選手の序列は不明であるが、仮に序列を k とすると、この選手が勝つためには対戦相手の序列が自身より小さい必要がある。言い換えると、試合に勝つ確率はランダムに選んだ対戦相手の序列が $1,2,3,\cdots,k-1$ のどれかである確率である。

以上を踏まえて、序列 k の選手が 1 回勝つ確率 $p_1(k)$ は

$$
p_1(k)=\frac{k-1}{n-1} \tag{28}
$$

となる。この選手の序列は実際には $1,2,3,\cdots,n$ のいずれなのか分からない。むしろある特定の値（や特定の範囲）にあると考える理由もない。よってこの選手は $1/n$ の確率で 1 から n のどれかの序列番号を持っているとするのが合理的である。従ってある選手が 1 回勝つ確率 p_1 は

$$
p_1=\sum_{k=1}^{n}p_1(k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n(n-1)}=\frac{1}{2} \tag{29}
$$

あとは同じ考え方で、ある選手が 2 連勝、3 連勝する確率 p_2, p_3 を計算することができる。特に状態 2 から 3、状態 3 から 1 に至る確率は、状態 1 を抜けた（初戦を制した）その選手が勝つ確率と同じものであることに注意する。

$$
p_2=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{3} \tag{30}
$$

$$
p_3=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=\frac{1}{4} \tag{31}
$$

と計算される。以下の式を適宜用いた。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{1}{2}n(n+1) \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2
\end{aligned}
\tag{32}
$$

従って、状態 2 から状態 3 へ至る確率は $p_2/p_1 = \dfrac{2}{3}$、状態 3 から状態 1 へ至る確率は $p_3/p_2/p_1 = \dfrac{3}{4}$ と推算できる。

5　再計算と結果の検証

前項を踏まえて計算を見直す。式 (6) の A を次の A' に変えて同じ計算を繰り返す。

$$
A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \tag{33}
$$

その結果 x_n は次の通り。見た目は全く面白みのない結果である。（これが最初から正しい確率を使って計算しなかった理由）

$$
x_n = \frac{3}{13} + \frac{5}{13}\left(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}\right) - \frac{1}{13}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{14}}\left(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\right) \tag{34}
$$

ただし

$$
\alpha = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{14}}{6}\mathrm{i}, \beta = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{14}}{6}\mathrm{i}
$$

勝ち抜き者数の期待値 E は

$$
E \simeq \frac{3}{16}N \tag{35}
$$

と求められる。ちなみに $p_3 = \dfrac{3}{4}$ と見積もったので、2 連勝止まりの選手の数は 3 連勝する選手の $\dfrac{1}{3}$ の $\dfrac{N}{16}$ と計算できる。（勝つ確率が $\dfrac{3}{4}$ なら負ける確率は $1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$ なので）

検証

2018 年に茨城県剣道道場連盟主催で開催された、第 19 回茨城県ジュニア剣道大会は 76 の道場より合計 1029 名の選手が 3 人勝ち抜き個人戦に出場した。そのうち金メダル（3 連勝）を手にした選手は 199 名、惜しくも銀メダル（2 連勝；金メダルをかけた 3 戦目で敗北）だった選手が 59 名であった。

一方、式 (35) から推算される金メダル取得者数は 193 名、銀メダルは 64 名となる。今回の見積もりはそれほど悪くないと言って良いのではないだろうか。

6　まとめ

勝ち抜き戦の金メダル取得者数を推算した。行列の対角化の良い演習となるテーマであった。