微分・積分 第 4 回

慶応義塾大学

総合政策学部・環境情報学部

今日の内容

1. 平均変化率, 微分係数, 接線の傾き
2. 導関数, 導関数の性質

極限の別表示

前回, 関数 $f(x)$ の a における極限を,

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$$

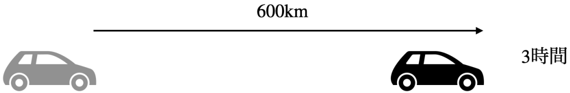
であるときに, $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ と定義した.

上記の条件は, $x = a + h$ と表すと,

$$\lim_{h\to +0} f(a+h) = \lim_{h\to -0} f(a+h) = \alpha$$

と同値であり, これを $\lim_{h\to 0} f(a+h) = \alpha$ と書く. 今回の講義では後者の表記を用いる.

平均変化率



問題 3.1

600km の移動に 3 時間かかったとき，速度は何 km/h だろうか?

答えは簡単で，

$$\frac{600\text{km}}{3\,\text{時間}} = 200\text{km/h}$$

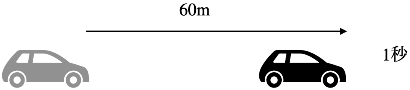
と答えたくなる．

しかしながら，これは平均速度であり，常に一定の速度で移動するとは限らない．つまり，ある特定の時刻での速度は必ずしも 200km/h になるとは限らない．

この問題設定からは，平均速度しか求めることができない．

平均変化率

出発からちょうど 1 時間後の速度はどのように求めれば良いだろうか?



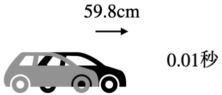
出発してから 1 時間後において, 1 秒間で 60m 移動したとすると,

$$\frac{60\mathrm{m}}{1\,秒} = \frac{0.06\mathrm{km}}{1/3600\,時間} = 216\mathrm{km/h}$$

と答えたくなる.

しかしながら, 時間スケールを変えただけで, 状況は先の問題と変わっていない. これは 1 秒間の平均速度であり, 1 秒間の間に速度が変化している可能性がある.

平均変化率



時間をさらに細かく刻んで 0.01 秒間にどれだけ移動したかを計測したところ, 59.8cm 移動したことが判明した. するとこの 0.01 秒間の平均速度は

$$\frac{59.8\mathrm{cm}}{0.01\text{ 秒}} = \frac{0.000598\mathrm{km}}{1/360000\text{ 時間}} = 215.28\mathrm{km/h}$$

となる.

もちろんこの 0.01 秒間の間に速度が変化している可能性があるが, 良い近似になっていることが期待される.

平均変化率

一般に, 時間軸をどんどん短くすることで, その時刻での速度をより正確に測定できることが期待される.

つまり, ある時刻での速度は

$$\frac{\text{微小な位置の変化}}{\text{微小な時間の変化}}$$

の極限として得られると考えられる.

このような極限を扱う理論が微分である.

微分係数

定義 4.1

関数 $f(x)$ の定義域を D とする．点 $a \in D$ に関して，極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき，$f(x)$ は a で 微分可能 であるといい，$f'(a)$ で表す．$f'(a)$ は $f(x)$ の a における 微分係数 と呼ばれる．

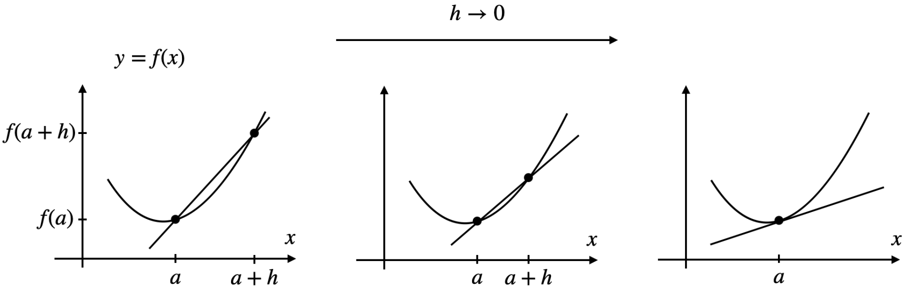
$f(x)$ は a で微分可能ならば，$f(x)$ は a で連続であることがわかるが，その逆は一般には成立しない．

微分係数と接線の傾き

微分係数

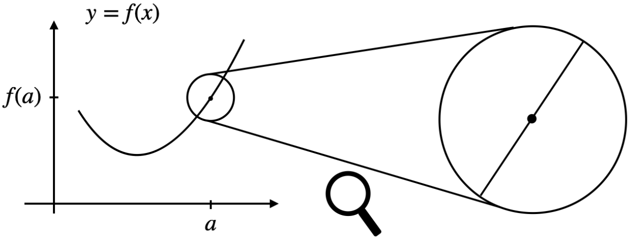
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

は $f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線の傾きとみなすことができる．



微分可能性

関数 $f(x)$ が a において微分可能であるとは，$f(x)$ のグラフが点 $(a, f(a))$ における接線が定義できるくらい滑らかであることを意味する．点 $(a, f(a))$ の近傍でグラフが直線のように見えるともいえる．



導関数

定義 5.1

関数 $f(x)$ がその定義域 D の任意の点において微分可能であるとする.
$a \in D$ に対して, その点における微分係数 $f'(a)$ を返す関数

$$f' : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \to f'(a)$$

を $f(x)$ の 導関数 と呼び, $f'(x)$ を求める事を $f(x)$ を 微分する という.
$f'(x)$ は $\frac{df}{dx}(x)$ と書かれる場合もある.

$(x)' = 1$

$f(x) = x$ の導関数を定義に従って計算する.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 1 = 1.
\end{aligned}
$$

“$f(x) = x$ のグラフの点 (a, a) における接線の傾きは 1.”

$(x^2)' = 2x$

$f(x) = x^2$ の導関数を定義に従って計算する.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x.
\end{aligned}
$$

"$f(x) = x^2$ のグラフの点 (a, a^2) における接線の傾きは $2a$."

$(x^3)' =?$

問題 5.2

$f(x) = x^3$ の導関数を定義に従って計算せよ．つまり

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

を求めよ.

$(x^3)' = 3x^2$

$f(x) = x^3$ の導関数を定義に従って計算する.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2. \end{aligned}$$

“$f(x) = x^3$ のグラフの点 (a, a^3) における接線の傾きは $3a^2$.”

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$n \in \mathbb{N}$ に関して，$f(x) = x^n$ の導関数を定義に従って計算する．

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2} + \cdots + h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2} + \cdots + h^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}hx^{n-2} + \cdots + h^{n-1}) = nx^{n-1}.
\end{aligned}
$$

“$f(x) = x^n$ のグラフの点 (a, a^n) における接線の傾きは na^{n-1}.”

$c' = 0$

定数関数 $f(x) = c$ の導関数を定義に従って計算する.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

“$f(x) = c$ のグラフの点 (a, c) における接線の傾きは 0.”

微分の性質

定理 5.3

$f(x)$, $g(x)$ を (共通の定義域で) 微分可能な関数とする.

1. $(af(x)+bg(x))' = af'(x)+bg'(x) \qquad a,b\in\mathbb{R}$,
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

これから

$$(f(x)^2)' = 2f'(x)f(x), \quad \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

などが分かる.

多項式の微分

定理 5.3 を使うと, 多項式の導関数は簡単に計算できる.

- $(3x^2 - 5x + 1)' = 6x - 5$,
- $(x^4 - 15x^2 + 5x + \pi)' = 4x^3 - 30x + 5$,
- $(-x^{100} + 57x^2 + \pi x + \log_2 7)' = -100x^{99} + 114x + \pi$.

関数のグラフが描けなくても, 接線の傾きはすぐ分かる.

積の微分

$(x^3+5)(4x+1)$ の導関数を 2 通りの方法で計算する.

- 定理 5.3 を使うと

$$\begin{aligned}\bigl((x^3+5)(4x+1)\bigr)' &= (x^3+5)'(4x+1)+(x^3+5)(4x+1)' \\ &= 3x^2(4x+1)+(x^3+5)4 \\ &= 16x^3+3x^2+20.\end{aligned}$$

- 微分の計算の前に展開すれば

$$\begin{aligned}\bigl((x^3+5)(4x+1)\bigr)' &= \bigl(4x^4+x^3+20x+5\bigr)' \\ &= 16x^3+3x^2+20.\end{aligned}$$

商の微分

定理 5.3 の関数の商の微分公式

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

を思い出す.

有理関数 $\frac{3x}{x^2+1}$ の導関数は

$$\begin{aligned}\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)' &= \frac{(3x)'(x^2+1) - 3x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3(x^2+1) - 3x(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

$(1/x^n)' = -n/x^{n+1}$

逆数の微分公式

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

を思い出す.

有理関数 $\frac{1}{x^n}$ の導関数は

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

これより

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

は任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して成立することが分かる.

微分可能 $\Rightarrow$ 連続

関数 $f(x)$ は「a で微分可能であれば, 連続である」. 実際,

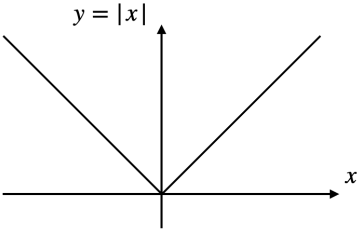
$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ が有限の値として存在} \\
\Longrightarrow &\lim_{h\to0}\bigl(f(a+h)-f(a)\bigr)=0 \\
\Longrightarrow &\lim_{h\to0}f(a+h)=f(a) \\
\Longrightarrow &\lim_{x\to a}f(x) \text{ が存在してその値が } f(a) \text{ と一致} \\
\Longrightarrow &f(x) \text{ が } x=a \text{ で連続}
\end{aligned}
$$

対偶を考えれば, 「a で連続でなければ, 微分可能でない」とも表現できる.

導関数の非存在

関数 $f(x)$ は a で連続でなければ微分可能でないが, 連続であっても微分可能とは限らない.

例えば, $f(x) = |x|$ は 0 で微分不可能である.



直感的には, 0 で接線が引けないからである.

導関数の非存在

$f(x) = |x|$ が 0 で微分不可能であることを確かめる．極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在すれば，右極限と左極限

$$\lim_{h\to +0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad \lim_{h\to -0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在して，それらは等しいはずである．そこで $a=0$ とすると

$$\lim_{h\to +0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{h}{h} = 1$$
$$\lim_{h\to -0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{-h}{h} = -1$$

であるから，右極限と左極限は一致しない．

導関数の計算

問題 5.4

$(3x^2+5)(x^3+x)$ の導関数を (1) 展開してから計算, (2) 積の微分公式を用いて計算, の 2 通りで求め, 答えが一致することを確かめよ.

問題 5.5

$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ の導関数を計算せよ.

問題 5.6

$\frac{x}{x+1}-(x+1)(x^2-4)$ の導関数を計算せよ.

定理 5.3(2) の証明 (発展)

公式 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を証明する．

$$(f(x)g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

であり，

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
=&\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
=&\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&\xrightarrow{h\to 0} f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

定理 5.3(3) の証明 (発展)

公式 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ を証明する.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)\frac{1}{h}$$

であり,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)\frac{1}{h} \\
=&\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\frac{1}{h} \\
=&\left(\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} - \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\right)\frac{1}{g(x)g(x+h)}
\end{aligned}$$

定理 5.3(3) の証明 (発展)

$$=\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\frac{1}{g(x)g(x+h)}$$
$$\xrightarrow{h\to 0}\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

別証明として, 比較的簡単な $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{g'(x)}{g(x)^2}$ をまず示し, 次に積の微分公式を $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\frac{1}{g(x)}$ に使うことで証明することも出来る.

まとめ

1. 平均変化率, 微分係数, 接線の傾き
2. 導関数, 導関数の性質