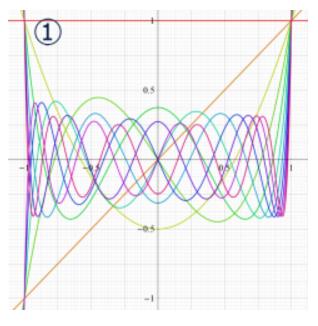
多項式と特殊関数まとめ

特殊関数はオワコンなのか

- 式がいかつすぎて覚えられない
- たまにしか見ないので覚えれない
- たまにしか見ないのでそれだけを勉強する機会がない
- 可視化されても何が何か分からん



本日の到達目標

- ルジャンドル多項式
- 球面調和関数
- ラゲール多項式
- 母関数のありがたみを知る
- (ルジャンドル多項式と球面調和関数の加法定理)

ルジャンドル多項式の諸性質

ルジャンドル多項式の母関数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n} P_n(x)t^n$$

ルジャンドル多項式の級数表示

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

ルジャンドル多項式の漸化式

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

Rodriguesの公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

Schlafliの公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(t-x)^{-n}}{\sqrt{1-2xt+t^2}} dt$$

ルジャンドル多項式の微分方程式

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

ルジャンドル陪多項式の微分方程式

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]y = 0$$

ルジャンドル陪多項式の級数表現

$$Q_n(x) = P_n(x) \ln|1 - x^2| + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)!}{k!(n+k)!} \frac{(x^2 - 1)^k}{2k + 1}$$

ルジャンドル多項式の母関数、級数表示

ルジャンドル多項式の母関数

$$rac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_n P_n(x)t^n$$

ルジャンドル多項式の級数表示

$$P_n(x) = rac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[rac{n}{2}
ight]} rac{(-1)^k (2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

母関数から級数展開

$$\begin{split} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= 1 + \frac{1}{2}(2xt-t^2) + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\frac{3}{2}(2xt-t^2)^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}(2xt-t^2)^3 \dots \\ &= \sum_{m} \frac{1}{m!}\frac{(2m)!}{2^m m!}\frac{1}{2^m}(2xt-t^2)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\frac{(2m)!}{2^m m!}\frac{1}{2^m}\sum_{l=0}^{m} \frac{(-1)^{m-l}m!}{(m-l)!l!}(2x)^l t^{2m-l} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{m} \frac{(2m)!}{(m!)^2}\frac{1}{2^{m-l}}\frac{(-1)^{m-l}}{l!(m-l)!}x^l t^{2m-l} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}t^n \\ &\qquad (n=2m-l,\ l=n-2k,\ n=k+m) \end{split}$$

これで展開完了。

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[rac{n}{2}
ight]} rac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

研究発表ゼミ

6/23

ルジャンドル多項式

Rodriguesの公式

$$P_n(x) = rac{1}{2^n n!} rac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

Schlafliの公式

$$P_n(x)=rac{1}{2\pi i}\ointrac{(t-x)^{-n}}{\sqrt{1-2xt+t^2}}dt$$

Rodriguesの公式とSchlafliの公式

Rodriguesの公式

$$\frac{1}{2^{n}n!}\frac{d^{n}}{dx^{n}}(x^{2}-1)^{n} = \frac{1}{2^{n}n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{k}\frac{d^{n}}{dx^{n}}x^{2n-2k}$$

$$= \frac{1}{2^{n}n!}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{k}\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{k}(2n-2k)!}{2^{n}k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} = P_{n}(x)$$

Schlafliの公式

$$P_n(x) = rac{1}{2^n n!} rac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = rac{1}{2^n} rac{1}{2\pi i} \oint rac{(t^2 - 1)^n}{(t - x)^{n+1}} dt$$

ルジャンドル多項式

ルジャンドル多項式の漸化式

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

ルジャンドル多項式の微分方程式

$$(1-x^2)rac{d^2y}{dx^2} - 2xrac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

ルジャンドル多項式の漸化式

母関数をtにより微分すると

$$egin{aligned} rac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{rac{3}{2}}} &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1} \ rac{x-t}{\sqrt{(1-2xt+t^2)}} &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) (1-2xt+t^2) t^{n-1} \ (
ot (运迅) &= x \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{n+1} \
ot (运迅) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_n(n+1) (x) t^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n+1} \end{aligned}$$

 t^n の係数を比較することにより漸化式が得られる。

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

ルジャンドル陪多項式

ルジャンドル陪多項式の微分方程式

$$(1-x^2)rac{d^2y}{dx^2} - 2xrac{dy}{dx} + \left\lceil n(n+1) - rac{m^2}{1-x^2}
ight
ceil y = 0$$

ルジャンドル陪多項式の級数表現

$$P_n^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{rac{m}{2}}rac{d^m}{dx^m}P_n(x)=rac{1}{2^nn!}(1-x^2)^{rac{m}{2}}rac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n$$

ルジャンドル陪多項式の直交関係

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = rac{2}{2n+1} rac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'}.$$

ルジャンドル多項式の直交関係

$$egin{split} \int_{-1}^{1} P_n(x) P_{n'}(x) dx &= rac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} \left[\left(rac{d}{dx}
ight)^m (x^2 - 1)^m
ight] \left[\left(rac{d}{dx}
ight)^n (x^2 - 1)^n
ight] dx \ &= rac{(-1)^n}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} \left[\left(rac{d}{dx}
ight)^{n+m} (x^2 - 1)^{n+m}
ight] (x^2 - 1)^n dx \ &= rac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!^2} \delta_{nn'} \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n dx = rac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!^2} \delta_{nn'} \int_{0}^{1} t^n (1 - t)^n dx \ &= rac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!^2} \delta_{nn'} rac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = rac{2}{2n+1} \delta_{nn'} \end{split}$$

研究発表ゼミ 12 / 23

ルジャンドル陪多項式の直交関係

$$\int_{-1}^{1} P_{n}^{m}(x) P_{n'}^{m}(x) dx = \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} (1 - x^{2})^{m} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^{m} P_{n}(x) \right] \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^{m} P_{n}'(x) \right] dx$$

$$= -\frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^{m-1} P_{n}(x) \right] \frac{d}{dx} \left[(1 - x^{2})^{m} \left(\frac{d}{dx} \right)^{m} P_{n}'(x) \right] dx$$

$$= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^{m-1} P_{n}(x) \right] (n(n+1) - m(m-1)) \left(\frac{d}{dx} \right)^{m-1} P_{n}(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^{m-1} P_{n}'(x) dx$$

$$= \dots = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'}$$

研究発表ゼミ 13 / 23

直交関係を使っていくう

ルジャンドル多項式

$$f(x)=\sum_n a_n P_n(x) \ a_n=rac{2n+1}{2}\int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx$$

球面調和関数

球面調和関数の微分方程式

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + l(l+1)\right]Y_{lm}(\theta,\phi) = 0$$

球面調和関数のルジャンドル陪多項式による表現

$$Y_{lm}(heta,\phi) = \sqrt{rac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos heta) e^{im\phi}$$

研究発表ゼミ 15 / 23

球面調和関数の問題設定

球面調和関数は何をしたらでてくるのか?一極座標のラプラス方程式

$$abla^2 f = rac{1}{r^2} rac{\partial}{\partial r} \left(r^2 rac{\partial f}{\partial r}
ight) + rac{1}{r^2 \sin heta} rac{\partial}{\partial heta} \left(\sin heta rac{\partial f}{\partial heta}
ight) + rac{1}{r^2 \sin^2 heta} rac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = 0$$

これを変数分離すると

$$f(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$
 $rac{1}{R}rac{d}{dr}\left(r^2rac{dR}{dr}
ight) = -rac{1}{Y(\theta, \phi)}\left[rac{1}{\sin heta}rac{d}{d heta}\left(\sin hetarac{d}{d heta}
ight) + rac{1}{\sin^2 heta}rac{d^2}{d\phi^2}
ight]Y(\theta, \phi) = \lambda$

第二式を分解して

$$rac{1}{\Theta}\sin hetarac{d}{d heta}\left(\sin hetarac{d\Theta}{d heta}
ight)+\lambda\sin^2 heta=-rac{1}{\Phi}rac{d^2\Phi}{d\phi^2}$$

球面調和関数の問題設定

$$egin{aligned} \left[\sin hetarac{d}{d heta}\left(\sin hetarac{d\Theta}{d heta}
ight) + \lambda\sin^2 heta
ight]\Theta &=
u\Theta \ rac{d^2\Phi}{d\phi^2} &= -
u\Phi \end{aligned}$$

第二式について解くことできる。

$$\Phi(\phi) = A e^{i\sqrt{
u}\phi} + B e^{-i\sqrt{
u}\phi}$$

 ϕ について周期性を持つので ν を m^2 である。規格化して

$$\Phi(\phi)=rac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$$

球面調和関数の問題設定

$$\left[\sin hetarac{d}{d heta}\left(\sin hetarac{d\Theta}{d heta}
ight)+\lambda\sin^2 heta
ight]\Theta=m^2\Theta$$

 Θ については $x = \sin \theta$ と変換すると

$$\left[(1-x^2) rac{d^2}{dx^2} - 2x rac{d}{dx} + \lambda
ight] \Theta = m^2 \Theta$$

となっており、解は収束性を持つことが要請されることから、 $\lambda = n(n+1)$ とすることでルジャンドル陪多項式の微分方程式となる。この解を規格化することにより

$$egin{align} \Theta(heta) &= \sqrt{rac{2l+1}{2}rac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos heta) \ Y_{lm}(heta,\phi) &= \sqrt{rac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}P_l^m(\cos heta)e^{im\phi} \ \end{aligned}$$

球面調和関数

球面調和関数の直交関係

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}^*(heta,\phi) Y_{l'm'}(heta,\phi) \sin heta d heta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

球面調和関数の直交関係使っていくう

$$f(heta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{lm} Y_{lm}^{(} heta,\phi) \ A_{lm} = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} f(heta,\phi) Y_{lm}(heta,\phi) \sin heta d heta d\phi$$

球面調和関数の対称性

$$Y_{lm}(\pi- heta,\pi+\phi)=(-1)^mY_{lm}(heta,\phi)$$

研究発表ゼミ 19 / 23

球面調和関数の加法定理

$$P_l(\cos\gamma) = rac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(heta',\phi') Y_{lm}(heta,\phi) \ \cos\gamma = \cos heta\cos heta' + \sin heta\sin heta'\cos(\phi-\phi')$$

研究発表ゼミ 20 / 23

3次元空間の任意の2点を極座標表示 (θ,ϕ) , (θ',ϕ') とする。このとき、2点間の角度を γ とすると、

$$m{x} = (\sin heta \cos \phi, \sin heta \sin \phi, \cos heta) \ m{x}' = (\sin heta' \cos \phi', \sin heta' \sin \phi', \cos heta') \ \cos \gamma = \cos \gamma = \cos heta \cos heta' + \sin heta \sin heta' \cos (\phi - \phi')$$

の関係式が成立。

ルジャンドル多項式を球面調和関数で展開すると

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{m=-l}^l b_m(heta',\phi') Y_{lm}(heta,\phi) \ b_m(heta',\phi') = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_l(\cos\gamma) Y_{lm}^*(heta,\phi) \sin heta d heta d\phi \ Y_{lm}^*(heta,\phi) = \sum_{m'=-l}^l B_{mm'} Y_{lm'}(\gamma,\delta) \ B_{mm'} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}^*(heta,\phi) Y_{lm'}(\gamma,\delta) \sin heta d heta d\phi d\phi$$

研究発表ゼミ

特に、m'=0のとき

$$B_{m0}=\sqrt{rac{2l+1}{4\pi}}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi Y_{lm}^*(heta,\phi)P_l(\cos\gamma)\sin heta d heta d\phi=\sqrt{rac{2l+1}{4\pi}}b_m(heta',\phi')$$

 $\gamma = 0$ のとき

$$Y_{lm}^*(heta,\phi) = \sum_{m'=-l}^{l} B_{mm'}(-1)^{m'} \sqrt{rac{2l+1}{4\pi}rac{(l-m')!}{(l+m')!}} \delta_{m'0} e^{im'\phi} = \sqrt{rac{2l+1}{4\pi}} B_{m0} \ B_{m0} = \sqrt{rac{2l+1}{4\pi}} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} P_{l}(\cos\gamma) Y_{lm}^*(heta,\phi) \sin heta d heta d\phi = \sqrt{rac{2l+1}{4\pi}} b_{m}$$

よって

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{m=-l}^l b_m(heta',\phi') Y_{lm}(heta,\phi) = rac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(heta,\phi) Y_{lm}^*(heta,\phi)$$