

Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный
университет)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра математических основ методов современной физики

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Семейства векторов с бинарными скалярными произведениями

Автор:

Студент 922 группы
Царёв Дмитрий Вячеславович

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук
Купавский Андрей Борисович



Москва, 2023

Аннотация

Семейства векторов с бинарными скалярными произведениями

Царёв Дмитрий Вячеславович

Вопросы, связанные с оценками числа вершин и граней двухуровневых политопов, мотивируют изучение семейств векторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ таких что $\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ скалярное произведение $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$. В данной работе приведены некоторые подходы к работе с такими семействами и получены некоторые улучшения оценки на произведение размеров таких семейств $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$.

Abstract

Questions on possible vertex and face numbers of two-level polytopes motivate the study of vector families $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ with a property that $\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ the dot product $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$. This work gives some approaches to dealing with such families and obtains some improvements on bounds for the product $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$.

Оглавление

1	Введение	2
1.1	Обозначения	2
2	Дискретизация задачи, препятствия в применении корреляции	3
3	Улучшения оценки для больших семейств	4
4	Следствия для двухуровневых политопов	11
5	Заключение	12

Глава 1

Введение

Политоп называется двухуровневым, если для каждой гиперплоскости H , определяющей фасет, существует параллельная гиперплоскость H' такая, что все вершины лежат в объединении $H \cup H'$. Простейшим примером такого политопа может служить симплекс, гиперкуб и кросс-политоп, но двухуровневыми также являются широкий круг семейств политопов, например политопы Биркгофа, Ханнера, политопы порядка и политопы цепей для частично упорядоченных множеств, политопы стабильных браков и политопы антиклик совершенных графов [1]. Вопросы связанные с комбинаторной структурой таких политопов изучались также в [2], а в [3] был описан алгоритм перечисления всех двухуровневых политопов и на основе перебора в малых размерностях сформулирована гипотеза о максимальном возможном произведении числа вершин и фасетов d -мерного двухуровневого политопа. Эта гипотеза была доказана в [4] с помощью более общей теоремы 1 об оценке произведения размеров двух семейств векторов с бинарными скалярными произведениями:

Теорема 1. Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис \mathbb{R}^d и $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d + 1)2^d$.

В статье [5] теорема 1 обобщается для нескольких семейств 0–1 векторов. Для этого используются корреляционные неравенства, и там же приводится изящное доказательство теоремы 1 для случая 0–1 векторов, описанное ниже.

В первой части этой работы исследуется возможность применения подхода с корреляционными неравенствами к теореме 1, в частности задача о семействах векторов в \mathbb{R}^d сводится к дискретной, что позволяет проверять результаты в малых размерностях компьютерным перебором. Во второй части доказывается стабильность теоремы 1, с основным результатом в виде леммы 3.

1.1 Обозначения

Множество целых чисел от 1 до n обозначается $[n]$. Скалярное произведение двух векторов $a = (a_1, \dots, a_d)$ и $b = (b_1, \dots, b_d)$ будем обозначать $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^d a_i b_i$. Семейства в \mathbb{R}^d будут иногда рассматриваться как наборы векторов а иногда как наборы точек в аффинном пространстве, в частности для $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ будем обозначать аффинную размерность семейства как $\dim \mathcal{A}$, а линейную оболочку векторов – как $\text{span } \mathcal{A}$. Размер семейства – $|\mathcal{A}|$. В решётке Λ будет обозначать точную нижнюю грань двух элементов, а \vee – точную верхнюю грань. Для подмножеств X и Y решётки $X \vee Y$ обозначает множество $\{x \vee y : x \in X, y \in Y\}$, а $X \wedge Y = \{x \wedge y : x \in X, y \in Y\}$.

Глава 2

Дискретизация задачи, препятствия в применении корреляции

Для начала приведём формулировки корреляционного неравенства из [6] в общей форме и в интересном частном случае. Функция $\mu : L \rightarrow \mathbb{R}^+$, где L – конечная дистрибутивная решётка, называется лог-супермодулярной, если

$$\forall x, y \in L : \mu(x)\mu(y) \leq \mu(x \vee y)\mu(x \wedge y)$$

Функция $f : L \rightarrow \mathbb{R}^+$ возрастает если из $x \leq y$ следует $f(x) \leq f(y)$ и убывает если из $x \leq y$ следует $f(x) \geq f(y)$.

Теорема (FKG-неравенство). Пусть L – конечная дистрибутивная решётка, $\mu : L \rightarrow \mathbb{R}^+$ – лог-супермодулярная функция. Тогда для любых возрастающих функций $f, g : L \rightarrow \mathbb{R}^+$ выполняется

$$\left(\sum_{x \in L} \mu(x) f(x) \right) \cdot \left(\sum_{x \in L} \mu(x) g(x) \right) \leq \left(\sum_{x \in L} \mu(x) f(x) g(x) \right) \cdot \left(\sum_{x \in L} \mu(x) \right)$$

Выбирая в качестве L решётку подмножеств конечного множества, в качестве μ тождественную единицу, а в качестве f и g характеристические функции двух замкнутых вниз семейств подмножеств, получаем

Следствие. Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} – замкнутые вниз семейства подмножеств d -элементного множества. Тогда

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \cdot 2^d \quad (2.1)$$

Теперь мы можем привести изящное доказательство теоремы 1 для семейств из 0–1 векторов:

Теорема 2. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \{0,1\}^d$ и $\langle a, b \rangle \in \{0,1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d+1)2^d$.

Доказательство. Проинтерпретируем вектора в $\{0,1\}^d$ как индикаторы подмножеств d -элементного множества. \mathcal{A} и \mathcal{B} тогда становятся семействами подмножеств, а условие на них заключается в том, что любые два множества из разных семейств либо не пересекаются, либо пересекаются по одному элементу. Поэтому если множество лежит и в \mathcal{A} , и в \mathcal{B} , то оно либо пустое, либо одноэлементное, и в частности $|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \leq d+1$. Заметим, что семейства \mathcal{A} и \mathcal{B} можно считать замкнутыми вниз, так как замыкание их вниз не нарушает накладываемого условия, и лишь увеличивает произведение размеров. Наконец, 2.1 даёт нам

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \cdot 2^d \leq (d+1)2^d$$

□

Глава 3

Улучшения оценки для больших семейств

Вспомним теорему 1 а также приведём обозначения и промежуточные результаты, доказанные в [4].

Теорема 1. Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис \mathbb{R}^d и $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d + 1)2^d$.

Обозначим $b_d \in \mathcal{B}$ вектор, с максимальным значением $\max(\dim \mathcal{A}_0, \dim \mathcal{A}_1)$, где $\mathcal{A}_i = \{a \in \mathcal{A} : \langle a, b_d \rangle = i\}$ для $i = 0, 1$. Ортогональную проекцию на $U = b_d^\perp$ обозначим $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow U$.

Утверждение 1. Параллельным переносом \mathcal{A} и заменой некоторых векторов \mathcal{B} на противоположные можно добиться того что

1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \sqcup \mathcal{A}_1$ и $|\mathcal{A}_0| \geq |\mathcal{A}_1|$
2. Всё ещё $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ для любого $a \in \mathcal{A}_0$ и $b \in \mathcal{B}$
3. Множество $\pi(\mathcal{B})$ не содержит противоположных точек.

Утверждение 2. Каждая точка $\pi(\mathcal{B})$ имеет не более двух прообразов в \mathcal{B} .

Неравенство 1. $|\mathcal{A}| |\mathcal{B}| \leq 2 |\mathcal{A}_0| |\pi(\mathcal{B})| + |\mathcal{A}_1| |\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_*|$

Линейную оболочку \mathcal{A}_0 обозначим U_0 и введём ортогональную проекцию $\tau : U \rightarrow U_0$. Через $\mathcal{B}_* \subseteq \mathcal{B}$ обозначим множество $b \in \mathcal{B}$ для которых $\pi(b)$ имеет ровно один прообраз при проекции на U .

Утверждение 3. $|\pi(\mathcal{B})| \leq 2^{d-1-\dim U_0} |\tau(\pi(\mathcal{B}))|$.

Утверждение 4. $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_* = \mathcal{B}_0 \sqcup \mathcal{B}_1$ с выполнением для $i = 0, 1$

$$\forall b \in \mathcal{B}_i : |\{ \langle a, b \rangle : a \in \mathcal{A}_i \}| = 1$$

Утверждение 5. Для $i = 0, 1$ выполняется $|\mathcal{A}_i| |\mathcal{B}_i| \leq 2^d$.

Неравенство 2. $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (\dim U_0 + 1) 2^d + |\mathcal{A}_0| |\mathcal{B}_0| + |\mathcal{A}_1| |\mathcal{B}_1|$

Поймём, на каких семействах в теореме 1 достигается равенство. Без ограничения общности будем полагать $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{B}|$.

Лемма 1. $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = (d+1)2^d$ только если $|\mathcal{B}| = d+1$, а \mathcal{A} аффинно изоморфно $\{0,1\}^d$.

Доказательство. Будем вести индукцию по d , в размерности 1 утверждение очевидно. Предполагая выполнение леммы в размерностях меньших d , докажем её в размерности d . Разобьём случаи по значению $\dim U_0$:

1. $\dim U_0 < d-2$. Тогда из неравенства 2 и утверждения 5

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (\dim U_0 + 3) 2^d \leq d 2^d \quad (3.1)$$

2. $\dim U_0 = d-2$. Заметим, что мы можем свободно полагать $0, b_d \in \mathcal{B}_0$ или $0, b_d \in \mathcal{B}_1$, поэтому из доказательства утверждения 5 следует

$$|\mathcal{A}_1| |\mathcal{B}_1| \leq 2^d, \quad |\mathcal{A}_0| (|\mathcal{B}_0| + 2) \leq 2^d$$

Поэтому по неравенству 2 и утверждению 5

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d-1) 2^d + 2 \cdot 2^d - 2 |\mathcal{A}_0| \leq (d+1) 2^d - |\mathcal{A}| < (d+1) 2^d$$

3. $\dim U_0 = d-1$. Тогда, полагая $0, b_d \in \mathcal{B}_1$, имеем $\mathcal{B}_0 = \emptyset$. Рассмотрим два случая:

- а) $\mathcal{B}_* \neq \emptyset$. Тогда для вырождения неравенства 1 в равенство необходимо $|\mathcal{A}_0| = |\mathcal{A}_1|$, а для вырождения неравенства 2 — $|\mathcal{A}_0| |\pi(\mathcal{B})| = d 2^{d-1}$. По предположению индукции последнее возможно в одном из двух случаев:

- i) \mathcal{A}_0 аффинно изоморфно $\{0,1\}^{d-1}$. Тогда $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| = 2^d$, что возможно только если \mathcal{A} аффинно изоморфно $\{0,1\}^d$, \mathcal{B} может состоять только из базиса и нуля.
 ii) $|\mathcal{A}_0| = d$. Тогда $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}| = 2d$ и $|\mathcal{B}| \cdot |\mathcal{A}| \leq 4d^2$, что меньше $(d+1) 2^d$ для $d \geq 4$. При $d = 3$ неравенство $|\mathcal{B}| \cdot |\mathcal{A}| \leq 32$ не может вырождаться, так как $|\mathcal{A}| = 6$. Наконец, в случае $d = 2$ мы имеем $|\mathcal{A}_1| = 2^d$ как в i).

- б) $\mathcal{B}_* = \emptyset$. Тогда $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ и, следовательно, $\dim(\text{span}(\mathcal{B}_1)) = d$. В таком случае

$$(\forall b \in \mathcal{B}_1 \exists \xi : \forall a \in \mathcal{A}_1 \langle a, b \rangle = \xi) \Rightarrow \dim(\mathcal{A}_1) \leq d - \dim(\text{span}(\mathcal{B}_1)) = 0 \Rightarrow |\mathcal{A}_1| = 1$$

Как и в б), для вырождения неравенства по предположению индукции необходимо одно из двух:

- i) $|\mathcal{A}_0| = d$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d+1)^2 < (d+1) 2^d$.
 ii) $|\mathcal{A}_0| = 2^{d-1}$, $|\pi(\mathcal{B})| = d$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = 2d(2^{d-1} + 1)$, что меньше $(d+1)2^d$ для $d > 2$. При $d = 2$ же $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}|^2 = 9 < 3 \cdot 2^2$.

□

Улучшим оценку для семейств, отличающихся от экстремального примера. Докажем для этого вспомогательное

Неравенство 3. Для целого $2 \leq f \leq d$ выполняется $(d+f)(2^{d-1} + 2^{d-f}) \leq d 2^d + 2d$.

Доказательство. Доказываем индукцией по d : при $d = k$ выполнено равенство, проведём шаг от d к $d+1$. Обозначая левую и правую стороны неравенства $l(d, f)$ и $r(d, f)$ соответственно, имеем

$$\begin{aligned} r(d+1, f) - l(d+1, f) &\geq (r(d+1, f) - r(d, f)) - (l(d+1, f) - l(d, f)) \\ &= (d 2^d + 2^{d+1} + 2) - (d+f+2)(2^{d-1} + 2^{d-f}) \\ &= 2^{d-f} (d-f+2) \left(2^{f-1} - 1 - \frac{2f}{d-f+2} \right) + 2 \\ &\geq 2^{d-f} (d-f+2) (2^{f-1} - 1 - f) \end{aligned}$$

Полученное выражение неотрицательно при $f > 2$. Для $f = 2$, $d \geq 4$ выполняется $2^{f-1} - 1 - \frac{2f}{d-f+2} \geq 0$, и для $f = 2$, $d = 2, 3$ изначальное неравенство проверяется явно. \square

Лемма 2. Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис \mathbb{R}^d и $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Если при этом семейства максимальны по включению и размер каждого хотя бы $d + 2$, то $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d + \lambda(d)) 2^d$, где $0 < \lambda(d) \leq 1$ — некая (нестрого) убывающая функция.

Доказательство. $\lambda(d)$ будем обозначать λ_d . Как и в доказательстве леммы 1, будем вести индукцию по d . Для базы можно выбрать $\lambda = 1$, предполагая верность для меньших размерностей, докажем утверждение для d . Рассматриваем возможные значения $\dim U_0$:

1. $\dim U_0 < d - 2$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (\dim U_0 + 3) 2^d \leq d 2^d$
2. $\dim U_0 = d - 2$. Применяя предположение индукции и лемму 1 для семейств $\tau(\pi(\mathcal{B}))$ и \mathcal{A}_0 , имеем три варианта:
 - а) \mathcal{A}_0 афинно изоморфно $\{0, 1\}^{d-2}$, $\tau(\pi(\mathcal{B}))$ состоит из нуля и базиса U_0 . Из утверждения 5 и предположения 0, $b_d \in \mathcal{B}_1$ следует $|\mathcal{B}_0| \leq 2$. С учётом чётности $|\mathcal{B}_0|$ имеется два варианта:
 - i) $|\mathcal{B}_0| = 0$. Тогда из неравенства 1 и утверждения 5 получаем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 4(d-1) 2^{d-2} + 2^d = d 2^d$$

- ii) $|\mathcal{B}_0| = 2$. Пусть в $\tau(\pi(\mathcal{B}))$ имеется $k + 1$ векторов с двумя прообразами под действием τ ($k \geq 0$, так как $\mathcal{B}_0 \subset U_0^\perp$ не пусто). Из этих $k + 1$ обозначим через t_2 количество тех, у которых оба прообраза лежат в $\pi(\mathcal{B}_1)$, а через t_1 — тех, у которых в $\pi(\mathcal{B}_1)$ ровно один из прообразов. У $k - t_1 - t_2$ оба прообраза лежат в $\pi(\mathcal{B}_*)$. Пусть так же вектора $\tau(\pi(\mathcal{B}))$ с одним прообразом под действием τ состоят из q проекций $\pi(\mathcal{B}_1)$ и $d - 2 - k - q$ проекций $\pi(\mathcal{B}_*)$. Имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &= |\mathcal{B}_*| + |\mathcal{B}_0| + |\mathcal{B}_1| \\ &= (k - t_1 - 2t_2 + d - 2 - q) + 2 + (2 + 4t_2 + 2t_1 + 2q) \\ &= d + k + q + t_1 + 2t_2 + 2 \end{aligned}$$

Рассмотрим для начала случай $t_2 > 0$. Тогда $U_0^\perp \subset \text{span}(\mathcal{B}_1)$, поэтому

$$\begin{aligned} \dim(\text{span}(\mathcal{B}_1)) &= t_1 + t_2 + q + 2 \implies |\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-t_1-t_2-q-2}, \\ |\mathcal{A}| &= |\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-2} + 2^{d-2-t_1-t_2-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| &\leq (2^{d-2} + 2^{d-2-t_1-t_2-q}) (d + k + q + t_1 + 2t_2 + 2) \\ &\leq (2^{d-2} + 2^{d-2-t_1-t_2-q}) (2d + t_1 + 2t_2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\leq (2^{d-1} + 2^{d-1-t_1-t_2-q}) (d + t_1 + t_2) \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} &\leq (2^{d-1} + 2^{d-1-t_1-t_2}) (d + t_1 + t_2 + 1) \\ &\leq d 2^d + 2d \end{aligned} \quad (3.4)$$

Где второе неравенство следует из $k + q \leq d - 2$, а последнее из неравенства 3. При $t_2 = 0$ немного более слабая оценка

$$\dim(\text{span}(\mathcal{B}_1)) \geq t_1 + t_2 + q + 1$$

означает что 3.3 становится $(2^{d-1} + 2^{d-t_1})(d + t_1)$, что не больше 3.4 при $t_1 \geq 2$ по неравенству 3. Наконец, при $t_2 = 0$ и $t_1 = 0, 1$ выражение 3.2 даёт оценки $d2^d$ и $(2^{d-2} + 2^{d-3})(2d + 1) = d2^d - (d - \frac{3}{2})2^{d-2} \leq d2^d$ соответственно.

б) \mathcal{A}_0 состоит из нуля и базиса U_0 . Тогда

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}|^2 \leq 4(d - 1)^2 \leq d2^d + 2d$$

в) $|\mathcal{A}_0| \cdot |\tau(\pi(\mathcal{B}))| \leq (d - 2 + \lambda_{d-2})2^{d-2}$. Тогда пользуясь неравенствами 1, 2 и утверждением 3 имеем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 4 \cdot (d - 2 + \lambda_{d-2})2^{d-2} + 2 \cdot 2^d = (d + \lambda_{d-2})2^d$$

3. $\dim U_0 = d - 1$. Вновь применяя предположение индукции к $\pi(\mathcal{B})$ и \mathcal{A}_0 , имеем три варианта (помним, что из предположения $0, b_d \in \mathcal{B}_1$ имеем $\mathcal{B}_0 = \emptyset$):

а) \mathcal{A}_0 изоморфно $\{0, 1\}^{d-1}$, $\pi(\mathcal{B})$ – базис с нулём.

i) $\dim \mathcal{B}_1 = 1$. В этом случае $|\mathcal{B}| = d + 1$, то есть условие из формулировки леммы не выполнено.

ii) $\dim \mathcal{B}_1 = k \geq 2$. Тогда $|\mathcal{B}_1| = 2k$, $|\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-k}$ и мы имеем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (2^{d-1} + 2^{d-k})(d + k) \leq d2^d + 2d$$

по неравенству 3.

б) $|\mathcal{A}_0| = d$. Тогда $|\mathcal{A}|^2 \leq 4d^2$, что не больше $d2^d + 2d$ для $d > 3$. 2

в) $|\mathcal{A}_0| \cdot |\pi(\mathcal{B})| \leq (d - 1 + \lambda_{d-1})2^{d-1}$. Финальный раз из неравенства 1 и утверждения 5 получаем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 2 \cdot (d - 1 + \lambda_{d-1})2^{d-1} + 2^d = (d + \lambda_{d-1})2^d.$$

□

Найдём теперь оптимальное значение $\lambda(d)$ из леммы 2:

Лемма 3. Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис \mathbb{R}^d и $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Если при этом семейства максимальны по включению и размер каждого хотя бы $d + 2$, то $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq d2^d + 2d$.

Доказательство. Будем вновь вести индукцию по d и без ограничения общности считать $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{B}|$, для $d < 3$ оценка совпадает с теоремой 1. Желаемая оценка уже получена во всех подслучаях доказательства леммы 2, за исключением двух индукционных шагов – 2в) и 3в), поэтому достаточно получить нужную оценку в них:

2в') $|\mathcal{A}_0| \cdot |\tau(\pi(\mathcal{B}))| \leq 2(d-2)(2^{d-3}+1)$. Пользуясь неравенствами 1, утверждением 3 и 3.1 имеем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 4 \cdot (d-2)(2^{d-2}+2) + 2 \cdot 2^d - 2|\mathcal{A}_0| = 2d(2^{d-1}+1) + 2(3d-8-|\mathcal{A}_0|)$$

Это завершает доказательство при $|\mathcal{A}_0| \geq 3d-8$ в противном случае:

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 4|\mathcal{A}_0|^2 \leq 4(3d-8)^2$$

Это меньше $d2^d + 2d$ при всех d кроме $d=5, 6$. Для них что-то легко улучшится...

3в') Оба $|\mathcal{A}_0|$ и $|\pi(\mathcal{B})|$ имеют размер хотя бы $d+1$. По предположению индукции $|\mathcal{A}_0| \cdot |\pi(\mathcal{B})| \leq (d-1)(2^{d-1}+2)$. Тогда из утверждения 2, 5 и того что $\mathcal{B}_0 = \emptyset$ следует

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = 2|\mathcal{A}_0| |\pi(\mathcal{B})| + |\mathcal{A}_1| |\mathcal{B}_1| - (|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|) |\mathcal{B}_*| \quad (3.5)$$

$$\leq 2(d-1)(2^{d-1}+2) + |\mathcal{A}_1| |\mathcal{B}_1| - (|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|) |\mathcal{B}_*| \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} &\leq 2(d-1)(2^{d-1}+2) + 2^d - (|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|) |\mathcal{B}_*| \\ &= d2^d + 2d - (|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|) |\mathcal{B}_*| + (2d-4) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Поэтому достаточно, например, показать $(|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|) |\mathcal{B}_*| \geq 2d-4$.

Рассмотрим случай $\dim A_1 = d-1$: тогда $\mathcal{B}_1 = \{0, b_d\}$, и пользуясь

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = |\mathcal{A}| |\pi(\mathcal{B})| + |\mathcal{A}| \cdot \frac{1}{2} |\mathcal{B}_1| \leq d2^d + 2d - 2^d + |\mathcal{A}| + (2d-4)$$

Получаем желаемое неравенство при $|\mathcal{A}| \leq 2^d - 2d + 4$. $|\mathcal{A}| > 2^d - 2d + 4$ действительно невозможно, ведь тогда

$$|\mathcal{A}_0| \cdot |\pi(\mathcal{B})| > (2^{d-1} - d + 2) \cdot (d+1) \geq (d-1)(2^{d-1}+2)$$

что противоречит предположению индукции. Таким образом далее можем считать $\dim A_1 < d-1$. Заметим, что вследствие этого также можно полагать $|\mathcal{A}_0| > |\mathcal{A}_1|$, ведь если $|\mathcal{A}_0| = |\mathcal{A}_1|$, то можно изначально сдвинуть семейство \mathcal{A} и поменять знаки некоторых векторов \mathcal{B} так, чтобы все условия остались в силе, а \mathcal{A}_0 и \mathcal{A}_1 поменялись местами, сводя ситуацию к случаю где $\dim U_0 < d-1$.

Рассмотрим ортогональную проекцию $\pi_{\mathcal{B}_1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \text{span}(\mathcal{B}_1)$. В силу определения \mathcal{A}_1 мы имеем $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_1)| = 1$. Обозначим $k = \dim(\text{span}(\mathcal{B}_1))$. Так как \mathcal{B} содержит базис \mathbb{R}^d , мы имеем

$$|\mathcal{B}_*| \geq d-k, \quad (|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|) |\mathcal{B}_*| \geq d-k \quad (3.8)$$

Разберёмся с одним крайним случаем, прежде чем перейти к чуть более систематическому перебору, а именно поймём, что мы можем полагать $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)| = k$: во-первых, $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)| \geq k$ так как $0 \in \mathcal{A}_0$ и $\text{span}(\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)) = \text{span}(\pi_{\mathcal{B}_1}(\text{span}(\mathcal{A}_0))) = \text{span}(\mathcal{B}_1) \cap b_d^\perp$, то есть $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)$ содержит 0 и базис $(k-1)$ -мерного пространства. Во-вторых, если $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)| \geq k+1$ то применяя теорему 1 к \mathcal{B}_1 и $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})$ имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_1| \cdot |\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})| &\leq (k+1)2^k, \quad |\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})| \geq k+2 \Rightarrow |\mathcal{B}_1| \leq 2^k \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) \Rightarrow \\ |\mathcal{B}_1| |\mathcal{A}_1| &\leq 2^d \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) \Rightarrow |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq d2^d + 2d + (2d-4) - \frac{2^d}{k+2} - (d-k) \end{aligned}$$

что доказывает необходимую оценку для всех $d \notin \{3, 4, 5\}$, так как при $d \geq 6$

$$d + k - 4 - \frac{2^d}{k+2} \leq 2d - 4 - \frac{2^d}{d+2} = -\frac{2}{d+2} (2^{d-1} - (d+2)(d-2)) \leq 0$$

Итак, мы можем полагать $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)| = k$, то есть $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)$ состоит из нуля и базиса $\text{span}(\mathcal{B}_1) \cap b_d^\perp$, а $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})$ — из нуля и базиса $\text{span}(\mathcal{B}_1)$. Произведём перебор по возможным значениям k :

- i) $k = 1$, то есть $\mathcal{B}_1 = \{0, b_d\}$. Так как $\dim \mathcal{A}_1 < d - 1$, из доказательства утверждения 5 следует $|\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-2}$. Подставляя это в 3.6 получаем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq d2^d + 2d + (2d - 4 - 2^{d-1}) \leq d2^d + 2d$$

- ii) $k = 2$. Из доказательства утверждения 5 следует, что $|\mathcal{B}_1| \leq 4$ и $|\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-2}$. Вследствие 3.9 $|\mathcal{B}_*| \geq d - 2$, так что если $|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| \geq 2$, 3.7 даёт нужную оценку. Аналогично 3.7 завершает доказательство если $|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| = 1$ и $|\mathcal{B}_*| \geq 2d - 4$. Если же $|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| = 1$ и $|\mathcal{B}_*| < 2d - 4$, то

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = (2|\mathcal{A}_1| + 1) \cdot (|\mathcal{B}_*| + |\mathcal{B}_1|) < (2^{d-1} + 1) \cdot (2d - 4 + 4) = d2^d + 2d$$

- iii) $k = d$ и $\mathcal{B}_* = \emptyset$. Отметим, что в силу 3.8 $\mathcal{B}_* = \emptyset$ невозможно при других значениях k . По определению \mathcal{B}_1 из его полноразмерности следует, что \mathcal{A}_1 состоит из лишь одной точки, поэтому 3.6 превращается в

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 2(d-1)(2^{d-1} + 2) + |\mathcal{B}|$$

что завершает доказательство при $|\mathcal{B}| \leq 2^d - 2d + 4$. Обратное действительно невозможно, ведь тогда получается противоречие с теоремой 1:

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \geq |\mathcal{B}|^2 \geq (2^d - 2d + 4)^2 > (d+1)2^d$$

- iv) $2 < k \leq d$ и $\mathcal{B}_* \neq \emptyset$. Обозначим элементы $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})$ как $a_0 = 0, a_1, \dots, a_k$, а их прообразы при проекции как $\mathbb{A}_j = \pi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(a_j)$, нумерацию выберем так чтобы $\mathbb{A}_1 = \mathcal{A}_1$. Пусть $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}$ — базис \mathcal{B}_1 , двойственный a_1, \dots, a_k . В соответствии с выбором нумерации, $b_{11} = b_d$. Заметим, что в силу максимальности \mathcal{B} по включению все b_{1j} лежат в \mathcal{B}_1 (иначе их, вместе с $b_{1j} + b_d$ для $j > 1$, можно было добавить в \mathcal{B}). Если $\dim \mathcal{A}_1 < d - k$, то подобно пункту i) получаем $|\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-2}$ и желаемую оценку, так что далее можно считать $\dim \mathcal{A}_1 = d - k$. Мы запишем \mathcal{A} в удобном базисе и увидим, что благодаря $\dim \mathcal{A}_1 = d - k$ каждый из векторов b_{1j} можно выбрать в качестве b_d в самом начале рассуждения, и удачный выбор приведёт к уже рассмотренному случаю или к достаточно сильной нижней оценке на $(|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|)|\mathcal{B}_*|$. Итак, дополним $\{b_{11}, \dots, b_{1k}\}$ элементами \mathcal{B}_* до базиса \mathbb{R}^d и запишем \mathcal{A} в двойственном базисе. Вместе вектор-столбцы \mathcal{A} тогда будут выглядеть как

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbb{A}_0 & \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_2 & \dots & \mathbb{A}_k \\ \hline \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} 1 \ 1 \dots 1 \ 1 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \ 0 \dots 0 \ 0 \\ 1 \ 1 \dots 1 \ 1 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \dots & \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ 1 \ 1 \dots 1 \ 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\ \hline \vdots & \underbrace{\vdots}_{\dim = d - k} & \vdots & \dots & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{l} k \\ \\ d - k \end{array}$$

Ранк серого блока совпадает с аффинной размерностью $\mathbb{A}_1 = \mathcal{A}_1$, то есть равен $d - k$, поэтому

$$\forall j > 1: d - 1 = \dim(\text{span}(\mathcal{A} \setminus \mathbb{A}_j)) = \dim(\mathcal{A} \cap b_{1j}^\perp)$$

А значит, действительно, любой из b_{1j} может быть изначально выбран в качестве b_d . Выберем b_{1j} с минимальным размером \mathbb{A}_j и повторим все рассуждения с ним в качестве b_d . Отметим, что тогда $|\mathcal{A} \setminus \mathbb{A}_j| > |\mathbb{A}_j|$, поэтому сдвига \mathcal{A} , меняющего местами \mathcal{A}_0 и \mathcal{A}_1 , произведено не будет, и в результате мы просто можем полагать

$$\begin{aligned} \forall j > 1: |\mathbb{A}_1| \leq |\mathbb{A}_j| &\implies \\ |\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| = |\mathbb{A}_0| + \sum_{j>1} |\mathbb{A}_j| &\geq (k-1) |\mathcal{A}_1| \geq 2 |\mathcal{A}_1| \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если $|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| \geq 2d - 4$, то из непустоты \mathcal{B}_* и 3.7 следует желаемая оценка. Иначе

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| < 2d - 4 &\stackrel{3.9}{\implies} |\mathcal{A}| < 2 \cdot (2d - 4) \implies \\ |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}|^2 &< (4d - 8)^2 < d2^d + 2d, \end{aligned}$$

завершая доказательство. □

Приведём примеры, демонстрирующие точность оценки в лемме 3:

Пример 1 (Куб с щупальцами). Обозначая стандартный базис $\{e_i\}$,

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=2}^d \delta_i e_i \right\} \cup \{e_1\}, \mathcal{B} = \{\delta_1 e_1 + e_j\} \cup \{e_1, 0\}, \text{ где } \delta_i \text{ пробегают } \{0, 1\} \text{ и } j > 1.$$

Здесь $|\mathcal{A}| = 2^{d-1} + 1$ и $|\mathcal{B}| = 2d$.

Пример 2 (Кросс-политоп). Обозначая стандартный базис $\{e_i\}$,

$$\mathcal{A} = \left\{ e_d + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i e_i \right\} \cup \{0\}, \mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2} (e_d + \varepsilon_i e_i) \right\}, \text{ где } \varepsilon_i \text{ пробегают } \{-1, 1\}.$$

Как и в примере 1, $|\mathcal{A}| = 2^{d-1} + 1$ и $|\mathcal{B}| = 2d$.

Глава 4

Следствия для двухуровневых политопов

В [4] из теоремы 1 выводилась

Теорема 3. *Для любого d -мерного двухуровневого политопы P выполняется*

$$f_0(P)f_{d-1}(P) \leq d2^{d+1}.$$

Равенство в этой теореме достигается на d -мерных кубе и кросс-политопе. Продемонстрируем стабильность этого результата, пользуясь леммой 3:

Лемма 4. *При $d > 1$ для любого d -мерного двухуровневого политопы P , не являющегося кубом или кросс-политопом, выполняется*

$$f_0(P)f_{d-1}(P) \leq (d-1)2^{d+1} + 8(d-1)$$

Доказательство. Обозначим для краткости число вершин P как $V = f_0(P)$ и число гиперграней как $F = f_{d-1}(P)$. Сдвинув □

Глава 5

Заключение

TBD

Литература

- [1] *Aprile, Manuel*. On 2-Level Polytopes Arising in Combinatorial Settings / Manuel Aprile, Alfonso Cevallos, Yuri Faenza // *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. — 2018. — Vol. 32, no. 3. — Pp. 1857–1886.
- [2] *Fiorini, Samuel*. Two-Level Polytopes with a Prescribed Facet / Samuel Fiorini, Vissarion Fisikopoulos, Marco Macchia. — 2016. — Pp. 285–296.
- [3] *Adam Bohn Yuri Faenza, Samuel Fiorini Vissarion Fisikopoulos Marco Macchia Kanstantsin Pashkovich*. Enumeration of 2-level polytopes / Samuel Fiorini Vissarion Fisikopoulos Marco Macchia Kanstantsin Pashkovich Adam Bohn, Yuri Faenza // *Mathematical Programming Computation*. — 2018. — Vol. 11.
- [4] *Andrey Kupavskii, Stefan Weltge*. Binary scalar products / Stefan Weltge Andrey Kupavskii // *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. — 2022. — Vol. 156.
- [5] *Kupavskii, Andrey*. Octopuses in the Boolean cube: Families with pairwise small intersections, part I / Andrey Kupavskii, Fedor Noskov // *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. — 2023.
- [6] *Alon, Noga*. The Probabilistic Method / Noga Alon, Joel H. Spencer. — Second edition. — New York: Wiley, 2004.