微分・積分 第2回

慶応義塾大学

総合政策学部・環境情報学部

今日の内容

1. 関数 (写像との関係, グラフ, 定義域)
2. 多項式関数, 有理関数, 無理関数, 三角関数, 指数関数, 対数関数
3. 符号関数, 床関数, 天井関数

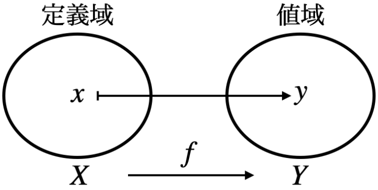
記号: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

写像

集合 X の各元に対して, 集合 Y の元を唯一つ定める対応のことを写像と呼び, $f : X \to Y$ と表す. X のことを 定義域, Y のことを 値域 という.

写像 $f : X \to Y$ によって $x \in X$ が $y \in Y$ に対応するとき, y を f による x の 像 といい, $y = f(x)$ と書く.

$$f : X \longrightarrow Y, \quad x \mapsto y.$$



関数

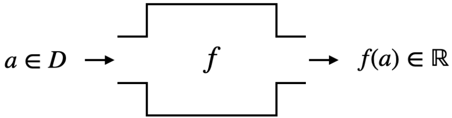
写像の特別な場合が関数である.

定義 2.1 (関数)

実数の部分集合 $D \subset \mathbb{R}$ から実数への写像 $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ を (一変数) 関数という. x は <u>変数</u> と呼ばれる.

(暫くは一変数関数しか登場しないので, 単に関数と呼ぶ.)

関数 f は $a \in D$ を入力すると $f(a) \in \mathbb{R}$ を出力する機械[1] だと考えられる.



[1] 関数はもともと「函数」と表記されていた. 函は箱のことである.

関数

例えば, 関数

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\mapsto(1+x)^2$$

はしばしば単に $f(x)=(1+x)^2$ と書かれる.

これは $a\in D=\mathbb{R}$ に対して $(1+a)^2\in\mathbb{R}$ を返す「対応」だと考えられる. つまり

$$f(-1)=0,\quad f(0)=1,\quad f(0.3)=1.69,\quad f(10)=121$$

といった具合である.

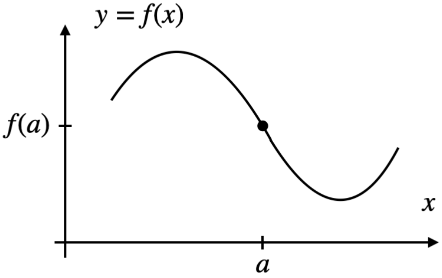
f の像は $\mathbb{R}_{\geq 0}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$ である.

関数のグラフ

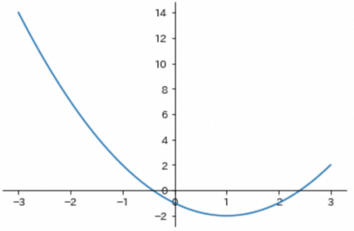
xy-平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点 $(x, f(x))$ を考えることで, 関数 f を可視化できる. 集合

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$$

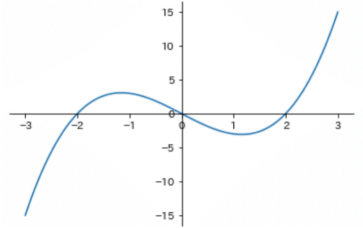
を関数 f の グラフ という.



関数のグラフ



$f(x) = (x-1)^2 - 2$



$f(x) = x(x^2 - 4)$

関数のグラフ

問題 3.1

次の関数のグラフを描け.

1. $f(x) = 2x - 5$
2. $g(x) = x^2 - 2x - 3$
3. $h(x) = |x^2 - 4x - 12|$

関数の定義域

次の 2 つの関数

$$f_1 : \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$$
$$f_2 : \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

は定義域が異なるので，厳密には異なる関数である．

しかしながら，特に言及がなければ $1/x$ と書かれた関数は前者を指す．このように，特に定義域を指定せずに式だけで与えられた関数は，その式に代入可能な実数全体を定義域とする関数と考える．

関数の定義域

- x^2+3x は $\mathbb{R}$ 上で定義された関数.
- $\frac{3x+1}{x^2-5}$ は分母が 0 にならない範囲, つまり $x \neq \pm\sqrt{5}$ で定義された関数.
- $\sqrt{x-3}$ は平方根の中身が非負である範囲, つまり $x \geq 3$ で定義された関数.

多項式関数

- $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

の形の関数を 多項式関数 という.

- 例

$$-2x + 3, \quad x^3 - x^2 + 7x + 10, \quad x^{100}$$

- a_i は x^i の 係数, a_0 は 定数項 と呼ばれる.
- $a_n \neq 0$ であるとき, n を $f(x)$ の 次数, $f(x)$ を n 次多項式関数という.
- 多項式関数の定義域は $\mathbb{R}$.

有理関数

- 多項式関数 $f(x), g(x)$ の有理式, つまり
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
の形で書かれる関数を <u>有理関数</u> という.
- 例
$$\frac{1}{x+1}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}, \quad \frac{(x-1)(x+5)}{(x-3)(x+1)(x-7)}$$
- 多項式関数は有理関数の特別な場合 ($g(x) = 1$ の場合).
- 有理関数の定義域は $D = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$.

無理関数

- 多項式と根号の有理式で表され, 変数が根号に含まれる関数を無理関数という.
- 例

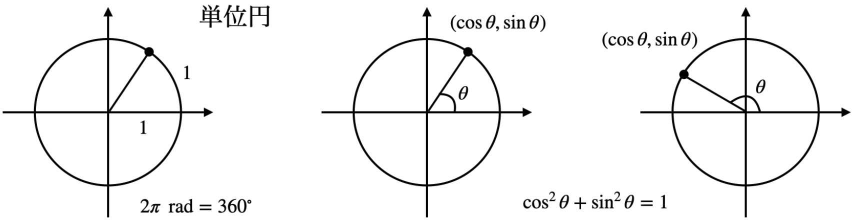
$$\sqrt{x^2-1}+x^3+\frac{5}{2},\quad \frac{\sqrt{x}}{x-1}+2,\quad \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{5x^2-7}}+100x$$

- 無理関数の定義域は一般に複雑である. 例えば, 上の関数の定義域はそれぞれ

$$\{x\in\mathbb{R}\mid x^2\geq 1\},\quad \{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0, x\neq 1\},\quad \{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\pm\sqrt{7/5}\}$$

三角関数

- 三角関数: 平面三角法の角度と線分長の関係を記述する関数の族, 及びそれらを拡張して得られる関数の総称.
- 正弦関数 $\sin\theta$, 余弦関数 $\cos\theta$, 正接関数 $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$ が代表的.
- 大学では, 変数 θ の単位として, 度数法 (度) ではなく弧度法 (radian) を考えることが多い. 1 radian: "半径=弧長" なる角度.
- 2π rad $= 360^\circ$, つまり 1 rad $= 360^\circ/2\pi \approx 57.3^\circ$.

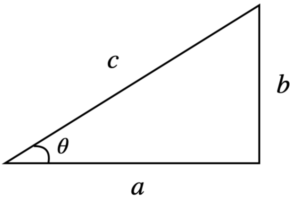


三角関数

$0 < \theta < \pi/2$ であるとき

$$\sin\theta = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{a}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}$$

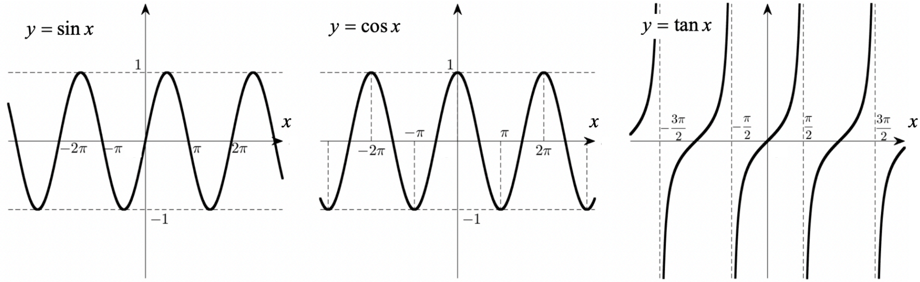


具体的には

- $\sin(\pi/6) = 1/2$, $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$,
- $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, $\cos(\pi/3) = 1/2$
- $\tan(pi/6) = 1/\sqrt{3}$, $\tan(\pi/4) = 1$, $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$

三角関数の性質

- 周期: $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$, $\tan(x+\pi)=\tan x$
- $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$



三角関数の性質

問題 7.1

三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の定義域と像を求めよ.

問題 7.2

次の関数のグラフを描け.

1. $3\sin(2x)$
2. $\cos(x + \frac{\pi}{3}) + 1$

一般に, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対して, $af(bx + c) + d$ のグラフは $f(x)$ のグラフを x 軸方向に $1/b$ 倍し, c だけ左にずらし, y 軸方向に a 倍し, d だけ上にずらしたもの.

指数関数

- $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$ に対して, 冪乗 $a^n = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個}}$ であった. a は底, n は指数 と呼ばれる. さらに $a^{-n} = 1/a^n$, $a^0 = 1$ と定めることで, 指数が整数の場合にも冪乗が定義される.
- 例

$$2^5 = 32, \quad 2^{-4} = \frac{1}{16}, \quad 2^0 = 1.$$

- 有理数 $x \in \mathbb{Q}$ に対して, a の冪乗 a^x を次のように定義する. $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $a > 0$ に対して,

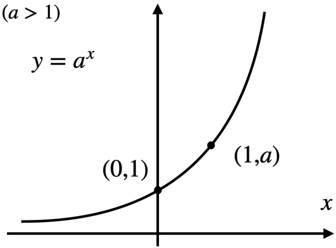
$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \; (= (\sqrt[m]{a})^n).$$

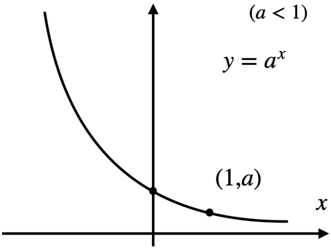
- 例

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} \approx 2.924, \quad 2^{-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{-3}{4}} = \sqrt[4]{1/2^3} \approx 0.5946.$$

指数関数

- 上の考察を元にして $x \in \mathbb{R}$ に対して $a^x \in \mathbb{R}$ が定義される. (厳密には有理数の稠密性を議論する必要があるが省略)
- 関数 $f(x) = a^x$ を a を底とする 指数関数 という,
- ネイピア数 $e = 2.7182\dots$ を底とする場合が多い.





対数関数

- $a \neq 1$ を正の実数とすると，任意の $x \in \mathbb{R}_+$ に対して
$$x = a^y$$
を満たす $y \in \mathbb{R}$ が唯一つ存在する．これを $y = \log_a x$ と書き，a を底とする x の <u>対数</u> という．
- $f(x) = \log_a x$ を a を底とする <u>対数関数</u> という．定義域が $\mathbb{R}_+$ であることに注意 ($f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a x$).

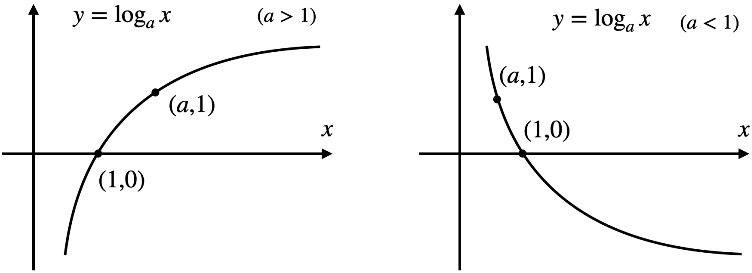
例

$$\log_2 \frac{1}{2} = -1,\ \log_2 1 = 0,\ \log_2 2 = 1,\ \log_2 4 = 2,\ \log_2 8 = 3,\ \log_2 16 = 4$$

$(2^{-1} = 1/2,\ 2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16)$

対数関数

- 定義より, $a^{\log_a x} = x$, $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$.
- 特別な底に関して, 対数は特別な名前を持つ:
  1. 常用対数: $\log_{10} x = \mathrm{Log} x$,
  2. 自然対数: $\log_e x = \log x, \ln x$,
  3. 二進対数: $\log_2 x$.



対数関数

定理 9.1

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^b = b \log_a x$
- (底の変換公式) 正の実数 $a, b (\neq 1)$ と x に対して

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

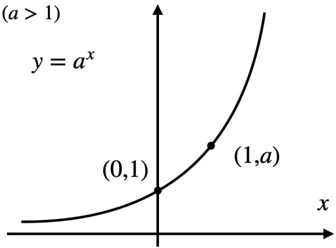
例

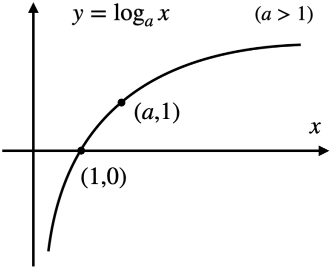
- $\log_2 10 = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5,$
- $\log_3 12 = \log_3 3 + \log_3 2^2 = 1 + 2\log_3 2,$
- $\log_5 \frac{15}{4} = \log_5 15 + \log_5 \frac{1}{2^2} = 1 + \log_5 3 - 2\log_5 2,$
- $\log_7 5 = \log_2 5 / \log_2 7.$

指数関数と対数関数

- $a \neq 1$ に関して, 指数関数 $f(x) = a^x$ の像は $\mathbb{R}_+$, 対数関数 $g(x) = \log_a x$ の定義域は $\mathbb{R}_+$.
- $f(x)$ と $g(x)$ は互いに 逆関数(逆写像);

$$g(f(x)) = \log_a(a^x) = x, \quad f(g(x)) = a^{\log_a x} = x.$$



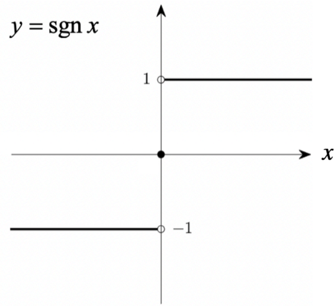


(一般に, 逆写像のグラフは $x = y$ に関して鏡映対称)

符号関数

符号関数

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$



符号関数

問題 11.1

次の関数のグラフを描け.

1. $\mathrm{sgn}(x^2)$, $\mathrm{sgn}(x^3)$
2. $\frac{x+|x|}{2x} \quad (x \neq 0)$.

最後の関数はヘヴィサイドの階段関数と呼ばれる.

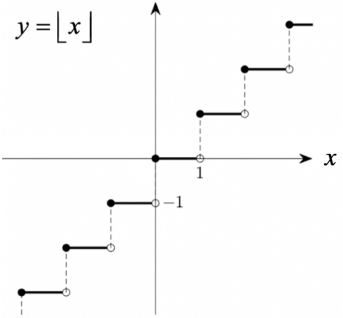
床関数

床関数 $\lfloor x \rfloor$

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid x \geq n\}$$

例

$$\lfloor 1/2 \rfloor = 0, \quad \lfloor -\pi \rfloor = -4, \quad \lfloor 5 \rfloor = 5, \quad \lfloor 5.1 \rfloor = 5$$



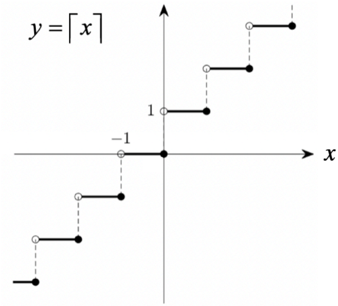
天井関数

天井関数 $\lceil x \rceil$

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\}$$

例

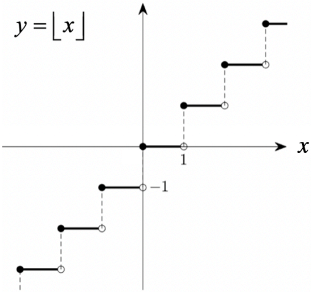
$$\lceil 1/2 \rceil = 1, \quad \lceil -\pi \rceil = -3, \quad \lceil 5 \rceil = 5, \quad \lceil 5.1 \rceil = 6$$

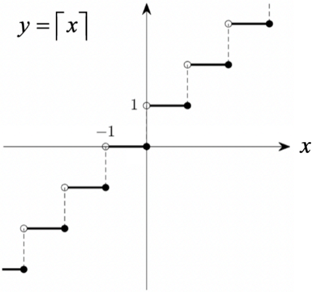


床関数と天井関数

床関数 $\lfloor x \rfloor$, 天井関数 $\lceil x \rceil$

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid x \geq n\}, \quad \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\}$$





様々な関数のグラフ

問題 12.1

次の関数のグラフを描け.

1. $\operatorname{sgn}(\sin x)$
2. $\left\lfloor \frac{1}{2}x + 1 \right\rfloor$

まとめ

1. 関数 (写像との関係, グラフ, 定義域)
2. 多項式関数, 有理関数, 無理関数, 三角関数, 指数関数, 対数関数
3. 符号関数, 床関数, 天井関数