微分・積分 第 5 回

慶応義塾大学

総合政策学部・環境情報学部

今日の内容

1. 三角関数, 指数関数, 対数関数の微分,
2. 合成関数の微分, 対数微分

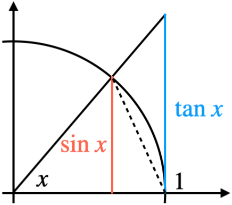
三角関数の微分

三角関数の微分を議論するために必要な準備を行う.

定理 2.1

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0.$

弧度法において, x が弧の長さであることから $0 < x < \pi/2$ において次の不等式が成立する. (扇形と底辺を共有する 2 つの三角形の面積を比較しても良い.)



$$\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin x \;<\; x \;<\; \tan x$$

定理 2.1①の証明

$0 < x < \pi/2$ において

- $\sin x < x$ より, $\frac{\sin x}{x} < 1$.
- $x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ より, $\cos x < \frac{\sin x}{x}$.

纏めると

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

$x \to +0$ なる極限をとると

$$\lim_{x\to+0} \cos x \le \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to+0} 1.$$

これより, $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$ (挟み撃ちの定理)

同様の議論で左極限も $\displaystyle\lim_{x\to-0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

定理 2.1②の証明

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0.$$

三角関数の微分

定理 2.2

1. $(\sin x)' = \cos x$,
2. $(\cos x)' = -\sin x$,
3. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

三角関数の加法定理を思い出しておく.

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

定理 2.2①の証明

加法定理より

$$\begin{aligned}\sin(x+h)-\sin x &= \sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x\\ &= \cos x\sin h+\sin x(\cos h-1)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(\cos x\frac{\sin h}{h}+\sin x\frac{\cos h-1}{h})\\ &= \cos x\cdot 1+\sin x\cdot 0\\ &= \cos x.\end{aligned}$$

定理 2.2②の証明

加法定理より

$$\begin{aligned}\cos(x+h)-\cos x &= \cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x\\ &= \cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(\cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h})\\ &= \cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1\\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

定理 2.2③の証明

商の微分公式より

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}
$$

三角関数の微分

問題 2.3

次の関数の導関数を求めよ.

1. $\sin^2 x$
2. $\sin^3 x$
3. $\sin x \cos x$
4. $\dfrac{\cos x}{x}$

ネイピア数

ネイピア数 $e = 2.71828\ldots$ に関して, 次が成立する.

$$e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

これは $e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ とも同値である.

いくつか計算してみると

$$(1+\frac{1}{10})^{10} = 2.5937\ldots, \quad (1+\frac{1}{100})^{100} = 2.7048\ldots,$$
$$(1+\frac{1}{1000})^{1000} = 2.7169\ldots, \quad (1+\frac{1}{10000})^{10000} = 2.7181\ldots,$$

準備

指数関数と対数関数の微分を議論するために必要な準備を行う.

定理 3.1

1. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1,$
2. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1.$

定理 3.1 の証明

まず②を示す.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\log(1+h)^{\frac{1}{h}}\\ &= \log\Bigl(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\Bigr) \quad \text{(対数関数の連続性)}\\ &= \log e = 1.\end{aligned}$$

次に①を示す. まず $t = e^h - 1$ とおくと, $h \to 0$ のとき $t \to 0$ である. また $e^h = 1 + t$ より $h = \log(1+t)$ であるから, ②より

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)} = 1.$$

指数関数の微分

指数関数 e^x は微分しても不変であるという特殊な性質を持つ.

定理 3.2

$$(e^x)' = e^x$$

定理 3.1①より

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

微分して不変な関数は e^x の定数倍しかないことも知られている. つまり微分方程式 $f'(x) = f(x)$ の解は $f(x) = Ce^x$ の形 (C:定数). 底が e でない場合は講義の後半で扱う.

対数関数の微分

定理 3.3

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

定理 3.1②より

$$\begin{aligned}(\log x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log(1 + \frac{h}{x}) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{tx} \log(1+t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{x} \frac{\log(1+t)}{t} \\ &= \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

途中で $t = \frac{h}{x}$ なる変数変換をしている.

合成関数の微分

関数 $g : D \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x)$ と $f : E \to \mathbb{R}, y \mapsto f(y)$ で, 像 $\mathrm{Im} g$ が E に含まれるものに対して, 合成関数

$$f \circ g : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(g(x))$$

を考えることができる. これは合成写像の特別な場合であるが, 関数であることを強調して $f(g(x))$ という記号を使うことが多い.

合成関数の微分

定理 4.1

$f(y)$, $g(x)$ が微分可能であれば, 合成関数 $f(g(x))$ も微分可能で,

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

$y = g(x)$, $z = f(y)$ とすれば,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

と表現することも可能. 導関数は分数ではないが, 形式的に約分できると思うと, 右辺から左辺が得られる.

定理 4.1 の大雑把な証明

十分小さな h に関して $k = g(x+h) - g(x) \neq 0$ を仮定する. $g(x)$ の連続性より, $h \to 0$ で $k \to 0$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(g(x))g'(x)
\end{aligned}
$$

仮定が成立しない例もあるので, 厳密な証明としては不十分.

定理 4.1 の証明 (発展)

一般に, $f(x)$ が a で微分可能なとき, 関数 $\delta(x)$ で $\lim_{x\to a}\delta(x)=0$ なるものが存在して

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\delta(x)(x-a)$$

と書くことができる. a を $g(x)$, x を $g(x+h)$ に置き換えることで

$$\begin{aligned} f(g(x+h)) =& f(g(x))+f'(g(x))(g(x+h)-g(x)) \\ &+\delta(g(x+h))(g(x+h)-g(x)) \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} =& f'(g(x))\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &+\delta(g(x+h))\frac{g(x+h)-g(x)}{h}. \end{aligned}$$

$h\to 0$ として, 第一項は $f'(g(x))g'(x)$ に第二項は 0 に収束する.

合成関数の微分

$\big((5x^2+3)^9\big)'$ を計算することを考える. 勿論, 展開してから微分しても良いが, 計算が面倒である.

一方で, $f(y) = y^9$ と $g(x) = 5x^2+3$ を用いて $f(g(x)) = (5x^2+3)^9$ と書けることから

$$\begin{aligned}
\big((5x^2+3)^9\big)' &= (y^9)' \qquad\qquad (y = g(x) \text{ とおいた}) \\
&= 9y^8 \cdot y' \\
&= 9(5x^2+3)^8 \cdot 10x \\
&= 90x(5x^2+3)^8.
\end{aligned}$$

合成関数の微分

$(e^{3x^2+7})'$ を計算することを考える.

$f(y) = e^y$ と $g(x) = 3x^2 + 7$ を用いて $f(g(x)) = e^{3x^2+7}$ と書けることから

$$\begin{aligned}(e^{3x^2+7})' &= (e^y)' \qquad\qquad (y = g(x) \text{ とおいた})\\ &= e^y \cdot y' \\ &= e^{3x^2+7} \cdot 6x \\ &= 6xe^{3x^2+7}.\end{aligned}$$

合成関数の微分

問題 4.2

次の関数の導関数を求めよ.

1. $(x^2+x+1)^9$,
2. $\sin^3 x$,
3. $\cos x^2$,
4. $(x^2+1)^2(2x^3-1)^4$.

一般の指数関数の微分

定理 5.1

$a > 0$ に関して

$$(a^x)' = a^x \log a$$

$a = e^{\log a}$ に注意すると

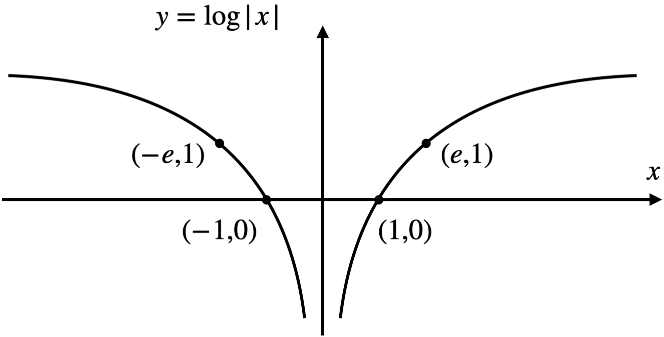
$$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$$

であるから, $f(y) = e^y$ と $g(x) = x \log a$ を用いて $f(g(x)) = a^x = e^{x \log a}$ と書けることから

$$(a^x)' = (e^y)' = e^y \cdot y' = a^x \log a.$$

対数関数の微分の拡張

$\log x$ の定義域は $x > 0$ であるが，$\log|x|$ を考えることで，定義域を $x \neq 0$ なる実数全体に拡張される．



対数関数の微分の拡張

定理 6.1

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

- $x > 0$ の場合

$$(\log|x|)' = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

- $x < 0$ の場合

$$(\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

対数微分

定理 7.1

微分可能な関数 $g(x)$ に対して

$$(\log |g(x)|)' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$f(y) = \log |y|$ と $g(x)$ を用いて $f(g(x)) = \log |g(x)|$ と書けることから

$$(\log |g(x)|)' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

関数の対数を取ってから微分する方法は対数微分と呼ばれ, 様々な場面に現れる.

$(x^a)' = ax^{a-1}$

定理 7.2

$a \in \mathbb{R}$ に関して, $x > 0$ において

$$(x^a)' = ax^{a-1}.$$

$g(x) = x^a$ とすれば

$$(\log|g(x)|)' = (\log x^a)' = (a\log x)' = \frac{a}{x}.$$

定理 7.1 より

$$\frac{a}{x} = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{(x^a)'}{x^a}$$

であるから

$$(x^a)' = ax^{a-1}.$$

これは対数微分の典型的な応用例.

$(x^a)' = ax^{a-1}$

具体的に計算すれば

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$(\sqrt[3]{x^2})' = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

まとめ

1. 三角関数, 指数関数, 対数関数の微分,
2. 合成関数の微分, 対数微分