Homología Persistente

La homología es un concepto matemático utilizado en la topología algebraica para estudiar las propiedades de espacios que se conservan bajo deformaciones continuas. La homología persistente es una extensión de la homología que proporciona un análisis a varias escalas de las características topológicas en datos.

La Homología Persistente (HP) es un método utilizado en el análisis topológico de datos (ATD) para el estudio de características cualitativas de los datos que persisten a lo largo de múltiples escalas. La homología persistente es robusta ante pequeñas perturbaciones de los datos de entrada, independientemente de las dimensiones y coordenadas. Además, proporciona una representación compacta de las características cualitativas de la entrada.

Complejos Simpliciales

La homología simplicial es un tipo específico de homología que trata con complejos simpliciales. Un complejo simplicial es una colección de símplices, que son objetos geométricos que generalizan triángulos y tetraedros a dimensiones superiores. La homología simplicial de un complejo simplicial proporciona una forma de cuantificar sus características topológicas.

La homología persistente extiende la idea de la homología para analizar la evolución de las características topológicas a través de diferentes escalas o niveles de detalle. A menudo se utiliza en el contexto del análisis de datos, especialmente en campos como la biología computacional, la visión por computadora y la ciencia de materiales.

Un complejo simplicial es un objeto fundamental en topología algebraica y geometría combinatoria. Se construye a partir de símplices, que son objetos geométricos simples. Aquí hay algunas definiciones clave relacionadas con complejos simpliciales:

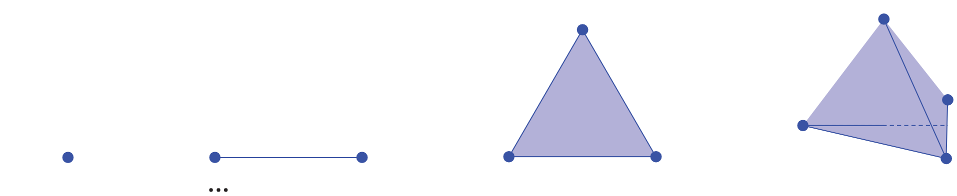
1. **Símplice:** Un símplice es un conjunto afín convexo generado por un conjunto de puntos en posición general (no alineados). Los símplices básicos son:
    - **0-símplice:** Un vértice (punto).
    - **1-símplice:** Una arista (segmento).
    - **2-símplice:** Un triángulo.
    - **3-símplice:** Un tetraedro.
    - Y así sucesivamente.
2. **Complejo simplicial:** Un complejo simplicial es una colección de símplices que cumple dos propiedades:
    - Cualquier cara de un símplice en el complejo también está en el complejo.
    - La intersección de cualesquiera dos símplices en el complejo es una cara común de ambos o es vacía.

- Los símplices en un complejo simplicial pueden tener diferentes dimensiones, y la colección debe cumplir con las propiedades mencionadas para formar un complejo simplicial.

3. **Cara:** Si un símplice σ está en un complejo simplicial, entonces cualquier subconjunto no vacío de σ también está en el complejo. A este subconjunto se le llama cara de σ.
4. **Fila:** Una fila es una cadena de símplices en el complejo simplicial, donde cada símplice es una cara del siguiente.
5. **Esqueleto:** El esqueleto de un complejo simplicial es el subconjunto de símplices que tienen una dimensión igual o menor que k. Por ejemplo, el esqueleto k-ésimo de un complejo simplicial incluye todos los símplices de dimensiones 0,1,…,k.

Los complejos simpliciales son herramientas poderosas para estudiar la topología de espacios geométricos y también se utilizan en la construcción de modelos discretos en diversas áreas, como procesamiento de imágenes, análisis de datos y simulaciones computacionales.

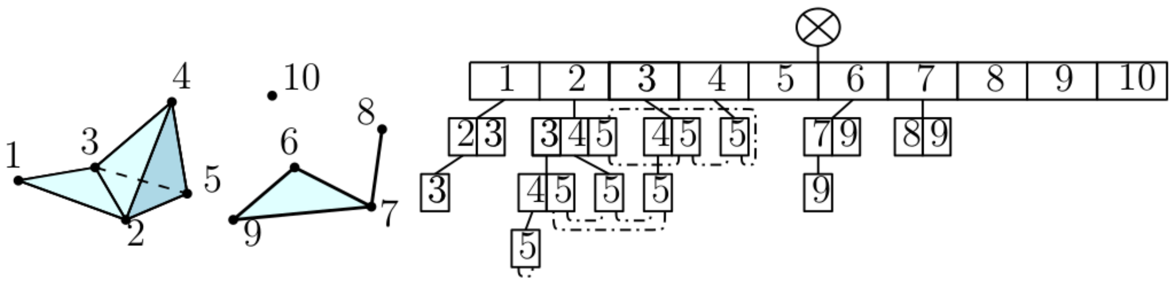
Ejemplos :



0-sımplice 1-sımplice 2-sımplice 3-sımplice

Como se puede observar en las imágenes, los Simplices de mayor dimensión se componen de Simplices de menor dimensión, lo cual nos lleva a definir una relación entre estos:

- Sea σ un k-sımplice en Rd cuyos vértices son los puntos afínmente independientes $u_0,\ldots, u_k$.
- Fijado l tal que $0 \leq l \leq k$, cualquier subcoleccion de $l + 1$ puntos $u_0,\ldots, u_l$ de entre $u_0,\ldots, u_k$ es afínmente independiente y, por tanto, define un 1-sımplice $\tau \subset \sigma$.
- Diremos que τ es una *cara* de σ y lo denotaremos por $\tau \preceq \sigma$. Si $\tau \preceq \sigma$ y $\tau = \sigma$ diremos que τ es una *cara propia* de σ y lo denotaremos por $\tau < \sigma$. Por otro lado, diremos que σ es una cocara (propia) de τ si $\tau < \sigma$ ($\sigma > \tau$).



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10