# 微分・積分 第8回

慶応義塾大学

総合政策学部・環境情報学部

# 今日の内容

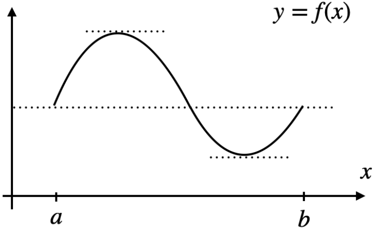
1. ロルの定理, 平均値の定理, コーシーの平均値の定理,
2. 高次導関数, テイラーの定理, 有限テイラー展開

# ロルの定理

**定理 2.1 (ロルの定理)**

微分可能な関数 $f(x)$ の定義域に $[a,b]$ が含まれ，$f(a)=f(b)$ が成り立つならば，$f'(c)=0$ なる $c\in(a,b)$ が存在する．

$f(x)$ が定数関数であれば明らか．そうでない場合には，ワイエルシュトラスの定理より，ある $c\in(a,b)$ において最大値または最小値をとる．$c$ において $f(x)$ が極値をとるので，$f'(c)=0$.



# 平均値の定理

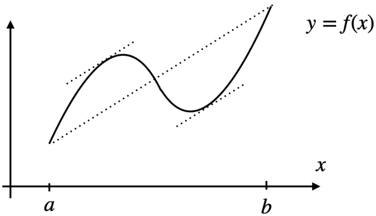
ロルの定理を斜めにずらしたものが平均値の定理である.

**定理 2.2 (平均値の定理)**

微分可能な関数 $f(x)$ の定義域に $[a,b]$ が含まれるとき,

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を満たす $c \in (a,b)$ が存在する.



# 平均値の定理の証明

関数

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

は $g(a) = g(b)$ を満たすので，ロルの定理より $g'(c) = 0$ なる $c \in (a, b)$ が存在する．

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

なので，平均値の定理が示された．

端点で関数の値が等しくなるように一次関数を引くことで，ロルの定理に帰着させている．

# コーシーの平均値の定理

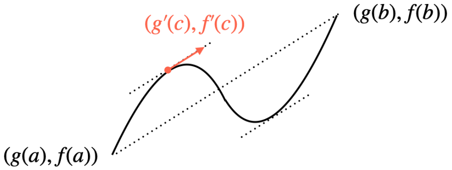
**定理 2.3 (コーシーの平均値の定理)**

微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ の定義域に $[a, b]$ が含まれ, $a < x < b$ において $g'(x) \neq 0$ であれば,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

なる $c \in (a, b)$ が存在する.

$g(x) = x$ の場合が通常の平均値の定理である. 直感的には媒介変数 $t \in [a, b]$ を用いて $(x, y) = (g(t), f(t))$ の軌跡を考えれば良い.



# コーシーの平均値の定理の証明

関数

$$\phi(x) = \bigl(f(b) - f(a)\bigr)g(x) - \bigl(g(b) - g(a)\bigr)f(x)$$

を考えると，

$$\phi(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = \phi(b)$$

であるから，ロルの定理より，ある $c \in (a, b)$ が存在して

$$0 = \phi'(c) = \bigl(f(b) - f(a)\bigr)g'(c) - \bigl(g(b) - g(a)\bigr)f'(c).$$

一方で，ロルの定理の対偶を考えると $g'(c) \neq 0$ より $g(b) - g(a) \neq 0$ である．したがって，上式を整理して

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

# ロピタルの定理

コーシーの平均値の定理を利用して，ロピタルの定理を証明する．

**定理 3.1 (ロピタルの定理)**

関数 $f(x)$, $g(x)$ が $a$ を除く $a$ の近傍において微分可能であり，

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

かつ $g'(x) \neq 0$ とする．このとき極限 $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ロピタルの定理は $a = \pm\infty$ や $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ の場合にも成立する．

# ロピタルの定理の証明

必要ならば $f(a) = g(a) = 0$ と置き直すことにより，$f(x)$, $g(x)$ は点 $a$ を含めて連続としても極限には影響しない.

$x > a$ とすれば，$[a, x]$ にコーシーの平均値の定理を適用して

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

なる $c \in (a, x)$ が存在する. $x \to a + 0$ のとき $c \to a + 0$ であるから

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$x \to a - 0$ の場合も同様である.

# 高次導関数

- 微分とは, 関数を 1 次多項式 (関数) で近似した様子を記述するもの. 導関数の情報から関数の増減の解析が可能になった.
- 導関数がさらに微分可能ならば, 2 回微分することにより凹凸を知ることができた. これは関数を 2 次多項式で近似することに相当する.
- 関数がさらに微分可能の場合には, 3 回微分, 4 回微分, ... を考えることにより, 与えられた関数の 3 次多項式, 4 次多項式, ... での近似を考察することができる.

# 高次導関数

関数 $f(x)$ が微分可能なとき, $f'(x)$ をその導関数と呼んだ. これを帰納的に繰り返すことで高次導関数を得ることができる.

**定義 4.1**

- $f'(x)$ が微分可能なとき, $f^{(2)}(x) = f''(x)$ を $f(x)$ の 2 次導関数 という.
- $f^{(n-1)}(x)$ が微分可能なとき,

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

を $f(x)$ の $n$ 次導関数 という. $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$, $\frac{d^n f}{dx^n}(x)$ とも書かれる.

記号を合わせるために, $f(x)$ を $f^{(0)}(x)$, $f'(x)$ を $f^{(1)}(x)$ と書く場合もある.

# 高次導関数

**定義 4.2**

- 関数 $f(x)$ が $n$ 回微分可能であり，$f^{(n)}(x)$ が連続であるとき，$f(x)$ は $n$ 回連続微分可能，または $C^n$ 級であるという．
- 関数 $f(x)$ が何回でも微分可能であるとき，$f(x)$ は無限回微分可能，または $C^\infty$ 級であるという．

- 実際の計算に現れる関数は $C^\infty$ 級であることが多いので，あまり神経質になる必要はない．
- 一方で，$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ は微分可能であるが，$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ は原点 0 で連続でないため，1 回連続微分可能ではない．原点 0 以外では無限回微分可能である．

# 高次導関数

4 次多項式関数

$$f(x) = 4x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 7x - 5$$

に対して

$$\begin{aligned} f'(x) &= 16x^3 + 18x^2 - 6x + 7, \\ f^{(2)}(x) &= 48x^2 + 36x - 6, \\ f^{(3)}(x) &= 96x + 36, \\ f^{(4)}(x) &= 96, \\ f^{(5)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

# 高次導関数

**問題 4.3**

次の関数の高次導関数を計算せよ.

1. $\sin x$
2. $x^n$

# $\sin x$ の高次導関数

$f(x) = \sin x$ の高次導関数を計算する:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x \\
f^{(2)}(x) &= -\sin x, \\
f^{(3)}(x) &= -\cos x \\
f^{(4)}(x) &= \sin x
\end{aligned}
$$

であるから, 以下周期 4 でこれらを繰り返す.

# $x^n$ の高次導関数

$f(x) = x^n$ の高次導関数を計算する:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= nx^{n-1} \\
f^{(2)}(x) &= n(n-1)x^{n-2}, \\
f^{(3)}(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \\
f^{(4)}(x) &= n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}, \\
\dots &= \dots \\
f^{(n-1)}(x) &= n(n-1)(n-2)\dots 2x, \\
f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n!
\end{aligned}
$$

最後は $n$ の階乗である.

# 多項式と高次導関数

**定理 4.4**

$n$ 次多項式関数 $f(x)$ に関して

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.
\end{aligned}
$$

ただし $0! = 1$ と定義した.

つまり多項式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ に関して, $x^k$ の係数は

$$
a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}
$$

として計算できる.

# 定理 4.4 の証明

多項式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ に関して

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots \\
f^{(2)}(x) &= 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3 + \dots \\
f^{(3)}(x) &= 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4x + 5\cdot 4\cdot 3a_5x^2 + \dots \\
\dots &= \dots \\
f^{(k)}(x) &= k!a_k + (k+1)\cdots 2a_{k+1}x + (k+2)\cdots 3a_{k+2}x^2 + \dots
\end{aligned}
$$

であるから

$$f^{(k)}(0) = k!a_k.$$

# 多項式と高次導関数

同様の議論で次も示すことができる.

### 定理 4.5

$n$ 次多項式関数 $f(x)$ に関して

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 \\
&\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.
\end{aligned}
$$

# 多項式と高次導関数

$f(x) = 4x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ に関して

$$f'(x) = 16x^3 + 18x^2 - 6x + 7, \quad f^{(2)}(x) = 48x^2 + 36x - 6,$$
$$f^{(3)}(x) = 96x + 36, \quad f^{(4)}(x) = 96.$$

これより, 次はどちらも $f(x)$ に一致する.

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$
$$= -5 + 7x + \frac{-6}{2}x^2 + \frac{36}{6}x^3 + \frac{96}{24}x^4$$
$$f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$
$$= 9 + 35(x-1) + \frac{78}{2}(x-1)^2 + \frac{132}{6}(x-1)^3 + \frac{96}{24}(x-1)^4$$

# 多項式と高次導関数

## 問題 4.6

定理 4.5 を, 関数 $f(x) = 3x^2 - x + 5$ と $a = 0, \pm 1$ に関して確認せよ．つまり

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2$$

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$f(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f^{(2)}(-1)}{2!}(x+1)^2$$

が成立することを確認せよ.

# 平均値の定理

平均値の定理を思い出す.

**定理 5.1 (平均値の定理)**

微分可能な関数 $f(x)$ の定義域に $[a,b]$ が含まれるとき,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たす $c \in (a,b)$ が存在する.

上記の式は, 次と同値

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a) \quad (c \in (a,b)).$$

高次導関数を用いて, 平均値の定理はテイラーの定理に一般化される.

# テイラーの定理

**定理 5.2 (テイラーの定理)**

開区間 $I$ で定義された関数 $f(x)$ が $n$ 回微分可能であるとき．任意の $a \in I$ に対して，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{k!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

を満たす $c \in (a, x)$ が存在する．($a < x$ の場合)

上記の表示を有限テイラー展開という．証明は次回.

# マクローリンの定理

特に $a = 0$ の場合にはマクローリンの定理と呼ばれる.

**定理 5.3 (マクローリンの定理)**

0 を含む開区間 $I$ で定義された関数 $f(x)$ が $n$ 回微分可能であるとき.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n. \end{aligned}$$

を満たす $\theta \in (0,1)$ が存在する. ($0 < x$ の場合)

上記の表示を有限マクローリン展開という.

# テイラーの定理

- テイラーの定理における

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{k!}(x-a)^n$$

はそれぞれ ($n-1$ 次の)テイラー多項式 と 剰余項 と呼ばれる.

- 微分の観点からは, $f(x)$ と $P_{n-1}(x)$ は似ている.

$$f(a) = P_{n-1}(a), \quad f'(a) = P'_{n-1}(a), \ \ldots, \ f^{(n-1)}(a) = P_{n-1}^{(n-1)}(a).$$

実際, $f(x)$ が $n$ 次多項式であれば, $f(x) = P_n(x)$ であった.

- テイラーの定理は $f(x)$ と $P_{n-1}(x)$ の誤差を $f(x)$ の $n$ 次微分係数を用いて評価できることを主張している.

# $e^x$ の有限マクローリン展開

$f(x) = e^x$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = f^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) = f^{(4)}(x) = e^x$$

であるから

$$f'(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = e^0 = 1.$$

したがって

$$\begin{aligned} e^x &= P_5(x) + R_6(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^{\theta x}}{6!} x^6. \end{aligned}$$

# $e^x$ の有限マクローリン展開

$f(x) = e^x$ の有限マクローリン展開

$$
\begin{aligned}
e^x &= P_5(x) + R_6(x) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^{\theta x}}{6!} x^6.
\end{aligned}
$$

を用いて $f(1) = e$ の近似値を求める.

$$
P_5(1) = \frac{163}{60} = 2.71666\ldots
$$

であるが, マクローリンの定理より誤差は, $e < 3$ を知っていれば,

$$
|e - P_5(1)| = \frac{e^\theta}{6!} < \frac{e}{6!} < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} = 0.004166\ldots
$$

# $\sin x$ 有限のマクローリン展開

$f(x) = \sin x$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = \cos x,\ f^{(2)}(x) = -\sin x,\ f^{(3)}(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x$$

を周期 4 で繰り返すことから

$$f^{(4n)}(0) = 0,\ f^{(4n+1)}(0) = 1,\ f^{(4n+2)}(0) = 0,\ f^{(4n+3)}(0) = -1.$$

したがって

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_7(x)$$

ここで

$$R_7(x) = -\frac{\cos(\theta x)}{7!}x^7 \quad (0 < \theta < 1)$$

ただし $P_5(x) = P_6(x)$ に注意する.

# 昇ベキと降ベキ

- 多項式を書くとき, 通常は次数が高い方から書くことが多い. 例えば
$$5x^3 - x^2 + 5x - 10.$$
このような表示を <u>降ベキ</u> の順という.
- 一方で, (有限) マクローリン展開などを議論するときは次数が低い方から書くことが多い. 例えば
$$-10 + 5x - x^2 + 5x^3.$$
このような表示を <u>昇ベキ</u> の順という.

$x$ が一般の場合には降ベキ, $x$ が十分小さい場合には昇ベキを使うことが多い.

# まとめ

1. ロルの定理, 平均値の定理, コーシーの平均値の定理,
2. 高次導関数, テイラーの定理, 有限テイラー展開