微分・積分 第6回

慶応義塾大学

総合政策学部・環境情報学部

今日の内容

1. 逆写像, 逆関数, 逆関数の微分
2. 逆三角関数, 逆三角関数の微分

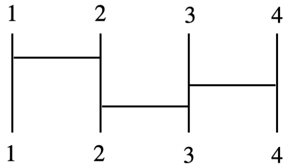
全射, 単射

写像 $f : X \to Y$ に対して, $\mathrm{Im} f = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$ であった.

定義 2.1

1. f が <u>全射</u> であるとは $\mathrm{Im} f = Y$ が成立すること．つまり「どの $y \in Y$ に対しても $x \in X$ が存在して $y = f(x)$」.
2. f が <u>単射</u> であるとは「$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$」が成立すること．同値な対偶条件は「$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$」.
3. f が <u>全単射</u> であるとは, 全射かつ単射であること.

例: あみだくじは全単射.



$1 \mapsto 3$

$2 \mapsto 1$

$3 \mapsto 4$

$4 \mapsto 2$

逆写像

定理 2.2

写像 $f : X \to Y$ が全単射であれば, 写像 $g : Y \to X$ が存在して,

$$g \circ f = \mathrm{id}, \quad f \circ g = \mathrm{id}$$

が成立する. この g を f の <u>逆写像</u> といい, f^{-1} と書く.

実際, 任意の $y \in Y$ に対して, $x \in X$ で $f(x) = y$ なるものが唯一つ存在するので, $g(y) = x$ と定義すれば良い.

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$$

特に $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ のときに, 逆写像を逆関数と呼ぶ.

逆関数

例 3.1

写像

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x - 4$$

は全単射である．逆写像は

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{1}{2}y + 2$$

で与えられる．実際,

$$g(f(x)) = \frac{1}{2}(2x - 4) + 2 = x, \quad f(g(y)) = 2(\frac{1}{2}y + 2) - 4 = y.$$

$f(x) = 2x - 4$ の逆写像は, 方程式 $y = 2x - 4$ を x に関して解くことで求まる．

逆関数

例 3.2

指数関数

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto e^x$$

と対数関数

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \log y$$

は互いに逆写像の関係にある．

$$g(f(x)) = \log(e^x) = x, \quad f(g(y)) = e^{\log y} = y.$$

指数関数を $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ と考えると，これは全射でないことに注意する．関数 $h(x)$ の値域を $\mathbb{R}_+$ に制限することで全単射な関数 $f(x)$ が得られる．

逆関数

例 3.3

関数

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto x^2,$$
$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad y \mapsto \sqrt{y}$$

は互いに逆写像の関係にある.

$$g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x, \quad f(g(y)) = \sqrt{y}^2 = y.$$

関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ は単射でないことに注意する. 関数 $h(x)$ の定義域を $\mathbb{R}_+$ に制限することで全単射な関数 $f(x)$ が得られる.

逆関数の微分

定理 4.1

微分可能な関数 $f(x)$ の逆関数 $g(y)$ が存在するとき, $g(y)$ も微分可能で

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

または

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

ただし $f'(x) \neq 0$ ($\frac{dy}{dx} \neq 0$) を仮定した.

$f'(g(y))$ は $f(x)$ に $x = g(y)$ を代入して y の関数にするという意味である.

定理 4.1 の証明 v1

$f(x)$ と $g(y)$ が互いに逆関数であるから

$$f(g(y)) = y.$$

合成関数の微分公式より

$$f'(g(y))g'(y) = 1.$$

つまり

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

この証明では $g(y)$ の微分可能性が暗に仮定されているので，厳密には不十分である．

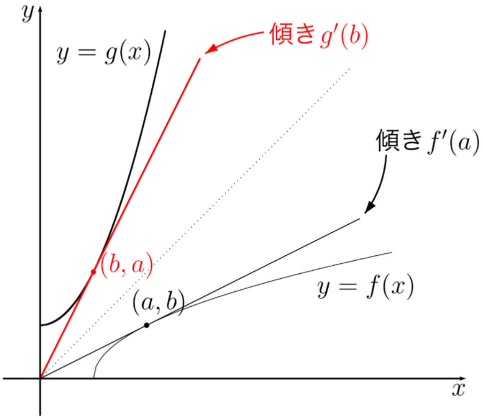
定理 4.1 の証明 v2

$f(x)$ は微分可能なので連続であり, 逆関数 $g(y)$ も連続になる (自明でないが正しい). $y = f(x)$ とおくと, $y' \to y$ のとき $x' = g(y') \to x$.

$$
\begin{aligned}
g'(y) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(y+h)-g(y)}{h} \\
&= \lim_{y'\to y} \frac{g(y')-g(y)}{y'-y} \qquad \text{(微分の同値な定義)} \\
&= \lim_{x'\to x} \frac{x'-x}{f(x')-f(x)} \\
&= \lim_{x'\to x} \frac{1}{\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}} = \frac{1}{f'(x)}
\end{aligned}
$$

逆関数の微分

関数 $f(x), g(x)$ が互いに逆関数であれば，それらのグラフは直線 $x = y$ に関して鏡映対称の関係にある．



逆関数の微分

関数

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\mapsto 2x-4,\quad g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ y\mapsto\frac{1}{2}y+2$$

は互いに逆写像の関係にあった.

実際に導関数を計算してみると

$$f'(x)=2,\quad g'(y)=\frac{1}{2}$$

であるから, 確かに

$$\frac{1}{g'(2x-4)}=2=f'(x),\quad \frac{1}{f'(\frac{1}{2}y+2)}=\frac{1}{2}=g'(y).$$

逆関数の微分

関数

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \mapsto e^x, \quad g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ y \mapsto \log y$$

は互いに逆写像の関係にあった.

実際に導関数を計算してみると

$$f'(x) = e^x, \quad g'(y) = \frac{1}{y}$$

であるから, 確かに

$$\frac{1}{g'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x, \quad \frac{1}{f'(\log y)} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y} = g'(y).$$

逆関数の微分

関数

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2, \quad g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ y \mapsto \sqrt{y}$$

は互いに逆写像の関係にあった.

実際に導関数を計算してみると

$$f'(x) = 2x, \quad g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

であるから, 確かに

$$\frac{1}{g'(x^2)} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x^2}}} = 2x = f'(x), \quad \frac{1}{f'(\sqrt{y})} = \frac{1}{2\sqrt{y}} = g'(y).$$

逆関数の微分

問題 4.2

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ の逆関数を求め, 逆関数の微分法 (定理 4.1) が成立していることを確かめよ.

逆関数の微分

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ の逆関数は $g(y) = y^3$ である．導関数はそれぞれ

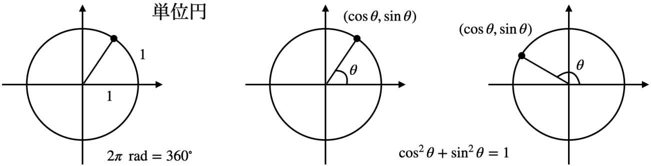
$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad g'(y) = 3y^2$$

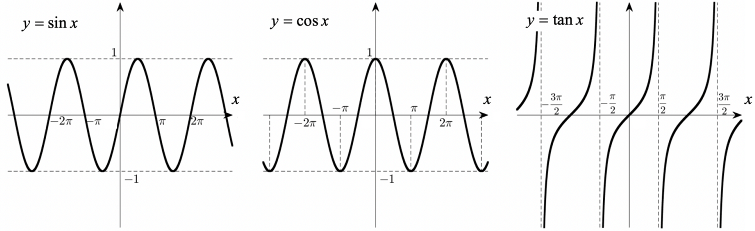
であるから, 確かに

$$\frac{1}{g'(\sqrt[3]{x})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2} = f'(x), \quad \frac{1}{f'(y^3)} = \frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(y^3)^2}}} = g'(y).$$

三角関数

三角関数 $\sin x, \cos x, \tan x$ を思い出す.





逆三角関数

- $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ は全単射．この逆関数を $\arcsin x$ と書く．

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2], \quad x \mapsto \arcsin x.$$

- $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ は全単射．この逆関数を $\arccos x$ と書く．

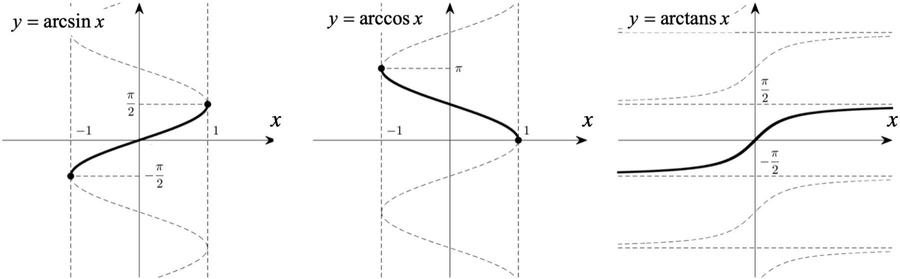
$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi], \quad x \mapsto \arccos x.$$

- $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ は全単射．この逆関数を $\arctan x$ と書く．

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2), \quad x \mapsto \arctan x.$$

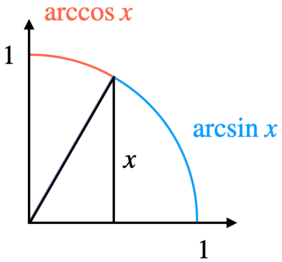
これらは逆三角関数と呼ばれ，それぞれ $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ と書くこともある．($\arcsin x = \sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$)

逆三角関数


$y = \arcsin x$
$\frac{\pi}{2}$
-1
1
x
$-\frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$
π
-1
1
x
$y = \arctan x$
$\frac{\pi}{2}$
x
$-\frac{\pi}{2}$

逆三角関数

実際, $0 \leq x \leq 1$ に関して, $\arcsin x$ と $\arccos x$ は半径 1 の円の弧 (arc) の一部の長さを表している.



これより, 例えば

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

が視覚的に理解できる. ($-1 \leq x \leq 1$ で成立.)

逆三角関数

問題 5.1

次の値を求めよ.

1. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$,
2. $\arcsin 1$,
3. $\arccos \frac{1}{2}$,
4. $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$

逆三角関数

定理 6.1

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f(x) = \arcsin x$ の逆関数は $g(y) = \sin y$ であるから

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ただし最後に

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

を用いた.

逆三角関数

定理 6.2

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f(x) = \arccos x$ の逆関数は $g(y) = \cos y$ であるから

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

逆三角関数

定理 6.3

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$f(x) = \arctan x$ の逆関数は $g(y) = \tan y$ であるから

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}.$$

ただし最後に

$$\cos^2 y \cdot (1 + \tan^2 y) = \cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

を用いた.

逆三角関数

問題 6.4

次の関数の導関数を求めよ.

1. $\arcsin 3x^2$,
2. $\arctan(x^3+1)$

まとめ

1. 逆写像, 逆関数, 逆関数の微分
2. 逆三角関数, 逆三角関数の微分