Métodos Numéricos I
Sesión 2

Dr. Osiel González Dávila

osiel.gonzalez@ucags.edu.mx

Plan de la Sesión

- Repaso de la Sesión 1
- Continuamos con la Unidad 1 Álgebra Lineal (Lecturas Capítulo 10 Dowling Stephen & Lieven Capítulo 1)

Repaso de la Unidad 1

¿Hicieron la tarea?

Unidad 1. Álgebra Lineal

- **Objetivo General**: Hacer un repaso de álgebra lineal.

Temas y Subtemas

Unidad 1. Álgebra Lineal

1.1 Operaciones en vectores y matrices.
1.2 Sistemas e independencia lineales.
1.3 Autovectores y análisis de componentes principales.

1. La importancia del álgebra lineal

1. La importancia del álgebra lineal

¿Por qué es importante el álgebra lineal?

- Permite la expresión de sistemas de ecuaciones complicados de una manera concisa y simplificada.
- Provee métodos para resolver sistemas de ecuaciones.
- Permite crear modelos de optimización útiles para la planificación y toma de decisiones.

A continuación

- Vamos a analizar un caso al que se podría enfrentar una empresa que comercializa sus productos en diferentes ciudades y en varias plataformas.

¿Les gusta esquiar?

Productos

Tablas
de esquí

Bastones
para esquí

Fijaciones
de esquí

Conjunto de
Ropa para
esquiar

Ejemplo 1

- Para una compañía con varias sucursales y varios productos a la venta, una matriz provee una forma concisa de registrar sus inventarios.

$$
\begin{array}{cc}
\text{Sucursal} & \begin{array}{cccc} \text{Tablas} & \text{Bastones} & \text{Fijadores} & \text{Conjuntos} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 120 & 110 & 90 & 150 \\ 200 & 180 & 210 & 110 \\ 175 & 190 & 160 & 80 \\ 140 & 170 & 180 & 140 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

2. Definiciones

2. Definiciones

- Una matriz es un arreglo rectangular de números, parámetros o variables.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sucursal} & \text{Tablas} & \text{Bastones} & \text{Fijadores} & \text{Conjuntos} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \multicolumn{4}{c}{\begin{bmatrix} 120 & 110 & 90 & 150 \\ 200 & 180 & 210 & 110 \\ 175 & 190 & 160 & 80 \\ 140 & 170 & 180 & 140 \end{bmatrix}} \end{array}$$

Cada uno de los números…

- tiene un lugar cuidadosamente ordenado en la matriz.

$$
\begin{array}{c c}
\text{Sucursal} & \begin{array}{cccc} \text{Tablas} & \text{Bastones} & \text{Fijadores} & \text{Conjuntos} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 120 & 110 & 90 & 150 \\ 200 & 180 & 210 & 110 \\ 175 & 190 & 160 & 80 \\ 140 & 170 & 180 & 140 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- Dichos números se denominan elementos de la matriz.

Las líneas horizontales…

- de números en la matriz son llamadas filas.

$$
\begin{array}{c c}
\text{Sucursal} & \begin{array}{cccc} \text{Tablas} & \text{Bastones} & \text{Fijadores} & \text{Conjuntos} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} \boxed{120 & 110 & 90 & 150} \\ 200 & 180 & 210 & 110 \\ 175 & 190 & 160 & 80 \\ 140 & 170 & 180 & 140 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{c|cccc} \text{Sucursal} & \text{Tablas} & \text{Bastones} & \text{Fijadores} & \text{Conjuntos} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \multicolumn{4}{c}{\begin{bmatrix} \boxed{120 \quad 110 \quad 90 \quad 150} \\ 200 \quad 180 \quad 210 \quad 110 \\ 175 \quad 190 \quad 160 \quad 80 \\ 140 \quad 170 \quad 180 \quad 140 \end{bmatrix}} \end{array}$$

- Si se leen las filas de la matriz, la empresa puede determinar el nivel de inventarios en cada sucursal.

Las líneas verticales…

- de números en la matriz son llamadas columnas.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \text{Tablas} & \text{Bastones} & \text{Fijadores} & \text{Conjuntos} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Sucursal} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 120 & 110 & 90 & 150 \\ 200 & 180 & 210 & 110 \\ 175 & 190 & 160 & 80 \\ 140 & 170 & 180 & 140 \end{bmatrix} \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\text{Sucursal} & \begin{array}{cccc} \text{Tablas} & \text{Bastones} & \text{Fijadores} & \text{Conjuntos} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 120 & 110 & 90 & 150 \\ 200 & 180 & 210 & 110 \\ 175 & 190 & 160 & 80 \\ 140 & 170 & 180 & 140 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- Si se leen las columnas de la matriz, la empresa puede determinar el nivel de inventarios de cada producto.

El número de filas (f) y columnas (c)…

- Determina las dimensiones de la matriz (f x c), que se lee “f por c”.
- El número de filas siempre precede el número de columnas.

En una matriz cuadrada

- El número de filas es igual al número de columnas (es decir, f = c).
- Si la matriz se compone de una única columna, tal que su dimensión es f x 1, se le denomina vector columna.
- Si la matriz se compone de una única fila, tal que su dimensión es f x c, se le denomina vector fila.

Ejemplo 2

- Considere la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

- A es una matriz general compuesta por nueve elementos (3 x 3 = 9) arreglados en tres filas y tres columnas.

Ejemplo 2

- Considere la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

- Por lo tanto, A es una matriz cuadrada (i.e. tiene el mismo número de filas y columnas).

Ejemplo 2

- Considere la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

- Los elementos de A tienen dos subíndices (a_{ij}). El primero (i) identifica la fila y el segundo (j) la columna.

Ejemplo 2

- Considere la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

- Para determinar el número de filas en una matriz siempre cuente de arriba hacia abajo.

Ejemplo 2

- Considere la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

- Para determinar el número de columnas en una matriz siempre cuente de izquierda a derecha.

Considere la siguiente matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

- ¿Qué dimensión tiene?

Considere la siguiente matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}_{2 \text{ x } 3}$$

- ¿Qué dimensión tiene? 2 x 3

Considere la siguiente matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}_{2 \text{ x } 3}$$

- ¿Qué dimensión tiene? 2 x 3
- ¿Qué magnitud tiene su elemento b_{12}?

Considere la siguiente matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

- ¿Qué dimensión tiene? 2 x 3
- ¿Qué magnitud tiene su elemento b_{12}? 9

Considere la siguiente matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}_{2 \text{ x } 3}$$

- ¿Qué dimensión tiene? 2 x 3
- ¿Qué magnitud tiene su elemento b_{12}? 9
- ¿Qué magnitud tiene su elemento b_{23}?

Considere la siguiente matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}_{2 \text{ x } 3}$$

- ¿Qué dimensión tiene? 2 x 3
- ¿Qué magnitud tiene su elemento b_{12}? 9
- ¿Qué magnitud tiene su elemento b_{23}? 7

Considere la siguientes matrices

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ¿Qué dimensión tiene la matriz **C**?
- ¿Qué dimensión tiene la matriz **D**?

Considere la siguientes matrices

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ¿Qué dimensión tiene la matriz **C**? 3 x 1
- ¿Qué dimensión tiene la matriz **D**? 1 x 3

Una matriz…

- Que convierte las filas de una matriz A en columnas y las columnas de la matriz A en filas, se denomina la matriz transpuesta de A’ ó A^T.

La matriz A y su transpuesta son

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

La matriz C y su transpuesta son

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Suma y resta de matrices

3. Suma y resta de matrices

- La suma (A + B) y resta (A - B) de dos matrices requiere que dichas matrices tengan las mismas dimensiones.
- Cada elemento de una matriz se suma o se resta del elemento correspondiente en la otra matriz.
- Por lo tanto, el elemento a_{11} será sumado (o restado) al elemento b_{11}.

Ejemplo, dadas las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

- Obtener la matriz $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

Resultado

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8+1 & 9+3 & 7+6 \\ 3+5 & 6+2 & 2+4 \\ 4+7 & 5+9 & 10+2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Resultado

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 8 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 12 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Obtener la diferencia de las siguientes matrices

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Resultado

$$\mathbf{C}-\mathbf{D}=\begin{bmatrix}4-1 & 9-7\\ 2-5 & 6-4\end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -3 & 2\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Suponga que al inventario (S) de la empresa

$$S = \begin{bmatrix} 120 & 110 & 90 & 150 \\ 200 & 180 & 210 & 110 \\ 175 & 190 & 160 & 80 \\ 140 & 170 & 180 & 140 \end{bmatrix}$$

se le añade una entrega (D) de mercancías adicional

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 50 & 10 \\ 25 & 30 & 10 & 60 \\ 15 & 0 & 40 & 70 \\ 60 & 40 & 10 & 50 \end{bmatrix}$$

Obtenga el nuevo inventario de mercancías S+D

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 120 & 110 & 90 & 150 \\ 200 & 180 & 210 & 110 \\ 175 & 190 & 160 & 80 \\ 140 & 170 & 180 & 140 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 50 & 10 \\ 25 & 30 & 10 & 60 \\ 15 & 0 & 40 & 70 \\ 60 & 40 & 10 & 50 \end{bmatrix}$$

Resultado

$$
\mathbf{S} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 120+40 & 110+20 & 90+50 & 150+10 \\ 200+25 & 180+30 & 210+10 & 110+60 \\ 175+15 & 190+0 & 160+40 & 80+70 \\ 140+60 & 170+40 & 180+10 & 140+50 \end{bmatrix}
$$

Resultado

$$S + D = \begin{bmatrix} 160 & 130 & 140 & 160 \\ 225 & 210 & 220 & 170 \\ 190 & 190 & 200 & 150 \\ 200 & 210 & 190 & 190 \end{bmatrix}$$

4. Multiplicación por escalares

4. Multiplicación por escalares

- En álgebra matricial, un número simple como 12, -2 ó 0.07 se denomina escalar.
- La multiplicación de una matriz por un número escalar implica que se multiplica cada elemento de la matriz por el escalar.
- El proceso se llama multiplicación escalar porque escala la matriz de acuerdo a la magnitud del número.

Ejemplo, el resultado de una multiplicación escalar *kA*

- En el que k=8 y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Da como resultado

- La siguiente matriz

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8(6) & 8(9) \\ 8(2) & 8(7) \\ 8(8) & 8(4) \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 48 & 72 \\ 16 & 56 \\ 64 & 32 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

5. Multiplicación de Vectores.

5. Multiplicación de Vectores

- La multiplicación de un vector fila $\mathbf{A}$ por un vector columna $\mathbf{B}$ tiene como precondición que cada vector tenga el mismo número de elementos.

El producto se encuentra multiplicando

- los elementos individuales del vector fila, por los elementos correspondientes en el vector columna y sumando los productos.

$$\mathbf{AB} = (a_{11} \times b_{11}) + (a_{12} \times b_{21}) + (a_{13} \times b_{31})$$

- El producto de la multiplicación de los vectores fila-columna resulta en un único número escalar.

Ejemplo, multiplicar los siguientes vectores

$$\mathbf{A} = [4 \quad 7 \quad 2 \quad 9]_{1\times 4} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

Resultado

$$\mathbf{AB} = 4(12) + 7(1) + 2(5) + 9(6) = 48 + 7 + 10 + 54 = 119$$

Ejercicio. Calcular el producto de los siguientes vectores

$$\mathbf{C} = [3 \quad 6 \quad 8]_{1\times3} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

Resultado

$$\mathbf{CD} = (3 \times 2) + (6 \times 4) + (8 \times 5) = 6 + 24 + 40 = 70$$

Calcular el Valor Total de Ventas (Precios por Unidades Vendidas)

$$\mathbf{Q} = [12 \quad 8 \quad 10] \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.75 \\ 0.50 \end{bmatrix}$$

Resultado

$$\text{TVS} = \mathbf{QP} = [12(1.25) + 8(0.75) + 10(0.50)] = 26.00$$

¿Preguntas?

La próxima sesión

- Continuamos con la Unidad 2 Cap. 10 de Dowling .

La próxima sesión

- Continuamos con la Unidad 1
- Y repasen su álgebra…