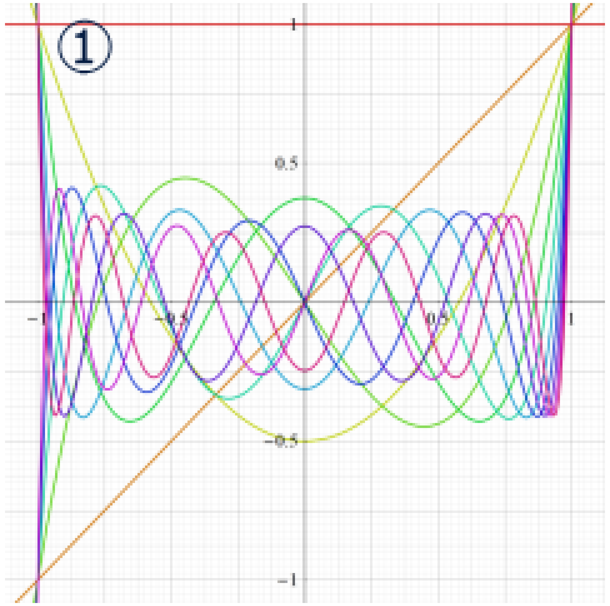
多項式と特殊関数まとめ

特殊関数はオワコンなのか

- 式がいかつすぎて覚えられない
- たまにしか見ないので覚えれない
- たまにしか見ないのでそれだけを勉強する機会がない
- 可視化されても何が何か分からん



本日の到達目標

- ルジャンドル多項式
- 球面調和関数
- ラゲール多項式
- 母関数のありがたみを知る
- (ルジャンドル多項式と球面調和関数の加法定理)

ルジャンドル多項式の諸性質

ルジャンドル多項式の母関数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_n P_n(x)t^n$$

ルジャンドル多項式の級数表示

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

ルジャンドル多項式の漸化式

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

Rodriguesの公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Schlafliの公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{(t-x)^{-n}}{\sqrt{1-2xt+t^2}}dt$$

ルジャンドル多項式の微分方程式

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

ルジャンドル陪多項式の微分方程式

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]y = 0$$

ルジャンドル陪多項式の級数表現

$$Q_n(x) = P_n(x)\ln|1-x^2| + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)!}{k!(n+k)!}\frac{(x^2-1)^k}{2k+1}$$

ルジャンドル多項式の母関数、級数表示

ルジャンドル多項式の母関数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_n P_n(x)t^n$$

ルジャンドル多項式の級数表示

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

母関数から級数展開

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = 1 + \frac{1}{2}(2xt - t^2) + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\frac{3}{2}(2xt-t^2)^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}(2xt-t^2)^3 \ldots$$
$$= \sum_m \frac{1}{m!}\frac{(2m)!}{2^m m!}\frac{1}{2^m}(2xt-t^2)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{(2m)!}{2^m m!}\frac{1}{2^m}\sum_{l=0}^{m}\frac{(-1)^{m-l}m!}{(m-l)!l!}(2x)^l t^{2m-l}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m}\frac{(2m)!}{(m!)^2}\frac{1}{2^{m-l}}\frac{(-1)^{m-l}}{l!(m-l)!}x^l t^{2m-l} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}t^n$$
$$(n = 2m - l,\ l = n - 2k,\ n = k + m)$$

これで展開完了。

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

ルジャンドル多項式

Rodriguesの公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Schlafliの公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(t-x)^{-n}}{\sqrt{1-2xt+t^2}}dt$$

Rodriguesの公式とSchlafliの公式

Rodriguesの公式

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^k\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2k}$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} = P_n(x)$$

Schlafliの公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}dt$$

ルジャンドル多項式

ルジャンドル多項式の漸化式

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

ルジャンドル多項式の微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

ルジャンドル多項式の漸化式

母関数をtにより微分すると

$$\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

$$\frac{x-t}{\sqrt{(1-2xt+t^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)(1-2xt+t^2)t^{n-1}$$

$$(\text{左辺}) = x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1}$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_(n+1)(x)t^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1}$$

t^nの係数を比較することにより漸化式が得られる。

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

ルジャンドル陪多項式

ルジャンドル陪多項式の微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

ルジャンドル陪多項式の級数表現

$$P_n^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n$$

ルジャンドル陪多項式の直交関係

$$\int_{-1}^{1}P_n^m(x)P_{n'}^m(x)dx=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nn'}$$

ルジャンドル多項式の直交関係

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_{n'}(x)dx = \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^2-1)^m\right]\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n\right]dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+m} (x^2-1)^{n+m}\right](x^2-1)^n dx$$

$$= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}n!^2}\delta_{nn'}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}n!^2}\delta_{nn'}\int_{0}^{1} t^n(1-t)^n dx$$

$$= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}n!^2}\delta_{nn'}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{2}{2n+1}\delta_{nn'}$$

ルジャンドル陪多項式の直交関係

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^m \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^m P_n(x) \right] \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^m P_n'(x) \right] dx \\
&= -\frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^{m-1} P_n(x) \right] \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^m \left(\frac{d}{dx} \right)^m P_n'(x) \right] dx \\
&= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^{m-1} P_n(x) \right] (n(n+1) - m(m-1)) \left(\frac{d}{dx} \right)^{m-1} P_n(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^{m-1} P_n'(x) dx \\
&= \cdots = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'}
\end{aligned}
$$

直交関係を使っていくぅ

ルジャンドル多項式

$$f(x) = \sum_n a_n P_n(x)$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$$

球面調和関数

球面調和関数の微分方程式

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+l(l+1)\right]Y_{lm}(\theta,\phi)=0$$

球面調和関数のルジャンドル陪多項式による表現

$$Y_{lm}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

球面調和関数の問題設定

球面調和関数は何をしたらでてくるのか？ー極座標のラプラス方程式

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} = 0$$

これを変数分離すると

$$f(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\phi^2}\right]Y(\theta,\phi) = \lambda$$

第二式を分解して

$$\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \lambda\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$$

球面調和関数の問題設定

$$\left[\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda\sin^2\theta\right]\Theta=\nu\Theta$$
$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-\nu\Phi$$

第二式について解くことできる。

$$\Phi(\phi)=Ae^{i\sqrt{\nu}\phi}+Be^{-i\sqrt{\nu}\phi}$$

ϕについて周期性を持つのでνをm^2である。規格化して

$$\Phi(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$$

球面調和関数の問題設定

$$\left[\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda\sin^2\theta\right]\Theta=m^2\Theta$$

Θについては$x=\sin\theta$と変換すると

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}-2x\frac{d}{dx}+\lambda\right]\Theta=m^2\Theta$$

となっており、解は収束性を持つことが要請されることから、$\lambda=n(n+1)$とすることでルジャンドル陪多項式の微分方程式となる。この解を規格化することにより

$$\Theta(\theta)=\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)$$

$$Y_{lm}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

球面調和関数

球面調和関数の直交関係

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{lm}^*(\theta,\phi)Y_{l'm'}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

球面調和関数の直交関係使っていくぅ

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{lm}Y_{lm}^{(}\theta,\phi)$$

$$A_{lm} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\phi)Y_{lm}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi$$

球面調和関数の対称性

$$Y_{lm}(\pi-\theta,\pi+\phi) = (-1)^m Y_{lm}(\theta,\phi)$$

球面調和関数の加法定理

球面調和関数の加法定理

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta', \phi')Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')$$

球面調和関数の加法定理

3次元空間の任意の2点を極座標表示(θ, ϕ),(θ', ϕ')とする。このとき、2点間の角度をγとすると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \\ \boldsymbol{x}' &= (\sin\theta'\cos\phi', \sin\theta'\sin\phi', \cos\theta') \\ \cos\gamma &= \cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi') \end{aligned}$$

の関係式が成立。

球面調和関数の加法定理

ルジャンドル多項式を球面調和関数で展開すると

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{m=-l}^{l} b_m(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$b_m(\theta', \phi') = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_l(\cos\gamma) Y_{lm}^*(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi$$

$$Y_{lm}^*(\theta, \phi) = \sum_{m'=-l}^{l} B_{mm'} Y_{lm'}(\gamma, \delta)$$

$$B_{mm'} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm'}(\gamma, \delta) \sin\theta d\theta d\phi$$

球面調和関数の加法定理

特に、$m' = 0$のとき

$$B_{m0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{lm}^*(\theta, \phi) P_l(\cos\gamma) \sin\theta d\theta d\phi = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} b_m(\theta', \phi')$$

$\gamma = 0$のとき

$$Y_{lm}^*(\theta, \phi) = \sum_{m'=-l}^{l} B_{mm'} (-1)^{m'} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m')!}{(l+m')!}} \delta_{m'0} e^{im'\phi} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} B_{m0}$$

$$B_{m0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_l(\cos\gamma) Y_{lm}^*(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} b_m$$

よって

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{m=-l}^{l} b_m(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi)$$