微分・積分 第3回

慶応義塾大学

総合政策学部・環境情報学部

今日の内容

1. 極限 (右極限, 左極限, 極限, 極限の性質)
2. 連続 (点連続, 連続関数, 中間値の定理)
3. 不定形の極限

極限

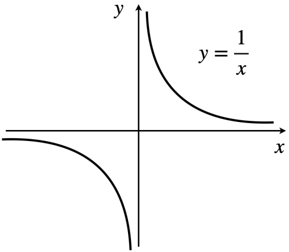
- 除法において, 0 で割ることは出来ない. $1/0$ や $0/0$ は存在しない.
- 無限大 ∞ と言う数は存在しない. $\infty - 10$, $1/\infty$, $\infty - \infty$ などは意味を持たない.
- しばしば, $1/0$, $1/\infty$, $\infty - \infty$ などに近いものを扱う必要がある.
    - 微分: 微小変化 ($0/0$ に近いもの) を評価する.
    - 積分: 微小量の無限和 ($\infty \times 0$ に近いもの) を評価する.

このようなものを数学的に適切に扱うために, "極限" の概念が必要になる.

右極限, 左極限

関数の値の “極限” を考えたい.

- 例えば, 関数 $1/x$ は原点 0 では定義されないが, 原点の近傍では定義されている.
- $x > 0$ の方から原点に近付くと, 関数の値は正の値で発散, つまり $+\infty$ になる.
- 一方で, $x < 0$ の方から原点に近付くと, 関数の値は負の値で発散, つまり $-\infty$ になる.



右極限

定義 3.1

関数 $f(x)$ に関して, $x > a$ を満たしながら x が a に近付くとき

- $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束することを次のように表す.

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha,$$

- $f(x)$ がいくらでも大きく (小さく) なることを, 正 (負) の無限大に発散するといい, 次のように表す.

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty \ (-\infty)$$

これらを $f(x)$ の a における <u>右極限</u> という.

$a = 0$ の場合は特別で, $x \to 0 + 0$ と書かずに, $x \to +0$ と書く.

左極限

定義 3.2

関数 $f(x)$ に関して, $x < a$ を満たしながら x が a に近付くとき

- $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束することを次のように表す.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha,$$

- $f(x)$ がいくらでも大きく (小さく) なることを, 正 (負) の無限大に発散するといい, 次のように表す.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = +\infty \ (-\infty)$$

これらを $f(x)$ の a における <u>左極限</u> という.

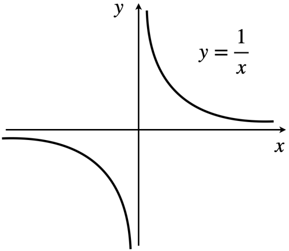
$a = 0$ の場合は特別で, $x \to 0 - 0$ と書かずに, $x \to -0$ と書く.

片側極限

- 右極限と左極限は片側極限とも呼ばれる.
- 関数 $f(x)$ の a における右極限と左極限は一般に一致しない.
- $f(a)$ は定義されるとは限らないし, 定義されても極限と一致するとは限らない.

例: $f(x) = \frac{1}{x}$,

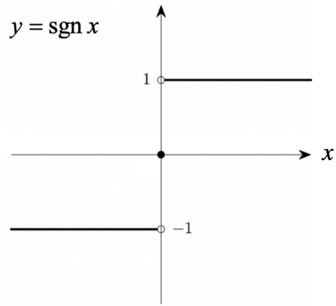
$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty$$



片側極限

例: $\mathrm{sgn}(0) = 0$,

$$\lim_{x \to +0} \mathrm{sgn}(x) = 1, \quad \lim_{x \to -0} \mathrm{sgn}(x) = -1$$



極限

定義 4.1

関数 $f(x)$ の a における右極限と左極限が存在し，それらが一致するとき，その値を

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

と書いて，$f(x)$ の a における <u>極限</u> という．

つまり x が a にどのような近付き方をしても，その値が曖昧なく定まるときに極限が定義される．定義より，極限が存在するとき

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x).$$

極限

- 右極限と左極限が一致しないので, 極限

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$$

は存在しない.

- 一方で,

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \to -0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

であるから, 極限が存在して

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty.$$

極限

問題 4.2

- $\lim_{x\to+0} |x|$, $\lim_{x\to-0} |x|$ を求めよ.
- $\lim_{x\to 0} |x|$ は存在するか?

問題 4.3

- $\lim_{x\to+0} \operatorname{sgn}(|x|)$, $\lim_{x\to-0} \operatorname{sgn}(|x|)$ を求めよ.
- $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(|x|)$ は存在するか?

問題 4.4

- $\lim_{x\to+0} (x^2 - x)/|x|$, $\lim_{x\to-0} (x^2 - x)/|x|$ を求めよ.
- $\lim_{x\to 0} (x^2 - x)/|x|$ は存在するか?

注意事項

注意 4.5

- “x が a に近付くときに, $f(x)$ が α に収束する” を厳密に定義するには, ϵ-δ 論法を用いる必要があるが, この講義では扱わない.
- $1/x$ の例からも分かるように, x の近付く先 a が定義域に含まれている必要はない. つまり $f(a)$ が定義されていなくても, $\lim_{x \to a+0} f(x)$ などの極限は議論できる.
- 一方で, a が f の定義域 D 内の点で近似できないと $f(x)$ の a における極限は定義できない. つまり, a は D もしくはその境界 ∂D に含まれる必要がある. (閉包 $\overline{D}$: D と ∂D の集合)

本講義は入門的な位置付けなので, 厳密性にはあまり拘らないで議論を進める.

極限の性質

定理 4.6

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ で $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．このとき

- $\lim_{x\to a} cf(x) = c\alpha$,
- $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$,
- $\beta \neq 0$ であれば, $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$,
- a の近傍で $f(x) \leq g(x)$ であれば, $\alpha \leq \beta$,

最後の主張は少し注意が必要で, a の近傍で $f(x) < g(x)$ であっても $\alpha < \beta$ とは限らない．($f(x) < g(x)$ であれば $f(x) \leq g(x)$ なので, $\alpha \leq \beta$ は正しい.)

極限の性質

問題 4.7

次を計算せよ.

- $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2+3x+5)$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}(2x+5)\mathrm{sgn}(|x|)$

問題 4.8

0 の近傍で $f(x) < g(x)$ であり, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x)$ なる関数 $f(x), g(x)$ を 1 つ見つけよ.

極限の性質

これまでは $a \in \mathbb{R}$ に対して極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ を考えていたが, $a = \pm\infty$ に対しても同様の議論が可能である. 次の定義は厳密には不十分であるが, この講義では特に問題にならない.

- x が十分大きくなるとき, $f(x)$ が α に収束することを

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha,$$

- x が十分小さくなるとき, $f(x)$ が α に収束することを

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$$

と書く.

連続

定義 5.1

- $f(x)$ が <u>a で連続</u> であるとは,

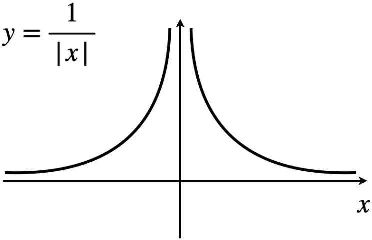
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

  が成立すること．つまり, 極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在し, $f(a) \in \mathbb{R}$ が定義され, それらが一致すること．連続でないとき, <u>不連続</u> という．
- $f(x)$ が <u>連続関数</u> であるとは, 定義域の全ての点において連続であること．

$f(x)$ が a で連続であるとき, $\lim_{x \to a} f(x) \neq \pm\infty$ であることに注意.

不連続

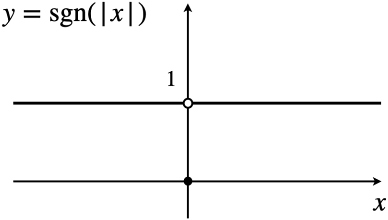
- $1/x$ や $\mathrm{sgn}(x)$ は 0 において不連続. ($x \neq 0$ では連続である.)
- $1/|x|$ は $1/|0|$ が定義されないから, 0 において不連続.
  ($\lim_{x \to 0} 1/|x| = +\infty$ でもある.)



不連続

$\mathrm{sgn}(|x|)$ は, 極限 $\lim_{x\to 0} \mathrm{sgn}(|x|)$ が存在し, $\mathrm{sgn}(|0|)$ も定義されるが

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{sgn}(|x|) \neq \mathrm{sgn}(|0|).$$

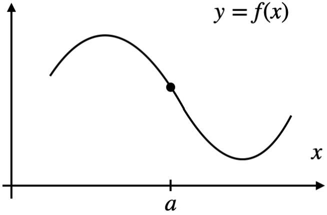


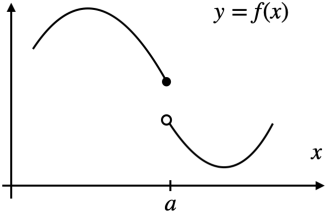
$$\lim_{x\to 0} \mathrm{sgn}(|x|) = 1$$

$$\mathrm{sgn}(|0|) = 0$$

連続関数の直感

関数 $f(x)$ が a において連続とは, $f(x)$ のグラフが $(a, f(a))$ で繋がっているという直感を持てば良い.





左図の関数は a で連続, 右図の関数は a で不連続. 連続関数とは, グラフが (定義域において) 繋がっている, 左図のような関数.

連続

問題 5.2

次の関数のグラフを描け．またこれらは連続関数か?

- $|x(x+3)(x-2)|$,
- $\mathrm{sgn}(\sin x)$

連続関数の加減乗除

定理 5.3

$f(x)$, $g(x)$ が a において連続であるとする.

- $cf(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ は a において連続.
- $g(a) \neq 0$ であれば, $f(x)/g(x)$ は a において連続.

- 恒等関数 $f(x)=x$ が連続関数であることから, 多項式関数や有理関数も (定義域において) 連続関数である.
- 三角関数, 指数関数, 対数関数は連続関数であることが知られているため, $2\sin x - 3\log x$ や $e^x \cos x$ なども連続関数.

合成関数の連続性

定理 5.4

関数 $f(x)$, $g(x)$ に関して, 関数 $f(x)$ の定義域は $g(a)$ を含み, 関数 $g(x)$ は a において連続であり, 関数 $f(x)$ は $g(a)$ において連続である時, 合成関数 $f(g(x))$ も a において連続.

例: 次の関数は連続関数

$$\sin(x^3 + 5x + 2), \quad e^{x^3} + \log(x^2 + 1),$$

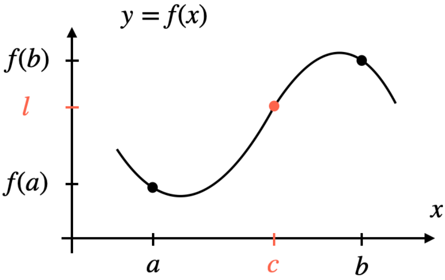
他にも, $\log(x + 1)$ は $x \leq -1$ で定義されないが, $x > -1$ において連続.

中間値の定理

連続関数に関する最も重要な定理が, 次の中間値の定理である.

定理 5.5 (中間値の定理)

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続とする. $f(a)<f(b)$ を満たすとき, 任意の $l \in [f(a), f(b)]$ に対して, $l = f(c)$ なる点 $c \in [a,b]$ が存在する.



極限計算

定義より, 関数が連続な点に関しては, 極限値を単に代入することで求めることができる.

例えば, $(x^2+2x-3)/(x^2-1)$ は $x \neq \pm 1$ において連続であるから,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\frac{3^2+2\cdot 3-3}{3^2-1}=\frac{3}{2}.$$

一方で, 1 は $(x^2+2x-3)/(x^2-1)$ の定義域に入っていないため, この点において $f(x)$ は連続でない. 無理に代入すると

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\frac{1^2+2\cdot 1-3}{1^2-1}=\frac{0}{0}\quad ??$$

極限計算

一方で, 1 は $(x^2+2x-3)/(x^2-1)$ の定義域に入っていなくても,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1} \\ &= \frac{1+3}{1+1} = 2\end{aligned}$$

- 2 つ目の等号: $x\to 1$ において $x-1\neq 0$ であるから, 分母分子を $x-1$ で割ることができる.
- 3 つ目の等号: 連続関数なので代入して極限を求めることが可能.

不定形

一般に, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ といった形は不定形と呼ばれる. 特別な場合にはこれらは数学的に意味を持ち, 具体的に計算可能. 次のような例がある.

- $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^3-8}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1+\frac{1}{x-1})$
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2-10}{7x^3+5x+2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(3x^3+2x^2)$
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+100}-\sqrt{x})$

不定形

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^3-8} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2+2x+4}$$
$$= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1+\frac{1}{x-1}) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{x}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}$$
$$= -1$$

不定形

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 - 2x^2 - 10}{7x^3 + 5x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4 - \frac{2}{x} - \frac{10}{x^3}}{7 + \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{4}{7}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} (3x^3 + 2x^2) = \lim_{x\to-\infty} x^3 (3 + \frac{2}{x}) = -\infty$$

不定形

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+100}-\sqrt{x}) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+100}-\sqrt{x})(\sqrt{x+100}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+100}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{100}{\sqrt{x+100}+\sqrt{x}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

まとめ

1. 極限 (右極限, 左極限, 極限, 極限の性質)
2. 連続 (点連続, 連続関数, 中間値の定理)
3. 不定形の極限