

Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный
университет)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра математических основ методов современной физики

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Семейства векторов с бинарными скалярными произведениями

Автор:

Студент 922 группы
Царёв Дмитрий Вячеславович

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук
Купавский Андрей Борисович



Москва, 2023

Аннотация

Семейства векторов с бинарными скалярными произведениями

Царёв Дмитрий Вячеславович

Вопросы, связанные с оценками числа вершин и граней двухуровневых политопов, мотивируют изучение семейств векторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ таких что $\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ скалярное произведение $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$. В данной работе приведены некоторые подходы к работе с такими семействами и получены некоторые улучшения оценки на произведение размеров таких семейств $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$.

Abstract

Questions on possible vertex and face numbers of two-level polytopes motivate the study of vector families $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ with a property that $\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ the dot product $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$. This work gives some approaches to dealing with such families and obtains some improvements on bounds for the product $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$.

Оглавление

1	Введение и постановка задачи	2
2	Существующие результаты	3
3	Дискретизация задачи, препятствия в применении корреляции	4
4	Улучшения оценки для больших семейств	5
5	Заключение	10

Глава 1

Введение и постановка задачи

TBD

Глава 2

Существующие результаты

TBD

Глава 3

Дискретизация задачи, препятствия в применении корреляции

TBD

Глава 4

Улучшения оценки для больших семейств

Для полноты приведём обозначения и промежуточные результаты, доказанные в [1].

Теорема 1. Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис \mathbb{R}^d и $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d + 1)2^d$.

Обозначим $b_d \in \mathcal{B}$ вектор, с максимальным значением $\max(\dim \mathcal{A}_0, \dim \mathcal{A}_1)$, где $\mathcal{A}_i = \{a \in \mathcal{A} : \langle a, b_d \rangle = i\}$ для $i = 0, 1$. Ортогональную проекцию на $U = b_d^\perp$ обозначим $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow U$.

Утверждение 1. Параллельным переносом \mathcal{A} и заменой некоторых векторов \mathcal{B} на противоположные можно добиться того что

1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \sqcup \mathcal{A}_1$ и $|\mathcal{A}_0| \geq |\mathcal{A}_1|$
2. Всё ещё $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ для любого $a \in \mathcal{A}_0$ и $b \in \mathcal{B}$
3. Множество $\pi(\mathcal{B})$ не содержит противоположных точек.

Утверждение 2. Каждая точка $\pi(\mathcal{B})$ имеет не более двух прообразов в \mathcal{B} .

Неравенство 1. $|\mathcal{A}| |\mathcal{B}| \leq 2 |\mathcal{A}_0| |\pi(\mathcal{B})| + |\mathcal{A}_1| |\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_*|$

Линейную оболочку \mathcal{A}_0 обозначим U_0 и введём ортогональную проекцию $\tau : U \rightarrow U_0$. Через $\mathcal{B}_* \subseteq \mathcal{B}$ обозначим множество $b \in \mathcal{B}$ для которых $\pi(b)$ имеет ровно один прообраз при проекции на U .

Утверждение 3. $|\pi(\mathcal{B})| \leq 2^{d-1-\dim U_0} |\tau(\pi(\mathcal{B}))|$.

Утверждение 4. $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_* = \mathcal{B}_0 \sqcup \mathcal{B}_1$ с выполнением для $i = 0, 1$

$$\forall b \in \mathcal{B}_i : |\{ \langle a, b \rangle : a \in \mathcal{A}_i \}| = 1$$

Утверждение 5. Для $i = 0, 1$ выполняется $|\mathcal{A}_i| |\mathcal{B}_i| \leq 2^d$.

Неравенство 2. $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (\dim U_0 + 1) 2^d + |\mathcal{A}_0| |\mathcal{B}_0| + |\mathcal{A}_1| |\mathcal{B}_1|$

Поймём, на каких семействах в теореме 1 достигается равенство. Без ограничения общности будем полагать $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{B}|$.

Лемма 1. $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = (d+1)2^d$ только если $|\mathcal{B}| = d+1$, а \mathcal{A} аффинно изоморфно $\{0,1\}^d$.

Доказательство. Будем вести индукцию по d , в размерности 1 утверждение очевидно. Предполагая выполнение леммы в размерностях меньших d , докажем её в размерности d . Разобьём случаи по значению $\dim U_0$:

1. $\dim U_0 < d-2$. Тогда из неравенства 2 и утверждения 5

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (\dim U_0 + 3) 2^d \leq d 2^d \quad (4.1)$$

2. $\dim U_0 = d-2$. Заметим, что мы можем свободно полагать $0, b_d \in \mathcal{B}_0$ или $0, b_d \in \mathcal{B}_1$, поэтому из доказательства утверждения 5 следует

$$|\mathcal{A}_1| |\mathcal{B}_1| \leq 2^d, |\mathcal{A}_0| (|\mathcal{B}_0| + 2) \leq 2^d$$

Поэтому по неравенству 2 и утверждению 5

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d-1) 2^d + 2 \cdot 2^d - 2 |\mathcal{A}_0| \leq (d+1) 2^d - |\mathcal{A}| < (d+1) 2^d$$

3. $\dim U_0 = d-1$. Тогда, полагая $0, b_d \in \mathcal{B}_1$, имеем $\mathcal{B}_0 = \emptyset$. Рассмотрим два случая:

- а) $\mathcal{B}_* \neq \emptyset$. Тогда для вырождения неравенства 1 в равенство необходимо $|\mathcal{A}_0| = |\mathcal{A}_1|$, а для вырождения неравенства 2 — $|\mathcal{A}_0| |\pi(\mathcal{B})| = d 2^{d-1}$. По предположению индукции последнее возможно в одном из двух случаев:

- i) \mathcal{A}_0 аффинно изоморфно $\{0,1\}^{d-1}$. Тогда $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| = 2^d$, что возможно только если \mathcal{A} аффинно изоморфно $\{0,1\}^d$, \mathcal{B} может состоять только из базиса и нуля.

- ii) $|\mathcal{A}_0| = d$. Тогда $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}| = 2d$ и $|\mathcal{B}| \cdot |\mathcal{A}| \leq 4d^2$, что меньше $(d+1) 2^d$ для $d \geq 4$. При $d = 3$ неравенство $|\mathcal{B}| \cdot |\mathcal{A}| \leq 32$ не может вырождаться, так как $|\mathcal{A}| = 6$. Наконец, в случае $d = 2$ мы имеем $|\mathcal{A}_1| = 2^d$ как в i).

- б) $\mathcal{B}_* = \emptyset$. Тогда $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ и, следовательно, $\dim(\text{span}(\mathcal{B}_1)) = d$. В таком случае

$$(\forall b \in \mathcal{B}_1 \exists \xi : \forall a \in \mathcal{A}_1 \langle a, b \rangle = \xi) \Rightarrow \dim(\mathcal{A}_1) \leq d - \dim(\text{span}(\mathcal{B}_1)) = 0 \Rightarrow |\mathcal{A}_1| = 1$$

Как и в б), для вырождения неравенства по предположению индукции необходимо одно из двух:

- i) $|\mathcal{A}_0| = d$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d+1)^2 < (d+1) 2^d$.
- ii) $|\mathcal{A}_0| = 2^{d-1}$, $|\pi(\mathcal{B})| = d$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = 2d(2^{d-1} + 1)$, что меньше $(d+1)2^d$ для $d > 2$. При $d = 2$ же $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}|^2 = 9 < 3 \cdot 2^2$.

□

Улучшим оценку для семейств, отличающихся от экстремального примера. Докажем для этого вспомогательное

Неравенство 3. Для целого $2 \leq f \leq d$ выполняется $(d+f)(2^{d-1} + 2^{d-f}) \leq d 2^d + 2d$.

Доказательство. Доказываем индукцией по d : при $d = k$ выполнено равенство, проведём шаг от d к $d+1$. Обозначая левую и правую стороны неравенства $l(d, f)$ и $r(d, f)$ соответственно, имеем

$$\begin{aligned} r(d+1, f) - l(d+1, f) &\geq (r(d+1, f) - r(d, f)) - (l(d+1, f) - l(d, f)) \\ &= (d 2^d + 2^{d+1} + 2) - (d+f+2)(2^{d-1} + 2^{d-f}) \\ &= 2^{d-f}(d-f+2) \left(2^{f-1} - 1 - \frac{2f}{d-f+2} \right) + 2 \\ &\geq 2^{d-f}(d-f+2)(2^{f-1} - 1 - f) \end{aligned}$$

Полученное выражение неотрицательно при $f > 2$. Для $f = 2$, $d \geq 4$ выполняется $2^{f-1} - 1 - \frac{2f}{d-f+2} \geq 0$, и для $f = 2$, $d = 2, 3$ изначальное неравенство проверяется явно. \square

Лемма 2. Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис \mathbb{R}^d и $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Если при этом семейства максимальны по включению и размер каждого хотя бы $d + 2$, то $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d + \lambda(d)) 2^d$, где $0 < \lambda(d) \leq 1$ — некая (нестрого) убывающая функция.

Доказательство. $\lambda(d)$ будем обозначать λ_d . Как и в доказательстве леммы 1, будем вести индукцию по d . Для базы можно выбрать $\lambda = 1$, предполагая верность для меньших размерностей, докажем утверждение для d . Рассматриваем возможные значения $\dim U_0$:

1. $\dim U_0 < d - 2$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (\dim U_0 + 3) 2^d \leq d 2^d$
2. $\dim U_0 = d - 2$. Применяя предположение индукции и лемму 1 для семейств $\tau(\pi(\mathcal{B}))$ и \mathcal{A}_0 , имеем три варианта:
 - а) \mathcal{A}_0 афинно изоморфно $\{0, 1\}^{d-2}$, $\tau(\pi(\mathcal{B}))$ состоит из нуля и базиса U_0 . Из утверждения 5 и предположения 0, $b_d \in \mathcal{B}_1$ следует $|\mathcal{B}_0| \leq 2$. С учётом чётности $|\mathcal{B}_0|$ имеется два варианта:
 - i) $|\mathcal{B}_0| = 0$. Тогда из неравенства 1 и утверждения 5 получаем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 4(d-1)2^{d-2} + 2^d = d 2^d$$

- ii) $|\mathcal{B}_0| = 2$. Пусть в $\tau(\pi(\mathcal{B}))$ имеется $k + 1$ векторов с двумя прообразами под действием τ ($k \geq 0$, так как $\mathcal{B}_0 \subset U_0^\perp$ не пусто). Из этих $k + 1$ обозначим через t_2 количество тех, у которых оба прообраза лежат в $\pi(\mathcal{B}_1)$, а через t_1 — тех, у которых в $\pi(\mathcal{B}_1)$ ровно один из прообразов. У $k - t_1 - t_2$ оба прообраза лежат в $\pi(\mathcal{B}_*)$. Пусть так же вектора $\tau(\pi(\mathcal{B}))$ с одним прообразом под действием τ состоят из q проекций $\pi(\mathcal{B}_1)$ и $d - 2 - k - q$ проекций $\pi(\mathcal{B}_*)$. Имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &= |\mathcal{B}_*| + |\mathcal{B}_0| + |\mathcal{B}_1| \\ &= (k - t_1 - 2t_2 + d - 2 - q) + 2 + (2 + 4t_2 + 2t_1 + 2q) \\ &= d + k + q + t_1 + 2t_2 + 2 \end{aligned}$$

Рассмотрим для начала случай $t_2 > 0$. Тогда $U_0^\perp \subset \text{span}(\mathcal{B}_1)$, поэтому

$$\begin{aligned} \dim(\text{span}(\mathcal{B}_1)) &= t_1 + t_2 + q + 2 \implies |\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-t_1-t_2-q-2}, \\ |\mathcal{A}| &= |\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-2} + 2^{d-2-t_1-t_2-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| &\leq (2^{d-2} + 2^{d-2-t_1-t_2-q}) (d + k + q + t_1 + 2t_2 + 2) \\ &\leq (2^{d-2} + 2^{d-2-t_1-t_2-q}) (2d + t_1 + 2t_2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\leq (2^{d-1} + 2^{d-1-t_1-t_2-q}) (d + t_1 + t_2) \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} &\leq (2^{d-1} + 2^{d-1-t_1-t_2}) (d + t_1 + t_2 + 1) \\ &\leq d 2^d + 2d \end{aligned} \quad (4.4)$$

Где второе неравенство следует из $k + q \leq d - 2$, а последнее из неравенства 3. При $t_2 = 0$ немного более слабая оценка

$$\dim(\text{span}(\mathcal{B}_1)) \geq t_1 + t_2 + q + 1$$

означает что 4.3 становится $(2^{d-1} + 2^{d-t_1})(d + t_1)$, что не больше 4.4 при $t_1 \geq 2$ по неравенству 3. Наконец, при $t_2 = 0$ и $t_1 = 0, 1$ выражение 4.2 даёт оценки $d2^d$ и $(2^{d-2} + 2^{d-3})(2d + 1) = d2^d - (d - \frac{3}{2})2^{d-2} \leq d2^d$ соответственно.

б) \mathcal{A}_0 состоит из нуля и базиса U_0 . Тогда

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}|^2 \leq 4(d-1)^2 \leq d2^d + 2d$$

в) $|\mathcal{A}_0| \cdot |\tau(\pi(\mathcal{B}))| \leq (d-2 + \lambda_{d-2})2^{d-2}$. Тогда пользуясь неравенствами 1, 2 и утверждением 3 имеем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 4 \cdot (d-2 + \lambda_{d-2})2^{d-2} + 2 \cdot 2^d = (d + \lambda_{d-2})2^d$$

3. $\dim U_0 = d - 1$. Вновь применяя предположение индукции к $\pi(\mathcal{B})$ и \mathcal{A}_0 , имеем три варианта (помним, что из предположения $0, b_d \in \mathcal{B}_1$ имеем $\mathcal{B}_0 = \emptyset$):

а) \mathcal{A}_0 изоморфно $\{0, 1\}^{d-1}$, $\pi(\mathcal{B})$ – базис с нулём.

i) $\dim \mathcal{B}_1 = 1$. В этом случае $|\mathcal{B}| = d + 1$, то есть условие из формулировки леммы не выполнено.

ii) $\dim \mathcal{B}_1 = k \geq 2$. Тогда $|\mathcal{B}_1| = 2k$, $|\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-k}$ и мы имеем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (2^{d-1} + 2^{d-k})(d + k) \leq d2^d + 2d$$

по неравенству 3.

б) $|\mathcal{A}_0| = d$. Тогда $|\mathcal{A}|^2 \leq 4d^2$, что не больше $d2^d + 2d$ для $d > 3$. 2

в) $|\mathcal{A}_0| \cdot |\pi(\mathcal{B})| \leq (d-1 + \lambda_{d-1})2^{d-1}$. Финальный раз из неравенства 1 и утверждения 5 получаем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 2 \cdot (d-1 + \lambda_{d-1})2^{d-1} + 2^d = (d + \lambda_{d-1})2^d.$$

□

Найдём теперь оптимальное значение $\lambda(d)$ из леммы 2:

Лемма 3. Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис \mathbb{R}^d и $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Если при этом семейства максимальны по включению и размер каждого хотя бы $d + 2$, то $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq d2^d + 2d$.

Доказательство. Желаемая оценка уже получена во всех подслучаях доказательства леммы 2 за исключением двух индукционных шагов – 2в) и 3в), поэтому достаточно получить нужную оценку в них:

2в')

3в')

□

Доказательство леммы 2 работает для доказательства оценки $d2^d + 2d$, за исключением индукционных шагов 2в) и 3в). Работающая модификация пункта 2в) выглядит так:

2в) $|\mathcal{A}_0| \cdot |\tau(\pi(\mathcal{B}))| \leq 2(d-2)(2^{d-3} + 1)$. Пользуясь неравенствами 1, утверждением 3 и 4.1 имеем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 4 \cdot (d-2)(2^{d-2} + 2) + 2 \cdot 2^d - 2|\mathcal{A}_0| = 2d(2^{d-1} + 1) + 2(3d - 8 - |\mathcal{A}_0|)$$

Это завершает доказательство при $|\mathcal{A}_0| \geq 3d - 8$ в противном случае:

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 4|\mathcal{A}_0|^2 \leq 4(3d - 8)^2$$

Это меньше $d2^d + 2d$ при всех d кроме $d = 5, 6$. Для них что-то легко улучшается...

Наивная индукция не работает для 3в):

$$2 \cdot 2(d-1)(2^{d-2} + 1) + 2^d = 2d(2^{d-1} + 1) + 2d - 4$$

Легко видеть, что такой банальной индукцией ничего лучше леммы 2 не получается: если оценка это $g(d)$, то для работы индукции нужно $2 \cdot g(d-1) + 2^d \leq g(d)$, то есть, обозначая $\phi(d) \cdot 2^d = g(d)$, $\phi(d-1) + 1 \leq \phi(d)$.

Полезные примеры:

Пример 1 (Куб с щупальцами). Обозначая стандартный базис $\{e_i\}$,

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=2}^d \delta_i e_i \right\} \cup \{e_1\}, \mathcal{B} = \{\delta_1 e_1 + e_j\} \cup \{e_1\}, \text{ где } \delta_i \text{ пробегают } \{0, 1\} \text{ и } j > 1.$$

Пусть $b_d = e_1$, тогда $|\mathcal{A}_0| = 2^{d-1}$, $|\mathcal{A}_1| = 1$, $|\mathcal{B}_*| = 0$, $|\mathcal{B}_1| = 2d$. В равенстве

$$|\mathcal{A}| |\mathcal{B}| = 2|\mathcal{A}_0| |\pi(\mathcal{B})| + |\mathcal{A}_1| |\mathcal{B}_1| - (|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|) |\mathcal{B}_*| \quad (4.5)$$

последнее вычитаемое равно 0, но второе слагаемое не оптимально (а первое происходит из экстремального случая).

Если же $b_d = e_d$, то $|\mathcal{A}_0| = 2^{d-2} + 1$, $|\mathcal{A}_1| = 2^{d-2}$, $|\mathcal{B}_*| = 2d - 4$, $|\mathcal{B}_1| = 4$. В равенстве 4.5 первые два слагаемых оптимальны, но последнее вычитаемое как раз равно $2d - 4$.

Пример 2 (Кросс-политоп). Обозначая стандартный базис $\{e_i\}$,

$$\mathcal{A} = \left\{ e_d + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i e_i \right\} \cup \{0\}, \mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2}(e_d + \varepsilon_i e_i) \right\}, \text{ где } \varepsilon_i \text{ пробегают } \{-1, 1\}.$$

Без ограничения общности $b_d = \frac{1}{2}(e_d - e_{d-1})$, $|\mathcal{A}_0| = 2^{d-2} + 1$, $|\mathcal{A}_1| = 2^{d-2}$, $|\mathcal{B}_*| = 2d - 4$, $|\mathcal{B}_1| = 4$. Ситуация в равенстве 4.5 аналогична концу примера 1.

Глава 5

Заключение

TBD

Литература

- [1] *Andrey Kupavskii, Stefan Weltge.* Binary scalar products / Stefan Weltge Andrey Kupavskii // *Journal of Combinatorial Theory, Series B.* — 2022. — Vol. 156.
- [2] *Adam Bohn Yuri Faenza, Samuel Fiorini Vissarion Fisikopoulos Marco Macchia Kanstantsin Pashkovich.* Enumeration of 2-level polytopes / Samuel Fiorini Vissarion Fisikopoulos Marco Macchia Kanstantsin Pashkovich Adam Bohn, Yuri Faenza // *Mathematical Programming Computation.* — 2018. — Vol. 11.