Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра математических основ методов современной физики

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Семейства векторов с бинарными скалярными произведениями

Автор:
Студент 922 группы
Царёв Дмитрий Вячеславович

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук
Купавский Андрей Борисович

Москва, 2023

Аннотация

Семейства векторов с бинарными скалярными произведениями
Царёв Дмитрий Вячеславович

Вопросы, связанные с оценками числа вершин и граней двухуровневых политопов, мотивируют изучение семейств векторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ таких что $\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ скалярное произведение $\langle a, b \rangle \in \{0{,}1\}$. В данной работе приведены некоторые подходы к работе с такими семействами и получены некоторые улучшения оценки на произведение размеров таких семейств $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$.

Abstract

Questions on possible vertex and face numbers of two-level polytopes motivate the study of vector families $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ with a property that $\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ the dot product $\langle a, b \rangle \in \{0{,}1\}$. This work gives some approaches to dealing with such families and obtains some improvements on bounds for the product $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$.

Оглавление

Глава 1

Введение и постановка задачи

TBD

Глава 2

Существующие результаты

TBD

Глава 3

Дискретизация задачи, препятствия в применении корреляции

TBD

Глава 4

Улучшения оценки для больших семейств

Для полноты приведём обозначения и промежуточные результаты, доказанные в [1].

Теорема 1. *Пусть оба $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ содержат базис $\mathbb{R}^d$ и $\langle a, b\rangle \in \{0{,}1\}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d+1)2^d$.*

Обозначим $b_d \in \mathcal{B}$ вектор, с максимальным значением $\max(\dim \mathcal{A}_0, \dim \mathcal{A}_1)$, где $\mathcal{A}_i = \{a \in \mathcal{A} : \langle a, b_d\rangle = i\}$ для $i = 0, 1$. Ортогональную проекцию на $U = b_d^{\perp}$ обозначим $\pi : \mathbb{R}^d \to U$.

Утверждение 1. *Параллельным перенесом $\mathcal{A}$ и заменой некоторых векторов $\mathcal{B}$ на противоположные можно добиться того что*

1. *$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \sqcup \mathcal{A}_1$ и $|\mathcal{A}_0| \geq |\mathcal{A}_1|$*
2. *Всё ещё $\langle a, b\rangle \in \{0{,}1\}$ для любого $a \in \mathcal{A}_0$ и $b \in \mathcal{B}$*
3. *Множество $\pi(\mathcal{B})$ не содержит противоположных точек.*

Утверждение 2. *Каждая точка $\pi(\mathcal{B})$ имеет не более двух прообразов в $\mathcal{B}$.*

Неравенство 1. $|\mathcal{A}|\,|\mathcal{B}| \leq 2\,|\mathcal{A}_0|\,|\pi(\mathcal{B})| + |\mathcal{A}_1|\,|\mathcal{B}\backslash\mathcal{B}_*|$

Линейную оболочку $\mathcal{A}_0$ обозначим U_0 и введём ортогональную проекцию $\tau : U \to U_0$. Через $\mathcal{B}_* \subseteq \mathcal{B}$ обозначим множество $b \in \mathcal{B}$ для которых $\pi(b)$ имеет ровно один прообраз при проекции на U.

Утверждение 3. $|\pi(\mathcal{B})| \leq 2^{d-1-\dim U_0}\,|\tau(\pi(\mathcal{B}))|$.

Утверждение 4. $\mathcal{B}\backslash\mathcal{B}_* = \mathcal{B}_0 \sqcup \mathcal{B}_1$ *с выполнением для* $i = 0, 1$

$$\forall b \in \mathcal{B}_i : |\{\langle a, b\rangle : a \in \mathcal{A}_i\}| = 1$$

Утверждение 5. *Для $i = 0, 1$ выполняется $|\mathcal{A}_i|\,|\mathcal{B}_i| \leq 2^d$.*

Неравенство 2. $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (\dim U_0 + 1)\,2^d + |\mathcal{A}_0|\,|\mathcal{B}_0| + |\mathcal{A}_1|\,|\mathcal{B}_1|$

Поймём, на каких семействах в теореме 1 достигается равенство. Без ограниения общности будем полагать $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{B}|$.

Лемма 1. $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = (d+1)2^d$ *только если* $|\mathcal{B}| = d+1$, *а* $\mathcal{A}$ *афинно изоморфно* $\{0{,}1\}^d$.

Доказательство. Будем вести индукцию по d, в размерности 1 утверждение очевидно. Предпологая выполнение леммы в размерностях меньших d, докажем её в размерности d. Разобьём случаи по значению $\dim U_0$:

1. $\dim U_0 < d-2$. Тогда из неравенства 2 и утверждения 5
$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (\dim U_0 + 3)\, 2^d \leq d2^d$$
2. $\dim U_0 = d-2$. Заметим, что мы можем свободно полагать $0, b_d \in \mathcal{B}_0$ или $0, b_d \in \mathcal{B}_1$, поэтому из доказательства утверждения 5 следует
$$|\mathcal{A}_1|\, |\mathcal{B}_1| \leq 2^d,\ |\mathcal{A}_0|\, (|\mathcal{B}_0| + 2) \leq 2^d$$
Поэтому по неравенству 2 и утверждению 5
$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d-1)\, 2^d + 2 \cdot 2^d - 2\, |\mathcal{A}_0| \leq (d+1)\, 2^d - |\mathcal{A}| < (d+1)\, 2^d$$
3. $\dim U_0 = d-1$. Тогда, полагая $0, b_d \in \mathcal{B}_1$, имеем $\mathcal{B}_0 = \varnothing$. Рассмотрим два случая:
   а) $\mathcal{B}_* \neq \varnothing$. Тогда для вырождения неравенства 1 в равенство необходимо $|\mathcal{A}_0| = |\mathcal{A}_1|$, а для вырождения неравенства 2 – $|\mathcal{A}_0|\, |\pi(\mathcal{B})| = d2^{d-1}$. По предположению индукции последнее возможно в одном из двух случаев:
      i) $\mathcal{A}_0$ афинно изоморфно $\{0{,}1\}^{d-1}$. Тогда $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| = 2^d$, что возможно только если $\mathcal{A}$ афинно изоморфно $\{0{,}1\}^d$, $\mathcal{B}$ может состоять только из базиса и нуля.
      ii) $|\mathcal{A}_0| = d$. Тогда $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}| = 2d$ и $|\mathcal{B}| \cdot |\mathcal{A}| \leq 4d^2$, что меньше $(d+1)\, 2^d$ для $d \geq 4$. При $d = 3$ неравенство $|\mathcal{B}| \cdot |\mathcal{A}| \leq 32$ не может вырождаться, так как $|\mathcal{A}| = 6$. Наконец, в случае $d = 2$ мы имеем $|\mathcal{A}_1| = 2^d$ как в i).

   б) $\mathcal{B}_* = \varnothing$. Тогда $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ и, следовательно, $\dim(\operatorname{span}(\mathcal{B}_1)) = d$. В таком случае
$$(\forall b \in \mathcal{B}_1\ \exists \xi : \forall a \in \mathcal{A}_1\ \langle a{,}b\rangle = \xi) \Rightarrow \dim(\mathcal{A}_1) \leq d - \dim(\operatorname{span}(\mathcal{B}_1)) = 0 \Rightarrow |\mathcal{A}_1| = 1$$
   Как и в б), для вырождения неравенства по предположнию индукции необходимо одно из двух:
      i) $|\mathcal{A}_0| = d$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d+1)^2 < (d+1)\, 2^d$.
      ii) $|\mathcal{A}_0| = 2^{d-1}$, $|\pi(\mathcal{B})| = d$. Тогда $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = 2d\left(2^{d-1} + 1\right)$, что меньше $(d+1)2^d$ для $d > 2$. При $d = 2$ же $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}|^2 = 9 < 3 \cdot 2^2$.

□

Улучшим оценку для семейств, отличающихся от экстремального примера.

Лемма 2. *Пусть оба* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$ *содержат базис* $\mathbb{R}^d$ *и* $\langle a, b\rangle \in \{0{,}1\}$ *для любых* $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. *Если при этом семейства максимальны по включению и размер каждого хотя бы* $d+2$, *то* $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d + \lambda(d))\, 2^d$, *где* $0 < \lambda(d) \leq 1$ *– (нестрого) убывающая функция.*

Доказательство. □

Глава 5

Заключение

TBD

Литература

[1] *Andrey Kupavskii, Stefan Weltge.* Binary scalar products / Stefan Weltge Andrey Kupavskii // *Journal of Combinatorial Theory, Series B.* — 2022. — Vol. 156.

[2] *Adam Bohn Yuri Faenza, Samuel Fiorini Vissarion Fisikopoulos Marco Macchia Kanstantsin Pashkovich.* Enumeration of 2-level polytopes / Samuel Fiorini Vissarion Fisikopoulos Marco Macchia Kanstantsin Pashkovich Adam Bohn, Yuri Faenza // *Mathematical Programming Computation.* — 2018. — Vol. 11.