# アルゴリズムとデータ構造

## 第20週目

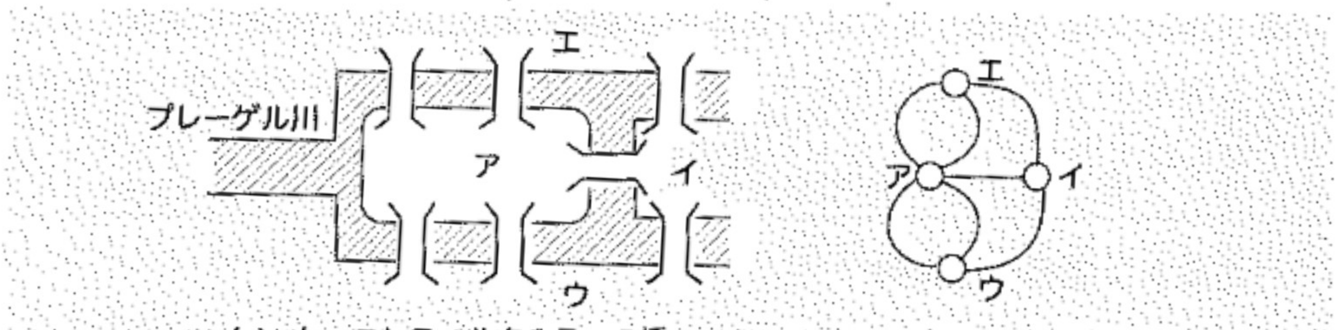
担当　情報システム部門　徳光政弘
2025年11月11日

# 今日の内容

- グラフの性質を使った諸問題への展開
- オイラーグラフ(復習)
- ハミルトングラフ(復習)
- 連結行列と可達(復習)

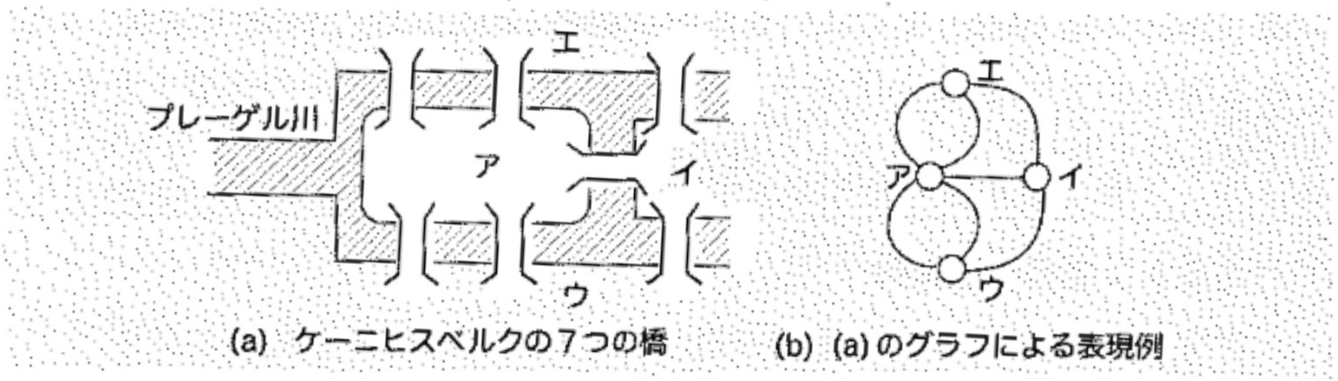
# オイラーグラフ

- 各辺をちょうど1回だけ通る回路
- 回路　同じ辺が含まれていない歩道で閉じた小道
- 小道　同じ辺が含まれていない歩道

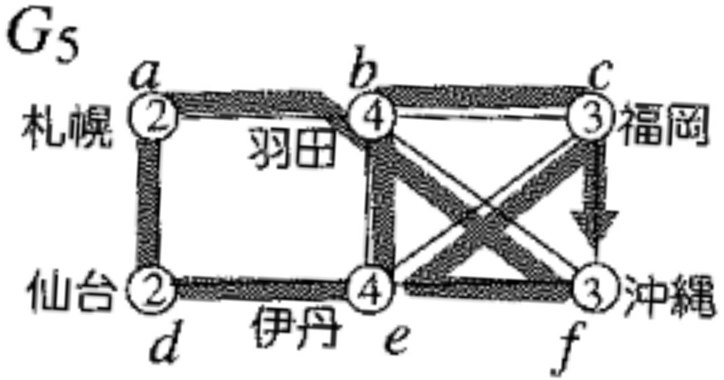


(a) ケーニヒスベルクの７つの橋　　(b) (a)のグラフによる表現例

# オイラーグラフ



(a) ケーニヒスベルクの７つの橋 (b) (a) のグラフによる表現例



# オイラーグラフ

**オイラー小道とオイラー回路の必要十分条件**

無向グラフ $G$ にオイラー小道が存在するための必要十分条件を次に示す．

$G$ が連結で，次数が奇数である頂点が 0 または 2 個である．

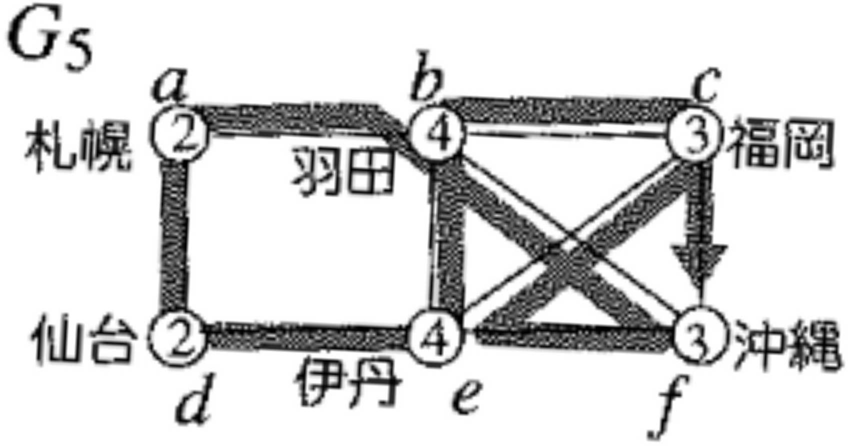
そして，無向グラフ $G$ がオイラーグラフである（オイラー回路が存在する）ための必要十分条件は次のとおり．

$G$ が連結で，すべての頂点の次数が偶数である．

オイラーグラフである場合，そのグラフを**一筆書き**することができる．

# ハミルトン閉路

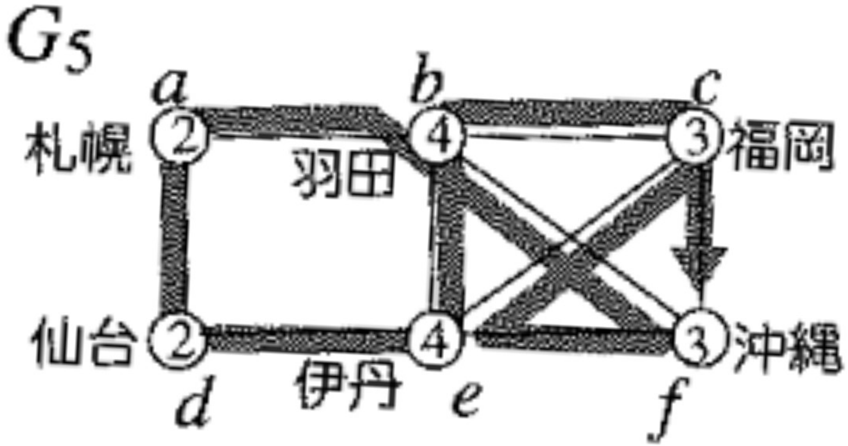
- 各頂点を1回だけ通る道(または閉路)
- 例すべての点を訪問する配達



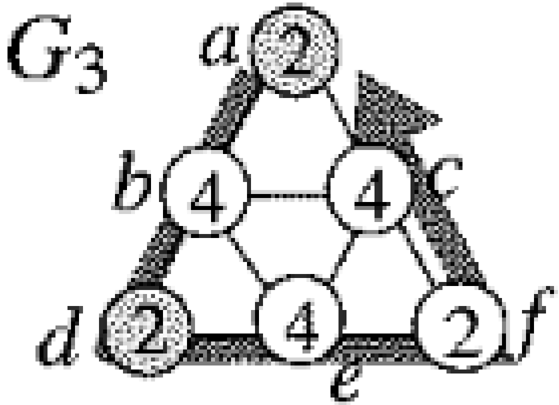
ハミルトン閉路を持つグラフの例

# ハミルトン閉路

- 各頂点を1回だけ通る道（または閉路）




ハミルトン閉路を持つグラフの例




ハミルトン閉路を持つグラフの例
（十分条件を満たさない）

# ハミルトン閉路の存在

**ハミルトン道の十分条件**

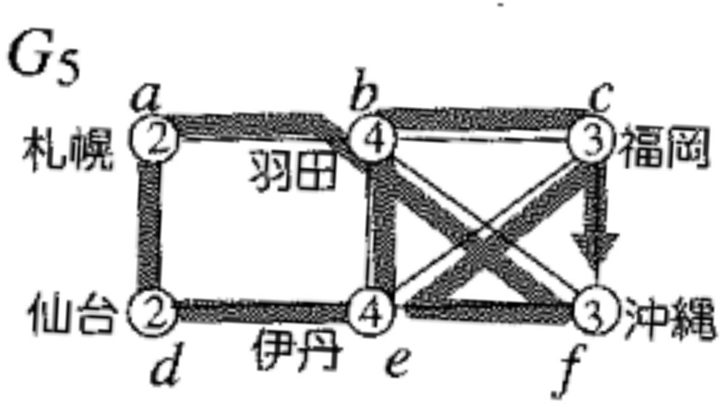
グラフ $G$ にハミルトン道が存在するための十分条件は次のとおり．

$G$ の位数（頂点の総数）が $n$ であるとき，$G$ の隣接していない任意の 2 頂点の次数の和が $n$ 以上であるならば，$G$ にハミルトン道が存在する．

教科書の誤植を修正

# 連結行列と可達

- 任意の2点間での道の存在の判定
- 連結行列を求めることで判定できる

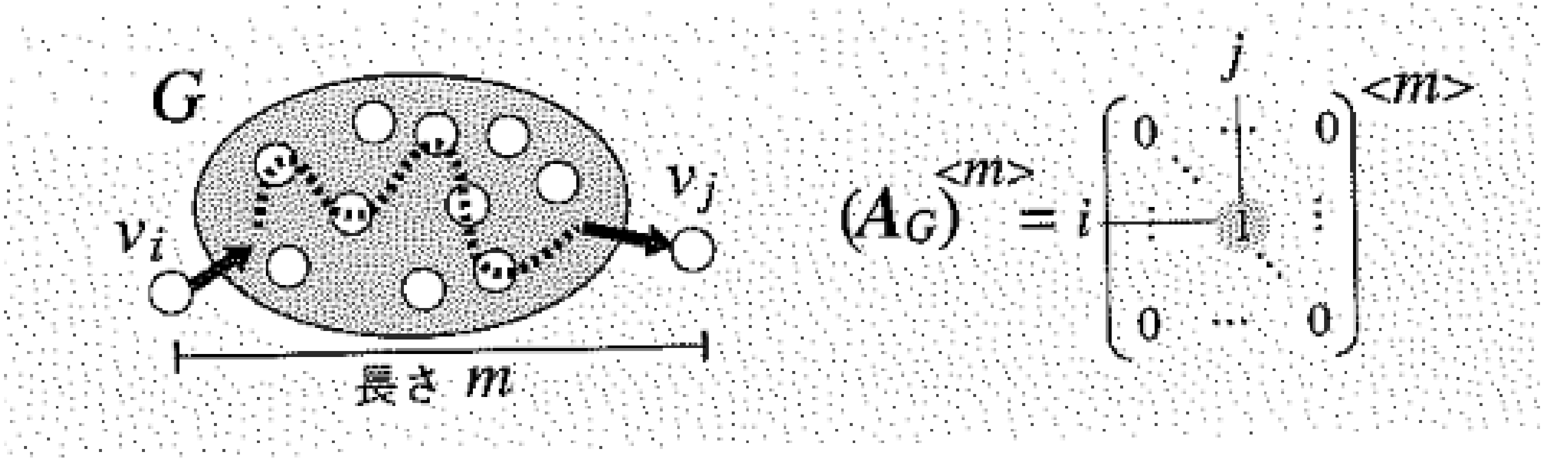



$$
A_{G_5} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 札 & 仙 & 羽 & 伊 & 福 & 沖 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 札 \\ 仙 \\ 羽 \\ 伊 \\ 福 \\ 沖 \end{array}
$$

# 連結行列と可達

**命題 7.5**　隣接行列と連結性

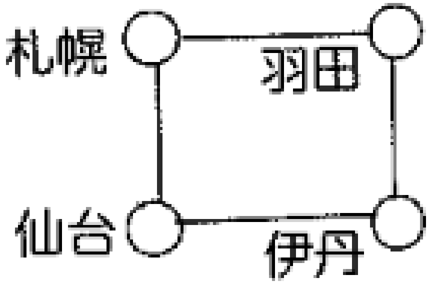
グラフ $G=(V,E)$ から生成された隣接行列 $\boldsymbol{A_G}$ から積 $\boldsymbol{A_G}^{\langle m\rangle}$ $(1\leqq m\leqq n-1, n=|V|)$ の要素 $a_{ij}$ が 1 であることと，頂点 $v_i\in V$ から頂点 $v_j\in V$ へちょうど長さ $m$ の歩道が存在することは，同値である．



# 連結行列と可達

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \text{札} & \text{仙} & \text{羽} & \text{伊} \end{array} \\
\boldsymbol{A}_5 = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$G_5'$




$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \text{札} & \text{仙} & \text{羽} & \text{伊} \end{array} \\
(\boldsymbol{A}_5)^{\langle 2 \rangle} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array},
\qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \text{札} & \text{仙} & \text{羽} & \text{伊} \end{array} \\
(\boldsymbol{A}_5)^{\langle 3 \rangle} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

# 連結行列と可達

2回のフライトでの連結性

$$A_5^{\langle 2 \rangle} = A_5 \otimes A_5$$

$$(A_5)^{\langle 2 \rangle} = \begin{array}{cccc} \text{札} & \text{仙} & \text{羽} & \text{伊} \\ \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

# 0-1行列（復習）

和と積の定義が異なることに注意
和　論理和
積　論理積

【例 A.4】0-1 行列の演算

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \oplus 0 & 0 \oplus 1 \\ 1 \oplus 1 & 0 \oplus 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \otimes 0 \oplus 0 \otimes 1 & 1 \otimes 1 \oplus 0 \otimes 0 \\ 1 \otimes 0 \oplus 0 \otimes 1 & 1 \otimes 1 \oplus 0 \otimes 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 連結行列と可達

**定義 7.6**　連結行列

頂点の総数が $n$ であるグラフ $G=(V,E)$ の隣接行列 $\boldsymbol{A}$ および $n\times n$ 型の単位行列 $\boldsymbol{I}$ から構成される次の $\boldsymbol{A}^{\langle * \rangle}$ を，$\boldsymbol{A}$ の**連結行列**という．

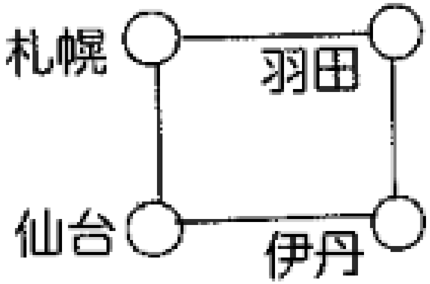
$$\boldsymbol{A}^{\langle * \rangle}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\langle 2 \rangle}+\boldsymbol{A}^{\langle 3 \rangle}+\cdots+\boldsymbol{A}^{\langle n-1 \rangle} \tag{7.1}$$

$$\boldsymbol{A_5}^{\langle * \rangle}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A_5}+\boldsymbol{A_5}^{\langle 2 \rangle}+\boldsymbol{A_5}^{\langle 3 \rangle}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

# 連結行列と可達

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \text{札} & \text{仙} & \text{羽} & \text{伊} \end{array} \\
A_5 = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$G_5'$




$$
A_5^{\langle * \rangle} = I + A_5 + A_5^{\langle 2 \rangle} + A_5^{\langle 3 \rangle} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$