Homología de Morse

La homología de Morse es un concepto importante en la topología diferencial, especialmente en el estudio de variedades diferenciables. Fue desarrollada por el matemático estadounidense Marston Morse en la década de 1920.

La idea básica de la homología de Morse es asociar a una variedad diferenciable ciertos grupos, llamados grupos de homología, que capturan información topológica sobre la variedad. Estos grupos se construyen a partir de funciones suaves llamadas funciones de Morse, que son funciones reales sobre la variedad que satisfacen ciertas propiedades especiales.

Una función de Morse en una variedad diferenciable asigna a cada punto un número real, de tal manera que los puntos críticos de la función son puntos donde el gradiente de la función se anula. Los puntos críticos vienen en diferentes tipos, como mínimos, máximos o puntos de silla, y son cruciales para entender la topología de la variedad.

La homología de Morse se construye a partir de la información proporcionada por las órbitas de las variedades bajo el flujo generado por las funciones de Morse. A grandes rasgos, se cuentan los puntos críticos y sus interacciones para obtener una descripción algebraica de la topología de la variedad.

La homología de Morse ha demostrado ser una herramienta poderosa en el estudio de variedades diferenciales y ha llevado a importantes avances en diversas áreas de las matemáticas, como la geometría diferencial, la topología algebraica y la teoría de nudos.

La homología de Morse tiene numerosas aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas y la física. Aquí hay algunos ejemplos de situaciones donde se puede aplicar:

1. **Topología de variedades**: La homología de Morse se utiliza para estudiar la topología de variedades diferenciables. Por ejemplo, puede ser aplicada para calcular los números de Betti de una variedad, que proporcionan información sobre el número de componentes conexas, agujeros, y agujeros de dimensión superior.
2. **Teoría de nudos**: La homología de Morse puede ser utilizada para estudiar la topología de nudos y enlaces. Se pueden definir funciones de Morse sobre ciertas superficies asociadas a los nudos, y luego utilizar la homología de Morse para extraer información sobre las propiedades topológicas de los nudos.
3. **Geometría simpléctica**: En geometría simpléctica(una variedad diferenciable, que es un espacio que puede describirse localmente mediante coordenadas y donde se

pueden realizar cálculos diferenciales), la homología de Morse puede ser utilizada para estudiar las propiedades topológicas de las variedades simplécticas. Por ejemplo, se puede utilizar para demostrar resultados sobre la existencia de geodésicas cerradas en ciertos tipos de variedades simplécticas.

4. **Física matemática**: La homología de Morse también tiene aplicaciones en la física matemática, especialmente en la teoría de cuerdas y la teoría cuántica de campos. Se utiliza, por ejemplo, en el estudio de las configuraciones de campos clásicos y sus estabilizadores gauge, y en la caracterización de estados topológicos en sistemas cuánticos.

Estos son solo algunos ejemplos de las diversas áreas donde la homología de Morse encuentra aplicación. Su versatilidad y capacidad para capturar propiedades topológicas hacen que sea una herramienta importante en el estudio de una amplia gama de fenómenos matemáticos y físicos.

Condiciones para ser una funcion de Morse :

Una función de Morse f en una variedad diferenciable M generalmente satisface varias condiciones para ser considerada como tal. Estas condiciones son importantes para garantizar propiedades topológicas deseables de la función y para hacer que el análisis de la teoría de Morse sea viable. Aquí están las condiciones típicas que se imponen a una función de Morse:

1. **No degeneración en los puntos críticos**: Los puntos críticos de la función de Morse deben ser no degenerados. Esto significa que el Hessiano de la función (la matriz de segundas derivadas) en cada punto crítico debe ser no degenerado, lo que garantiza que la matriz sea invertible y tenga un comportamiento no trivial. En términos más simples, se espera que los puntos críticos no sean puntos de silla o máximos ni mínimos.

2. **Compactitud**: En muchos contextos, se requiere que la variedad M sobre la que se define la función de Morse sea compacta, para que las propiedades topológicas puedan ser finitamente representadas y analizadas.

3. **Funciones generales**: A menudo, se impone que la función de Morse sea una función "general", lo que significa que puntos críticos específicos tienen una cierta configuración en relación con el comportamiento de la función cerca de ellos. Por ejemplo, un punto crítico no puede ser un máximo o un mínimo local si hay una función de Morse "general".

4. **Funciones no degeneradas**: También se pueden imponer condiciones para asegurar que la función de Morse no sea "degenerada" en general, es decir, que tenga un comportamiento suave y no trivial en toda la variedad.

Estas condiciones aseguran que la teoría de Morse sea bien definida y útil para estudiar las propiedades topológicas de la variedad en cuestión. Cabe señalar que hay muchas variaciones y extensiones de la teoría de Morse, y las condiciones exactas pueden variar dependiendo del contexto específico y los objetivos de la aplicación.

Ejemplo :

Consideremos la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Esta función es una función de Morse simple y muy conocida. Veamos por qué:

1. **Puntos Críticos**: Los puntos críticos de f son aquellos donde el gradiente se anula. Calculamos el gradiente de f:
   $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, 2y)$
   Los puntos donde el gradiente se anula son aquellos donde $x = 0$ y $y = 0$. Por lo tanto, el único punto crítico es el origen $(0,0)$.
2. **No degeneración en los puntos críticos**: Calculamos el Hessiano de f en el origen:
   $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
   El Hessiano es una matriz diagonal no degenerada, lo que significa que es invertible y los autovalores son todos no nulos. Por lo tanto, el origen es un punto crítico no degenerado.
3. **Comportamiento de la función alrededor del punto crítico**: Cerca del origen, la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ se comporta como un mínimo local, ya que el valor de la función aumenta al alejarse del origen.