

# 微分・積分 第1回

慶應義塾大学

総合政策学部・環境情報学部

# 講義概要

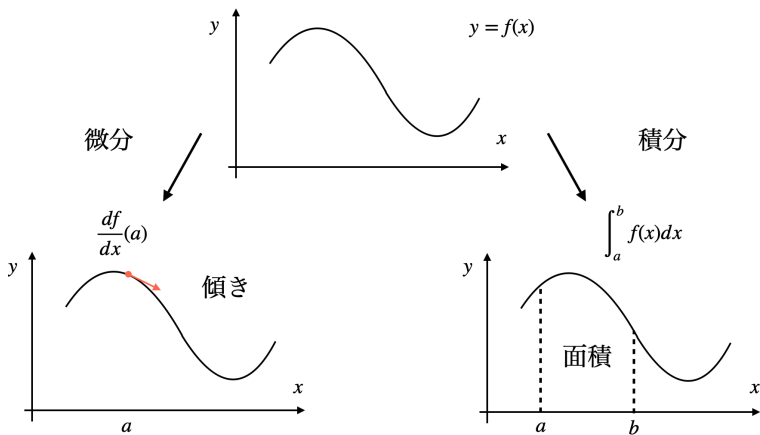
## 講義概要

微分・積分の基礎事項に関して講義する。微分は対象の変化を, 積分は対象の累積を解析する理論であり, データサイエンス, 経済学, 理工学など幅広い分野で基礎となる。実際, その強力な手法と幅広い応用ゆえ, 微分・積分は線形代数と合わせて大学数学の2本柱と位置付けられることが多い。本講義では, 一変数関数の微分・積分, 多項式近似, 多変数関数の微分・積分などを学習する。

# 今日の内容

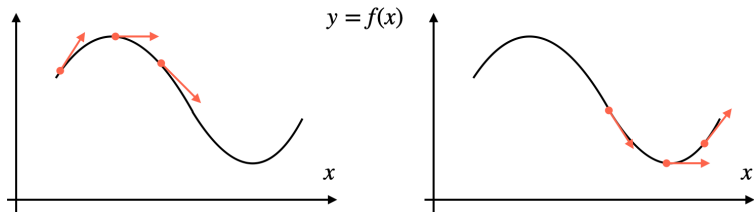
- ① 微分・積分の概要
- ② 集合, 写像

# 微分・積分とは何か?



# 微分

微分: 最も値の大きい・小さいところを探す方法

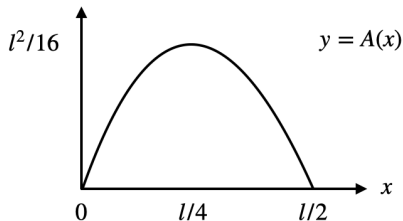
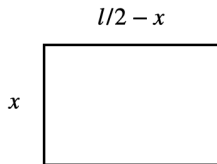


- 極大点の頂上の手前では坂は上がり, 先では下る.
- 極小点の底の手前では坂は下り, 先では上がる.
- 極大点, 極小点  $\Rightarrow$  傾き 0.
- グラフの傾き = 関数の値の変化率, 未来の判断材料.

# 応用

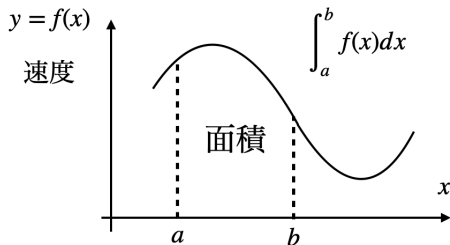
最適化問題: 適当な条件を満たす最適解を探す

- 等周問題: 周の長さが  $l$  の長方形の中で面積を最大にするものは?
- 面積  $A(x) = x(l/2 - x)$



# 積分

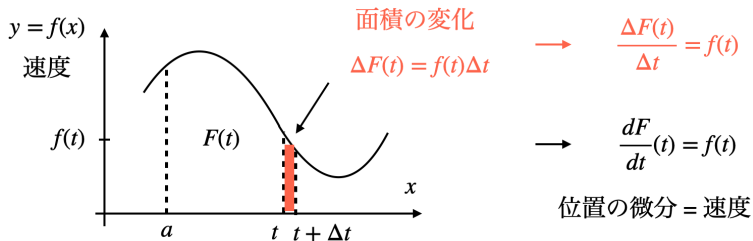
積分: これまでの蓄積を計算する方法



- 面積  $\int_a^b f(x) dx$  は時刻  $a$  から時刻  $b$  までに移動した距離.
- 平均速度 = 面積/時間.
- 面積 = 過去の蓄積, 過去の判断材料.

# 積分

時刻  $a$  から時刻  $t$  までに移動した距離は  $F(t) = \int_a^t f(x)dx$  で与えられた.

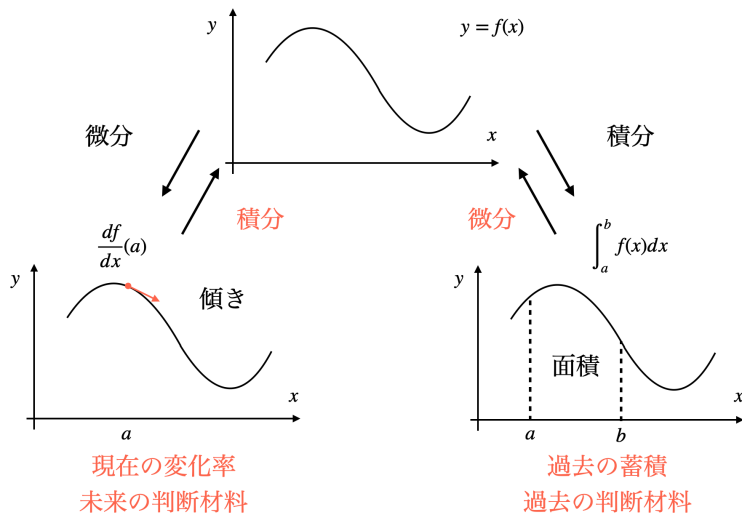


- 「速度」を積分すると「位置」(過去の蓄積).
- 「位置」を微分すると「速度」(現在の変化).
- 一般に, 微分と積分は逆操作.



# 微分・積分

以上を簡単にまとめると



# 集合, 濃度

記号の準備も兼ねて, 集合論から始める.

## 定義 3.1

- 対象 (もの) の集まりを集合という. 対象となるものは, 数字, 記号, 文字列など色々考えられる.
- 集合の構成要素を元(要素) という.  $a$  が集合  $A$  の元であることを,  $a \in A$  と表す.  $a$  が  $A$  の元であるとき,  $a$  は  $A$  に含まれるということもある.  $a \in A$  の否定を  $a \notin A$  と書く.
- 集合  $A$  の元の数  $|A|$  で表し,  $A$  の濃度(位数) と呼ぶ. 集合  $A$  で
  - $|A| = \infty$  なるものは無限集合,
  - $|A| \neq \infty$  なるものは有限集合.

# 集合

## 例 3.2

- ①  $A = \{ \text{りんご, みかん, バナナ} \}$  とすれば,  $\text{みかん} \in A$ .
- ② 都道府県の集合

$$A = \{ \text{北海道, 青森県, 岩手県, 宮城県, ...} \}$$

は  $|A| = 47$ .

- ③
  - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ : 自然数,
  - $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ : 整数,
  - $\mathbb{Q}$ : 有理数 (分数全体),  $\mathbb{R}$ : 実数

これらは全て無限集合.

## 外延的記法

集合を定義するには、その集合に含まれる元を指定すれば良い。

外延的記法: その集合が持つ元を全て列挙する直接的な方法. 例えば

$$\{1, 2, 3, 4\}, \{ \text{子豚}, \text{狸}, \text{狐}, \text{猫} \}, \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}.$$

最後の集合は奇数全体の集合を意図したものだが、「 $\dots$ 」に何が並ぶのかが明確でないと誤解を招く恐れがある。

### 例 3.3

自然数の集合

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

整数の集合

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

# 内包的記法

内包的記法: 集合に含まれる元の条件を明示する方法. 「命題  $P$  が真となる  $x \in X$  全体の集合」を

$$\{x \in X \mid P\}$$

と書く. ここで  $X$  は変数  $x$  が動く範囲の集合である. 例えば

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid -1.4 \leq n \leq 3\}$$

は「整数  $n$  であって  $-1.4 \leq n \leq 3$  が成立するもの全体の集合」と読む. 外延的方法を用いれば, これは

$$\{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

とも表せる.

# 外延的方法 vs 内包的記法

## 例 3.4

実数  $a < b$  に対して,  $a, b$  を端点とする閉区間, 开区間が

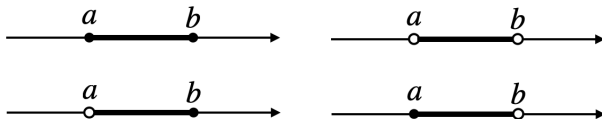
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

で定義される. 同様に半开区間

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

が定義される. これらは外延的方法では記述できない無限集合である.

2つの黒丸に挟まれた区間が閉空間, 2つの白丸に挟まれた区間が開空間:



# 直積集合

## 定義 3.5 (直積集合)

$A, B$  を集合とする.  $a \in A$  と  $b \in B$  を並べた  $(a, b)$  を順序対という. 順序対全体のなす集合を  $A$  と  $B$  の直積集合といい,  $A \times B$  と書く.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

$A = \{a, b\}, B = \{c, d\}$  とすれば

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \\ &= \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}. \end{aligned}$$

同様に 3 つの集合  $A, B, C$  の直積集合  $A \times B \times C$  や,  $n$  個の集合  $A_1, \dots, A_n$  の直積集合

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

が定義される.

## $n$ 次元座標空間 $\mathbb{R}^n$

### 例 3.6

- 実数全体の集合  $\mathbb{R}$  は実直線  $\mathbb{R}^1$  と同一視することができた.
- 実平面

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

- 3次元座標空間

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

- 一般に,  $\mathbb{R}^n$  は  $n$  次元座標空間, もしくは  $n$  次元ユークリッド空間と呼ばれる.

この講義では主に  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  を扱う.



# 包含関係

複数の集合があるとき、それらの間の関係を考えることは自然である。最も基本的なものが包含関係である。

## 定義 3.7 (部分集合)

$A, B$  を集合とする。

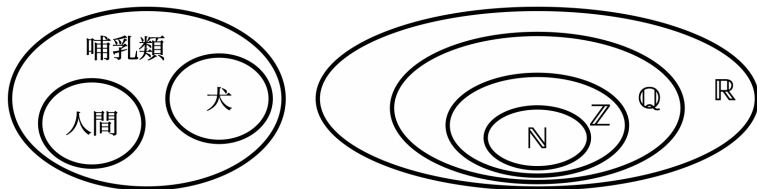
- ① 任意の  $A$  の元が  $B$  の元でもあるとき、 $A$  は  $B$  の部分集合であるといい、 $A \subset B$  と書く。  $A \subset B$  でないとき、 $A \not\subset B$  と書く。
- ②  $A \subset B$  かつ  $B \subset A$  のとき、 $A$  と  $B$  は(集合として) 等しいといい、 $A = B$  と書く。
- ③  $A \subset B$  かつ  $A \neq B$  のとき、 $A$  は  $B$  の真部分集合であるといい、 $A \subsetneq B$  とかく。

# 包含関係

人間の集合を  $\{\text{人間}\}$  と略記したりする. これは人間 1 人からなる集合ではない.

## 例 3.8

- ①  $\{\text{人間}\} \subset \{\text{哺乳類}\}$ ,  $\{\text{犬}\} \subset \{\text{哺乳類}\}$
- ②  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- ③ 実数  $a < b$  に対して,  $(a, b) \subsetneq [a, b]$  である. 一方で,  $(a, b)$  と  $[a, b]$  の間には包含関係はない.

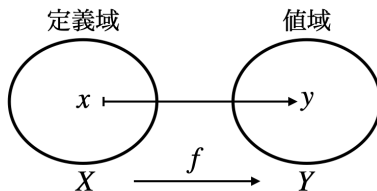


# 写像

## 定義 4.1

- 集合  $X$  の各元に対して, 集合  $Y$  の元を唯一つ定める対応のことを写像と呼び,  $f: X \rightarrow Y$  と表す.  $X$  を定義域,  $Y$  を値域という.
- 写像  $f: X \rightarrow Y$  によって  $x \in X$  が  $y \in Y$  に対応するとき,  $y$  を  $f$  による  $x$  の像といい,  $y = f(x)$  と書く. この対応を次のように書く.

$$f: X \longrightarrow Y, \quad x \mapsto y.$$



# 写像

## 例 4.2

①  $f: \{\text{人間}\} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad A \mapsto A \text{ の年齢}$

②  $g: \{\text{犬}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \mapsto A \text{ の身長}$

③  $h: \{\text{猫}\} \rightarrow \{\text{猫}\}, \quad A \mapsto A \text{ の母猫}$

④  $i: \{\text{日本の大学}\} \rightarrow \mathbb{N}, \quad A \text{ 大学} \mapsto A \text{ 大学の学生数}$

⑤  $j: \{\text{日本の大学}\} \rightarrow \{\text{都道府県}\}, \quad A \text{ 大学} \mapsto A \text{ 大学の所在地}$

一方で, 人間  $A$  と  $A$  の友人の対応は写像ではない.  $A$  の友人が 1 人とは限らないからである.

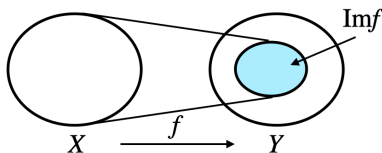
## 像

## 定義 4.3

写像  $f: X \rightarrow Y$  の像を

$$\text{Im}f = \{f(x) \mid x \in X\}$$

で定義する. つまり  $x$  が  $X$  の全ての元を動くとき,  $x$  の像  $f(x)$  全体のなす  $Y$  の部分集合のことである.



# 全射, 単射

## 定義 4.4

$f: X \rightarrow Y$  を写像とする.

- ①  $f$  が全射であるとは  $\text{Im} f = Y$  が成立すること. つまり「どの  $y \in Y$  に対しても  $x \in X$  が存在して  $y = f(x)$ 」.
- ②  $f$  が単射であるとは「 $x_1 \neq x_2$  ならば  $f(x_1) \neq f(x_2)$ 」が成立すること. 同値な対偶条件は「 $f(x_1) = f(x_2)$  ならば  $x_1 = x_2$ 」.
- ③  $f$  が全単射であるとは, 全射かつ単射であること.

# 全射, 単射

## 例 4.5

- ①  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2(x - 1)$  は (全射だが) 単射ではない.
- ②  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  は全射でも単射でもない.  $\text{Img} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ .
- ③  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$  は全単射である.

## 問題 4.6

次の写像は全射か? 単射か?

- ①  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2(x - 1)$ .
- ②  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$ .
- ③  $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^3$ .

# 全射, 単射, 恒等写像

## 例 4.7

次の写像を考える:

$$f : \{ \text{日本の大学} \} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad A \text{ 大学} \mapsto A \text{ 大学の学生数}$$

$$g : \{ \text{日本の大学} \} \longrightarrow \{ \text{都道府県} \}, \quad A \text{ 大学} \mapsto A \text{ 大学の所在地}$$

写像  $f$  は全射ではない (単射であろうか?). 写像  $g$  は全射だが, 単射ではない.

## 例 4.8

何もしない写像  $\text{id} : X \rightarrow X, x \mapsto x$  を恒等写像という. 恒等写像は全単射である.



# 全射, 単射, 恒等写像

## 問題 4.9

次の写像は全射か? 単射か?

- ① 慶應義塾大学の学生に対して, 学籍番号を対応させる写像

$$f : \{ \text{慶應義塾生} \} \longrightarrow \mathbb{Z}^8$$

- ② 値域を学籍番号となる番号に限ったらどうであろうか?

$$g : \{ \text{慶應義塾生} \} \longrightarrow \{ \text{学籍番号} \} \subset \mathbb{Z}^8$$

# 合成写像

## 定義 4.10

写像  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  に対して, 合成写像  $g \circ f: X \rightarrow Z$  が

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

で定義される. つまり  $x \in X$  に対して  $f(x) \in Y$  が定まり, さらに  $f(x) \in Y$  に対して  $g(f(x)) \in Z$  が定まる. 図示すれば次のようになる.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & g \circ f & & \end{array}$$

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  の合成写像の表記「 $g \circ f$ 」において  $f, g$  の順序に注意する. これは合成写像が  $g(f(x))$  で定義されていることから理解できる.

# 逆写像

## 定理 4.11

写像  $f: X \rightarrow Y$  が全単射であれば、写像  $g: Y \rightarrow X$  が存在して、

$$g \circ f = \text{id}, \quad f \circ g = \text{id}$$

が成立する. この  $g$  を  $f$  の逆写像といい,  $f^{-1}$  と書く.

実際, 任意の  $y \in Y$  に対して,  $x \in X$  で  $f(x) = y$  なるものが唯一つ存在するので,  $g(y) = x$  と定義すれば良い.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \xleftarrow{g} & \end{array}$$

# 逆写像

## 例 4.12

先ほど議論した、慶応義塾生に学籍番号を対応させる写像は全単射であった.

$$g : \{ \text{慶応義塾生} \} \longrightarrow \{ \text{学籍番号} \} \subset \mathbb{Z}^8$$

逆写像は、学籍番号から学生を特定することに対応する.

# 逆写像

## 例 4.13

写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 2x - 4$  は全単射である.  $f$  の逆写像は  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto \frac{1}{2}y + 2$  で与えられる. 実際,

$$\begin{aligned}x &\mapsto 2x - 4 \mapsto \frac{1}{2}(2x - 4) + 2 = x \\y &\mapsto \frac{1}{2}y + 2 \mapsto 2\left(\frac{1}{2}y + 2\right) - 4 = y.\end{aligned}$$

なので  $g(f(x)) = x$  かつ  $f(g(y)) = y$ .

$f(x) = 2x - 4$  の逆写像は, 方程式  $y = 2x - 4$  を  $x$  に関して解くことで求まる.

# まとめ

- ① 微分・積分の概要
- ② 集合 (濃度, 外延的記法, 内包的記法, 直積集合, 包含関係)
- ③ 写像 (全射, 単射, 恒等写像, 合成写像, 逆写像)