

Семейства с бинарными скалярными произведениями

Царёв Дмитрий Вячеславович

Научный руководитель: Купавский Андрей Борисович

Июнь 2023

Мотивация

Двухуровневые многогранники
Изящное применение корреляции

Попытки применения корреляции в \mathbb{R}^d

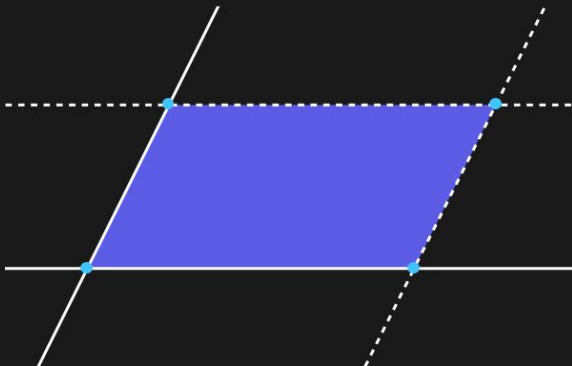
Стабильность оценки произведения

Заключене

Двухуровневые многогранники

Определение

Многогранник P двухуровневый, если любая гиперплоскость H , определяющую гипергрань, вместе с её параллельным переносом H' покрывает все вершины P .



Двухуровневые многогранники

Определение

Многогранник P двухуровневый, если любая гиперплоскость H , определяющую гипергрань, вместе с её параллельным переносом H' покрывает все вершины P .

Пример

Симплекс, (гипер)куб, кросс-политоп – двухуровневые.

Пример

Трапеция, не являющаяся параллелограммом – не двухуровневый.

Пример

Семейства политопов Биркгофа, Ханнера, политопы порядка и политопы цепей для частично упорядоченных множеств, политопы стабильных браков и политопы антиклик совершенных графов.

Структура двухуровневых многогранников

Легко видеть, что у d -мерного двухуровневого не больше 2^d вершин и не больше 2^d гиперграней. Оказывается, одновременно большими эти числа быть не могут.

Гипотеза (Bohn et. al., 2015)

Если P – d -мерный двухуровневый многогранник с $f_0(P)$ вершинами и $f_{d-1}(P)$ гипергранями, то $f_0(P)f_{d-1}(P) \leq d2^{d+1}$

Структура двухуровневых многогранников

Легко видеть, что у d -мерного двухуровневого не больше 2^d вершин и не больше 2^d гиперграней. Оказывается, одновременно большими эти числа быть не могут.

Гипотеза (Bohn et. al., 2015)

Если P – d -мерный двухуровневый многогранник с $f_0(P)$ вершинами и $f_{d-1}(P)$ гипергранями, то $f_0(P)f_{d-1}(P) \leq d2^{d+1}$

Окончательно доказана с помощью теоремы

Теорема (Kuravskii, Weltge, 2022)

Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис \mathbb{R}^d и $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$. Тогда

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d + 1)2^d$$

Применение корреляции

В случае, если семейства набираются из булевого куба $\{0, 1\}^d$, у теоремы есть изящное доказательство с применением корреляционного неравенства.

Лемма (Простейшее корреляционное неравенство)

Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} – замкнутые вниз (по включению) семейства подмножеств d -элементного множества. Тогда

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \cdot 2^d$$

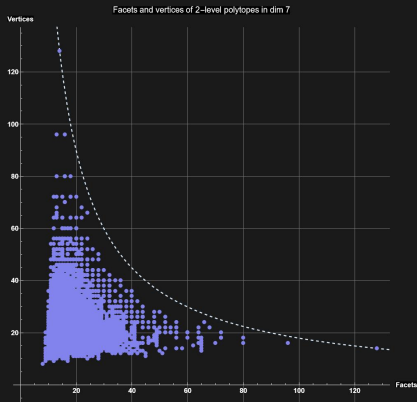
Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \{0, 1\}^d$ и $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d + 1)2^d$.

Краткое доказательство: рассматриваем вектора как подмножества d -элементного множества, замыкаем вниз и применяем неравенство.

Вопросы

1. Можно ли применить подход с корреляцией к векторам в \mathbb{R}^d и получить оценку, близкую к $(d + 1)2^d$? Если да, обобщаются ли далее результаты для большего числа семейств и другие?
2. Стабильность оценки произведения: как улучшить оценку для семейств, не похожих на экстремальный пример?



Дискретизация, частичный порядок

Замечательным образом оказывается, что семейства с бинарными скалярными произведениями с точностью до линейных преобразований можно закодировать 0-1 векторами:

Лемма

Семействам $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$ с бинарными скалярными произведениями соответствуют семейства $\mathcal{A}_{01}, \mathcal{B}_{01} \subset \{0, 1\}^d$ такие что

$$\forall a_{01} \in \mathcal{A}_{01}, b_{01} \in \mathcal{B}_{01} : \langle a_{01}, B_{01}^{-1} b_{01} \rangle \in \{0, 1\}$$

где B_{01} — обратимая матрица из нулей и единиц.

Теперь на элементах $\{0, 1\}^d$ можно завести отношение частичного порядка такое что \mathcal{A}_{01} и \mathcal{B}_{01} относительно его можно замкнуть вниз.

Детали построения частичного порядка

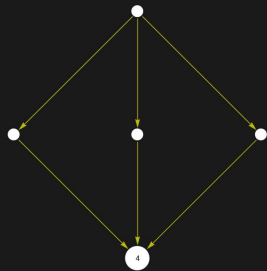
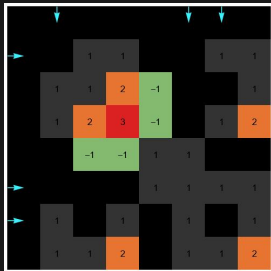
Пусть C — матрица размера $d \times 2^d$, столбцы которой — все элементы $\{0, 1\}^d$. Определим $G = G(B_{01}) = C^T B_{01}^{-1} C$. Индексируя столбцы и строки G элементами $\{0, 1\}^d$, введём для $x \in \{0, 1\}^d$

$$R_x = \left\{ y \in \{0, 1\}^d : G_{y,x} \in \{0, 1\} \right\},$$

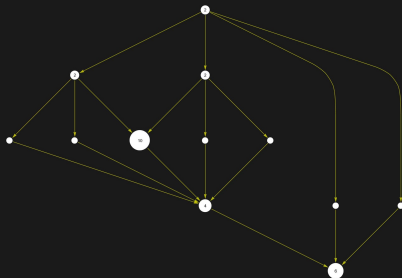
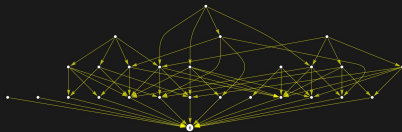
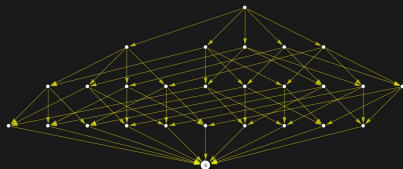
$$x \sim_R y \iff R_x = R_y, \quad [x] \leq_R [y] \iff R_x \supseteq R_y.$$

Для простоты пусть B_{01} симметрична, тогда \leq_R задаёт нужное отношение частичного порядка на классах эквивалентности.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Примеры частично упорядоченных множеств



Препятствия к применению корреляции

Препятствие

Получаемые частично упорядоченные множества не всегда являются дистрибутивными решётками. Более того, они не всегда являются полурешётками.

Препятствие

Количество элементов $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ может быть экспоненциально большим.

Лемма

Пусть B_{01} имеет единицы на побочной диагонали и выше неё, а нули ниже неё. Тогда количество $x \in \{0, 1\}^d$, таких что $\langle x, B_{01}^{-1} x \rangle \in \{0, 1\}$, равно $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Стабильность оценки произведения

Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис \mathbb{R}^d и $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$

Теорема

$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = (d+1)2^d$ только если $|\mathcal{B}| = d+1$, а \mathcal{A} афинно изоморфно $\{0, 1\}^d$ (или наоборот).

Основной новый результат:

Теорема

Если семейства \mathcal{A} и \mathcal{B} максимальны по включению и размер каждого хотя бы $d+2$, то $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq d2^d + 2d$.

Достигается, например, на

$$\mathcal{A} = \left\{ e_d + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i e_i \right\} \cup \{0\}, \mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2} (e_d + \varepsilon_i e_i) \right\}$$

Где ε_i пробегает $\{-1, 1\}$ и e_i — стандартный базис \mathbb{R}^d .







1. Задача оценки произведения размеров семейств с бинарными скалярными произведениями сведена к конечному перебору, исследованы возникающие частично упорядоченные множества, найдены препятствия к применению корреляции.
2. Доказана точная оценка для произведения размеров семейств, отличных от «базиса и куба», и несколько других результатов о стабильности оценки $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$.

Гипотеза

Количество неизоморфных частично упорядоченных множеств, возникающих из всевозможных симметричных $B_{01} \in \text{Mat}_{d \times d}$ равно $|\text{Gr}([\frac{d}{2}], \mathbb{F}_2^d)|$, то есть равно гауссовому биномиальному коэффициенту $\binom{d}{k}_q$ с $q = 2$ и $k = [\frac{d}{2}]$.

Гипотеза

Пусть натуральные d и $k \leq d$ таковы что $2^{d-k} + k > 2^k(d - k + 1)$, оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис \mathbb{R}^d и $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, при этом каждое из \mathcal{A} и \mathcal{B} имеют размер строго больше $2^{k-1}(d - k + 2)$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d - k + 1)2^k(2^{d-k} + k)$.

-  Noga Alon and Joel H. Spencer.
The Probabilistic Method.
Wiley, New York, second edition, 2004.
-  Manuel Aprile, Alfonso Cevallos, and Yuri Faenza.
On 2-level polytopes arising in combinatorial settings.
SIAM Journal on Discrete Mathematics, 32(3):1857–1886, 2018.
-  Adam Bohn, Yuri Faenza, Samuel Fiorini, Vissarion Fisikopoulos, Marco Macchia, and Kanstantsin Pashkovich.
Enumeration of 2-level polytopes.
Mathematical Programming Computation, 11, 2018.
-  Samuel Fiorini, Vissarion Fisikopoulos, and Marco Macchia.
Two-level polytopes with a prescribed facet.
In Raffaele Cerulli, Satoru Fujishige, and A. Ridha Mahjoub, editors,
Combinatorial Optimization, pages 285–296, Cham, 2016. Springer
International Publishing.
-  Andrey Kupavskii and Fedor Noskov.
Octopuses in the boolean cube: Families with pairwise small
intersections, part i.
Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2023.
-  Andrey Kupavskii and Stefan Weltge.
Binary scalar products.
Journal of Combinatorial Theory, Series B, 156, 2022.