試合経験豊富な剣道家の存在定理

庄司　充 @ mitstream

2020 年 7 月 23 日

1　舞台設定

1.1　人が集まる

剣道家が集まって合同稽古を行う。初対面同士もいれば、過去に対戦した方との再会もあるだろう。いま、集まった中のどの 2 人を選んでも、試合で対戦したことのある共通の知り合いが 1 人だけいる、という状況を考える。 1 人の剣道家を 1 つの点で表し、過去に試合で対戦したことがある人同士を線で結ぶことで、集まった人たちの関係性を図にしてみよう。（図 1）

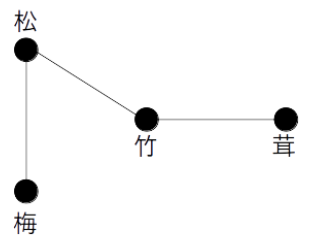


図 1　人間関係を点と線で図にしてみる

竹と梅は対戦経験がないが、 2 人とも松とは対戦したことがある。また竹は茸とも対戦した経験がある。

1.2　ひとつの正解

どの 2 人を選んでも共通の知り合いがいるという状況を表す例として、図 2 のような「風車型」が考えられるだろう。確かに”どの 2 人”を選んでも共通の知り合いが 1 人だけいる。それ以上に特筆すべきは、中央にいる人物は全員と試合経験のある百戦錬磨の強者だということだ。

1.3　改めて証明すべきことの確認（命題）

どの 2 人を選んでも共通の知人（過去に対戦したことのある人）がいる状況を考えた。一つの可能性として、全員と対戦実績のある、試合経験豊富な剣道家の存在が考えられた。

実はこれから示すように、これが唯一の関係図である。すなわち

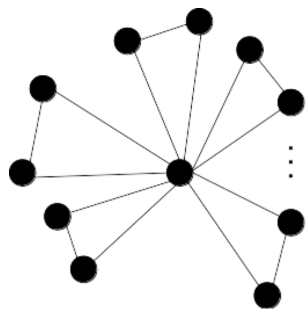


図 2　条件を満たす関係図の例

試合経験豊富な剣道家の存在定理

剣道家が集まっている。その中のどの２人を選んでも、過去に対戦したことのある共通の知り合いが１人だけいるとき、すべての剣道家と対戦したことのある、試合経験豊富な剣道家が必ず存在する。

1.4　あらかじめのお断り

作法として申し上げておかねばならないが、上記の定理は friendship theorem (友情定理) として知られる有名な定理であり、当然私のオリジナルではない。これから示す証明もオリジナルではなく”Proofs from THE BOOK” という本に載っているものであり、発案者は伝説の数学者、ポール・エルディシュである。
剣道して数学するおじさんとしては、剣道のネタにしてみたかったのである。

2　証明の流れ

真面目に証明する。
人を点で表し、対戦経験のある人同士（点同士）を線でつないで描く関係図を考える。その関係図が「風車型」以外には存在し得ないことを示したい。そこで次のような順番で話を進めていく。同じ条件を何度も書くのが煩わしいので、「どの２人を選んでも、過去に対戦したことのある共通の知り合いが 1 人だけいる」という条件を「条件 (A)」とする。

1. 条件 (A) 表す関係図で「風車型」ではないものが存在すると仮定する。
2. そのような関係図の満たす条件を調べていくと、全ての点から同じ数の線が出ているはずだと分かる。
3. すると条件 (A) が成立するためには、集まる人の数にある制限が必要であることが分かる。
4. ところが (2) と (3) を同時に満たすような関係図は、点が 3 つの図（三角形）以外には存在し得ないことが分かる。
5. 従って (1) の仮定が間違っている、すなわち関係図は必ず「風車型」であり、全ての剣道家と対戦したことのある剣道家が必ず存在する。

3　関係図の性質を考える

3.1　風車型ではない関係図が描けるとする

その（風車型ではない）関係図に G と名前をつける。G は「誰もが全員とは対戦していない」状況に対応するから、直接線で結ばれていない 2 点が存在する。それらを p,q と名付ける。また記号 $d(p)$ で点 p と隣り合っている点の数を表す。ここで、隣り合っているというのは、直接線で結ばれていることと同じ意味である。例えば点 p に対応する人が対戦したことのある人の数が k 人ならば、p は関係図の中で k 個の点と隣り合っており、$d(p)=k$ である。

p と q には 1 人だけ共通の知人がいるはずである。それを z_2 とする。条件 (A) から、p と z_2 にも共通の知人が 1 人だけいるはず (当然 p と隣り合っている) なので、それを z_1 とする。ここまでは、図が「風車型」ではないという仮定と、与えられた条件 (A) から直ちに分かることである。（図 3）

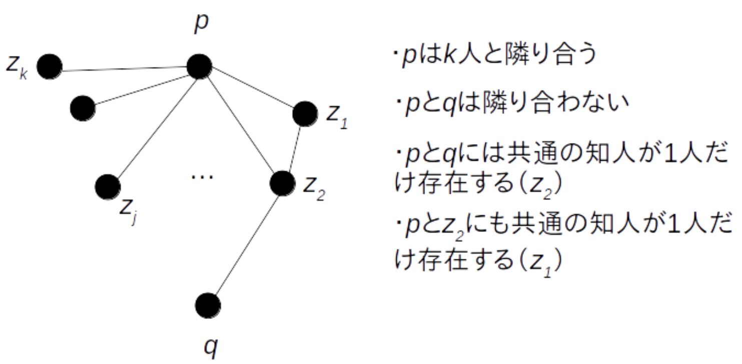


図 3　想定している状況を図にしてみる

3.2　隣り合わない 2 点 p と q が隣り合う点の数は同じになる

まずはじめに、$d(p)=d(q)$ であることを示す。

G の特徴として注意すべきは、図 4 に示すような四角形を形成していてはいけない（条件 (A) に反する）ということが挙げられる。なぜならば、四角形を形成してしまうと、p と q の共通の知人が 1 人だけではなくなってしまうからである。従って、図 3 の q は z_3 から z_k までのいずれとも隣り合っていてはならない。一方で q と $z_j (j \geq 2)$ の 2 点にも、共通に隣り合う点が 1 つだけ存在している。それらを x_j とする。さらに 4 つの点を結ぶ線が四角形の辺になってはいけないから、$i \neq j$ ならば x_i と x_j は異なる点でなければならない。以上の考察から、図 3 からもう少し点の配置を推し進めることができて、図 5 のような状況が推定できる。

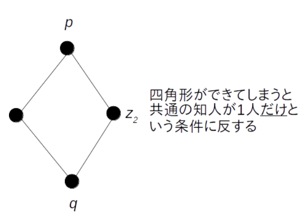


図 4　あってはならない状況

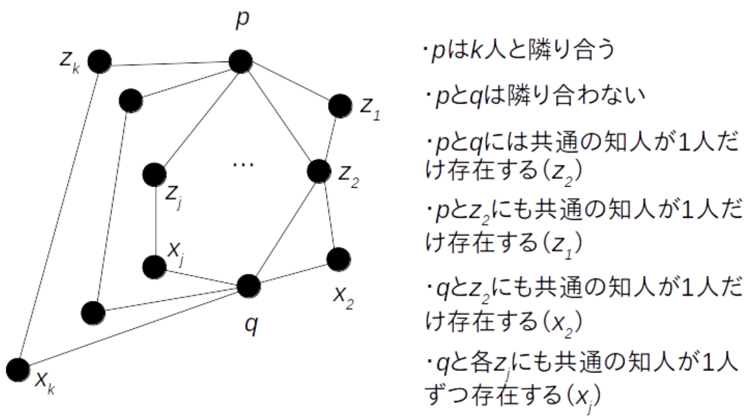


図 5　条件に合うように点の配置を増やしていく

さて、q が隣り合っている点の数について何が言えるだろうか？ q は少なくとも $x_2, z_2, z_3, \ldots, z_k$ とは隣り合っていなければならない（そうでないと条件 (A) に反する)。その他に、上の議論に登場しない他の点と隣り合っているかも知れないが、それは今のところ分からない。よって一つ言えることがあるとすれば、q は少なくとも k 個の点と隣り合っている、ということである。k というのは p が隣り合っている点の数であった。すなわち

$$d(q) \geq d(p) \tag{1}$$

p と q の間に「隣り合っていない」という関係を設定して考察した結果、q と隣り合う点の数は、p と隣り合う点の数と同じかそれより多い、という結論に辿り着いた。落ち着いて考えれば、上で行った考察は p と q を入れ替えても全く同じように進めることができる。その結果

$$d(p) \geq d(q) \tag{2}$$

という結論に辿り着くだろう。式（1）と式（2）から言えることは

$$d(p) = d(q) \tag{3}$$

つまり「隣り合わない 2 つの点の各々と隣り合う点の数は等しい」。

3.3　全ての点の隣り合う点の数が実は等しい

ここでもう一度図 5 を見て状況を確認してみよう。z_2 が p と q の両方と隣り合っている**唯一の**点であった。ということは z_2 以外の全ての点は p もしくは q のいずれかと**隣り合っていない**。すると先程 p と q が隣り合わないことから得られた結論；「隣り合わない 2 つの点の各々と隣り合う点の数は等しい」が z_2 以外の全ての点に適用される。z_2 にも隣り合わない点が存在する（例えば z_3）ので、結局全ての点が $d(p) = k$ と同じ数の点と隣り合っていることが分かった。

3.4　関係図には全部で $k^2 + k - 1$ 個の点が存在する

点が全部で N 個あるとする。このうちの 1 つの点 p および p と隣り合う k 個の点（これに改めて $z_1, z_2, \ldots, z_k$ と名前を付ける）を除いた残りの点について考える。この $N - k - 1$ 個の点の集合を X と名付ける。この X に属する点 x について何か新しい発見はないだろうか。

x は、p との間に、共通に隣り合う点を 1 つだけ持っているはずであるが、それは先程 $z_1, z_2, \ldots, z_k$ と名前を付けたものの中のどれかである。なぜならば p と隣り合っている点は $z_1, z_2, \ldots, z_k$ しかないからである。すなわち、X に属する点は全て、いずれかの z_j と隣り合っている。

そこで、改めて z_j と隣り合っている点の集合を X_j と名付ける。X_j の要素の数は k であるが、そのうちで X に属していない点が 2 つある。1 つが p であるのは、z_j の決め方によって明らかである。もう 1 つが $z_1, z_2, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_k$ のうちのどれかであることも分かる。なぜならば、z_j は p との間に共通に隣り合う点を 1 つだけ持っており、しつこいようだが、それは p と隣り合っている点のどれかだからだ。また、2 つの集合 X_i と X_j の両方に属する点 x' は存在しない。なぜならばそのような x' は z_i,z_j,p の 4 点で禁じられた四角形を形成することになるからである。

以上から $X_j (j = 1, 2, \ldots, k)$ は各々が X の要素のうちの $(k-2)$ 個の点と隣り合っていることが分かった。X の要素数は全部で $N-k-1$ であったから以下の等式

$$N - k - 1 = k(k-2) \tag{4}$$

が成立する。(k 個の z_j がそれぞれ $k-2$ 個の点と隣り合っており、かつ隣り合う点に重複はなく、更にそれが X に属す点の全てである)

すなわち

$$N = k^2 - k + 1 \tag{5}$$

であることが分かった。

4 図で考えにくいときには数で考えるー隣接行列の導入ー

関係図について分かったことをまとめる。

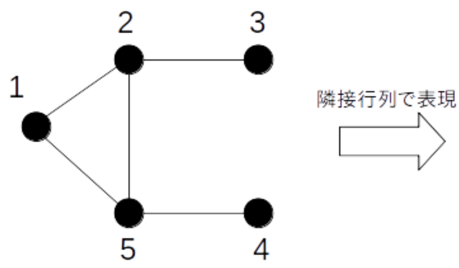
- 点の数は全部で $k^2 - k + 1$
- 各点は k 個の点と隣り合っている
- どの 2 点を選んでも、共通で隣り合う点がただ 1 つ存在する(与えられた仮定)
- 全ての点と隣り合っている点は存在しない(関係図が「風車型」ではないという自分でおいた仮定)

しかしこのような図を実際に描いてみることは難しい。数が具体的でないし、隣り合う点同士の関係を紙上に表現するにも悩む。そこで**隣接行列**を導入する。

隣接行列

点 i と点 j が隣り合っているとき、行列の a_{ij} 成分を 1、隣り合っていないときは 0 とした行列。当然 $a_{ij} = a_{ji}$ である。また $i = j$ のときは $a_{ii} = 0$ と定める。これによって点と点の関係を絵ではなく行列で表現できる。

図 6 に隣接行列の例を示した。



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

図 6　隣接行列の例

5　隣接行列の性質を考える

いま我々が考えている関係図に対応する隣接行列を $\boldsymbol{A}$ と名付ける。行列 $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ について、何が言えるだろうか。

- $N \times N$ の正方行列である。
- 対角成分は全てゼロである。
- 対称行列である。
- ある行 $a_{i1}, ai2, \ldots, aiN$ のうち k 個が 1、それ以外は 0 である。（点 i は k 個の点と隣り合っているから）
- ある列 $a_{1j}, a2j, \ldots, aNj$ のうち k 個が 1、それ以外は 0 である。（対称行列なので、行に関して言えることは列に関しても言える）
- ある 2 つの行 $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{iN}$ と $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jN}$ を比較する。元の関係図で点 i と j が持つただ 1 つの共通に隣り合う点を m とすると、$a_{im} = a_{jm} = 1$ であるが、それ以外のいかなる成分も、i 行と j 行がともに 1 となる列はない。

最後の 3 つが特に重要である。なぜならばこれらの事実から

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{iN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{Nj} \end{pmatrix} = \begin{cases} k & (i = j) \\ 1 & (i \neq j) \end{cases} \tag{6}$$

ということが分かり、

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & k & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & k \end{pmatrix} \tag{7}$$

を得るからである。

6　行列 $\boldsymbol{A}^2$ の固有値と固有ベクトル

$\boldsymbol{I}$ を $N \times N$ 単位行列、$\boldsymbol{J}$ を $N \times N$ で要素が全て 1 の行列とする。式 (7) より

$$\boldsymbol{A}^2 = (k-1)\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J} \tag{8}$$

と表せる。ここで行列 $\boldsymbol{J}$ の固有値を λ_J, 固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{x} = \lambda_J \boldsymbol{x} \tag{9}$$

であるから

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} &= (k-1)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{x} && (10)\\ &= \{(k-1) + \lambda_J\}\,\boldsymbol{x} && (11)\\ & && (12) \end{aligned}$$

となり、$\boldsymbol{x}$ は A^2 の固有ベクトルでもあることが分かる。（固有値は $(k-1)+\lambda_J$）

ところで、行列 J の固有値は、重複度 1 の N と重複度 $N-1$ の 0 であることが割と簡単に確認できる[*1]。

よって、行列 $\boldsymbol{A}^2$ は固有値 $k-1+N = k^2(\because$ 式 (5) より)（重複度 1）と $k-1$（重複度 $N-1$）とを持つ。

7　行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値

実は行列 $\boldsymbol{A}$ が固有値 k（および固有ベクトル $\boldsymbol{J}$ を持つことは初めから分かっていた。なぜならば $\boldsymbol{A}$ は各行、各列に 1 を k 個ずつ持つ行列なので

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{J} = k\boldsymbol{J} \tag{13}$$

となるからである。

このことも踏まえつつ、行列 $\boldsymbol{A}$ は対角化可能であるから、$\boldsymbol{A}$ の固有値は k[*2]（重複度 1）と $\pm\sqrt{k-1}$ である。そのうち r 個が $\sqrt{k-1}$、s 個が $-\sqrt{k-1}$ だとすると、固有値の和が対角成分の和（tr$\boldsymbol{A}$）であることから

$$k + r\sqrt{k-1} - s\sqrt{k-1} = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} = 0 \tag{14}$$

$r = s$ とすると $k = 0$ となってしまい意味がなくなるので $k \neq s$ として良く、

$$\sqrt{k-1} = \frac{k}{s-r} \tag{15}$$

が言えた。$k-1$ という数（もちろん自然数）は**平方根が有理数**という非常に特徴的な数であることが分かった。

---

*1 なぜならば、$\boldsymbol{J}$ は正方行列なので、その固有値のうちゼロでないものの個数は rank$\boldsymbol{J}$ すなわち 1 に等しく、また全ての固有値の和は対角成分の和（これを tr$\boldsymbol{J}$ という）なので N，さらに行列式 det$\boldsymbol{J} = 0$ であるから少なくとも 1 つ以上の 0 を固有値に持つことが分かる。本当はもっと丁寧に説明したいが、すごく長くなってしまうので、詳しくは線形代数の教科書を参照

*2 上の確認で $-k$ は考慮する必要がないことが分かる。

8 ようやく遭遇する矛盾

平方根が有理数となる自然数とはどのような数だろうか。実は、もし $\sqrt{m}$ が有理数ならば、$\sqrt{m}$ は整数であることが次のようにして示せる。

m を $\sqrt{m}$ が有理数となる自然数とし、n_0 を $n_0\sqrt{m}$ が自然数となるものの中で最小の自然数とする。もし $\sqrt{m}$ が整数でないとすると、$0 < \sqrt{m} - l < 1$ となる自然数 l が存在する。このとき n_1 を $n_1 = n_0\left(\sqrt{m} - l\right) = n_0\sqrt{m} - n_0 l$ とおくと、これは自然数同士の差なので、n_1 は自然数である。ところが $n_1\sqrt{m} = n_0\left(\sqrt{m} - l\right)\sqrt{m} = n_0 m - l\left(n_0\sqrt{m}\right)$ もまた自然数同士の差であるから、$n_1\sqrt{m}$ は自然数であり、しかも $0 < \sqrt{m} - l < 1$ より $n_1 < n_0$ となってしまい、はじめの n_0 の取り方と矛盾する。従って $\sqrt{m}$ は整数である。

式（15）に戻って、$\sqrt{k-1}$ が整数であると分かったので、$\sqrt{k-1} = h$ とおくと（このとき $k = h^2 + 1$ となることに注意）

$$\sqrt{k-1} = h = \frac{k}{s-r} \tag{16}$$

$$\leftrightarrow h(s-r) = k = h^2 + 1 \tag{17}$$

となり、$h^2 + 1$ が h で割り切れることが分かった。

9 全員と対戦経験のある剣道家が必ず存在する

$h^2 + 1$ は $h \geq 2$ のとき h で割ると 1 余る。だから $h^2 + 1$ が h で割り切れるということは $h = 1$ を意味する。すると $\sqrt{k-1} = h$ から $k = 2$ である。

さて、我々は関係図 G がもし「風車型」ではないならば…と仮定して考察を進めてきた。結果辿り着いた結論は $k = 2$ であるが、これはただの三角形である。しかし三角形は羽根車が 1 つの風車であり、結論は仮定に矛盾している。これは”関係図 G が「風車型」ではないならば…”という仮定が間違っていることを意味する。これでようやく定理が示された。百戦錬磨の剣道家が存在するのである。

参考文献

[1] Martin Aigner, Guenter M. Ziegler, ”Proofs from THE BOOK 4th edition”, Springer (2009)

[2] 北田均、「新訂版数理解析学概論」、現代数学社 (2016).