恒差数列

三星　連

2019 年 11 月 3 日

もくじ

算術三角形

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

算術三角形の各項は ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ で表せる。

算術三角形と 2 の冪数列 [1]

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
1+1 &= 2 \\
1+2+1 &= 4 \\
1+3+3+1 &= 8 \\
1+4+6+4+1 &= 16 \\
1+5+10+10+5+1 &= 32
\end{aligned}
$$

[1] 自作語です

算術三角形とフィボナッチ数列

1						
	1	1				
		1	2	1		
			1	3	3	1
				1	4	6
					1	5
						1
1	1	2	3	5	8	13

今日の目標

- フィボナッチ数列

  1　1　2　3　5　8　13

- 2 の冪数列

  1　2　4　8　16　32　64

今回の目標

- ２つの数列の関連を数式化する
- 一般の形に広げる

フィボナッチ数列

定義 1

フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ は以下の漸化式による数列である。

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

定理 2 (ビネーの公式)

フィボナッチ数列の一般項は以下であらわされる。

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を黄金数といい ϕ で表す。

2 の冪数列

定義 3

2 の冪数列 $\{$ 弐$_n\}$ は以下で定義される。

$$弐_n = 2^{n-1}$$

二項係数

定理 4

二項係数 ${}_nC_r$ は以下の等式を満たす。

$${}_{n+1}C_{r+1} = {}_nC_{r+1} + {}_nC_r$$

二項係数と数列

定理 5

フィボナッチ数列は二項係数を用いて以下のようにあらわせる。

$$F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} {}_{n-k-1}C_k$$

定理 6

2 の冪数列は二項係数を用いて以下のようにあらわせる。

$$弐_n = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k$$

二項係数と数列

$$
\begin{aligned}
{}_0C_0 &= 1\\
{}_1C_0 + {}_1C_1 &= 2\\
{}_2C_0 + {}_2C_1 + {}_2C_2 &= 4\\
{}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_3C_3 &= 8\\
{}_4C_0 + {}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_4C_3 + {}_4C_4 &= 16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
{}_0C_0 & & & & & \\
 & {}_1C_0 & {}_1C_1 & & & \\
 & & {}_2C_0 & {}_2C_1 & {}_2C_2 & \\
 & & & {}_3C_0 & {}_3C_1 & {}_3C_2 \\
 & & & & {}_4C_0 & {}_4C_1 \\
 & & & & & {}_5C_0 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8
\end{array}
$$

階差数列

二つの数列の階差数列を考えてみよう。

- フィボナッチ数列

$$\Delta F_n = F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$$

- 2 の冪数列

$$\Delta \text{弐}_n = \text{弐}_{n+1} - \text{弐}_n = \text{弐}_n$$

このように階差数列が自身となる数列を、恒に差となる数列ということで恒差数列と呼ぼう。

恒差数列の定義

定義 7

以下の等式を満たすような非負整数 k が存在するとき、数列 $\{a_{n,k}\}$ を恒差数列と呼ぶ。

$$\Delta a_{n,k} = a_{n-k,k}$$

脱線

定理 8

黄金数の冪数列は恒差数列となる。

$$\Delta\phi^n = \phi^{n+1} - \phi^n = \phi^{n-1}$$

黄金数 ϕ は $\phi^2 - \phi^1 - \phi^0 = 0$ を満たすから、移項して両辺に ϕ を何度かかければいい。

恒差数列の例

初項から $k+1$ 項までが 1 となるような恒差数列を見てみよう

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19
3	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10
4	1	1	1	1	1	2	3	4	5	7

今回は、このように初項から数項が 1 となるものを特に考えることとする。

算術三角形から恒差数列を作る

算術三角形から恒差数列を作りたい！

どうやって？

特殊から一般化

下の二つを見比べて一般化しよう。

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
1+1 &= 2 \\
1+2+1 &= 4 \\
1+3+3+1 &= 8 \\
1+4+6+4+1 &= 16 \\
1+5+10+10+5+1 &= 32
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
 & 1 & 1 & & & & \\
 & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & & 1 & 4 & 6 \\
 & & & & & 1 & 5 \\
 & & & & & & 1 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13
\end{array}
$$

漸化式の相似

そもそも、なぜ算術三角形の和がフィボナッチ数列などになるのかというと、二項係数の漸化式

$$ {}_{n+1}C_{r+1} = {}_nC_{r+1} + {}_nC_r $$

がフィボナッチ数列の漸化式

$$ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n $$

や 2 の冪数列の漸化式

$$ 弐_{n+1} = 弐_n + 弐_n $$

と類似しているから。

実際、以下のように、二項係数の漸化式と数列の漸化式がきれいに対応している。

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 & + & + & + & + & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
\| & \| & \| & \| & \| & \| \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\color{red}{1} & & \\
\color{green}{3} & \color{green}{3} & \color{red}{1} \\
\color{blue}{1} & \color{blue}{4} & \color{green}{6} \\
 & \color{magenta}{1} & \color{blue}{5} \\
 & & \color{magenta}{1}
\end{array}$$

ところで、恒差数列は隣り合う項の差を考えたいので、斜めになっている数字が隣り合うように並べ替えたらうまくいくのではないかと考える。
つまり、引き算する数字を隣り合わせるということ。

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252

算術三角形と数列

1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5
		1	3	6	10
			1	4	10
				1	5
					1
1	2	4	8	16	32

1	1	1	1	1	1	1	1
		1	2	3	4	5	6
				1	3	6	10
						1	4
1	1	2	3	5	8	13	21

算術三角形と数列

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & & & & & & 1 & 3 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 9
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
{}_0C_0 & {}_1C_1 & {}_2C_2 & {}_3C_3 & {}_4C_4 & {}_5C_5 \\
 & {}_1C_0 & {}_2C_1 & {}_3C_2 & {}_4C_3 & {}_5C_4 \\
 & & {}_2C_0 & {}_3C_1 & {}_4C_2 & {}_5C_3 \\
 & & & {}_3C_0 & {}_4C_1 & {}_5C_2 \\
 & & & & {}_4C_0 & {}_5C_1 \\
 & & & & & {}_5C_0 \\
\hline
1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32
\end{array}$$

${}_0C_0$	${}_1C_1$	${}_2C_2$	${}_3C_3$	${}_4C_4$	${}_5C_5$	${}_6C_6$	${}_7C_7$
		${}_1C_0$	${}_2C_1$	${}_3C_2$	${}_4C_3$	${}_5C_4$	${}_6C_5$
				${}_2C_0$	${}_3C_1$	${}_4C_2$	${}_5C_3$
						${}_3C_0$	${}_4C_1$
1	1	2	3	5	8	13	21

${}_0C_0$	${}_1C_1$	${}_2C_2$	${}_3C_3$	${}_4C_4$	${}_5C_5$	${}_6C_6$	${}_7C_7$
			${}_1C_0$	${}_2C_1$	${}_3C_2$	${}_4C_3$	${}_5C_4$
						${}_2C_0$	${}_3C_1$
1	1	1	2	3	4	6	9

二項係数と数列

定理 9

恒差数列は二項係数を用いて以下のようにあらわせる。

$$a_{n,k} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{k+1} \rfloor} {}_{n-ki-1}C_{n-(k+1)i-1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{k+1} \rfloor} {}_{n-ki-1}C_i$$

今後の課題

- 一般の恒差数列を考えたい
- 算術四面体で似たようなことができないか考えたい

ご清聴ありがとうございました。