Inversa de la matriz

¿Qué es la inversa de una matriz?

- A es una matriz cuadrada
- Existe una matriz B tal que $AB = BA = I$
- B se le llama la inversa de A y se denota como A^{-1}

Existencia de la inversa

- Depende del determinante de la matriz
- Si det $A \neq 0$, entonces A tiene una inversa
- Matriz no singular
- Matriz invertible
- Si det $A = 0$, no tiene una inversa
  - matriz singular
  - Matriz no invertible
- Matrices mal condicionadas

¿Qué matrices no son invertibles?

Sea A una matriz y $a1, \ldots, an$ sus filas

- Si algún $ai = 0$ entonces det(A) = 0
- Si se intercambian dos filas el signo de determinante se invierte
- det($[a1, \ldots, c * ai, \ldots, an]$) = c det($[a1, \ldots, ai, \ldots, an]$)
- det($[a1, \ldots, ai, \ldots, an]$)= det($[a1, \ldots, ai + baj, \ldots, an]$)
- Si A es trianguar entonces det(A) = prod(diag(A))

Calcular la inversa

Sea $An\times n$ invertible e $In\times n$ la identidad

- Método Gauss-Jordan
- Creamos $[A|I]$
- Resolvemos lado izquierdo por GJ
- Obtenemos [I|B]
- B es la inversa

Propiedades de la inversa

Si A, B son matrices invertibles

- A^{-1} es única.
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $A\ B$ es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{-T}$
- $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$

Usos de la inversa

Sistemas de ecuaciones lineales: si $Ax = b$ entonces $x = bA^{-1}$

- Regresión lineal b = $(X^{T}X)^{-1}X^{T}y$

- det $(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$
- A representa una transformación lineal, A^{-1} representa la transformación inversa

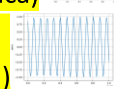
Calculo multivariable

¿Cálculo?

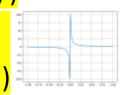
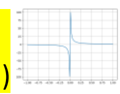
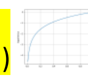
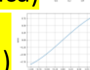
- Estudia las variaciones en funciones $f(x)= y$
- Límites
- Derivadas
- Integrales

Límites

¿Qué pasa cuando $x = \infty$?

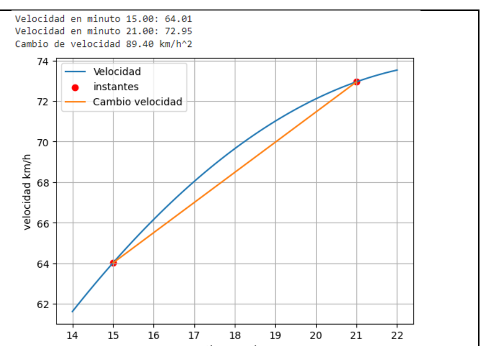
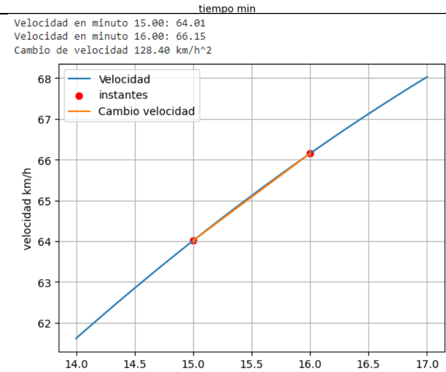
- $f(x)= 1$ (constante se queda en 1)
- $f(x)= x$ (lineal /)
- $f(x)= x - 1$ (lineal /)
- $f(x)= 1/x$ (inversa) 
- $f(x)= x/x^2$ (racional) 
- $f(x)= \log(x)$ (logarítmica) 
- $f(x)= sen\ x$ (senoidal) 

¿Qué pasa cuando x se acerca mucho a 0?

- $f(x)= 1$ (constante se queda en 1)
- $f(x)= x$ (lineal /)
- $f(x)= x - 1$ (lineal /)
- $f(x)= 1/x$ (inversa) 
- $f(x)= x/x^2$ (racional) 
- $f(x)= \log(x)$ (logarítmica) 
- $f(x)= sen\ x$ (senoidal) 

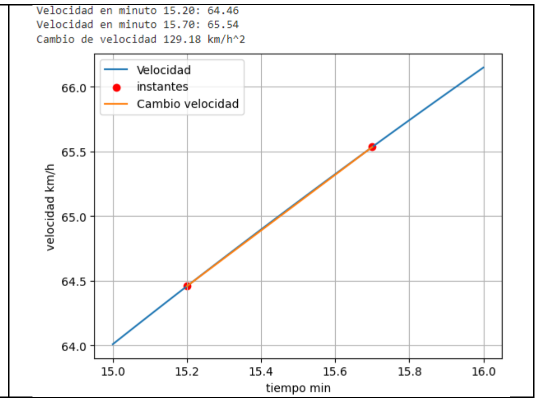
Derivada

- Cuál es el cambio instantáneo de la función en cierto punto
  - Ejemplo:

Si a las 6:15 vas a 64 Km/h y a las 6:21 vas a 73Km/h ¿Cuál fue el cambio de velocidad? ¿Es instantáneo?	
Si a las 6:15 vas a 64 Km/h y a las 6:16 vas a 66Km/h ¿Cuál fue el cambio de velocidad? ¿Es instantáneo?	

Si a las 6:15:12 vas a 64.46 Km/h y a las 6:15:42 vas a 65.54 Km/h

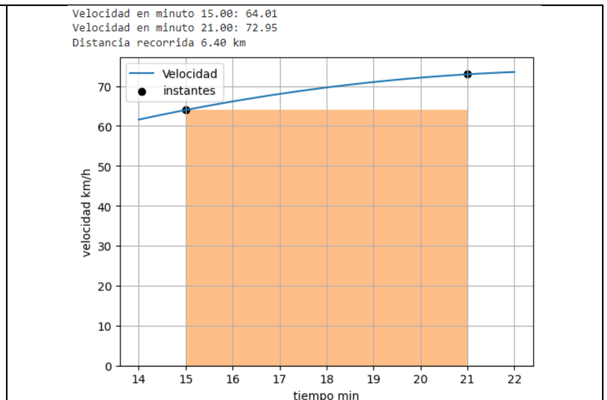
¿Cuál fue el cambio de velocidad?
¿Es instantáneo?



Integral

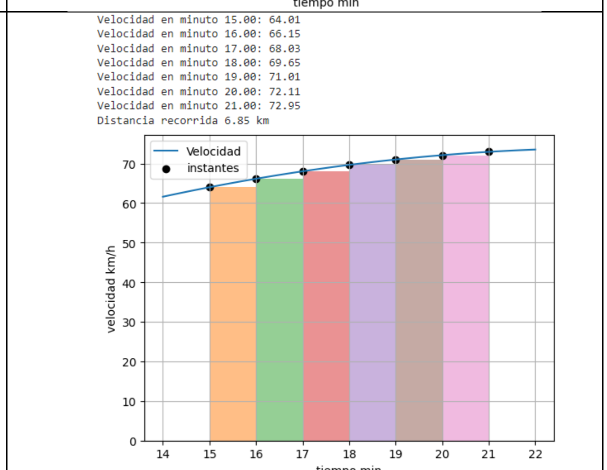
Si a las 6:15 vas a 64 Km/h y a las 6:21 vas a 73Km/h

¿Cuál fue la distancia recorrida?



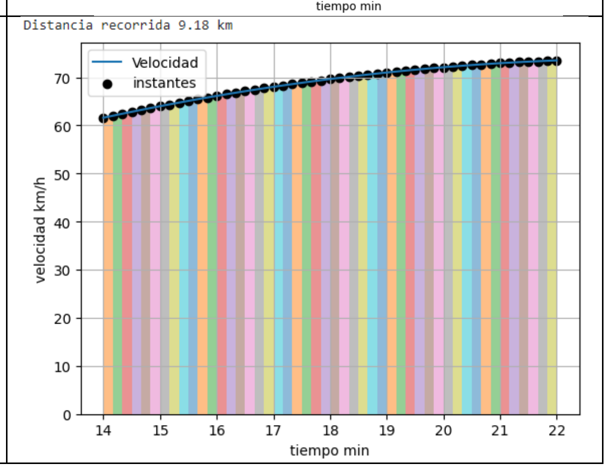
Si a las 6:15 vas a 64 Km/h, a las 6:21 vas a 73Km/h y revisas la velocidad cada minuto

¿Cuál fue la distancia recorrida?



Si a las 6:15 vas a 64 Km/h, a las 6:21 vas a 73Km/h y revisas la velocidad cada 10 segundos

¿Cuál fue la distancia recorrida?



¿Métodos Numéricos?

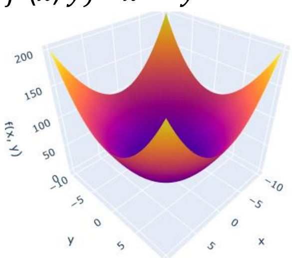
- Funciones en mundo real
  - No se pueden calcular
  - No existe
  - Es muy costoso calcularla
  - Las variables y restricciones son muy complicadas
- Diferencias finitas
  - Adelante
  - Atrás
  - Centrales
- Integración numérica
  - Trapecio
  - Simpson
  - Integración adaptativa

Cálculo multivariable

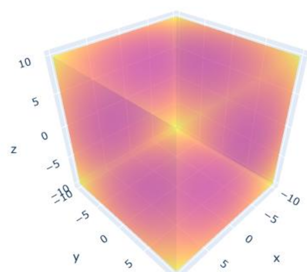
¿Función Multivariable?

Depende de 2 más variables

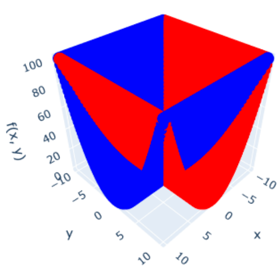
- $f\,(x, y) = x^2 + y^2$



- $f\,(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

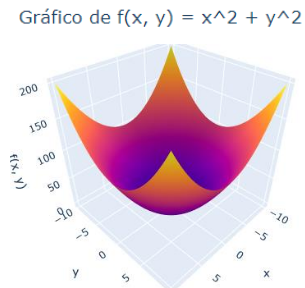


- $f\,(x, y) = (x^2 + y^2)$

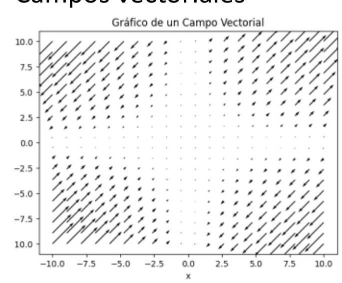


Cambio del cálculo a multivariable

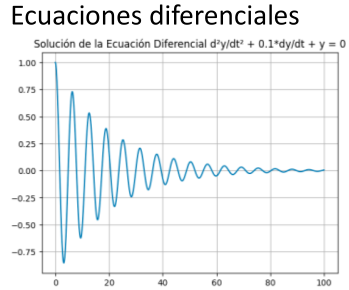
- Derivadas parciales/direccionales
- Integración múltiple



- Campos vectoriales



- Ecuaciones diferenciales



Diferencias finitas

Diferencias primer grado

- Por definición la derivada está dada por
- $$\mathrm{f}'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
- En diferencias finitas podemos verla como
- $$\mathrm{f}'(x) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \text{ donde } x_0 < x < x_1$$
- A esto se le llama primera diferencia dividida y se denota
- $$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Diferencias de orden superior

- La diferencia de orden 2 es
- $$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$
- La diferencia de orden 3 es
- $$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

Puntos equidistantes

- Si tenemos una seria de puntos equidistantes $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$
- Para la diferencia finita en x_1 necesitamos x_1 y x_2
- Para la diferencia finita en x_2 necesitamos x_2 y x_3
- ¿No importa el valor de x_1? ¿Debería? Diferencias hacia adelante

Diferencias hacia atrás

- En x_1 tenemos dos valores de diferencias finitas
- $$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \neq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
- Promedio de diferencias hacia adelante y atrás
- $$\left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right) \Big/ 2$$
- Suponemos distancia entre puntos es igual $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$
- $$\left(\frac{f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1)}{h}\right) \Big/ 2$$
- Diferencias centrales
- $$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h}$$

Diferencias multivariable

Funciones multivariables

Si tenemos $f(x, y)$

- Derivadas parciales
- $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y) - f(x_0,y)}{x - x_0}$$

- En diferencias finitas
- $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}$$
- diferencias finitas direccionales
- $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}$$

Descenso de Gradiente

• Imagina la función f $(x) = x^2$ entonces f ′ $(x) = 2x$

- f tiene su mínimo en 0
- f ′ (0) = 0
- f ′ < 0 para $x < 0$
- f ′ > 0 para $x > 0$
- Para encontrar el mínimo
  - $x_{i+1} = x_i - hf'(x_i)$
  - Donde h es el tamaño de paso

Descenso de gradiente multivariable

- Para cada variable podemos saber hacia donde crece/decrece
- Podemos unirlas en un vector: Gradiente
- $$\nabla f(x_1, x_1, \ldots, x_n) = \left[\frac{\partial f(x_1, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_1, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x_1, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}\right]$$
- Para encontrar el mínimo entonces
- $$X_{i+1} = X_i - h\nabla f$$

Integrales de superficie

¿Qué es una integral?

- Integral de Riemann
- f(x) una función
- Intervalo [a, b]
- Serie de intervalos Δx_k que parten a [a,b]
- Cada x_k^* pertenece Δx_k
- $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

Integral numérica

- No podemos $\lim_{\Delta xk \to 0}$
- Nos aproximamos a Δx_k muy pequeño
  - ¿Qué tan pequeño?
- Como seleccionamos x_k^*
  - Borde izquierdo
  - Borde derecho
  - Centro
  - Aleatorio

Métodos de integración

- Integración simple
- Punto medio
- Trapecio
- Simpson
- Cuadratura de gauss
- Monte Carlo

Integración Simple

- Serie de puntos a = $x_0 \dots x_n$ = b
- $$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) * (x_k - x_{k-1})$$
- Simple de implementar
- Simple de calcular
- Poco precisa

Punto medio

- Serie de puntos a = $x_0 \dots x_n$ = b
- $$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) * (x_k - x_{k-1})$$
- Menos simple de implementar
- Menos simple de calcular
- Un poco más precisa

Trapezoide

- Serie de puntos a = $x_0 \dots x_n$ = b
- $$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right) * (x_k - x_{k-1})$$
- Simple de implementar
- Menos simple de calcular
- ¿más precisa?

Cuadratura de Gauss

- Se elige la formula
    - Se eligen los pesos
- Se calcula la suma
- $$\sum_{k=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Múltiples dimensiones

- f(x) → f(x,y)
- [a,b] → [ax,bx] y [ay,by]
- ax = $x_0 \dots x_n = bx$ y ay = $y_0 \dots y_n = by$

Integración simple

- $\sum_k^n = 1n\ f(x_{k-1}) * (x_k - xk - 1) \rightarrow \sum_k^n = 1\ f(x_{k-1}, y_{k-1}) * (x_k - x_{k-1})(y_k - y_{k-1})$

Punto medio

Monte Carlo

- Evalúa la ecuación en puntos aleatorios
- No es determinística
- Pasos
    - Se generan puntos aleatorios en el dominio
    - Se evalúa la función en estos puntos
    - Aproxima la integral
- $$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Simpson

- Interpola los puntos
- Interpolación cuadrática
- Integra la interpolación
- Regla 1/3 de Simpson
- $$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Cuadratura de Gauss

- Utiliza puntos y pesos óptimos para minimizar el error
- $$\int_{-1}^{1} f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} w_i f(x_i)$$
- Se transforma el intervalo [a,b] a [-1,1]
- $$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}dz$$
-

# Puntos	Puntos	Pesos
1	0	2
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{3}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{3}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) * (x_k - x_{k-1}) \rightarrow \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}, \frac{y_{k-1}+y_k}{2}\right) * (x_k - x_{k-1})(y_k - y_{k-1})$$

Trapezoide

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right) * (x_k - x_{k-1}) \rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f(x_{k-1},y_{k-1})+f(x_k,y_{k-1})+f(x_{k-1},y_k)+f(x_k,y_k)}{4}\right) * (x_k - x_{k-1})(y_k - y_{k-1})$$

Monte Carlo

$$(b-a)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \rightarrow (bx-ax)(by-ay)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)$$