Семейства с бинармыми скалярными произведениями

Царёв Дмитрий Вячеславович
Научный руководитель: Купавский Андрей Борисович

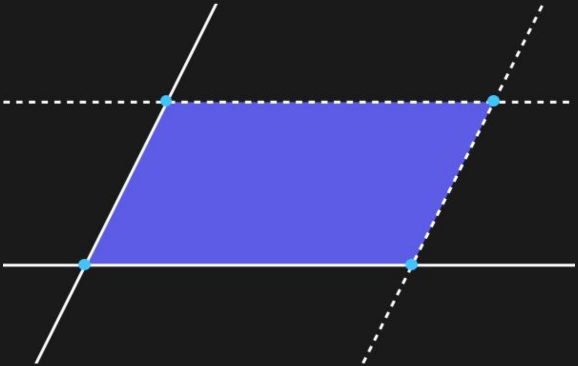
Июнь 2023

Содержание

Двухуровневые многогранники

Определение

Многогранник P двухуровневый, если любая гиперплоскость H, определяющую гипергрань, вместе с её параллельным переносом H' покрывает все вершины P.



Двухуровневые многогранники

Определение

Многогранник P двухуровневый, если любая гиперплоскость H, определяющую гипергрань, вместе с её параллельным переносом H' покрывает все вершины P.

Пример

Симплекс, (гипер)куб, кросс-политоп – двухуровневые.

Пример

Трапеция, не являющаяся параллелограммом – не двухуровневый.

Пример

Семейства политопов Биркгофа, Ханнера, политопы порядка и политопы цепей для частично упорядоченных множеств, политопы стабильных браков и политопы антиклик совершенных графов.

Структура двухуровневых многогранников

Легко видеть, что у d-мерного двухуровнего не больше 2^d вершин и не больше 2^d гиперграней. Оказывается, одновременно большими эти числа быть не могут.

Гипотеза (Bohn et. al., 2015)

Если P – d-мерный двухуровневый многогранник с $f_0(P)$ вершинами и $f_{d-1}(P)$ гипергранями, то $f_0(P)f_{d-1}(P) \leq d2^{d+1}$

Структура двухуровневых многогранников

Легко видеть, что у d-мерного двухуровнего не больше 2^d вершин и не больше 2^d гиперграней. Оказывается, одновременно большими эти числа быть не могут.

Гипотеза (Bohn et. al., 2015)

Если P – d-мерный двухуровневый многогранник с $f_0(P)$ вершинами и $f_{d-1}(P)$ гипергранями, то $f_0(P)f_{d-1}(P) \leq d2^{d+1}$

Окончательно доказана с помощью теоремы

Теорема (Kupavskii, Weltge, 2022)

Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис $\mathbb{R}^d$ и $\langle a, b\rangle \in \{0, 1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Тогда

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d+1)2^d$$

Применение корреляции

В случае, если семейства набираются из булевого куба $\{0,1\}^d$, у теоремы есть изящное доказательство с применением корреляционного неравенства.

Лемма (Простейшее корреляционное неравенство)

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – замкнутые вниз (по включению) семейства подмножеств d-элементного множества. Тогда

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \cdot 2^d$$

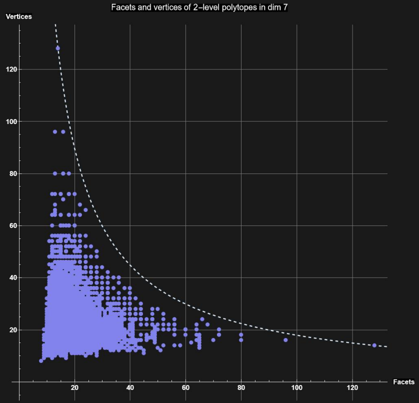
Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \{0,1\}^d$ и $\langle a, b \rangle \in \{0,1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d+1)2^d$.

Краткое доказательство: рассматриваем вектора как подмножества d-элементного множества, замыкаем вниз и применяем неравенство.

Вопросы

1. Можно ли применить подход с корреляцией к векторам в $\mathbb{R}^d$ и получить оценку, близкую к $(d+1)2^d$? Если да, обобщаются ли далее результаты для большего числа семейств и другие?
2. Стабильность оценки произведения: как улучшить оценку для семейств, не похожих на экстремальный пример?



Дискретизация, частичный порядок

Замечательным образом оказывается, что семейства с бинарными скалярными произведениями с точностью до линейных преобразований можно закодировать 0-1 векторами:

Лемма

Семействам $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$ с бинарными скалярными произведениями соответствуют семейства $\mathcal{A}_{01}, \mathcal{B}_{01} \subset \{0,1\}^d$ такие что

$$\forall\, a_{01} \in \mathcal{A}_{01},\ b_{01} \in \mathcal{B}_{01}\ :\ \langle a_{01}, B_{01}^{-1} b_{01} \rangle \in \{0,1\}$$

где B_{01} — обратимая матрица из нулей и единиц.

Теперь на элементах $\{0,1\}^d$ можно завести отношение частичного порядка такое что $\mathcal{A}_{01}$ и $\mathcal{B}_{01}$ относительно его можно замкнуть вниз.

Детали построения частичного порядка

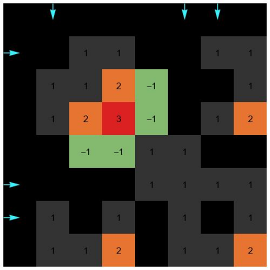
Пусть C — матрица размера $d \times 2^d$, столбцы которой — все элементы $\{0,1\}^d$. Определим $G = G(B_{01}) = C^T B_{01}^{-1} C$. Индексируя столбцы и строки G элементами $\{0,1\}^d$, введём для $x \in \{0,1\}^d$

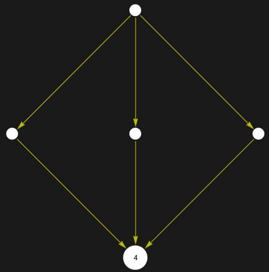
$$R_x = \left\{ y \in \{0,1\}^d : \; G_{y,x} \in \{0,1\} \right\},$$

$$x \sim_R y \iff R_x = R_y, \quad [x] \leq_R [y] \iff R_x \supseteq R_y.$$

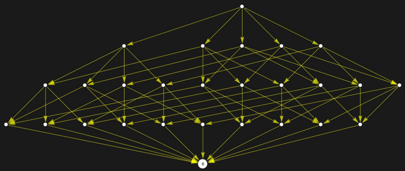
Для простоты пусть B_{01} симметрична, тогда $\leq_R$ задаёт нужное отношение частичного порядка на классах эквивалентности.

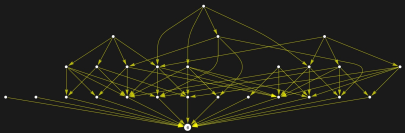
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

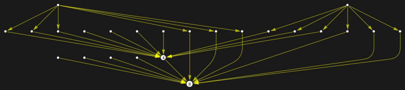


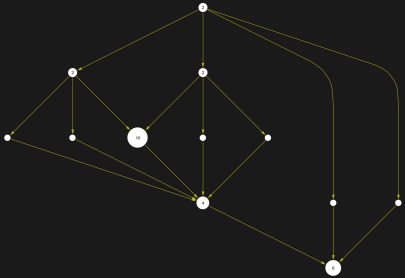


Примеры частично упорядоченных множеств









Препятствия к применению корреляции

Препятствие

Получаемые частично упорядоченные множества не всегда являются дистрибутивными решётками. Более того, они не всегда являются полурешётками.

Препятствие

Количество элементов $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ может быть экспоненциально большим.

Лемма

Пусть B_{01} имеет единицы на побочной диагонали и выше неё, а нули ниже неё. Тогда количество $x \in \{0,1\}^d$, таких что $\langle x, B_{01}^{-1} x \rangle \in \{0,1\}$, равно $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$.

Стабильность оценки произведения

Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис $\mathbb{R}^d$ и $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$

Теорема

$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = (d+1)2^d$ только если $|\mathcal{B}| = d + 1$, а $\mathcal{A}$ афинно изоморфно $\{0,1\}^d$ (или наоборот).

Основной новый результат:

Теорема

Если семейства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ максимальны по включению и размер каждого хотя бы $d + 2$, то $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq d2^d + 2d$.

Достигается, например, на

$$\mathcal{A} = \left\{ e_d + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i e_i \right\} \cup \{0\}, \mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2}(e_d + \varepsilon_i e_i) \right\}$$

Где ε_i пробегают $\{-1, 1\}$ и e_i — стандартный базис $\mathbb{R}^d$.

Итоги

1. Задача оценки произведения размеров семейств с бинарными скалярными произведениями сведена к конечному перебору, исследованы возникающие частично упорядоченные множества, найдены препятствия к применению корреляции.
2. Доказана точная оценка для произведения размеров семейств, отличных от «базиса и куба», и несколько других результатов о стабильности оценки $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$.

Гипотезы

Гипотеза

Количество неизоморфных частично упорядоченных множеств, возникающих из всевозможных симметричных $B_{01} \in \mathrm{Mat}_{d \times d}$ *равно* $\left| \mathrm{Gr}\left([\frac{d}{2}], \mathbb{F}_2^d \right) \right|$, *то есть равно гауссовому биномиальному коэффициенту* $\binom{d}{k}_q$ *с* $q = 2$ *и* $k = [\frac{d}{2}]$.

Гипотеза

Пусть натуральные d *и* $k \leq d$ *таковы что* $2^{d-k} + k > 2^k(d - k + 1)$, *оба* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ *содержат базис* $\mathbb{R}^d$ *и* $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ *для любых* $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, *при этом каждое из* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *имеют размер строго больше* $2^{k-1}(d - k + 2)$. *Тогда* $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d - k + 1)2^k(2^{d-k} + k)$.

Источники

Noga Alon and Joel H. Spencer.
The Probabilistic Method.
Wiley, New York, second edition, 2004.

Manuel Aprile, Alfonso Cevallos, and Yuri Faenza.
On 2-level polytopes arising in combinatorial settings.
SIAM Journal on Discrete Mathematics, 32(3):1857–1886, 2018.

Adam Bohn, Yuri Faenza, Samuel Fiorini, Vissarion Fisikopoulos, Marco Macchia, and Kanstantsin Pashkovich.
Enumeration of 2-level polytopes.
Mathematical Programming Computation, 11, 2018.

Samuel Fiorini, Vissarion Fisikopoulos, and Marco Macchia.
Two-level polytopes with a prescribed facet.
In Raffaele Cerulli, Satoru Fujishige, and A. Ridha Mahjoub, editors, *Combinatorial Optimization*, pages 285–296, Cham, 2016. Springer International Publishing.

Andrey Kupavskii and Fedor Noskov.
Octopuses in the boolean cube: Families with pairwise small intersections, part i.
Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2023.

Andrey Kupavskii and Stefan Weltge.
Binary scalar products.
Journal of Combinatorial Theory, Series B, 156, 2022.