

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Московский физико-технический институт (государственный  
университет)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
Кафедра математических основ методов современной физики

Выпускная квалификационная работа бакалавра

## Семейства векторов с бинарными скалярными произведениями

**Автор:**

Студент 922 группы  
Царёв Дмитрий Вячеславович

**Научный руководитель:**

Доктор физико-математических наук  
Купавский Андрей Борисович



Москва, 2023

## Аннотация

Семейства векторов с бинарными скалярными произведениями

*Царёв Дмитрий Вячеславович*

Вопросы, связанные с оценками числа вершин и граней двухуровневых политопов, мотивируют изучение семейств векторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$  таких что  $\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$  скалярное произведение  $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ . В данной работе приведены некоторые подходы к работе с такими семействами и получены некоторые улучшения оценки на произведение размеров таких семейств  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$ .

## Abstract

Questions on possible vertex and face numbers of two-level polytopes motivate the study of vector families  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$  with a property that  $\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$  the dot product  $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$ . This work gives some approaches to dealing with such families and obtains some improvements on bounds for the product  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$ .

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
1.1	Обозначения . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Дискретизация задачи, препятствия в применении корреляции</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Улучшения оценки для больших семейств</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>15</b>

# Глава 1

## Введение

Политоп называется двухуровневым, если для каждой гиперплоскости  $H$ , определяющей фасет, существует параллельная гиперплоскость  $H'$  такая, что все вершины лежат в объединении  $H \cup H'$ . Простейшим примером такого политопа может служить симплекс, гиперкуб и кросс-политоп, но двухуровневыми также являются широкий круг семейств политопов, например политопы Биркгофа, Ханнера, политопы порядка и политопы цепей для частично упорядоченных множеств, политопы стабильных браков и политопы антиклик совершенных графов [1]. Вопросы связанные с комбинаторной структурой таких политопов изучались также в [2], а в [3] был описан алгоритм перечисления всех двухуровневых политопов и на основе перебора в малых размерностях сформулирована гипотеза о максимальном возможном произведении числа вершин и фасетов  $d$ -мерного двухуровневого политопа. Эта гипотеза была доказана в [4] с помощью более общей теоремы 1 об оценке произведения размеров двух семейств векторов с бинарными скалярными произведениями:

**Теорема 1.** Пусть оба  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$  содержат базис  $\mathbb{R}^d$  и  $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$  для любых  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$ . Тогда  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d + 1)2^d$ .

В статье [5] теорема 1 обобщается для нескольких семейств 0–1 векторов. Для этого используются корреляционные неравенства, и там же приводится изящное доказательство теоремы 1 для случая 0–1 векторов, описанное ниже.

В первой части этой работы исследуется возможность применения подхода с корреляционными неравенствами к теореме 1, в частности задача о семействах векторов в  $\mathbb{R}^d$  сводится к дискретной, что позволяет проверять результаты в малых размерностях компьютерным перебором. Во второй части доказывается стабильность теоремы 1, с основным результатом в виде леммы 3.

### 1.1 Обозначения

Множество целых чисел от 1 до  $n$  обозначается  $[n]$ . Скалярное произведение двух векторов  $a = (a_1, \dots, a_d)$  и  $b = (b_1, \dots, b_d)$  будем обозначать  $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^d a_i b_i$ . Семейства в  $\mathbb{R}^d$  будут иногда рассматриваться как наборы векторов а иногда как наборы точек в аффинном пространстве, в частности для  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$  будем обозначать аффинную размерность семейства как  $\dim \mathcal{A}$ , а линейную оболочку векторов – как  $\text{span } \mathcal{A}$ . Размер семейства –  $|\mathcal{A}|$ . В решётке  $\Lambda$  будет обозначать точную нижнюю грань двух элементов, а  $\vee$  – точную верхнюю грань. Для подмножеств  $X$  и  $Y$  решётки  $X \vee Y$  обозначает множество  $\{x \vee y : x \in X, y \in Y\}$ , а  $X \wedge Y = \{x \wedge y : x \in X, y \in Y\}$ .

## Глава 2

# Дискретизация задачи, препятствия в применении корреляции

Для начала приведём формулировки корреляционного неравенства из [6] в общей форме и в интересном частном случае. Функция  $\mu : L \rightarrow \mathbb{R}^+$ , где  $L$  – конечная дистрибутивная решётка, называется лог-супермодулярной, если

$$\forall x, y \in L : \mu(x)\mu(y) \leq \mu(x \vee y)\mu(x \wedge y)$$

Функция  $f : L \rightarrow \mathbb{R}^+$  возрастает если из  $x \leq y$  следует  $f(x) \leq f(y)$  и убывает если из  $x \leq y$  следует  $f(x) \geq f(y)$ .

**Теорема** (FKG-неравенство). Пусть  $L$  – конечная дистрибутивная решётка,  $\mu : L \rightarrow \mathbb{R}^+$  – лог-супермодулярная функция. Тогда для любых возрастающих функций  $f, g : L \rightarrow \mathbb{R}^+$  выполняется

$$\left( \sum_{x \in L} \mu(x) f(x) \right) \cdot \left( \sum_{x \in L} \mu(x) g(x) \right) \leq \left( \sum_{x \in L} \mu(x) f(x) g(x) \right) \cdot \left( \sum_{x \in L} \mu(x) \right)$$

Выбирая в качестве  $L$  решётку подмножеств конечного множества, в качестве  $\mu$  тождественную единицу, а в качестве  $f$  и  $g$  характеристические функции двух замкнутых вниз семейств подмножеств, получаем

**Следствие.** Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  – замкнутые вниз семейства подмножеств  $d$ -элементного множества. Тогда

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \cdot 2^d \quad (2.1)$$

Теперь мы можем привести изящное доказательство теоремы 1 для семейств из 0–1 векторов:

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \{0,1\}^d$  и  $\langle a, b \rangle \in \{0,1\}$  для любых  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$ . Тогда  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d+1)2^d$ .

*Доказательство.* Проинтерпретируем вектора в  $\{0,1\}^d$  как индикаторы подмножеств  $d$ -элементного множества.  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  тогда становятся семействами подмножеств, а условие на них заключается в том, что любые два множества из разных семейств либо не пересекаются, либо пересекаются по одному элементу. Поэтому если множество лежит и в  $\mathcal{A}$ , и в  $\mathcal{B}$ , то оно либо пустое, либо одноэлементное, и в частности  $|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \leq d+1$ . Заметим, что семейства  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  можно считать замкнутыми вниз, так как замыкание их вниз не нарушает накладываемого условия, и лишь увеличивает произведение размеров. Наконец, 2.1 даёт нам

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \cdot 2^d \leq (d+1)2^d$$

□

Это красивое рассуждение было бы приятно обобщить на семейства векторов в  $\mathbb{R}^d$  – например, это могло бы помочь в обобщении теоремы 1 на несколько семейств, аналогично результатам в [5]. Следуя этому желанию, мы сведём задачу в  $\mathbb{R}^d$  к дискретной, заведём соответствующее отношение порядка на векторах семейств, и после перебора в малых размерностях пронаблюдаем препятствия к прямому обобщению доказательства теоремы 2.

Итак, пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  – семейства векторов, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Записывая вектор-столбцы в стандартном базисе, будем считать  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  матрицами размеров  $d \times |\mathcal{A}|$  и  $d \times |\mathcal{B}|$  соответственно. Выберем базис столбцов в  $\mathcal{A}$  и обозначим его  $A$ , двойственный к нему базис  $\mathbb{R}^d$  задаётся столбцами матрицы  $A^{-T}$ , и из условия на скалярное произведение векторов разных семейств следует, что  $\mathcal{B} = A^{-T}\mathcal{B}_{01}$ , где  $\mathcal{B}_{01} \in \text{Mat}_{d \times |\mathcal{B}|}$  состоит из нулей и единиц (это семейство  $\mathcal{B}$ , записанное в базисе, двойственном к  $\mathcal{A}$ ). Пусть теперь  $B$  – базис в  $\mathcal{B}$ , мы имеем  $\mathcal{B} = A^{-T}\mathcal{B}_{01}$ , где  $\mathcal{B}_{01} \in \text{Mat}_{d \times d}$  – невырожденная матрица, состоящая из нулей и единиц. Базис  $\mathcal{R}^d$ , двойственный к  $B$  это  $B^{-T} = AB_{01}^{-T}$ , и в нём  $\mathcal{A}$  записывается матрицей из нулей и единиц:  $\mathcal{A} = B^{-T}\mathcal{A}_{01} = AB_{01}^{-T}\mathcal{A}_{01}$ . Теперь, когда каждому вектору  $a \in \mathcal{A}$  соответствует  $a_{01} \in \{0,1\}^d$ , и  $b \in \mathcal{B}$  соответствует  $b_{01} \in \{0,1\}^d$ , имеем

$$\langle a, b \rangle = \langle AB_{01}^{-T}a_{01}, A^{-T}b_{01} \rangle = \langle B_{01}^{-T}a_{01}, b_{01} \rangle = \langle a_{01}, B_{01}^{-1}b_{01} \rangle$$

Замечательным образом скалярное произведение не зависит напрямую от  $A$ , так что максимизация  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$  с соблюдением условия о бинарных скалярных произведениях эквивалентно максимизации  $|\mathcal{A}_{01}| \cdot |\mathcal{B}_{01}|$ , где  $\mathcal{A}_{01}$  и  $\mathcal{B}_{01}$  – подмножества булевого куба  $\{0,1\}^d$  с условием

$$\forall a_{01} \in \mathcal{A}_{01}, b_{01} \in \mathcal{B}_{01} : \langle a_{01}, B_{01}^{-1}b_{01} \rangle \in \{0,1\} \quad (2.2)$$

где  $B_{01}$  – невырожденная матрица из нулей и единиц. Заметим, что можно полагать  $B_{01} \subseteq \mathcal{B}_{01}$  и  $B_{01}^T \subseteq \mathcal{A}_{01}$ , так как условие 2.2 автоматически выполняется для столбцов этих матриц.

Для наглядного изображения возможных выборов  $\mathcal{A}_{01}$  и  $\mathcal{B}_{01}$  заведём матрицу  $C$  размера  $d \times 2^d$ , столбцы которой – все вектора  $\{0,1\}^d$ , и будем рассматривать матрицу  $G = G(B_{01}) = C^T B_{01}^{-1}C$  размера  $2^d \times 2^d$ . Выбор  $\mathcal{A}_{01}$  и  $\mathcal{B}_{01}$  соответствует выбору подмножества строк и столбцов  $G$  так, что индуцированная ими подматрица в  $G$  состоит из нулей и единиц. Несколько примеров матриц  $G$  для трёхмерных семейств приведено на рисунке 2.1.

Для применения корреляционного неравенства аналогично теореме 2 необходимо на векторах булевого куба завести отношение частичного порядка такое что меньший вектор всегда можно добавить в семейство, если там уже есть больший. Это делает естественными следующие определения: индексируя столбцы и строки  $G$  элементами  $\{0,1\}^d$ , введём для  $x \in \{0,1\}^d$

$$R_x = \left\{ y \in \{0,1\}^d : G_{y,x} \in \{0,1\} \right\} \text{ и } C_x = \left\{ y \in \{0,1\}^d : G_{x,y} \in \{0,1\} \right\}$$

Введём отношения эквивалентности на  $\{0,1\}^d$  и частичные порядки на множестве классов эквивалентности как

$$\begin{aligned} x \sim_R y &\iff R_x = R_y, & [x] \leq_R [y] &\iff R_x \supseteq R_y \\ x \sim_C y &\iff C_x = C_y, & [x] \leq_C [y] &\iff C_x \supseteq C_y \end{aligned}$$

Для получения одного частично упорядоченного множества, из которого выбираются и  $\mathcal{A}_{01}$ , и  $\mathcal{B}_{01}$ , нам необходимо сопоставить столбцы и строки  $G$  биекцией

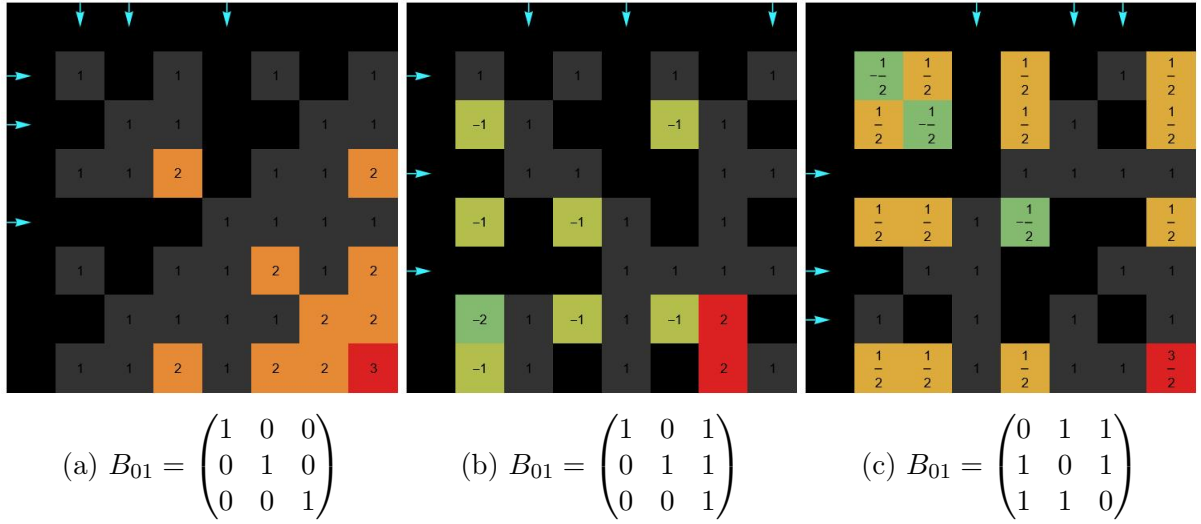


Рис. 2.1: Матрицы  $G(B_{01})$  для различных матриц  $B_{01}$ . Стрелками указаны столбцы, соответствующие  $B_{01}$  и строки, соответствующие  $B_{01}^T$

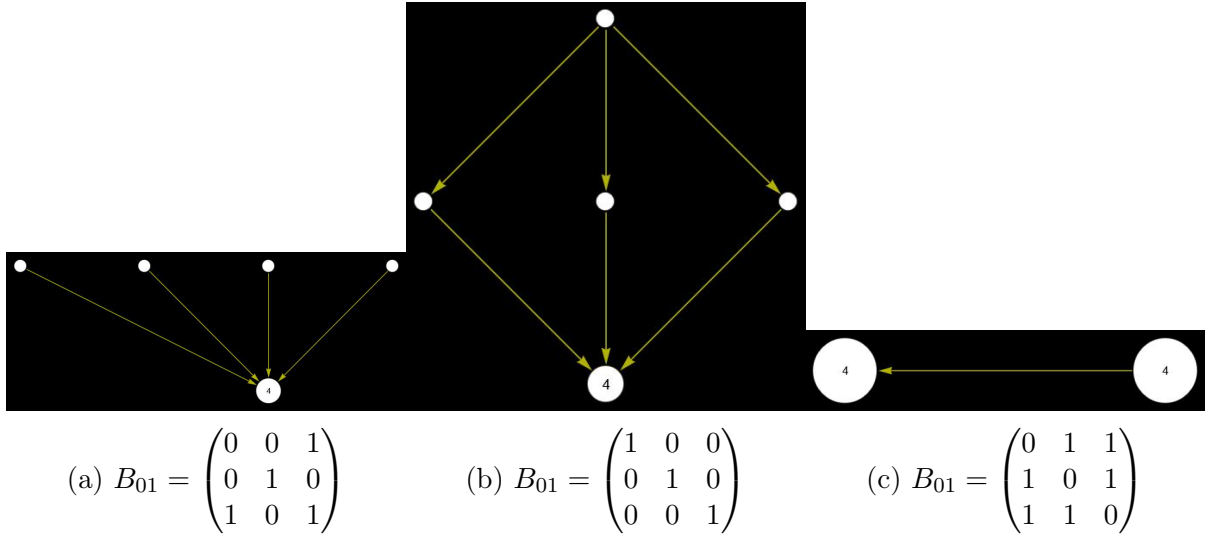


Рис. 2.2: Три разных частично упорядоченных множества, получающихся из симметричных  $B_{01}$ .

$\varphi : \{0,1\}^d \rightarrow \{0,1\}^d$ , после чего ввести отношение эквивалентности и частичный порядок

$$x \sim y \iff (x \sim_R y \text{ и } \varphi(x) \sim_C \varphi(y)), \quad [x] \leq [y] \iff (R_x \supseteq R_y \text{ и } C_{\varphi(x)} \supseteq C_{\varphi(y)})$$

Для того чтобы избавиться от свободы выбора  $\varphi$  ограничимся сейчас случаями когда  $B_{01}$  симметрична, тогда  $G(B_{01})$  тоже симметрична,  $\sim_R = \sim_C$ ,  $\leq_R = \leq_C$  и естественное  $\varphi = \text{id}$  даёт те же классы эквивалентности и частичный порядок. Диаграмму Хассе такого чума будем рисовать с весами в узлах, обозначающих размер соответствующего класса эквивалентности (в случае успешного применения корреляционного неравенства этот вес будет играть роль  $\mu$ ).

На рисунке 2.2 изображены все три не изоморфных чума для трёхмерного пространства и симметричных матриц  $B_{01}$ . Сразу видно, что 2.2b не является решёткой, так как не содержит максимального элемента. 2.2a не является дистрибутивной решёткой, но получено из неё факторизацией. К сожалению, пример на рисунке 2.3

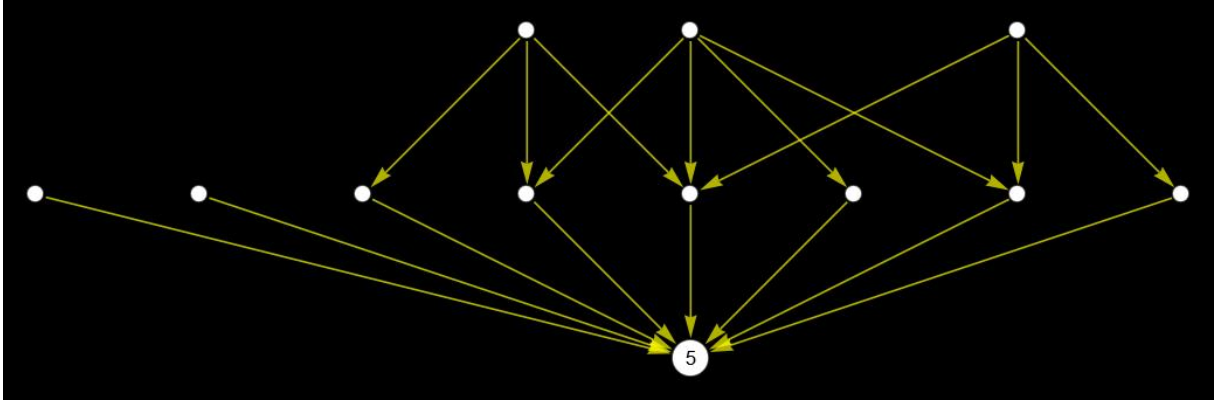


Рис. 2.3: Частично упорядоченное множество, соответствующее

$$B_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

не является даже полурешёткой (для которых, несмотря на отсутствие точной верхней грани, определено понятие дистрибутивности, необходимое в корреляционном неравенстве).

Крупнейшим же препятствием к применению корреляционного неравенства является следующее наблюдение: в доказательстве теоремы 2 было существенно, что  $|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \leq d + 1$  из-за того что лишь для стандартного базиса и нулевого вектора выполнено  $x \in R_x$ . Иначе говоря, у  $G(E)$  на диагонали лишь  $d + 1$  элемент, являющийся нулём или единицей, что даёт оценку сверху на  $|\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}|$ . Оказывается, для некоторых симметричных  $B_{01}$  мощность множества  $|\{x \in \{0,1\}^d : x \in R_x\}|$  экспоненциально велика, а именно верно следующее утверждение, техническую проверку которого мы опускаем.

**Утверждение 1.** Пусть  $B_{01}$  имеет единицы на побочной диагонали и выше неё, а нули ниже неё. Тогда количество  $x \in \{0,1\}^d$  таких что  $\langle x, B_{01}^{-1}x \rangle \in \{0,1\}$  равно  $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .

Утверждение 1 вместе с численным исследованием распределения значений  $|\{x \in \{0,1\}^d : x$  в размерностях до пяти ставит под сильное сомнение возможность даже непрямого применения корреляционного неравенства для получения оценки, близкой к полученной в теореме 1. Тем не менее возникшие структуры любопытны сами по себе и порождают множество интересных запросов о структуре чумов семейств векторов в  $\mathbb{R}^d$ . В завершение приведём рисунок 2.4 с матрицей  $G$  для примера из утверждения 1, а также некоторые примеры частично упорядоченных множеств на рисунке 2.5.



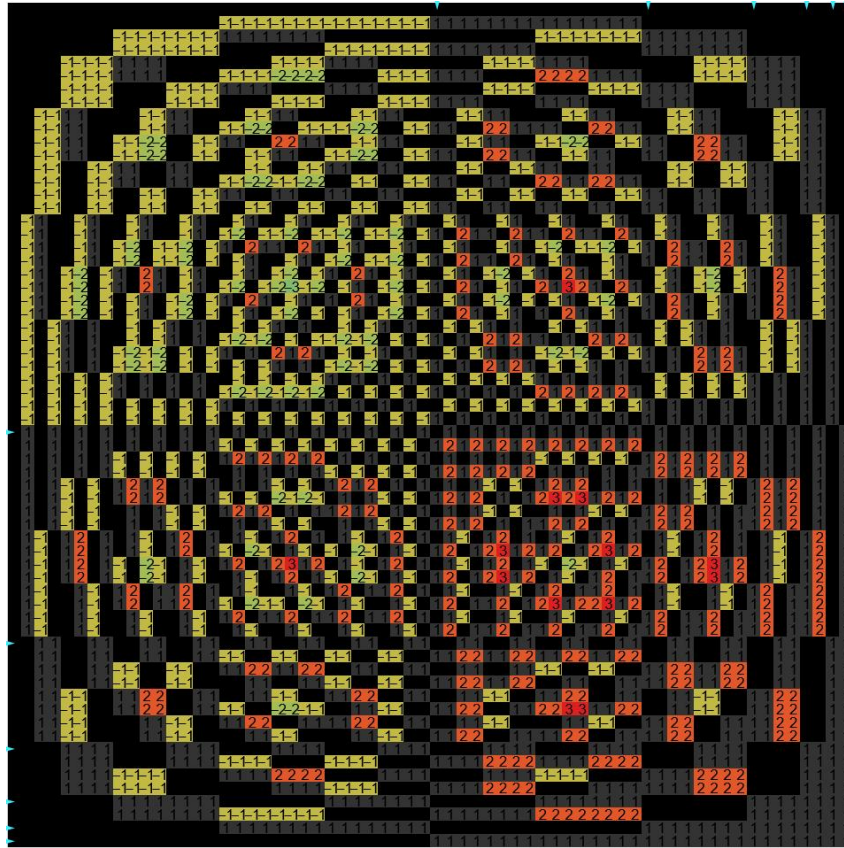


Рис. 2.4: Матрица  $G$  для размерности  $d = 6$  с максимальным возможным количеством нулей и единиц на диагонали.

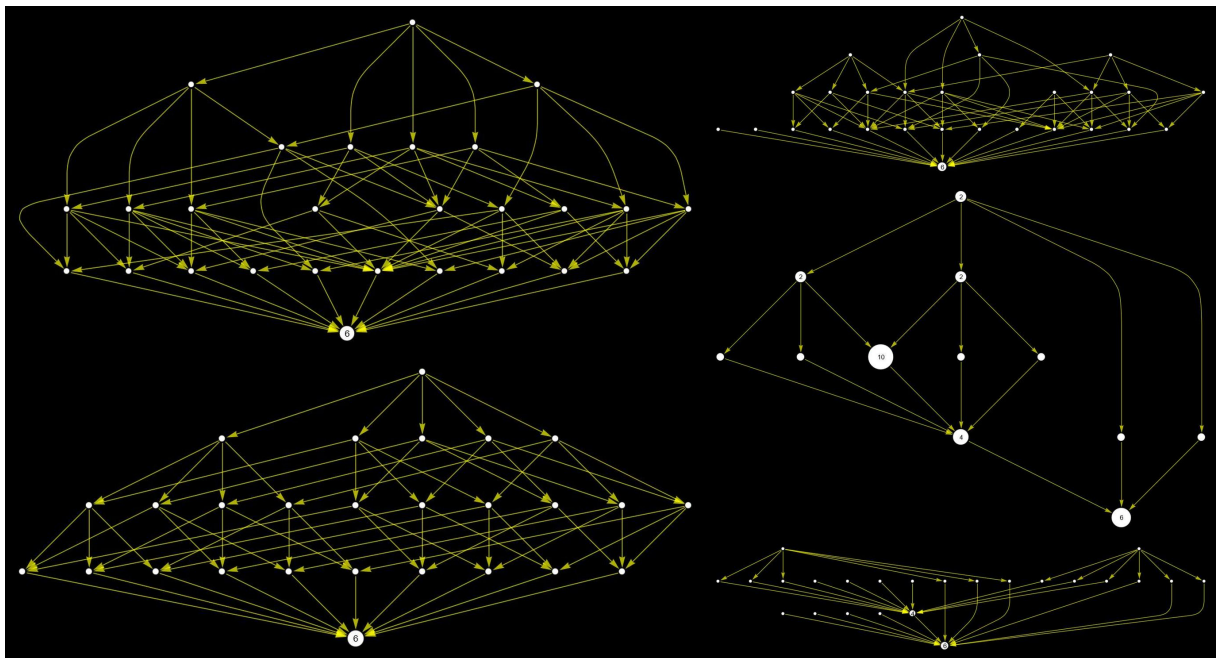


Рис. 2.5: Примеры частично упорядоченных множеств при  $d = 5$ .

## Глава 3

# Улучшения оценки для больших семейств

Вспомним теорему 1 а также приведём обозначения и промежуточные результаты, доказанные в [4].

**Теорема 1.** Пусть оба  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$  содержат базис  $\mathbb{R}^d$  и  $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$  для любых  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$ . Тогда  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d + 1)2^d$ .

Обозначим  $b_d \in \mathcal{B}$  вектор, с максимальным значением  $\max(\dim \mathcal{A}_0, \dim \mathcal{A}_1)$ , где  $\mathcal{A}_i = \{a \in \mathcal{A} : \langle a, b_d \rangle = i\}$  для  $i = 0, 1$ . Ортогональную проекцию на  $U = b_d^\perp$  обозначим  $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow U$ .

**Утверждение 2.** Параллельным переносом  $\mathcal{A}$  и заменой некоторых векторов  $\mathcal{B}$  на противоположные можно добиться того что

1.  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \sqcup \mathcal{A}_1$  и  $|\mathcal{A}_0| \geq |\mathcal{A}_1|$
2. Всё ещё  $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$  для любого  $a \in \mathcal{A}_0$  и  $b \in \mathcal{B}$
3. Множество  $\pi(\mathcal{B})$  не содержит противоположных точек.

**Утверждение 3.** Каждая точка  $\pi(\mathcal{B})$  имеет не более двух прообразов в  $\mathcal{B}$ .

**Неравенство 1.**  $|\mathcal{A}| |\mathcal{B}| \leq 2 |\mathcal{A}_0| |\pi(\mathcal{B})| + |\mathcal{A}_1| |\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_*|$

Линейную оболочку  $\mathcal{A}_0$  обозначим  $U_0$  и введём ортогональную проекцию  $\tau : U \rightarrow U_0$ . Через  $\mathcal{B}_* \subseteq \mathcal{B}$  обозначим множество  $b \in \mathcal{B}$  для которых  $\pi(b)$  имеет ровно один прообраз при проекции на  $U$ .

**Утверждение 4.**  $|\pi(\mathcal{B})| \leq 2^{d-1-\dim U_0} |\tau(\pi(\mathcal{B}))|$ .

**Утверждение 5.**  $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_* = \mathcal{B}_0 \sqcup \mathcal{B}_1$  с выполнением для  $i = 0, 1$

$$\forall b \in \mathcal{B}_i : |\{ \langle a, b \rangle : a \in \mathcal{A}_i \}| = 1$$

**Утверждение 6.** Для  $i = 0, 1$  выполняется  $|\mathcal{A}_i| |\mathcal{B}_i| \leq 2^d$ .

**Неравенство 2.**  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (\dim U_0 + 1) 2^d + |\mathcal{A}_0| |\mathcal{B}_0| + |\mathcal{A}_1| |\mathcal{B}_1|$

Поймём, на каких семействах в теореме 1 достигается равенство. Без ограничения общности будем полагать  $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{B}|$ .

**Лемма 1.**  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = (d+1)2^d$  только если  $|\mathcal{B}| = d+1$ , а  $\mathcal{A}$  аффинно изоморфно  $\{0,1\}^d$ .

*Доказательство.* Будем вести индукцию по  $d$ , в размерности 1 утверждение очевидно. Предполагая выполнение леммы в размерностях меньших  $d$ , докажем её в размерности  $d$ . Разобьём случаи по значению  $\dim U_0$ :

1.  $\dim U_0 < d-2$ . Тогда из неравенства 2 и утверждения 6

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (\dim U_0 + 3) 2^d \leq d 2^d \quad (3.1)$$

2.  $\dim U_0 = d-2$ . Заметим, что мы можем свободно полагать  $0, b_d \in \mathcal{B}_0$  или  $0, b_d \in \mathcal{B}_1$ , поэтому из доказательства утверждения 6 следует

$$|\mathcal{A}_1| |\mathcal{B}_1| \leq 2^d, |\mathcal{A}_0| (|\mathcal{B}_0| + 2) \leq 2^d$$

Поэтому по неравенству 2 и утверждению 6

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d-1) 2^d + 2 \cdot 2^d - 2 |\mathcal{A}_0| \leq (d+1) 2^d - |\mathcal{A}| < (d+1) 2^d$$

3.  $\dim U_0 = d-1$ . Тогда, полагая  $0, b_d \in \mathcal{B}_1$ , имеем  $\mathcal{B}_0 = \emptyset$ . Рассмотрим два случая:

- а)  $\mathcal{B}_* \neq \emptyset$ . Тогда для вырождения неравенства 1 в равенство необходимо  $|\mathcal{A}_0| = |\mathcal{A}_1|$ , а для вырождения неравенства 2 —  $|\mathcal{A}_0| |\pi(\mathcal{B})| = d 2^{d-1}$ . По предположению индукции последнее возможно в одном из двух случаев:

- i)  $\mathcal{A}_0$  аффинно изоморфно  $\{0,1\}^{d-1}$ . Тогда  $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| = 2^d$ , что возможно только если  $\mathcal{A}$  аффинно изоморфно  $\{0,1\}^d$ ,  $\mathcal{B}$  может состоять только из базиса и нуля.

- ii)  $|\mathcal{A}_0| = d$ . Тогда  $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}| = 2d$  и  $|\mathcal{B}| \cdot |\mathcal{A}| \leq 4d^2$ , что меньше  $(d+1) 2^d$  для  $d \geq 4$ . При  $d = 3$  неравенство  $|\mathcal{B}| \cdot |\mathcal{A}| \leq 32$  не может вырождаться, так как  $|\mathcal{A}| = 6$ . Наконец, в случае  $d = 2$  мы имеем  $|\mathcal{A}_1| = 2^d$  как в i).

- б)  $\mathcal{B}_* = \emptyset$ . Тогда  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$  и, следовательно,  $\dim(\text{span}(\mathcal{B}_1)) = d$ . В таком случае

$$(\forall b \in \mathcal{B}_1 \exists \xi : \forall a \in \mathcal{A}_1 \langle a, b \rangle = \xi) \Rightarrow \dim(\mathcal{A}_1) \leq d - \dim(\text{span}(\mathcal{B}_1)) = 0 \Rightarrow |\mathcal{A}_1| = 1$$

Как и в б), для вырождения неравенства по предположению индукции необходимо одно из двух:

- i)  $|\mathcal{A}_0| = d$ . Тогда  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d+1)^2 < (d+1) 2^d$ .
- ii)  $|\mathcal{A}_0| = 2^{d-1}$ ,  $|\pi(\mathcal{B})| = d$ . Тогда  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = 2d(2^{d-1} + 1)$ , что меньше  $(d+1)2^d$  для  $d > 2$ . При  $d = 2$  же  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}|^2 = 9 < 3 \cdot 2^2$ .

□

Улучшим оценку для семейств, отличающихся от экстремального примера. Докажем для этого вспомогательное

**Неравенство 3.** Для целого  $2 \leq f \leq d$  выполняется  $(d+f)(2^{d-1} + 2^{d-f}) \leq d 2^d + 2d$ .

*Доказательство.* Доказываем индукцией по  $d$ : при  $d = k$  выполнено равенство, проведём шаг от  $d$  к  $d+1$ . Обозначая левую и правую стороны неравенства  $l(d, f)$  и  $r(d, f)$  соответственно, имеем

$$\begin{aligned} r(d+1, f) - l(d+1, f) &\geq (r(d+1, f) - r(d, f)) - (l(d+1, f) - l(d, f)) \\ &= (d 2^d + 2^{d+1} + 2) - (d+f+2)(2^{d-1} + 2^{d-f}) \\ &= 2^{d-f}(d-f+2) \left( 2^{f-1} - 1 - \frac{2f}{d-f+2} \right) + 2 \\ &\geq 2^{d-f}(d-f+2)(2^{f-1} - 1 - f) \end{aligned}$$

Полученное выражение неотрицательно при  $f > 2$ . Для  $f = 2$ ,  $d \geq 4$  выполняется  $2^{f-1} - 1 - \frac{2f}{d-f+2} \geq 0$ , и для  $f = 2$ ,  $d = 2, 3$  изначальное неравенство проверяется явно.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть оба  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$  содержат базис  $\mathbb{R}^d$  и  $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$  для любых  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$ . Если при этом семейства максимальны по включению и размер каждого хотя бы  $d + 2$ , то  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d + \lambda(d)) 2^d$ , где  $0 < \lambda(d) \leq 1$  — некая (нестрого) убывающая функция.

*Доказательство.*  $\lambda(d)$  будем обозначать  $\lambda_d$ . Как и в доказательстве леммы 1, будем вести индукцию по  $d$ . Для базы можно выбрать  $\lambda = 1$ , предполагая верность для меньших размерностей, докажем утверждение для  $d$ . Рассматриваем возможные значения  $\dim U_0$ :

1.  $\dim U_0 < d - 2$ . Тогда  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (\dim U_0 + 3) 2^d \leq d 2^d$
2.  $\dim U_0 = d - 2$ . Применяя предположение индукции и лемму 1 для семейств  $\tau(\pi(\mathcal{B}))$  и  $\mathcal{A}_0$ , имеем три варианта:
  - а)  $\mathcal{A}_0$  аффинно изоморфно  $\{0, 1\}^{d-2}$ ,  $\tau(\pi(\mathcal{B}))$  состоит из нуля и базиса  $U_0$ . Из утверждения 6 и предположения 0,  $b_d \in \mathcal{B}_1$  следует  $|\mathcal{B}_0| \leq 2$ . С учётом чётности  $|\mathcal{B}_0|$  имеется два варианта:
    - i)  $|\mathcal{B}_0| = 0$ . Тогда из неравенства 1 и утверждения 6 получаем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 4(d-1)2^{d-2} + 2^d = d 2^d$$

- ii)  $|\mathcal{B}_0| = 2$ . Пусть в  $\tau(\pi(\mathcal{B}))$  имеется  $k + 1$  векторов с двумя прообразами под действием  $\tau$  ( $k \geq 0$ , так как  $\mathcal{B}_0 \subset U_0^\perp$  не пусто). Из этих  $k + 1$  обозначим через  $t_2$  количество тех, у которых оба прообраза лежат в  $\pi(\mathcal{B}_1)$ , а через  $t_1$  — тех, у которых в  $\pi(\mathcal{B}_1)$  ровно один из прообразов. У  $k - t_1 - t_2$  оба прообраза лежат в  $\pi(\mathcal{B}_*)$ . Пусть так же вектора  $\tau(\pi(\mathcal{B}))$  с одним прообразом под действием  $\tau$  состоят из  $q$  проекций  $\pi(\mathcal{B}_1)$  и  $d - 2 - k - q$  проекций  $\pi(\mathcal{B}_*)$ . Имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &= |\mathcal{B}_*| + |\mathcal{B}_0| + |\mathcal{B}_1| \\ &= (k - t_1 - 2t_2 + d - 2 - q) + 2 + (2 + 4t_2 + 2t_1 + 2q) \\ &= d + k + q + t_1 + 2t_2 + 2 \end{aligned}$$

Рассмотрим для начала случай  $t_2 > 0$ . Тогда  $U_0^\perp \subset \text{span}(\mathcal{B}_1)$ , поэтому

$$\begin{aligned} \dim(\text{span}(\mathcal{B}_1)) &= t_1 + t_2 + q + 2 \implies |\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-t_1-t_2-q-2}, \\ |\mathcal{A}| &= |\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-2} + 2^{d-2-t_1-t_2-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| &\leq (2^{d-2} + 2^{d-2-t_1-t_2-q}) (d + k + q + t_1 + 2t_2 + 2) \\ &\leq (2^{d-2} + 2^{d-2-t_1-t_2-q}) (2d + t_1 + 2t_2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\leq (2^{d-1} + 2^{d-1-t_1-t_2-q}) (d + t_1 + t_2) \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} &\leq (2^{d-1} + 2^{d-1-t_1-t_2}) (d + t_1 + t_2 + 1) \\ &\leq d 2^d + 2d \end{aligned} \quad (3.4)$$

Где второе неравенство следует из  $k + q \leq d - 2$ , а последнее из неравенства 3. При  $t_2 = 0$  немного более слабая оценка

$$\dim(\text{span}(\mathcal{B}_1)) \geq t_1 + t_2 + q + 1$$

означает что 3.3 становится  $(2^{d-1} + 2^{d-t_1})(d + t_1)$ , что не больше 3.4 при  $t_1 \geq 2$  по неравенству 3. Наконец, при  $t_2 = 0$  и  $t_1 = 0, 1$  выражение 3.2 даёт оценки  $d2^d$  и  $(2^{d-2} + 2^{d-3})(2d + 1) = d2^d - (d - \frac{3}{2})2^{d-2} \leq d2^d$  соответственно.

б)  $\mathcal{A}_0$  состоит из нуля и базиса  $U_0$ . Тогда

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}|^2 \leq 4(d - 1)^2 \leq d2^d + 2d$$

в)  $|\mathcal{A}_0| \cdot |\tau(\pi(\mathcal{B}))| \leq (d - 2 + \lambda_{d-2})2^{d-2}$ . Тогда пользуясь неравенствами 1, 2 и утверждением 4 имеем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 4 \cdot (d - 2 + \lambda_{d-2})2^{d-2} + 2 \cdot 2^d = (d + \lambda_{d-2})2^d$$

3.  $\dim U_0 = d - 1$ . Вновь применяя предположение индукции к  $\pi(\mathcal{B})$  и  $\mathcal{A}_0$ , имеем три варианта (помним, что из предположения  $0, b_d \in \mathcal{B}_1$  имеем  $\mathcal{B}_0 = \emptyset$ ):

а)  $\mathcal{A}_0$  изоморфно  $\{0, 1\}^{d-1}$ ,  $\pi(\mathcal{B})$  – базис с нулём.

i)  $\dim \mathcal{B}_1 = 1$ . В этом случае  $|\mathcal{B}| = d + 1$ , то есть условие из формулировки леммы не выполнено.

ii)  $\dim \mathcal{B}_1 = k \geq 2$ . Тогда  $|\mathcal{B}_1| = 2k$ ,  $|\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-k}$  и мы имеем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (2^{d-1} + 2^{d-k})(d + k) \leq d2^d + 2d$$

по неравенству 3.

б)  $|\mathcal{A}_0| = d$ . Тогда  $|\mathcal{A}|^2 \leq 4d^2$ , что не больше  $d2^d + 2d$  для  $d > 3$ . 2

в)  $|\mathcal{A}_0| \cdot |\pi(\mathcal{B})| \leq (d - 1 + \lambda_{d-1})2^{d-1}$ . Финальный раз из неравенства 1 и утверждения 6 получаем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 2 \cdot (d - 1 + \lambda_{d-1})2^{d-1} + 2^d = (d + \lambda_{d-1})2^d.$$

□

Найдём теперь оптимальное значение  $\lambda(d)$  из леммы 2:

**Лемма 3.** Пусть оба  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$  содержат базис  $\mathbb{R}^d$  и  $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$  для любых  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$ . Если при этом семейства максимальны по включению и размер каждого хотя бы  $d + 2$ , то  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq d2^d + 2d$ .

*Доказательство.* Будем вновь вести индукцию по  $d$  и без ограничения общности считать  $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{B}|$ , для  $d < 3$  оценка совпадает с теоремой 1. Желаемая оценка уже получена во всех подслучаях доказательства леммы 2, за исключением двух индукционных шагов – 2в) и 3в), поэтому достаточно получить нужную оценку в них:

2в')  $|\mathcal{A}_0| \cdot |\tau(\pi(\mathcal{B}))| \leq 2(d-2)(2^{d-3}+1)$ . Пользуясь неравенствами 1, утверждением 4 и 3.1 имеем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 4 \cdot (d-2)(2^{d-2}+2) + 2 \cdot 2^d - 2|\mathcal{A}_0| = 2d(2^{d-1}+1) + 2(3d-8-|\mathcal{A}_0|)$$

Это завершает доказательство при  $|\mathcal{A}_0| \geq 3d-8$  в противном случае:

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 4|\mathcal{A}_0|^2 \leq 4(3d-8)^2$$

Это меньше  $d2^d + 2d$  при всех  $d$  кроме  $d=5, 6$ . Для них что-то легко улучшится...

3в') Оба  $|\mathcal{A}_0|$  и  $|\pi(\mathcal{B})|$  имеют размер хотя бы  $d+1$ . По предположению индукции  $|\mathcal{A}_0| \cdot |\pi(\mathcal{B})| \leq (d-1)(2^{d-1}+2)$ . Тогда из утверждения 3, 6 и того что  $\mathcal{B}_0 = \emptyset$  следует

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = 2|\mathcal{A}_0| |\pi(\mathcal{B})| + |\mathcal{A}_1| |\mathcal{B}_1| - (|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|) |\mathcal{B}_*| \quad (3.5)$$

$$\leq 2(d-1)(2^{d-1}+2) + |\mathcal{A}_1| |\mathcal{B}_1| - (|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|) |\mathcal{B}_*| \quad (3.6)$$

$$\leq 2(d-1)(2^{d-1}+2) + 2^d - (|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|) |\mathcal{B}_*|$$

$$= d2^d + 2d - (|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|) |\mathcal{B}_*| + (2d-4) \quad (3.7)$$

Поэтому достаточно, например, показать  $(|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|) |\mathcal{B}_*| \geq 2d-4$ .

Рассмотрим случай  $\dim A_1 = d-1$ : тогда  $\mathcal{B}_1 = \{0, b_d\}$ , и пользуясь

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = |\mathcal{A}| |\pi(\mathcal{B})| + |\mathcal{A}| \cdot \frac{1}{2} |\mathcal{B}_1| \leq d2^d + 2d - 2^d + |\mathcal{A}| + (2d-4)$$

Получаем желаемое неравенство при  $|\mathcal{A}| \leq 2^d - 2d + 4$ .  $|\mathcal{A}| > 2^d - 2d + 4$  действительно невозможно, ведь тогда

$$|\mathcal{A}_0| \cdot |\pi(\mathcal{B})| > (2^{d-1} - d + 2) \cdot (d+1) \geq (d-1)(2^{d-1}+2)$$

что противоречит предположению индукции. Таким образом далее можем считать  $\dim A_1 < d-1$ . Заметим, что вследствие этого также можно полагать  $|\mathcal{A}_0| > |\mathcal{A}_1|$ , ведь если  $|\mathcal{A}_0| = |\mathcal{A}_1|$ , то можно изначально сдвинуть семейство  $\mathcal{A}$  и поменять знаки некоторых векторов  $\mathcal{B}$  так, чтобы все условия остались в силе, а  $\mathcal{A}_0$  и  $\mathcal{A}_1$  поменялись местами, сводя ситуацию к случаю где  $\dim U_0 < d-1$ .

Рассмотрим ортогональную проекцию  $\pi_{\mathcal{B}_1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \text{span}(\mathcal{B}_1)$ . В силу определения  $\mathcal{A}_1$  мы имеем  $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_1)| = 1$ . Обозначим  $k = \dim(\text{span}(\mathcal{B}_1))$ . Так как  $\mathcal{B}$  содержит базис  $\mathbb{R}^d$ , мы имеем

$$|\mathcal{B}_*| \geq d-k, (|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|) |\mathcal{B}_*| \geq d-k \quad (3.8)$$

Разберёмся с одним крайним случаем, прежде чем перейти к чуть более систематическому перебору, а именно поймём, что мы можем полагать  $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)| = k$ : во-первых,  $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)| \geq k$  так как  $0 \in \mathcal{A}_0$  и  $\text{span}(\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)) = \text{span}(\pi_{\mathcal{B}_1}(\text{span}(\mathcal{A}_0))) = \text{span}(\mathcal{B}_1) \cap b_d^\perp$ , то есть  $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)$  содержит 0 и базис  $(k-1)$ -мерного пространства. Во-вторых, если  $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)| \geq k+1$  то применяя теорему 1 к  $\mathcal{B}_1$  и  $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})$  имеем

$$|\mathcal{B}_1| \cdot |\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})| \leq (k+1)2^k, |\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})| \geq k+2 \Rightarrow |\mathcal{B}_1| \leq 2^k \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) \Rightarrow$$

$$|\mathcal{B}_1| |\mathcal{A}_1| \leq 2^d \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) \Rightarrow |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq d2^d + 2d + (2d-4) - \frac{2^d}{k+2} - (d-k)$$

что доказывает необходимую оценку для всех  $d \notin \{3, 4, 5\}$ , так как при  $d \geq 6$

$$d + k - 4 - \frac{2^d}{k+2} \leq 2d - 4 - \frac{2^d}{d+2} = -\frac{2}{d+2} (2^{d-1} - (d+2)(d-2)) \leq 0$$

Итак, мы можем полагать  $|\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)| = k$ , то есть  $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_0)$  состоит из нуля и базиса  $\text{span}(\mathcal{B}_1) \cap b_d^\perp$ , а  $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})$  — из нуля и базиса  $\text{span}(\mathcal{B}_1)$ . Произведём перебор по возможным значениям  $k$ :

- i)  $k = 1$ , то есть  $\mathcal{B}_1 = \{0, b_d\}$ . Так как  $\dim \mathcal{A}_1 < d - 1$ , из доказательства утверждения 6 следует  $|\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-2}$ . Подставляя это в 3.6 получаем

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq d2^d + 2d + (2d - 4 - 2^{d-1}) \leq d2^d + 2d$$

- ii)  $k = 2$ . Из доказательства утверждения 6 следует, что  $|\mathcal{B}_1| \leq 4$  и  $|\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-2}$ . Вследствие 3.9  $|\mathcal{B}_*| \geq d - 2$ , так что если  $|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| \geq 2$ , 3.7 даёт нужную оценку. Аналогично 3.7 завершает доказательство если  $|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| = 1$  и  $|\mathcal{B}_*| \geq 2d - 4$ . Если же  $|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| = 1$  и  $|\mathcal{B}_*| < 2d - 4$ , то

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = (2|\mathcal{A}_1| + 1) \cdot (|\mathcal{B}_*| + |\mathcal{B}_1|) < (2^{d-1} + 1) \cdot (2d - 4 + 4) = d2^d + 2d$$

- iii)  $k = d$  и  $\mathcal{B}_* = \emptyset$ . Отметим, что в силу 3.8  $\mathcal{B}_* = \emptyset$  невозможно при других значениях  $k$ . По определению  $\mathcal{B}_1$  из его полноразмерности следует, что  $\mathcal{A}_1$  состоит из лишь одной точки, поэтому 3.6 превращается в

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq 2(d-1)(2^{d-1} + 2) + |\mathcal{B}|$$

что завершает доказательство при  $|\mathcal{B}| \leq 2^d - 2d + 4$ . Обратное действительно невозможно, ведь тогда получается противоречие с теоремой 1:

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \geq |\mathcal{B}|^2 \geq (2^d - 2d + 4)^2 > (d+1)2^d$$

- iv)  $2 < k \leq d$  и  $\mathcal{B}_* \neq \emptyset$ . Обозначим элементы  $\pi_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{A})$  как  $a_0 = 0, a_1, \dots, a_k$ , а их прообразы при проекции как  $\mathbb{A}_j = \pi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(a_j)$ , нумерацию выберем так чтобы  $\mathbb{A}_1 = \mathcal{A}_1$ . Пусть  $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}$  — базис  $\mathcal{B}_1$ , двойственный  $a_1, \dots, a_k$ . В соответствии с выбором нумерации,  $b_{11} = b_d$ . Заметим, что в силу максимальности  $\mathcal{B}$  по включению все  $b_{1j}$  лежат в  $\mathcal{B}_1$  (иначе их, вместе с  $b_{1j} + b_d$  для  $j > 1$ , можно было добавить в  $\mathcal{B}$ ). Если  $\dim \mathcal{A}_1 < d - k$ , то подобно пункту i) получаем  $|\mathcal{A}_1| \leq 2^{d-2}$  и желаемую оценку, так что далее можно считать  $\dim \mathcal{A}_1 = d - k$ . Мы запишем  $\mathcal{A}$  в удобном базисе и увидим, что благодаря  $\dim \mathcal{A}_1 = d - k$  каждый из векторов  $b_{1j}$  можно выбрать в качестве  $b_d$  в самом начале рассуждения, и удачный выбор приведёт к уже рассмотренному случаю или к достаточно сильной нижней оценке на  $(|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|)|\mathcal{B}_*|$ . Итак, дополним  $\{b_{11}, \dots, b_{1k}\}$  элементами  $\mathcal{B}_*$  до базиса  $\mathbb{R}^d$  и запишем  $\mathcal{A}$  в двойственном базисе. Вместе вектор-столбцы  $\mathcal{A}$  тогда будут выглядеть как

$$\mathcal{A} = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbb{A}_0 & \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_2 & \dots & \mathbb{A}_k \\ \hline \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} 1 \ 1 \dots 1 \ 1 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \ 0 \dots 0 \ 0 \\ 1 \ 1 \dots 1 \ 1 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \dots & \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \vdots \\ 1 \ 1 \dots 1 \ 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\ \hline \vdots & \underbrace{\vdots}_{\dim = d - k} & \vdots & \dots & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{l} k \\ \\ d - k \end{array}$$

Ранк серого блока совпадает с аффинной размерностью  $\mathbb{A}_1 = \mathcal{A}_1$ , то есть равен  $d - k$ , поэтому

$$\forall j > 1: d - 1 = \dim(\text{span}(\mathcal{A} \setminus \mathbb{A}_j)) = \dim(\mathcal{A} \cap b_{1j}^\perp)$$

А значит, действительно, любой из  $b_{1j}$  может быть изначально выбран в качестве  $b_d$ . Выберем  $b_{1j}$  с минимальным размером  $\mathbb{A}_j$  и повторим все рассуждения с ним в качестве  $b_d$ . Отметим, что тогда  $|\mathcal{A} \setminus \mathbb{A}_j| > |\mathbb{A}_j|$ , поэтому сдвига  $\mathcal{A}$ , меняющего местами  $\mathcal{A}_0$  и  $\mathcal{A}_1$ , произведено не будет, и в результате мы просто можем полагать

$$\begin{aligned} \forall j > 1: |\mathbb{A}_1| \leq |\mathbb{A}_j| &\implies \\ |\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| = |\mathbb{A}_0| + \sum_{j>1} |\mathbb{A}_j| &\geq (k-1) |\mathcal{A}_1| \geq 2 |\mathcal{A}_1| \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если  $|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| \geq 2d - 4$ , то из непустоты  $\mathcal{B}_*$  и 3.7 следует желаемая оценка. Иначе

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1| < 2d - 4 &\xrightarrow{3.9} |\mathcal{A}| < 2 \cdot (2d - 4) \implies \\ |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}|^2 &< (4d - 8)^2 < d2^d + 2d, \end{aligned}$$

завершая доказательство. □

Приведём примеры, демонстрирующие точность оценки в лемме 3:

**Пример 1** (Куб с щупальцами). Обозначая стандартный базис  $\{e_i\}$ ,

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=2}^d \delta_i e_i \right\} \cup \{e_1\}, \mathcal{B} = \{\delta_1 e_1 + e_j\} \cup \{e_1, 0\}, \text{ где } \delta_i \text{ пробегают } \{0, 1\} \text{ и } j > 1.$$

Здесь  $|\mathcal{A}| = 2^{d-1} + 1$  и  $|\mathcal{B}| = 2d$ .

**Пример 2** (Кросс-политоп). Обозначая стандартный базис  $\{e_i\}$ ,

$$\mathcal{A} = \left\{ e_d + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i e_i \right\} \cup \{0\}, \mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2} (e_d + \varepsilon_i e_i) \right\}, \text{ где } \varepsilon_i \text{ пробегают } \{-1, 1\}.$$

Как и в примере 1,  $|\mathcal{A}| = 2^{d-1} + 1$  и  $|\mathcal{B}| = 2d$ .



## Глава 4

### Заключение

В первой части этой работы исследована возможность применения корреляционного неравенства к постановке теоремы 1, обобщающего изящное доказательство теоремы ???. Задача сведена к дискретной проблеме о бинарных векторах и матрицах, введена конструкция частично упорядоченного множества, обобщающего решётку подмножеств в доказательстве теоремы 2 и найдены существенные препятствия к дальнейшему обобщению рассуждений. Во второй части доказана лемма 1 о единственности примера, на котором достигается равенство в теореме 1, и получен основной новый результат о стабильности оценки теоремы 1 – лемма 3.

В дальнейшем было бы интересно подробнее изучить структуру множества чумов из первой части, и получить более сильные оценки в теореме 1, предполагая ограничение снизу на размер каждого из семейств  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . Сформулируем две гипотезы, связанные с этими вопросами:

**Гипотеза 1.** *Количество неизоморфных частично упорядоченных множеств, возникающих из всевозможных симметричных  $B_{01} \in \text{Mat}_{d \times d}$  равно  $|\text{Gr}([\frac{d}{2}], \mathbb{F}_2^d)|$ , то есть равно гауссовому биномиальному коэффициенту  $\binom{d}{k}_q$  с  $q = 2$  и  $k = [\frac{d}{2}]$ .*

**Гипотеза 2.** *Пусть натуральные  $d$  и  $k \leq d$  таковы что  $2^{d-k} + k > 2^k(d - k + 1)$ , оба  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$  содержат базис  $\mathbb{R}^d$  и  $\langle a, b \rangle \in \{0, 1\}$  для любых  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$ , при этом каждое из  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  имеют размер строго больше  $2^{k-1}(d - k + 2)$ . Тогда  $|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq (d - k + 1)2^k(2^{d-k} + k)$ .*

Перебор в малых размерностях сильно поддерживает гипотезу 2.

# Литература

- [1] *Aprile, Manuel*. On 2-Level Polytopes Arising in Combinatorial Settings / Manuel Aprile, Alfonso Cevallos, Yuri Faenza // *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. — 2018. — Vol. 32, no. 3. — Pp. 1857–1886.
- [2] *Fiorini, Samuel*. Two-Level Polytopes with a Prescribed Facet / Samuel Fiorini, Vissarion Fisikopoulos, Marco Macchia. — 2016. — Pp. 285–296.
- [3] *Adam Bohn Yuri Faenza, Samuel Fiorini Vissarion Fisikopoulos Marco Macchia Kanstantsin Pashkovich*. Enumeration of 2-level polytopes / Samuel Fiorini Vissarion Fisikopoulos Marco Macchia Kanstantsin Pashkovich Adam Bohn, Yuri Faenza // *Mathematical Programming Computation*. — 2018. — Vol. 11.
- [4] *Andrey Kupavskii, Stefan Weltge*. Binary scalar products / Stefan Weltge Andrey Kupavskii // *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. — 2022. — Vol. 156.
- [5] *Kupavskii, Andrey*. Octopuses in the Boolean cube: Families with pairwise small intersections, part I / Andrey Kupavskii, Fedor Noskov // *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. — 2023.
- [6] *Alon, Noga*. The Probabilistic Method / Noga Alon, Joel H. Spencer. — Second edition. — New York: Wiley, 2004.