



Métodos Numéricos I

Maestría en Ciencia de Datos

Universidad de la Ciudad de Aguascalientes

Anuncios

- Evaluación final
 - Examen teórico
 - Preguntas opción múltiple
 - < 1hr
 - Examen práctico
 - Resolución de problemas
 - 24 hr
 - Sesión de resolución de dudas

Discusión tarea

- Ecuaciones diferenciales en la vida real
- Ejercicios de diferenciación
 - Que eligieron
- Detección de esquinas de Harris

Integrales de superficie

¿Qué es una integral?

- Integral de Riemann

- $f(x)$ una función
- Intervalo $[a, b]$
- Serie de intervalos Δx_k que parten a $[a, b]$
- Cada x_k^* pertenece Δx_k

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

Integral numérica

- No podemos $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0}$
- Nos aproximamos a Δx_k muy pequeño
 - ¿Qué tan pequeño?
- Como seleccionamos x_k^*
 - Borde izquierdo
 - Borde derecho
 - Centro
 - Aleatorio

Métodos de integración

- Integración simple
- Punto medio
- Trapecio
- Simpson
- Cuadratura de gauss
- Monte Carlo

Integración Simple

- Serie de puntos $a = x_0 \dots x_n = b$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) * (x_k - x_{k-1})$$

- Simple de implementar
- Simple de calcular
- Poco precisa

Punto medio

- Serie de puntos $a = x_0 \dots x_n = b$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) * (x_k - x_{k-1})$$

- Menos simple de implementar
- Menos simple de calcular
- Un poco más precisa

Trapezoide

- Serie de puntos $a = x_0 \dots x_n = b$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right) * (x_k - x_{k-1})$$

- Simple de implementar
- Menos simple de calcular
- ¿más precisa?
 - lectura

Monte Carlo

- Evalúa la ecuación en puntos aleatorios
- No es determinística
- Pasos
 - Se generan puntos aleatorios en el dominio
 - Se evalúa la función en estos puntos
 - Aproxima la integral

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

Simpson

- Interpola los puntos
 - Interpolación cuadrática
- Integra la interpolación
- Regla 1/3 de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Cuadratura de Gauss

- Utiliza puntos y pesos óptimos para minimizar el error

$$\int_{-1}^1 f(x) \approx \sum_{k=1}^n w_i f(x_i)$$

- Se transforma el intervalo $[a,b]$ a $[-1,1]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dz$$

Cuadratura gauss

- Se elige la formula
 - Se eligen los pesos
- Se calcula la suma

$$\sum_{k=1}^n w_i f(x_i)$$

# Puntos	Puntos	Pesos
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \frac{3}{\sqrt{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{3}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{36}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{3}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18 - \sqrt{30}}{36}$

Múltiples dimensiones

- $f(x) \rightarrow f(x,y)$
- $[a,b] \rightarrow [ax,bx]$ y $[ay,by]$
- $ax = x_0 \dots x_n = bx$ y $ay = y_0 \dots y_n = by$
- Integración simple
- $\sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) * (x_k - x_{k-1})$
 $\rightarrow \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}, y_{k-1}) * (x_k - x_{k-1})(y_k - y_{k-1})$

Múltiples dimensiones

- Punto medio

- $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) * (x_k - x_{k-1}) \rightarrow$
 $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}, \frac{y_{k-1}+y_k}{2}\right) * (x_k - x_{k-1}) (y_k - y_{k-1})$

- Trapezoide

- $\sum_{k=1}^n \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right) * (x_k - x_{k-1}) \rightarrow$
 $\sum_{k=1}^n \left(\frac{f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_{k-1}) + f(x_{k-1}, y_k) + f(x_k, y_k)}{4} \right) * (x_k - x_{k-1}) (y_k - y_{k-1})$

Múltiples dimensiones

- Monte carlo

- $(b - a) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n f(x_k) \rightarrow (bx - ax)(by - ay) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k)$

- Cuadratura de Gauss

- No es tan sencillo

https://numfactory.upc.edu/web/Calculo2/P2_Integracio/html/Integral2DQuad.html

Tarea

- Encuentra el valor de π

Integra la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 < 0 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > 0 \end{cases}$$

- ¿Qué es mejor? ¿Punto medio o trapecio?