微分・積分 第9回

慶應義塾大学

総合政策学部・環境情報学部

今日の内容

前回に引き続いてテイラーの定理に関する話題を議論する.

1. テイラーの定理の証明
2. テイラー展開, 解析的関数
3. 応用, オイラーの公式

関数の多項式近似

- 微分とは, 関数を 1 次多項式 (関数) で近似した様子を記述するもの. 導関数の情報から関数の増減の解析が可能になった.
- 導関数がさらに微分可能ならば, 2 回微分することにより凹凸を知ることができた. これは関数を 2 次多項式で近似することに相当する.
- 関数がさらに微分可能の場合には, 3 回微分, 4 回微分, ... を考えることにより, 与えられた関数の 3 次多項式, 4 次多項式, ... で近似できる.

一般の関数 (三角関数, 指数関数, 対数関数) などは難しいが, 多項式関数は比較的簡単である.

テイラーの定理

定理 2.1 (テイラーの定理)

開区間 I で定義された関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき．任意の $a \in I$ に対して，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{k!}(x-a)^n \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 \\
&\quad + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{k!}(x-a)^n.
\end{aligned}
$$

を満たす $c \in (a, x)$ が存在する．($a < x$ の場合)

上記の表示を有限テイラー展開という．

マクローリンの定理

特に $a = 0$ の場合にはマクローリンの定理と呼ばれる.

定理 2.2 (マクローリンの定理)

0 を含む開区間 I で定義された関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n. \end{aligned}$$

を満たす $\theta \in (0,1)$ が存在する. $(0 < x$ の場合$)$

$\theta x \in (0, x)$ に注意. 上記の表示を有限マクローリン展開という.

テイラーの定理

- テイラーの定理における

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{k!}(x-a)^n$$

はそれぞれ $(n-1$ 次の$)$<u>テイラー多項式</u> と <u>剰余項</u> と呼ばれる.

- 微分の観点からは, $f(x)$ と $P_{n-1}(x)$ は似ている.

$$f(a) = P_{n-1}(a), \quad f'(a) = P'_{n-1}(a), \ \ldots, \ f^{(n-1)}(a) = P_{n-1}^{(n-1)}(a).$$

実際, $f(x)$ が n 次多項式であれば, $f(x) = P_n(x)$ であった.

- テイラーの定理は $f(x)$ と $P_{n-1}(x)$ の誤差を $f(x)$ の n 次微分係数を用いて評価できることを主張している.

e^x の有限マクローリン展開

$f(x) = e^x$ の有限マクローリン展開

$$\begin{aligned} e^x &= P_5(x) + R_6(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^{\theta x}}{6!}x^6. \end{aligned}$$

を用いて $f(1) = e$ の近似値を求める.

$$P_5(1) = \frac{163}{60} = 2.71666\ldots$$

であるが, テイラーの定理より誤差は

$$|e - P_5(1)| = \frac{e^\theta}{6!} < \frac{e}{6!} < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} = 0.004166\ldots$$

コーシーの平均値の定理

コーシーの平均値の定理を用いて, テイラーの定理を証明する.

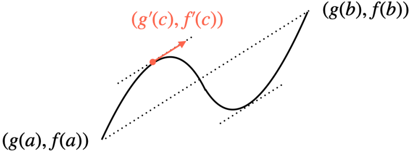
定理 3.1 (コーシーの平均値の定理)

微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ の定義域に $[a,b]$ が含まれ, $a < x < b$ において $g'(x) \neq 0$ であれば,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

なる $c \in (a,b)$ が存在する.

直感的には媒介変数 $t \in [a,b]$ を用いて $(x,y) = (g(t), f(t))$ の軌跡を考えれば良い.



テイラーの定理の証明

関数

$$
\begin{aligned}
F(x) =& f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
=& f(x) - \Big\{ f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 \\
& + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \Big\}
\end{aligned}
$$

を考え，これが剰余項 $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ $(a < c < x)$ の形に書けることを示す．簡単な計算で次が分かる．

- $F(a) = F'(a) = F''(a) = \cdots = F^{(n-1)}(a) = 0$,
- $F^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

テイラーの定理の証明

- $F(x)$ と $G(x) = (x-a)^n$ に対して，コーシーの平均値の定理を使うと

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)}$$

  なる $a < x_1 < x$ が存在する．

- $F'(x)$ と $G'(x) = n(x-a)^{n-1}$ に対して，コーシーの平均値の定理を使うと

$$\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{F'(x_1)-F'(a)}{G'(x_1)-G'(a)} = \frac{F''(x_2)}{G''(x_2)}$$

  なる $a < x_2 < x_1$ が存在する．

- これを繰り返す．

テイラーの定理の証明

纏めると

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{F''(x_2)}{G''(x_2)} = \cdots = \frac{F^{(n-1)}(x_{n-1})}{G^{(n-1)}(x_{n-1})} = \frac{F^{(n)}(x_n)}{G^{(n)}(x_n)}$$

なる $a < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < x$ が存在する．これより

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n)}(x_n)}{G^{(n)}(x_n)} = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}$$

なので, $c = x_n$ として

$$F(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

が示された．

テイラー展開

- C^∞ 級関数 $f(x)$ に関して剰余項

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{k!}(x-a)^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成立すれば, $f(x)$ は冪級数展開 (単項式の無限和として表現)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

としての表示を持つ.

- 剰余項 R_n に関する条件は, x が a に十分近いときに満たされることが多いが, この講義では深入りしない. (収束半径の議論が必要.)

テイラー展開

定義 5.1

C^∞ 級関数 $f(x)$ に関して, 剰余項が $R_n \to 0$ $(n \to \infty)$ なるとき

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 \\
&\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots.
\end{aligned}
$$

この表示を $f(x)$ の テイラー展開 と呼ぶ. 特に $a = 0$ のときは, マクローリン展開と呼ばれる.

e^x のマクローリン展開

$f(x) = e^x$ に関して, $f^{(n)}(x) = e^x$ であるから, 有限マクローリン展開は

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n.$$

ただし $0 < \theta < 1$. 任意の x に対して

$$\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから, $f(x) = e^x$ のマクローリン展開は

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

簡単のため, $0 < x$ としたが, $0 > x$ でも成立する.

$\sin x$ のマクローリン展開

$f(x) = \sin x$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = \cos x,\ f^{(2)}(x) = -\sin x,\ f^{(3)}(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x$$

を周期 4 で繰り返すことから

$$f^{(4n)}(0) = 0,\ f^{(4n+1)}(0) = 1,\ f^{(4n+2)}(0) = 0,\ f^{(4n+3)}(0) = -1.$$

したがって

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + R\end{aligned}$$

$\sin x$ のマクローリン展開

ただし, 剰余項 R は R_{2n} または R_{2n+1} であり, ある $0 < \theta < 1$ に関して

$$R_{2n} = \frac{(-1)^n \sin(\theta x)}{(2n)!} x^{2n}, \quad R_{2n+1} = \frac{(-1)^n \cos(\theta x)}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

いずれの場合も

$$|R_N| \leq \frac{x^N}{N!} \to 0 \quad (N \to \infty)$$

であるから, $f(x) = \sin x$ のマクローリン展開は

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

$\cos x$ のマクローリン展開

$f(x) = \cos x$ のマクローリン展開も同様に求めることができる.

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\end{aligned}$$

これらのマクローリン展開からも, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ が成立していることが分かる. (項別微分)

三角関数と弧度法

解析学において，三角関数を弧度法で考えることは重要である．実際，度数法の世界では三角関数の基本的な公式は複雑になる $(1^\circ = \frac{\pi}{180}\mathrm{rad})$:

- $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}$
- $\displaystyle (\sin x)' = \frac{\pi}{180}\cos x, \quad (\cos x)' = -\frac{\pi}{180}\sin x$
- $\displaystyle \sin x = \frac{\pi}{180}x - \frac{\pi^3}{180^3}\frac{x^3}{3!} + \frac{\pi^5}{180^5}\frac{x^5}{5!} + \dots$

弧度法では形式的にラジアンという単位を使うが，実際は円の半径と弧の比であるから (長さの単位に依存しない) 無次元量である．本来，数は無次元量であり，それゆえ $x + x^3$ のような計算が意味を持つのである．

$\frac{1}{1-x}$ のマクローリン展開

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{3 \cdot 2}{(1-x)^4}, \cdots$$

であり, 一般に $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}} x^n \end{aligned}$$

ただし $0 < \theta < 1$.

$\frac{1}{1-x}$ のマクローリン展開

$0 \leq x < 1/2$ であれば

$$\frac{|x|^n}{|1-\theta x|^{n+1}} \leq \frac{|x|^n}{|1-|x||^{n+1}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから，$\frac{1}{1-x}$ のマクローリン展開は

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots .\end{aligned}$$

実際には，$-1 < x < 1$ においてマクローリン展開が成立する．(等比数列の和と思えば良い.)

$\log(1+x)$ のマクローリン展開

$f(x) = \log(1+x)$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \dots$$

であり, 一般に $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ であるから

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n(1+\theta x)^n}x^n \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n(1+\theta x)^n}x^n.\end{aligned}$$

ただし $0 < \theta < 1$.

$\log(1+x)$ のマクローリン展開

$0 \leq x \leq 1$ であれば

$$\frac{|(-1)^{n+1}x^n|}{|n(1+\theta x)^n|} \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから, $\log(1+x)$ のマクローリン展開は

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots .\end{aligned}$$

実際は, $-1 < x < 1$ においてマクローリン展開が成立する.

解析関数

定義 6.1

C^∞ 級関数 $f(x)$ が a の近傍で, テイラー展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

されるとき, $f(x)$ は a で <u>解析的</u> と呼ばれる. 定義域の任意の点で解析的な関数を <u>解析的関数</u> という.

解析的でない C^∞ 関数

C^∞ 関数であっても, 解析的でない関数は存在する. 例えば

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

原点 0 において解析的でない.

実際,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \longrightarrow 0 \quad (x \to +0)$$

といった計算から, 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対し $f^{(n)}(0) = 0$ が成立している. もし $f(x)$ がマクローリン展開可能とすると, $f(x) = 0$ となって矛盾する.

$\sin 1$ の近似値

$\sin x$ のマクローリン展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

を用いて, $\sin 1$ の近似値を求める.

$$1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} = \frac{101}{120} = 0.84166\dots$$
$$1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \frac{1^7}{7!} = \frac{4241}{5040} = 0.841468\dots$$
$$1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \frac{1^7}{7!} + \frac{1^9}{9!} = \frac{305353}{362880} = 0.841471\dots$$

実際, $\sin 1 = 0.841470\dots$.

極限の計算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots) - x}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}(-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + \dots) = -\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots) - 1 - x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \dots) = \frac{1}{2}.$$

オイラーの公式 (発展)

指数関数と三角関数は一見無関係のように思えるが, テイラー展開を考えると類似性が浮かび上がってくる.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} \dots \\
\sin x &= \phantom{1 +{}} x \phantom{{}+ \frac{x^2}{2!}} - \frac{x^3}{3!} \phantom{{}+ \frac{x^4}{4!}} + \frac{x^5}{5!} \phantom{{}+ \frac{x^6}{6!}} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
\cos x &= 1 \phantom{{}+ x} - \frac{x^2}{2!} \phantom{{}+ \frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} \phantom{{}+ \frac{x^5}{5!}} - \frac{x^6}{6!} + \dots
\end{aligned}
$$

オイラーの公式 (発展)

$i^2 = -1$ なる虚数 i を考えて, 指数関数のテイラー展開において, x を ix に置き換える.

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots \\
&= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots) \\
&= \cos x + i \sin x.
\end{aligned}
$$

e^{ix} が何を意味するのかを理解するには, 複素関数論を勉強する必要がある.

オイラーの公式 (発展)

定理 8.1 (オイラーの公式)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

特に $x = \pi$ とした

$$e^{i\pi} = -1$$

は美しい数式として有名である.

まとめ

1. テイラーの定理の証明
2. テイラー展開, 解析的関数
3. 応用, オイラーの公式