微分・積分 第1回

慶応義塾大学

総合政策学部・環境情報学部

講義概要

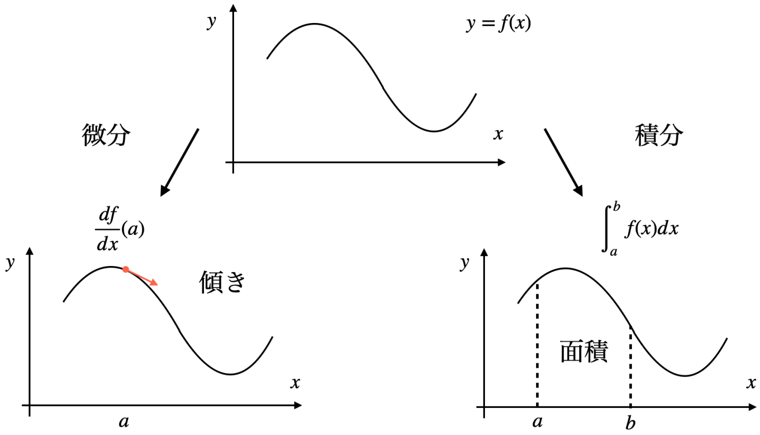
講義概要

微分・積分の基礎事項に関して講義する．微分は対象の変化を，積分は対象の累積を解析する理論であり，データサイエンス，経済学，理工学など幅広い分野で基礎となる．実際，その強力な手法と幅広い応用ゆえ，微分・積分は線形代数と合わせて大学数学の 2 本柱と位置付けられることが多い．本講義では，一変数関数の微分・積分，多項式近似，多変数関数の微分・積分などを学習する．

今日の内容

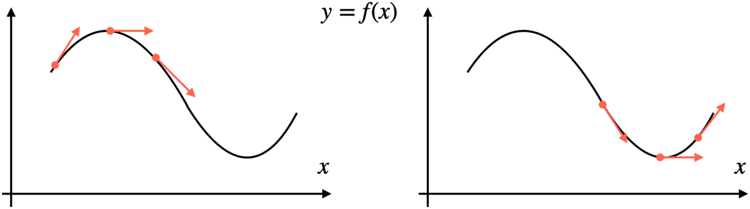
1. 微分・積分の概要
2. 集合, 写像

微分・積分とは何か?



微分

微分: 最も値の大きい・小さいところを探す方法

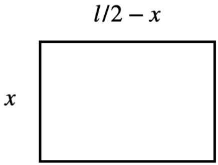


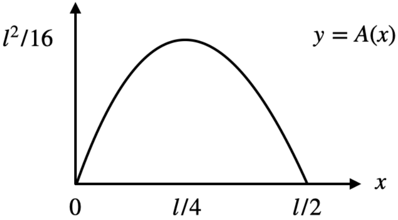
- 極大点の頂上の手前では坂は上がり, 先では下る.
- 極小点の底の手前では坂は下り, 先では上がる.
- 極大点, 極小点 $\Rightarrow$ 傾き 0.
- グラフの傾き $=$ 関数の値の変化率, 未来の判断材料.

応用

最適化問題: 適当な条件を満たす最適解を探す

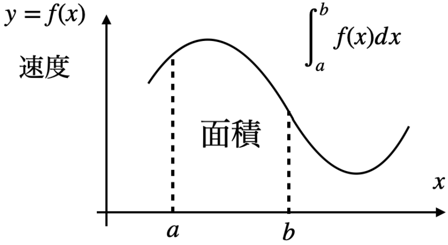
- 等周問題: 周の長さが l の長方形の中で面積を最大にするものは?
- 面積 $A(x) = x(l/2 - x)$





積分

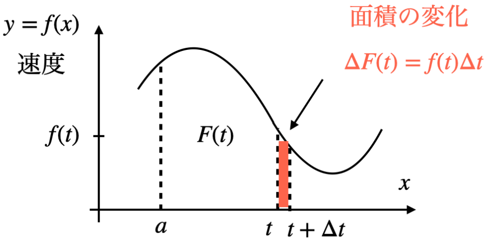
積分: これまでの蓄積を計算する方法



- 面積 $\int_a^b f(x)dx$ は時刻 a から時刻 b までに移動した距離.
- 平均速度 $=$ 面積/時間.
- 面積 $=$ 過去の蓄積, 過去の判断材料.

積分

時刻 a から時刻 t までに移動した距離は $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ で与えられた.



$\rightarrow \quad \dfrac{\Delta F(t)}{\Delta t} = f(t)$

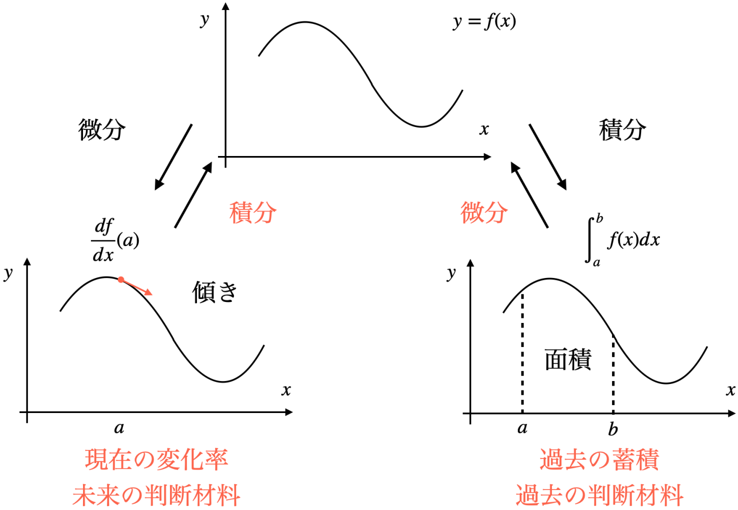
$\rightarrow \quad \dfrac{dF}{dt}(t) = f(t)$

位置の微分 = 速度

- 「速度」を積分すると「位置」(過去の蓄積).
- 「位置」を微分すると「速度」(現在の変化).
- 一般に, 微分と積分は逆操作.

微分・積分

以上を簡単にまとめると



集合, 濃度

記号の準備も兼ねて, 集合論から始める.

定義 3.1

- 対象 (もの) の集まりを<u>集合</u>という. 対象となるものは, 数字, 記号, 文字列など色々考えられる.
- 集合の構成要素を<u>元</u>(要素) という. a が集合 A の元であることを, $a \in A$ と表す. a が A の元であるとき, a は A に含まれるということもある. $a \in A$ の否定を $a \notin A$ と書く.
- 集合 A の元の数を $|A|$ で表し, A の<u>濃度</u>(位数) と呼ぶ. 集合 A で
    - $|A| = \infty$ なるものは<u>無限集合</u>,
    - $|A| \neq \infty$ なるものは<u>有限集合</u>.

集合

例 3.2

1. $A = \{$ りんご, みかん, バナナ $\}$ とすれば, みかん $\in A$.
2. 都道府県の集合

$$A = \{\text{北海道, 青森県, 岩手県, 宮城県}, \ldots\}$$

は $|A| = 47$.

3.
   - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: 自然数,
   - $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$: 整数,
   - $\mathbb{Q}$: 有理数 (分数全体), $\mathbb{R}$: 実数

   これらは全て無限集合.

外延的記法

集合を定義するには, その集合に含まれる元を指定すれば良い.

外延的記法: その集合が持つ元を全て列挙する直接的な方法. 例えば

$$\{1,2,3,4\},\ \{\text{子豚, 狸, 狐, 猫}\},\ \{1,3,5,7,9,11,\dots\}.$$

最後の集合は奇数全体の集合を意図したものだが, 「...」に何が並ぶのかが明確でないと誤解を招く恐れがある.

例 3.3

自然数の集合

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\dots\}.$$

整数の集合

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}.$$

内包的記法

内包的記法: 集合に含まれる元の条件を明示する方法. 「命題 P が真となる $x \in X$ 全体の集合」を

$$\{x \in X \mid P\}$$

と書く. ここで X は変数 x が動く範囲の集合である. 例えば

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid -1.4 \leq n \leq 3\}$$

は「整数 n であって $-1.4 \leq n \leq 3$ が成立するもの全体の集合」と読む. 外延的方法を用いれば, これは

$$\{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

とも表せる.

外延的方法 vs 内包的記法

例 3.4

実数 $a < b$ に対して, a, b を端点とする閉区間, 開区間が

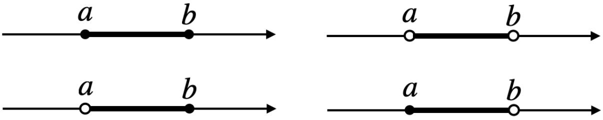
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

で定義される．同様に半開区間

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

が定義される．これらは外延的方法では記述できない無限集合である．

2 つの黒丸に挟まれた区間が閉空間, 2 つの白丸に挟まれた区間が開空間:



直積集合

定義 3.5 (直積集合)

A, B を集合とする．$a \in A$ と $b \in B$ を並べた (a, b) を<u>順序対</u>という．順序対全体のなす集合を A と B の<u>直積集合</u>といい，$A \times B$ と書く．

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

$A = \{a, b\}, B = \{c, d\}$ とすれば

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\} \\ &= \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}. \end{aligned}$$

同様に 3 つの集合 A, B, C の直積集合 $A \times B \times C$ や，n 個の集合 $A_1, \ldots, A_n$ の直積集合

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

が定義される．

n 次元座標空間 $\mathbb{R}^n$

例 3.6

- 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は実直線 $\mathbb{R}^1$ と同一視することができた.
- 実平面
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ \ y \in \mathbb{R}\}$$
- 3 次元座標空間
$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R},\ \ y \in \mathbb{R}\ \ z \in \mathbb{R}\}$$
- 一般に, $\mathbb{R}^n$ は n 次元座標空間, もしくは n 次元ユークリッド空間と呼ばれる.

この講義では主に $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ を扱う.

包含関係

複数の集合があるとき, それらの間の関係を考えることは自然である. 最も基本的なものが包含関係である.

定義 3.7 (部分集合)

A, B を集合とする.

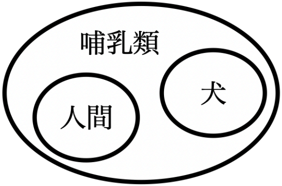
1. 任意の A の元が B の元でもあるとき, A は B の部分集合であるといい, $A \subset B$ と書く. $A \subset B$ でないとき, $A \not\subset B$ と書く.
2. $A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき, A と B は(集合として) 等しいといい, $A = B$ と書く.
3. $A \subset B$ かつ $A \neq B$ のとき, A は B の真部分集合であるといい, $A \subsetneq B$ とかく.

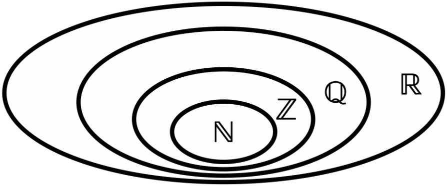
包含関係

人間の集合を { 人間 } と略記したりする．これは人間 1 人からなる集合ではない．

例 3.8

1. { 人間 } ⊂ { 哺乳類 }, { 犬 } ⊂ { 哺乳類 }
2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
3. 実数 $a < b$ に対して，$(a, b) \subsetneq [a, b]$ である．一方で，$(a, b]$ と $[a, b)$ の間には包含関係はない．



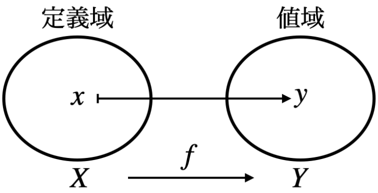


写像

定義 4.1

- 集合 X の各元に対して, 集合 Y の元を唯一つ定める対応のことを写像と呼び, $f : X \to Y$ と表す. X を<u>定義域</u>, Y を<u>値域</u>という.
- 写像 $f : X \to Y$ によって $x \in X$ が $y \in Y$ に対応するとき, y を f による x の<u>像</u>といい, $y = f(x)$ と書く. この対応を次のように書く.

$$f : X \longrightarrow Y, \quad x \mapsto y.$$



写像

例 4.2

1. $f : \{\,人間\,\} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad A \mapsto A$ の年齢
2. $g : \{\,犬\,\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \mapsto A$ の身長
3. $h : \{\,猫\,\} \longrightarrow \{\,猫\,\}, \quad A \mapsto A$ の母猫
4. $i : \{\,日本の大学\,\} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad A$ 大学 $\mapsto A$ 大学の学生数
5. $j : \{\,日本の大学\,\} \longrightarrow \{\,都道府県\,\}, \quad A$ 大学 $\mapsto A$ 大学の所在地

一方で, 人間 A と A の友人の対応は写像ではない. A の友人が 1 人とは限らないからである.

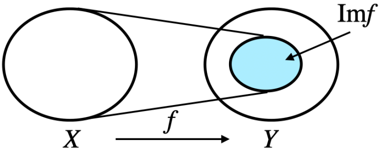
像

定義 4.3

写像 $f : X \to Y$ の$\underline{像}$を

$$\mathrm{Im} f = \{f(x) \mid x \in X\}$$

で定義する．つまり x が X の全ての元を動くとき, x の像 $f(x)$ 全体のなす Y の部分集合のことである．



全射, 単射

定義 4.4

$f : X \to Y$ を写像とする.

1. f が全射であるとは $\mathrm{Im} f = Y$ が成立すること. つまり「どの $y \in Y$ に対しても $x \in X$ が存在して $y = f(x)$」.
2. f が単射であるとは「$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$」が成立すること. 同値な対偶条件は「$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$」.
3. f が全単射であるとは, 全射かつ単射であること.

全射, 単射

例 4.5

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2(x-1)$ は (全射だが) 単射ではない.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ は全射でも単射でもない. $\mathrm{Im} g = \mathbb{R}_{\geq 0}$.
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ は全単射である.

問題 4.6

次の写像は全射か? 単射か?

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2(x-1)$.
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$.
3. $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^3$.

全射, 単射, 恒等写像

例 4.7

次の写像を考える:

$$f : \{ \text{日本の大学} \} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad A\text{ 大学} \mapsto A\text{ 大学の学生数}$$
$$g : \{ \text{日本の大学} \} \longrightarrow \{ \text{都道府県} \}, \quad A\text{ 大学} \mapsto A\text{ 大学の所在地}$$

写像 f は全射ではない (単射であろうか?). 写像 g は全射だが, 単射ではない.

例 4.8

何もしない写像 $\mathrm{id} : X \to X, x \mapsto x$ を<u>恒等写像</u>という. 恒等写像は全単射である.

全射, 単射, 恒等写像

問題 4.9

次の写像は全射か? 単射か?

1. 慶應義塾大学の学生に対して, 学籍番号を対応させる写像

$$f : \{\, \text{慶応義塾生} \,\} \longrightarrow \mathbb{Z}^8$$

2. 値域を学籍番号となる番号に限ったらどうであろうか?

$$g : \{\, \text{慶応義塾生} \,\} \longrightarrow \{\, \text{学籍番号} \,\} \subset \mathbb{Z}^8$$

合成写像

定義 4.10

写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ に対して, <u>合成写像</u>$g \circ f : X \to Z$ が

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

で定義される. つまり $x \in X$ に対して $f(x) \in Y$ が定まり, さらに $f(x) \in Y$ に対して $g(f(x)) \in Z$ が定まる. 図示すれば次のようになる.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

$f : X \to Y, g : Y \to Z$ の合成写像の表記「$g \circ f$」において f, g の順序に注意する. これは合成写像が $g(f(x))$ で定義されていることから理解できる.

逆写像

定理 4.11

写像 $f : X \to Y$ が全単射であれば, 写像 $g : Y \to X$ が存在して,

$$g \circ f = \mathrm{id}, \quad f \circ g = \mathrm{id}$$

が成立する. この g を f の<u>逆写像</u>といい, f^{-1} と書く.

実際, 任意の $y \in Y$ に対して, $x \in X$ で $f(x) = y$ なるものが唯一つ存在するので, $g(y) = x$ と定義すれば良い.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] & Y \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

逆写像

例 4.12

先ほど議論した, 慶応義塾生に学籍番号を対応させる写像は全単射であった.

$$g : \{\text{慶応義塾生}\} \longrightarrow \{\text{学籍番号}\} \subset \mathbb{Z}^8$$

逆写像は, 学籍番号から学生を特定することに対応する.

逆写像

例 4.13

写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 4$ は全単射である．f の逆写像は $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{1}{2}y + 2$ で与えられる．実際,

$$
\begin{array}{ccccc}
x & \mapsto & 2x - 4 & \mapsto & \dfrac{1}{2}(2x-4) + 2 = x \\
y & \mapsto & \dfrac{1}{2}y + 2 & \mapsto & 2(\dfrac{1}{2}y + 2) - 4 = y.
\end{array}
$$

なので $g(f(x)) = x$ かつ $f(g(y)) = y$.

$f(x) = 2x - 4$ の逆写像は, 方程式 $y = 2x - 4$ を x に関して解くことで求まる．

まとめ

1. 微分・積分の概要
2. 集合 (濃度, 外延的記法, 内包的記法, 直積集合, 包含関係)
3. 写像 (全射, 単射, 恒等写像, 合成写像, 逆写像)