Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра математических основ методов современной физики

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Семейства векторов с бинарными скалярными произведениями

Автор:
Студент 922 группы
Царёв Дмитрий Вячеславович

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук
Купавский Андрей Борисович

Москва, 2023

Аннотация

Семейства векторов с бинарными скалярными произведениями

Царёв Дмитрий Вячеславович

Вопросы, связанные с оценками числа вершин и граней двухуровневых политопов, мотивируют изучение семейств векторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ таких что $\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ скалярное произведение $\langle a, b \rangle \in \{0{,}1\}$. В данной работе приведены некоторые подходы к работе с такими семействами и получены некоторые улучшения оценки на произведение размеров таких семейств $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$.

Abstract

Questions on possible vertex and face numbers of two-level polytopes motivate the study of vector families $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ with a property that $\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ the dot product $\langle a, b \rangle \in \{0{,}1\}$. This work gives some approaches to dealing with such families and obtains some improvements on bounds for the product $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$.

Оглавление

Глава 1

Введение

Политоп называется двухуровневым, если для каждой гипеплоскости H, определяющей фасет, существует параллельная гиперплоскость H' такая, что все вершины лежат в объединении $H \cup H'$. Простейшим примером такиго политопа может служить симплекс, гиперкуб и кросс-политоп, но двухуровневыми также являются широкий круг семейств политопов, например политопы Биркгофа, Ханнера, политопы порядка и политопы цепей для частично упорядоченных множеств, политопы стабильных браков и политопы антиклик совершенных графов [1]. Вопросы связанные с комбинаторной структурой таких политопов изучались также в [2], а в [3] был описан алгоритм перечисления всех двухуровневых политопов и на основе перебора в малых размерностях сформулирована гипотеза о максимальном возможном произведении числа вершин и фасетов d-мерного двухуровнего политопа. Эта гипотеза была доказана в [4] с помощью более общей теоремы 1 об оценке произведения размеров двух семейств векторов с бинарными скалярными произведениями:

Теорема 1. *Пусть оба* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ *содержат базис* $\mathbb{R}^d$ *и* $\langle a, b \rangle \in \{0,1\}$ *для любых* $a \in \mathcal{A}$*,* $b \in \mathcal{B}$*. Тогда* $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d+1)2^d$*.*

В статье [5] теорема 1 обобщается для нескольких семейств $0-1$ векторов. Для этого используются корреляционные неравенства, и там же приводится изящное доказательство теоремы 1 для случая $0-1$ векторов, описанное ниже.

В первой части этой работы исследуется возможность применения подхода с корреляционными неравенствами к теореме 1, в частности задача о семействах векторов в $\mathbb{R}^d$ сводится к дискретной, что позволяет проверять результаты в малых размерностях компьютерным перебором. Во второй части доказывается стабильность теоремы 1, с основным результатом в виде леммы 3.

1.1 Обозначения

Множество целых чисел от 1 до n обозначается $[n]$. Скалярное произведение двух векторов $a = (a_1, \ldots, a_d)$ и $b = (b_1, \ldots, b_d)$ будем обозначать $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{d} a_i b_i$. Семейства в $\mathbb{R}^d$ будут иногда рассматриваться как наборы векторов а иногда как наборы точек в афинном пространстве, в частности для $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ будем обозначать афинную размерность семейства как $\dim \mathcal{A}$, а линейную оболочку векторов – как $\operatorname{span} \mathcal{A}$. Размер семейства – $|\mathcal{A}|$. В решётке $\wedge$ будет обозначать точную нижнюю грань двух элементов, а $\vee$ – точную верхнюю грань. Для подмножеств X и Y рещётки $X \vee Y$ обозначает множество $\{x \vee y \,:\, x \in X, y \in Y\}$, а $X \wedge Y = \{x \wedge y \,:\, x \in X, y \in Y\}$.

Глава 2

Дискретизация задачи, препятствия в применении корреляции

Для начала приведём формулировки корреляционного неравенства из [6] в общей форме и в интересном частном случае. Функция $\mu : L \to \mathbb{R}^{+}$, где L – конечная дистрибутивная решётка, называется лог-супермодулярной, если

$$\forall x,y \in L \; : \; \mu(x)\mu(y) \leq \mu(x \vee y)\mu(x \wedge y)$$

Функция $f : L \to \mathbb{R}^{+}$ возрастает если из $x \leq y$ следует $f(x) \leq f(y)$ и убывает если из $x \leq y$ следует $f(x) \geq f(y)$.

Теорема (FKG-неравенство). *Пусть L – конечная дистрибутивная решётка, $\mu : L \to \mathbb{R}^{+}$ – лог-супермодулярная функция. Тогда для любых возрастающих функций $f, g : L \to \mathbb{R}^{+}$ выполняется*

$$\left(\sum_{x\in L} \mu(x)f(x)\right) \cdot \left(\sum_{x\in L} \mu(x)g(x)\right) \leq \left(\sum_{x\in L} \mu(x)f(x)g(x)\right) \cdot \left(\sum_{x\in L} \mu(x)\right)$$

Выбирая в качестве L решётку подмножеств конечного множества, в качестве μ тождественную единицу, а в качестве f и g характеристические функции двух замкнутых вниз семейств подмножеств, получаем

Следствие. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – замкнутые вниз семейства подмножеств d-элементного множества. Тогда*

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \cdot 2^{d} \tag{2.1}$$

Теперь мы можем привести изящное доказательство теоремы 1 для семейств из $0-1$ векторов:

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \{0,1\}^{d}$ и $\langle a, b\rangle \in \{0,1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d+1)2^{d}$.*

Доказательство. Проинтерпретируем вектора в $\{0,1\}^{d}$ как индикаторы подмножеств d-элементного множества. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ тогда становятся семействами подмножеств, а условие на них заключается в том, что любые два множества из разных семейств либо не пересекаются, либо пересекаются по одному элементу. Поэтому если множество лежит и в $\mathcal{A}$, и в $\mathcal{B}$, то оно либо пустое, либо одноэлементное, и в частности $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \leq d+1$. Заметим, что семейства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ можно считать замкнутыми вниз, так как замыкание их вниз не нарушает накладываемого условия, и лишь увеличивает произведение размеров. Наконец, 2.1 даёт нам

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \cdot 2^{d} \leq (d+1)\, 2^{d}$$

$\square$

Это красивое рассуждение было бы приятно обобщить на семейства векторов в $\mathbb{R}^d$ – например, это могло бы помочь в обобщении теоремы 1 на несколько семейств, аналогично результатам в [5]. Следуя этому желанию, мы сведём задачу в $\mathbb{R}^d$ к дискретной, заведём соответствующее отношение порядка на векторах семейств, и после перебора в малых размерностях пронаблюдаем препятствия к прямому обобщению доказательства теоремы 2.

Итак, пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – семейства векторов, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Записывая вектор-столбцы в стандартном базисе, будем считать $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ матрицами размеров $d \times |\mathcal{A}|$ и $d \times |\mathcal{B}|$ соответственно. Выберем базис столбцов в $\mathcal{A}$ и обозначим его A, двойственный к нему базис $\mathbb{R}^d$ задаётся столбцами матрицы A^{-T}, и из условия на скалярное произведение векторов разных семейств следует, что $\mathcal{B} = A^{-T}\mathcal{B}_{01}$, где $\mathcal{B}_{01} \in \mathrm{Mat}_{d\times|\mathcal{B}|}$ состоит из нулей и единиц (это семейство $\mathcal{B}$, записанное в базисе, двойственном к $\mathcal{A}$). Пусть теперь B – базис в $\mathcal{B}$, мы имеем $\mathcal{B} = A^{-T}\mathcal{B}_{01}$, где $\mathcal{B}_{01} \in \mathrm{Mat}_{d\times d}$ – невырожденная матрица, состоящая из нулей и единиц. Базис $\mathcal{R}^d$, двойственный к B это $B^{-T} = AB_{01}^{-T}$, и в нём $\mathcal{A}$ записывается матрицей из нулей и единиц: $\mathcal{A} = B^{-T}\mathcal{A}_{01} = AB_{01}^{-T}\mathcal{A}_{01}$. Теперь, когда каждому вектору $a \in \mathcal{A}$ соответствует $a_{01} \in \{0{,}1\}^d$, и $b \in \mathcal{B}$ соответствует $b_{01} \in \{0{,}1\}^d$, имеем

$$\langle a, b\rangle = \langle AB_{01}^{-T}a_{01}, A^{-T}b_{01}\rangle = \langle B_{01}^{-T}a_{01}, b_{01}\rangle = \langle a_{01}, B_{01}^{-1}b_{01}\rangle$$

Замечательным образом скалярное произведение не зависит напрямую от A, так что максимизация $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$ с соблюдением условия о бинарных скалярных произведений эквивалентно максимизации $|\mathcal{A}_{01}| \cdot |\mathcal{B}_{01}|$, где $\mathcal{A}_{01}$ и $\mathcal{B}_{01}$ – подмножества булевого куба $\{0{,}1\}^d$ с условием

$$\forall\, a_{01} \in \mathcal{A}_{01}, b_{01} \in \mathcal{B}_{01} \;:\; \langle a_{01}, B_{01}^{-1}b_{01}\rangle \in \{0{,}1\} \tag{2.2}$$

где B_{01} – невырожденная матрица из нулей и единиц. Заметим, что можно полагать $B_{01} \subseteq \mathcal{B}_{01}$ и $B_{01}^T \subseteq \mathcal{A}_{01}$, так как условие 2.2 автоматически выполняется для столбцов этих матриц.

Для наглядного изображения возможных выборов $\mathcal{A}_{01}$ и $\mathcal{B}_{01}$ заведём матрицу C размера $d\times 2^d$, столбцы которой – все вектора $\{0{,}1\}^d$, и будем рассматривать матрицу $G = G(B_{01}) = C^T B_{01}^{-1} C$ размера $2^d \times 2^d$. Выбор $\mathcal{A}_{01}$ и $\mathcal{B}_{01}$ соответствует выбору подмножества строк и столбцов G так, что индуцированная ими подматрица в G состоит из нулей и единиц. Несколько примеров матриц G для трёхмерных семейств приведено на рисунке 2.1.

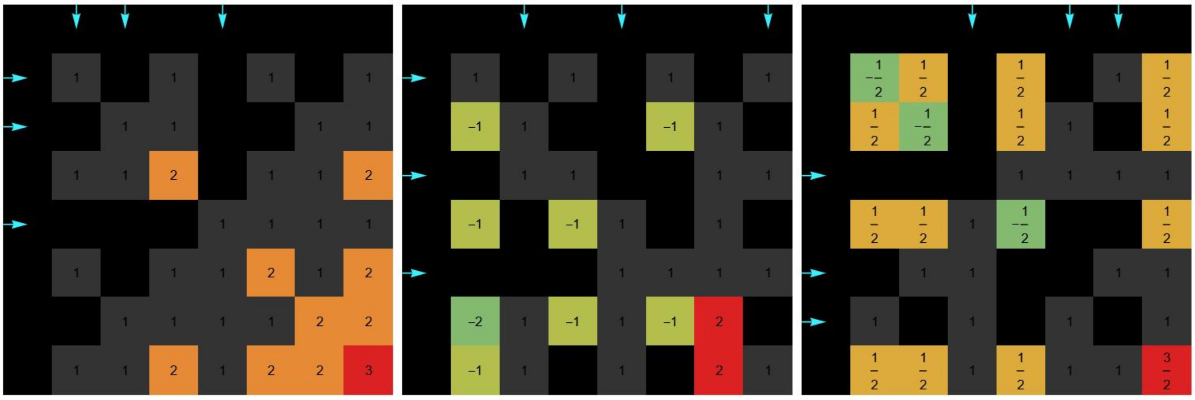
Для применения корреляционного неравенства аналогично теореме 2 необходимо на векторах булевого куба завести отношение частичного порядка такое что меньший вектор всегда можно добавить в семейство, если там уже есть больший. Это делает естественным следующие определения: индексируя столбцы и строки G элементами $\{0{,}1\}^d$, введём для $x \in \{0{,}1\}^d$

$$R_x = \left\{y \in \{0{,}1\}^d : G_{y,x} \in \{0{,}1\}\right\} \text{ и } C_x = \left\{y \in \{0{,}1\}^d : G_{x,y} \in \{0{,}1\}\right\}$$

Введём отношения эквивалентности на $\{0{,}1\}^d$ и частичные порядки на множестве классов эквивалентности как

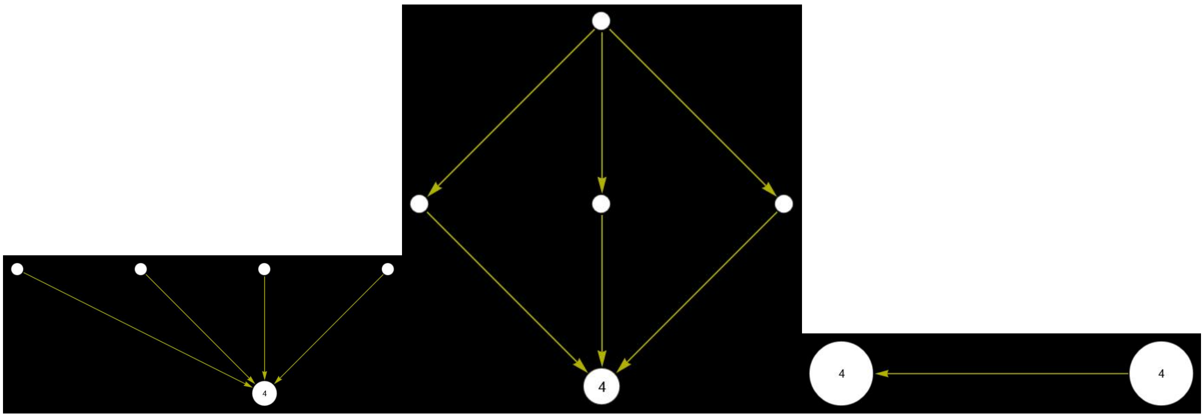
$$x \sim_R y \iff R_x = R_y, \quad [x] \le_R [y] \iff R_x \supseteq R_y$$
$$x \sim_C y \iff C_x = C_y, \quad [x] \le_C [y] \iff C_x \supseteq C_y$$

Для получения одного частично упорядоченного множества, из которого выбираются и $\mathcal{A}_{01}$, и $\mathcal{B}_{01}$, нам необходимо сопоставить столбцы и строки G биекцией



(a) $B_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $B_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Рис. 2.1: Матрицы $G(B_{01})$ для различных матриц B_{01}. Стрелками указаны столбцы, соответствующие B_{01} и строки, соответствующие B_{01}^T
.



(a) $B_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $B_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Рис. 2.2: Три разных частично упорядоченных множества, получающихся из симметричных B_{01}.

$\varphi : \{0,1\}^d \to \{0,1\}^d$, после чего ввести отношение эквивалентности и частичный порядок

$$x \sim y \iff (x \sim_R y \text{ и } \varphi(x) \sim_C \varphi(y)), \quad [x] \le [y] \iff \left(R_x \supseteq R_y \text{ и } C_{\varphi(x)} \supseteq C_{\varphi(y)}\right)$$

Для того чтобы избавиться от свободы выбора φ ограничимся сейчас случаями когда B_{01} симметрична, тогда $G(B_{01})$ тоже симметрична, $\sim_R = \sim_C$, $\le_R = \le_C$ и естественное $\varphi = \mathrm{id}$ даёт те же классы эквивалентности и частичный порядок. Диаграмму Хассе такого чума будем рисовать с весами в узлах, обозначающих размер соответствующего класса эквивалентности (в случае успешного применения корреляционного неравенства этот вес будет играть роль μ).

На рисунке 2.2 изображены все три не изоморфных чума для трёхмерного пространства и симметричных матриц B_{01}. Сразу видно, что 2.2b не является решёткой, так как не содержит максимального элемента. 2.2a не является дистрибутивной решёткой, но получено из неё факторизацией. К сожалению, пример на рисунке 2.3

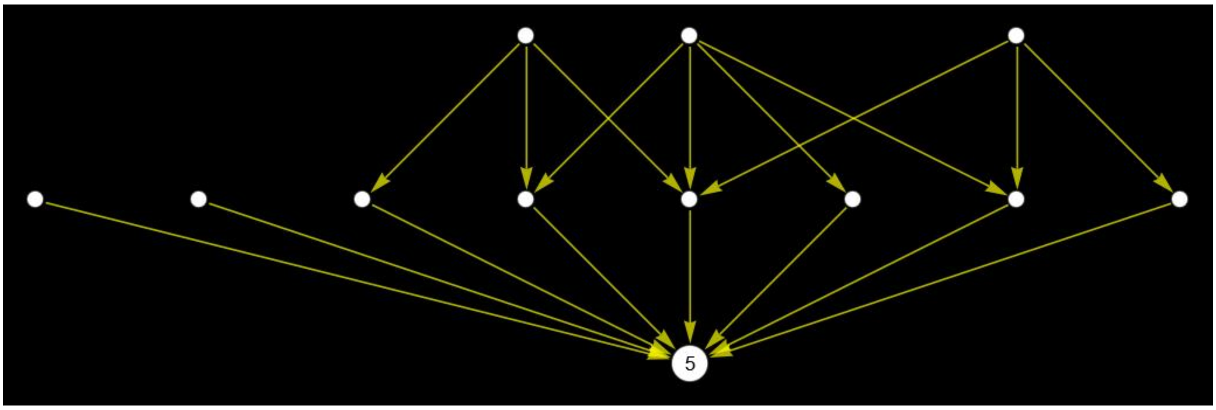


Рис. 2.3: Частично упорядоченное множество, соответствующее

$$B_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

не является даже полурешёткой (для которых, несмотря на отсутствие точной верхней грани, определено понятие дистрибутивности, необхолимое в корреляционном неравенстве).

Глава 3

Улучшения оценки для больших семейств

Вспомним теорему 1 а также приведём обозначения и промежуточные результаты, доказанные в [4].

Теорема 1. *Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис $\mathbb{R}^d$ и $\langle a, b\rangle \in \{0,1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d+1)2^d$.*

Обозначим $b_d \in \mathcal{B}$ вектор, с максимальным значением $\max(\dim \mathcal{A}_0, \dim \mathcal{A}_1)$, где $\mathcal{A}_i = \{a \in \mathcal{A} : \langle a, b_d\rangle = i\}$ для $i = 0, 1$. Ортогональную проекцию на $U = b_d^\perp$ обозначим $\pi : \mathbb{R}^d \to U$.

Утверждение 1. *Параллельным перенесом $\mathcal{A}$ и заменой некоторых векторов $\mathcal{B}$ на противоположные можно добиться того что*

1. *$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \sqcup \mathcal{A}_1$ и $|\mathcal{A}_0| \geq |\mathcal{A}_1|$*
2. *Всё ещё $\langle a, b\rangle \in \{0,1\}$ для любого $a \in \mathcal{A}_0$ и $b \in \mathcal{B}$*
3. *Множество $\pi(\mathcal{B})$ не содержит противоположных точек.*

Утверждение 2. *Каждая точка $\pi(\mathcal{B})$ имеет не более двух прообразов в $\mathcal{B}$.*

Неравенство 1. $|\mathcal{A}|\,|\mathcal{B}| \leq 2\,|\mathcal{A}_0|\,|\pi(\mathcal{B})| + |\mathcal{A}_1|\,|\mathcal{B}\backslash\mathcal{B}_*|$

Линейную оболочку $\mathcal{A}_0$ обозначим U_0 и введём ортогональную проекцию $\tau : U \to U_0$. Через $\mathcal{B}_* \subseteq \mathcal{B}$ обозначим множество $b \in \mathcal{B}$ для которых $\pi(b)$ имеет ровно один прообраз при проекции на U.

Утверждение 3. $|\pi(\mathcal{B})| \leq 2^{d-1-\dim U_0}\,|\tau(\pi(\mathcal{B}))|$.

Утверждение 4. $\mathcal{B}\backslash\mathcal{B}_* = \mathcal{B}_0 \sqcup \mathcal{B}_1$ *с выполнением для* $i = 0, 1$

$$\forall b \in \mathcal{B}_i : |\{\langle a, b\rangle : a \in \mathcal{A}_i\}| = 1$$

Утверждение 5. *Для $i = 0, 1$ выполняется $|\mathcal{A}_i|\,|\mathcal{B}_i| \leq 2^d$.*

Неравенство 2. $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (\dim U_0 + 1)\,2^d + |\mathcal{A}_0|\,|\mathcal{B}_0| + |\mathcal{A}_1|\,|\mathcal{B}_1|$

Поймём, на каких семействах в теореме 1 достигается равенство. Без ограниения общности будем полагать $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{B}|$.

Лемма 1. $|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}| = (d+1)2^d$ *только если* $|\mathcal{B}| = d+1$*, а* $\mathcal{A}$ *афинно изоморфно* $\{0{,}1\}^d$.

Доказательство. Будем вести индукцию по d, в размерности 1 утверждение очевидно. Предпологая выполнение леммы в размерностях меньших d, докажем её в размерности d. Разобьём случаи по значению $\dim U_0$:

1. $\dim U_0 < d-2$. Тогда из неравенства 2 и утверждения 5

$$|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}| \le (\dim U_0 + 3)\, 2^d \le d2^d \tag{3.1}$$

2. $\dim U_0 = d-2$. Заметим, что мы можем свободно полагать $0, b_d \in \mathcal{B}_0$ или $0, b_d \in \mathcal{B}_1$, поэтому из доказательства утверждения 5 следует

$$|\mathcal{A}_1|\,|\mathcal{B}_1| \le 2^d,\ |\mathcal{A}_0|\,(|\mathcal{B}_0|+2) \le 2^d$$

   Поэтому по неравенству 2 и утверждению 5

$$|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}| \le (d-1)\,2^d + 2\cdot 2^d - 2\,|\mathcal{A}_0| \le (d+1)\,2^d - |\mathcal{A}| < (d+1)\,2^d$$

3. $\dim U_0 = d-1$. Тогда, полагая $0, b_d \in \mathcal{B}_1$, имеем $\mathcal{B}_0 = \varnothing$. Рассмотрим два случая:

   а) $\mathcal{B}_* \ne \varnothing$. Тогда для вырождения неравенства 1 в равенство необходимо $|\mathcal{A}_0| = |\mathcal{A}_1|$, а для вырождения неравенства 2 – $|\mathcal{A}_0|\,|\pi(\mathcal{B})| = d2^{d-1}$. По предположению индукции последнее возможно в одном из двух случаев:

      i) $\mathcal{A}_0$ афинно изоморфно $\{0{,}1\}^{d-1}$. Тогда $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| = 2^d$, что возможно только если $\mathcal{A}$ афинно изоморфно $\{0{,}1\}^d$, $\mathcal{B}$ может состоять только из базиса и нуля.

      ii) $|\mathcal{A}_0| = d$. Тогда $|\mathcal{B}| \le |\mathcal{A}| = 2d$ и $|\mathcal{B}|\cdot|\mathcal{A}| \le 4d^2$, что меньше $(d+1)\,2^d$ для $d \ge 4$. При $d = 3$ неравенство $|\mathcal{B}|\cdot|\mathcal{A}| \le 32$ не может вырождаться, так как $|\mathcal{A}| = 6$. Наконец, в случае $d = 2$ мы имеем $|\mathcal{A}_1| = 2^d$ как в i).

   б) $\mathcal{B}_* = \varnothing$. Тогда $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ и, следовательно, $\dim(\operatorname{span}(\mathcal{B}_1)) = d$. В таком случае

$$(\forall b \in \mathcal{B}_1\ \exists \xi : \forall a \in \mathcal{A}_1\ \langle a,b\rangle = \xi) \Rightarrow \dim(\mathcal{A}_1) \le d - \dim(\operatorname{span}(\mathcal{B}_1)) = 0 \Rightarrow |\mathcal{A}_1| = 1$$

   Как и в б), для вырождения неравенства по предположнию индукции необходимо одно из двух:

      i) $|\mathcal{A}_0| = d$. Тогда $|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}| \le (d+1)^2 < (d+1)\,2^d$.

      ii) $|\mathcal{A}_0| = 2^{d-1}$, $|\pi(\mathcal{B})| = d$. Тогда $|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}| = 2d\left(2^{d-1}+1\right)$, что меньше $(d+1)2^d$ для $d > 2$. При $d = 2$ же $|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}| \le |\mathcal{A}|^2 = 9 < 3\cdot 2^2$.

□

Улучшим оценку для семейств, отличающихся от эктремального примера. Докажем для этого вспомогательное

Неравенство 3. *Для целого* $2 \le f \le d$ *выполняется* $(d+f)(2^{d-1}+2^{d-f}) \le d2^d + 2d$.

Доказательство. Доказываем индукцией по d: при $d = k$ выполнено равенство, проведём шаг от d к $d+1$. Обозначая левую и правую стороны неравенства $l(d,f)$ и $r(d,f)$ соответственно, имеем

$$\begin{aligned} r(d+1,f) - l(d+1,f) &\ge (r(d+1,f) - r(d,f)) - (l(d+1,f) - l(d,f)) \\ &= \left(d2^d + 2^{d+1} + 2\right) - (d+f+2)\left(2^{d-1} + 2^{d-f}\right) \\ &= 2^{d-f}\,(d-f+2)\left(2^{f-1} - 1 - \frac{2f}{d-f+2}\right) + 2 \\ &\ge 2^{d-f}\,(d-f+2)\left(2^{f-1} - 1 - f\right) \end{aligned}$$

Полученное выражение неотрицательно при $f > 2$. Для $f = 2$, $d \geq 4$ выполняется $2^{f-1} - 1 - \frac{2f}{d-f+2} \geq 0$, и для $f = 2$, $d = 2{,}3$ изначальное неравенство проверяется явно. $\square$

Лемма 2. *Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис $\mathbb{R}^d$ и $\langle a, b\rangle \in \{0{,}1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Если при этом семейства максимальны по включению и размер каждого хотя бы $d+2$, то $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d + \lambda(d))\, 2^d$, где $0 < \lambda(d) \leq 1$ – некая (нестрого) убывающая функция.*

Доказательство. $\lambda(d)$ будем обозначать λ_d. Как и в доказательстве леммы 1, будем вести индукцию по d. Для базы можно выбрать $\lambda = 1$, предполагая верность для меньших размерностей, докажем утверждение для d. Рассматриваем возможные значения $\dim U_0$:

1. $\dim U_0 < d - 2$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (\dim U_0 + 3)\, 2^d \leq d2^d$

2. $\dim U_0 = d - 2$. Применяя предположение индукции и лемму 1 для семейств $\tau(\pi(\mathcal{B}))$ и $\mathcal{A}_0$, имеем три варианта:

    а) $\mathcal{A}_0$ афинно изоморфно $\{0{,}1\}^{d-2}$, $\tau(\pi(\mathcal{B}))$ состоит из нуля и базиса U_0. Из утверждения 5 и предположения $0, b_d \in \mathcal{B}_1$ следует $|\mathcal{B}_0| \leq 2$. С учётом чётности $|\mathcal{B}_0|$ имеется два варианта:

    i) $|\mathcal{B}_0| = 0$. Тогда из неравенства 1 и утверждения 5 получаем

    $$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 4\,(d-1)\, 2^{d-2} + 2^d = d2^d$$

    ii) $|\mathcal{B}_0| = 2$. Пусть в $\tau(\pi(\mathcal{B}))$ имеется $k+1$ векторов с двумя прообразами под действием τ ($k \geq 0$, так как $\mathcal{B}_0 \subset U_0^{\perp}$ не пусто). Из этих $k+1$ обозначим через t_2 количество тех, у которых оба прообраза лежат в $\pi(\mathcal{B}_1)$, а через t_1 – тех, у которых в $\pi(\mathcal{B}_1)$ ровно один из прообразов. У $k - t_1 - t_2$ оба прообраза лежат в $\pi(\mathcal{B}_*)$. Пусть так же вектора $\tau(\pi(\mathcal{B}))$ с одним прообразом под действием τ состоят из q проекций $\pi(\mathcal{B}_1)$ и $d - 2 - k - q$ проекций $\pi(\mathcal{B}_*)$. Имеем

    $$\begin{aligned}|\mathcal{B}| &= |\mathcal{B}_*| + |\mathcal{B}_0| + |\mathcal{B}_1|\\ &= (k - t_1 - 2t_2 + d - 2 - q) + 2 + (2 + 4t_2 + 2t_1 + 2q)\\ &= d + k + q + t_1 + 2t_2 + 2\end{aligned}$$

    Рассмотрим для начала случай $t_2 > 0$. Тогда $U_0^{\perp} \subset \operatorname{span}(\mathcal{B}_1)$, поэтому

    $$\dim(\operatorname{span}(\mathcal{B}_1)) = t_1 + t_2 + q + 2 \implies |\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-t_1-t_2-q-2},$$
    $$|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-2} + 2^{d-2-t_1-t_2-q}$$

    $$\begin{aligned}|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| &\leq \left(2^{d-2} + 2^{d-2-t_1-t_2-q}\right)(d + k + q + t_1 + 2t_2 + 2)\\ &\leq \left(2^{d-2} + 2^{d-2-t_1-t_2-q}\right)(2d + t_1 + 2t_2) && (3.2)\\ &\leq \left(2^{d-1} + 2^{d-1-t_1-t_2-q}\right)(d + t_1 + t_2) && (3.3)\\ &\leq \left(2^{d-1} + 2^{d-1-t_1-t_2}\right)(d + t_1 + t_2 + 1)\\ &\leq d2^d + 2d && (3.4)\end{aligned}$$

Где второе неравенство следует из $k+q \le d-2$, а последнее из неравенства 3. При $t_2 = 0$ немного более слабая оценка

$$\dim(\operatorname{span}(\mathcal{B}_1)) \ge t_1 + t_2 + q + 1$$

означает что 3.3 становится $\left(2^{d-1} + 2^{d-t_1}\right)(d+t_1)$, что не больше 3.4 при $t_1 \ge 2$ по неравенству 3. Наконец, при $t_2 = 0$ и $t_1 = 0, 1$ выражение 3.2 даёт оценки $d2^d$ и $(2^{d-2} + 2^{d-3})(2d+1) = d2^d - \left(d - \frac{3}{2}\right) 2^{d-2} \le d2^d$ соответственно.

б) $\mathcal{A}_0$ состоит из нуля и базиса U_0. Тогда

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \le |\mathcal{A}|^2 \le 4(d-1)^2 \le d2^d + 2d$$

в) $|\mathcal{A}_0| \cdot |\tau(\pi(\mathcal{B}))| \le (d - 2 + \lambda_{d-2})\, 2^{d-2}$. Тогда пользуясь неравенствами 1, 2 и утверждением 3 имеем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \le 4 \cdot (d - 2 + \lambda_{d-2})\, 2^{d-2} + 2 \cdot 2^d = (d + \lambda_{d-2})\, 2^d$$

3. $\dim U_0 = d - 1$. Вновь применяя предположение индукции к $\pi(\mathcal{B})$ и $\mathcal{A}_0$, имеем три варианта (помним, что из предположения $0{,}b_d \in \mathcal{B}_1$ имеем $\mathcal{B}_0 = \varnothing$):

а) $\mathcal{A}_0$ изоморфно $\{0{,}1\}^{d-1}$, $\pi(\mathcal{B})$ – базис с нулём.

i) $\dim \mathcal{B}_1 = 1$. В этом случае $|\mathcal{B}| = d+1$, то есть условие из формулировки леммы не выполнено.

ii) $\dim \mathcal{B}_1 = k \ge 2$. Тогда $|\mathcal{B}_1| = 2k$, $|\mathcal{A}_1| \le 2^{d-k}$ и мы имеем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \le (2^{d-1} + 2^{d-k})(d+k) \le d2^d + 2d$$

по неравенству 3.

б) $|\mathcal{A}_0| = d$. Тогда $|\mathcal{A}|^2 \le 4d^2$, что не больше $d2^d + 2d$ для $d > 3$. 2

в) $|\mathcal{A}_0| \cdot |\pi(\mathcal{B})| \le (d - 1 + \lambda_{d-1})\, 2^{d-1}$. Финальный раз из неравенства 1 и утверждения 5 получаем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \le 2 \cdot (d - 1 + \lambda_{d-1})\, 2^{d-1} + 2^d = (d + \lambda_{d-1})\, 2^d.$$

□

Найдём теперь оптимальное значение $\lambda(d)$ из леммы 2:

Лемма 3. *Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис $\mathbb{R}^d$ и $\langle a, b\rangle \in \{0{,}1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Если при этом семейства максимальны по включению и размер каждого хотя бы $d+2$, то $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \le d2^d + 2d$.*

Доказательство. Будем вновь вести индукцию по d и без ограничения общности считать $|\mathcal{A}| \ge |\mathcal{B}|$, для $d < 3$ оценка совпадает с теоремой 1. Желаемая оценка уже получена во всех подслучаях доказательства леммы 2, за исключением двух индукционных шагов – 2в) и 3в), поэтому достаточно получить нужную оценку в них:

2в') $|\mathcal{A}_0|\cdot|\tau(\pi(\mathcal{B}))| \le 2\,(d-2)\left(2^{d-3}+1\right)$. Пользуясь неравенствами 1, утверждением 3 и 3.1 имеем

$$|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}| \le 4\cdot(d-2)\left(2^{d-2}+2\right)+2\cdot 2^d - 2\,|\mathcal{A}_0| = 2d(2^{d-1}+1)+2\,(3d-8-|\mathcal{A}_0|)$$

Это завершает доказательство при $|\mathcal{A}_0| \ge 3d-8$ в противном случае:

$$|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}| \le 4\,|\mathcal{A}_0|^2 \le 4\,(3d-8)^2$$

Это меньше $d2^d+2d$ при всех d кроме $d=5,6$. Для них что-то легко улучшается...

3в') Оба $|\mathcal{A}_0|$ и $|\pi(\mathcal{B})|$ имеют размер хотя бы $d+1$. По предположению индукции $|\mathcal{A}_0|\cdot|\pi(\mathcal{B})| \le (d-1)\left(2^{d-1}+2\right)$. Тогда из утверждения 2, 5 и того что $\mathcal{B}_0=\varnothing$ следует

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}| &= 2\,|\mathcal{A}_0|\,|\pi(\mathcal{B})| + |\mathcal{A}_1|\,|\mathcal{B}_1| - (|\mathcal{A}_0|-|\mathcal{A}_1|)\,|\mathcal{B}_*| && (3.5)\\
&\le 2\,(d-1)\left(2^{d-1}+2\right) + |\mathcal{A}_1|\,|\mathcal{B}_1| - (|\mathcal{A}_0|-|\mathcal{A}_1|)\,|\mathcal{B}_*| && (3.6)\\
&\le 2\,(d-1)\left(2^{d-1}+2\right) + 2^d - (|\mathcal{A}_0|-|\mathcal{A}_1|)\,|\mathcal{B}_*| \\
&= d2^d+2d - (|\mathcal{A}_0|-|\mathcal{A}_1|)\,|\mathcal{B}_*| + (2d-4) && (3.7)
\end{aligned}$$

Поэтому достаточно, например, показать $(|\mathcal{A}_0|-|\mathcal{A}_1|)\,|\mathcal{B}_*| \ge 2d-4$.
Рассмотрим случай $\dim A_1 = d-1$: тогда $\mathcal{B}_1=\{0,b_d\}$, и пользуясь

$$|\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|\,|\pi(\mathcal{B})| + |\mathcal{A}|\cdot\frac{1}{2}\,|\mathcal{B}_1| \le d2^d+2d-2^d+|\mathcal{A}|+(2d-4)$$

Получаем желаемое неравенство при $|\mathcal{A}| \le 2^d-2d+4$. $|\mathcal{A}| > 2^d-2d+4$ действительно невозможно, ведь тогда

$$|\mathcal{A}_0|\cdot|\pi(\mathcal{B})| > (2^{d-1}-d+2)\cdot(d+1) \ge (d-1)(2^{d-1}+2)$$

что противоречит предположению индукции. Таким образом далее можем считать $\dim A_1 < d-1$. Заметим, что вследствие этого также можно полагать $|\mathcal{A}_0| > |\mathcal{A}_1|$, ведь если $|\mathcal{A}_0| = |\mathcal{A}_1|$, то можно изначально сдвинуть семейство $\mathcal{A}$ и поменять знаки некоторых векторов $\mathcal{B}$ так, чтобы все условия остались в силе, а $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ поменялись местами, сводя ситуацию к случаю где $\dim U_0 < d-1$.

Рассмотрим ортогональную проекцию $\pi_{\mathcal{B}_1}:\mathbb{R}^d\to\operatorname{span}(\mathcal{B}_1)$. В силу определения $\mathcal{A}_1$ мы имеем $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_1)|=1$. Обозначим $k=\dim(\operatorname{span}(\mathcal{B}_1))$. Так как $\mathcal{B}$ содержит базис $\mathbb{R}^d$, мы имеем

$$|\mathcal{B}_*| \ge d-k,\ \ (|\mathcal{A}_0|-|\mathcal{A}_1|)\,|\mathcal{B}_*| \ge d-k \qquad (3.8)$$

Разберёмся с одним крайним случаем, прежде чем перейти к чуть более систематическому перебору, а именно поймём, что мы можем полагать $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)|=k:$ во-первых, $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)| \ge k$ так как $0\in\mathcal{A}_0$ и $\operatorname{span}(\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)) = \operatorname{span}\left(\pi_{\mathcal{B}_1}(\operatorname{span}(\mathcal{A}_0))\right) = \operatorname{span}(\mathcal{B}_1)\cap b_d^{\perp}$, то есть $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)$ содержит 0 и базис $(k-1)$-мерного пространства. Во-вторых, если $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)| \ge k+1$ то применяя теорему 1 к $\mathcal{B}_1$ и $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})$ имеем

$$|\mathcal{B}_1|\cdot|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})| \le (k+1)\,2^k,\ \ |\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})| \ge k+2 \Rightarrow |\mathcal{B}_1| \le 2^k\left(1-\frac{1}{k+2}\right) \Rightarrow$$

$$|\mathcal{B}_1|\,|\mathcal{A}_1| \le 2^d\left(1-\frac{1}{k+2}\right) \Rightarrow |\mathcal{A}|\cdot|\mathcal{B}| \le d2^d+2d+(2d-4)-\frac{2^d}{k+2}-(d-k)$$

что доказывает необходимую оценку для всех $d \notin \{3,4,5\}$, так как при $d \geq 6$

$$d + k - 4 - \frac{2^d}{k+2} \leq 2d - 4 - \frac{2^d}{d+2} = -\frac{2}{d+2}\left(2^{d-1} - (d+2)(d-2)\right) \leq 0$$

Итак, мы можем полагать $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)| = k$, то есть $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)$ состоит из нуля и базиса $\operatorname{span}(\mathcal{B}_1) \cap b_d^{\perp}$, а $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})$ – из нуля и базиса $\operatorname{span}(\mathcal{B}_1)$. Произведём перебор по возможным значениям k:

i) $k = 1$, то есть $\mathcal{B}_1 = \{0, b_d\}$. Так как $\dim \mathcal{A}_1 < d - 1$, из доказательства утверждения 5 следует $|\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-2}$. Подставляя это в 3.6 получаем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq d2^d + 2d + (2d - 4 - 2^{d-1}) \leq d2^d + 2d$$

ii) $k = 2$. Из доказательства утверждения 5 следует, что $|\mathcal{B}_1| \leq 4$ и $|\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-2}$. Вследствие 3.9 $|\mathcal{B}_*| \geq d - 2$, так что если $|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| \geq 2$, 3.7 даёт нужную оценку. Аналогично 3.7 завершает доказательство если $|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| = 1$ и $|\mathcal{B}_*| \geq 2d - 4$. Если же $|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| = 1$ и $|\mathcal{B}_*| < 2d - 4$, то

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = (2\,|\mathcal{A}_1| + 1) \cdot (|\mathcal{B}_*| + |\mathcal{B}_1|) < \left(2^{d-1} + 1\right) \cdot (2d - 4 + 4) = d2^d + 2d$$

iii) $k = d$ и $\mathcal{B}_* = \varnothing$. Отметим, что в силу 3.8 $\mathcal{B}_* = \varnothing$ невозможно при других значениях k. По определению $\mathcal{B}_1$ из его полноразмерности следует, что $\mathcal{A}_1$ состоит из лишь одной точки, поэтому 3.6 превращается в

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 2\,(d-1)\left(2^{d-1} + 2\right) + |\mathcal{B}|$$

что завершает доказательство при $|\mathcal{B}| \leq 2^d - 2d + 4$. Обратное действительно невозможно, ведь тогда получается противоречие с теоремой 1:

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \geq |\mathcal{B}|^2 \geq \left(2^d - 2d + 4\right)^2 > (d+1)\,2^d$$

iv) $2 < k \leq d$ и $\mathcal{B}_* \neq \varnothing$. Обозначим элементы $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})$ как $a_0 = 0, a_1, \ldots, a_k$, а их прообразы при проекции как $\mathbb{A}_j = \pi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(a_j)$, нумерацию выберем так чтобы $\mathbb{A}_1 = \mathcal{A}_1$. Пусть $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1k}$ – базис $\mathcal{B}_1$, двойственный $a_1, \ldots, a_k$. В соответствии с выбором нумерации, $b_{11} = b_d$. Заметим, что в силу максимальности $\mathcal{B}$ по включению все b_{1j} лежат в $\mathcal{B}_1$ (иначе их, вместе с $b_{1j} + b_d$ для $j > 1$, можно было добавить в $\mathcal{B}$). Если $\dim \mathcal{A}_1 < d - k$, то подобно пункту i) получаем $|\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-2}$ и желаемую оценку, так что далее можно считать $\dim \mathcal{A}_1 = d - k$. Мы запишем $\mathcal{A}$ в удобном базисе и увидим, что благодаря $\dim \mathcal{A}_1 = d - k$ каждый из векторов b_{1j} можно выбрать в качестве b_d в самом начале рассуждения, и удачный выбор приведёт к уже рассмотренному случаю или к достаточно сильной нижней оценке на $(|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|)\,|\mathcal{B}_*|$. Итак, дополним $\{b_{11}, \ldots, b_{1k}\}$ элементами $\mathcal{B}_*$ до базиса $\mathbb{R}^d$ и запишем $\mathcal{A}$ в двойственном базисе. Вместе вектор-столбцы $\mathcal{A}$ тогда будут выглядеть как

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccccc} \mathbb{A}_0 & \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_2 & \cdots & \mathbb{A}_k \end{array} & \\
\mathcal{A} = & \left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & 1\ 1 \cdots 1\ 1 & 0\ 0 \cdots 0\ 0 & & \\
\mathbf{0} & & 1\ 1 \cdots 1\ 1 & & \mathbf{0} \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\
 & & & & 1\ 1 \cdots 1\ 1 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
\ddots & \ddots & \ddots & & \ddots
\end{array}\right) & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right]k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right]d-k \end{array} \\
 & \underbrace{\qquad\qquad}_{\dim = d-k} &
\end{array}
$$

Ранк серого блока совпадает с афинной размерностью $\mathbb{A}_1 = \mathcal{A}_1$, то есть равен $d-k$, поэтому

$$\forall j > 1 \colon\ d - 1 = \dim(\mathrm{span}(\mathcal{A} \setminus \mathbb{A}_j)) = \dim(\mathcal{A} \cap b_{1j}^{\perp})$$

А значит, действительно, любой из b_{1j} может быть изначально выбран в качестве b_d. Выберем b_{1j} с минимальным размером $\mathbb{A}_j$ и повторим все рассуждения с ним в качестве b_d. Отметим, что тогда $|\mathcal{A} \setminus \mathbb{A}_j| > |\mathbb{A}_j|$, поэтому сдвига $\mathcal{A}$, меняющего местами $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$, произведено не будет, и в результате мы просто можем полагать

$$\begin{gathered}\forall j > 1 \colon\ |\mathbb{A}_1| \le |\mathbb{A}_j| \implies \\ |\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| = |\mathbb{A}_0| + \sum_{j>1} |\mathbb{A}_j| \ge (k-1)\,|\mathcal{A}_1| \ge 2\,|\mathcal{A}_1|\end{gathered} \tag{3.9}$$

Если $|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| \ge 2d-4$, то из непустоты $\mathcal{B}_*$ и 3.7 следует желаемая оценка. Иначе

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| < 2d - 4 \overset{3.9}{\implies} |\mathcal{A}| < 2 \cdot (2d-4) \implies \\ |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \le |\mathcal{A}|^2 < (4d-8)^2 < d2^d + 2d,\end{aligned}$$

завершая доказательство.

□

Приведём примеры, демонстрирующие точность оценки в лемме 3:

Пример 1 (Куб с щупальцами)**.** *Обозначая стандартный базис* $\{e_i\}$,

$$\mathcal{A} = \left\{\sum_{i=2}^{d} \delta_i e_i\right\} \cup \{e_1\}\,,\ \mathcal{B} = \{\delta_1 e_1 + e_j\} \cup \{e_1, 0\}\,,\ \textit{где } \delta_i \textit{ пробегают } \{0,1\} \textit{ и } j > 1.$$

Здесь $|\mathcal{A}| = 2^{d-1} + 1$ *и* $|\mathcal{B}| = 2d$.

Пример 2 (Кросс-политоп)**.** *Обозначая стандартный базис* $\{e_i\}$,

$$\mathcal{A} = \left\{e_d + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i e_i\right\} \cup \{0\}\,,\ \mathcal{B} = \left\{\frac{1}{2}\,(e_d + \varepsilon_i e_i)\right\},\ \textit{где } \varepsilon_i \textit{ пробегают } \{-1,1\}\,.$$

Как и в примере 1, $|\mathcal{A}| = 2^{d-1} + 1$ *и* $|\mathcal{B}| = 2d$.

Глава 4

Следствия для двухуровневых политопов

В [4] из теоремы 1 выводилась

Теорема 3. *Для любого d-мерного двухуровнего политопа P выполняется*

$$f_0(P)f_{d-1}(P) \leq d2^{d+1}.$$

Равенство в этой теореме достигается на d-мерных кубе и кросс-политопе. Продемонстрируем стабильность этого результата, пользуясь леммой 3:

Лемма 4. *При $d > 1$ для любого d-мерного двухуровнего политопа P, не являющегося кубом или кросс-политопом, выполняется*

$$f_0(P)f_{d-1}(P) \leq (d-1)\,2^{d+1} + 8\,(d-1)$$

Доказательство. Обозначим для краткости число вершин P как $V = f_0(P)$ и число гиперграней как $F = f_{d-1}(P)$. Сдвинув □

Глава 5

Заключение

TBD

Литература

[1] *Aprile, Manuel.* On 2-Level Polytopes Arising in Combinatorial Settings / Manuel Aprile, Alfonso Cevallos, Yuri Faenza // *SIAM Journal on Discrete Mathematics.* — 2018. — Vol. 32, no. 3. — Pp. 1857–1886.

[2] *Fiorini, Samuel.* Two-Level Polytopes with a Prescribed Facet / Samuel Fiorini, Vissarion Fisikopoulos, Marco Macchia. — 2016. — Pp. 285–296.

[3] *Adam Bohn Yuri Faenza, Samuel Fiorini Vissarion Fisikopoulos Marco Macchia Kanstantsin Pashkovich.* Enumeration of 2-level polytopes / Samuel Fiorini Vissarion Fisikopoulos Marco Macchia Kanstantsin Pashkovich Adam Bohn, Yuri Faenza // *Mathematical Programming Computation.* — 2018. — Vol. 11.

[4] *Andrey Kupavskii, Stefan Weltge.* Binary scalar products / Stefan Weltge Andrey Kupavskii // *Journal of Combinatorial Theory, Series B.* — 2022. — Vol. 156.

[5] *Kupavskii, Andrey.* Octopuses in the Boolean cube: Families with pairwise small intersections, part I / Andrey Kupavskii, Fedor Noskov // *Journal of Combinatorial Theory, Series B.* — 2023.

[6] *Alon, Noga.* The Probabilistic Method / Noga Alon, Joel H. Spencer. — Second edition. — New York: Wiley, 2004.