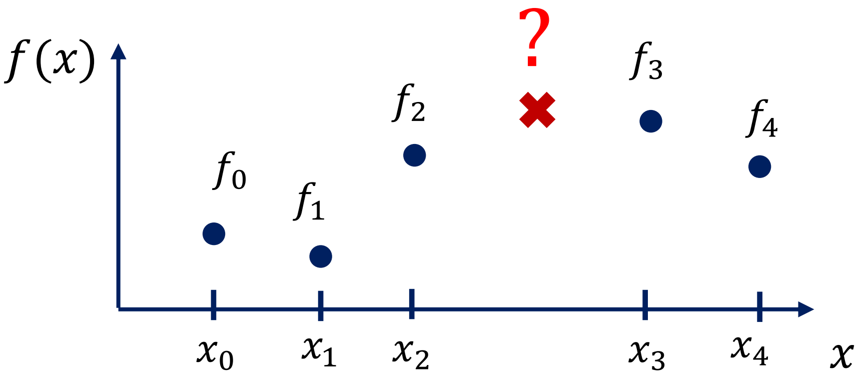
Интерполяция функций

К.ф.-м.н. Завьялова Наталья Александровна

natalia.zavyalova@gmail.com

Задача интерполяции



Интерполяция – это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

x_i - узлы интерполяции

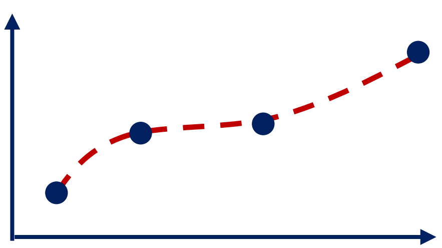
Алгебраическая интерполяция

$$\{f_i\}_{i=0}^{N} \xrightarrow{\quad I \quad} P_N(x)$$

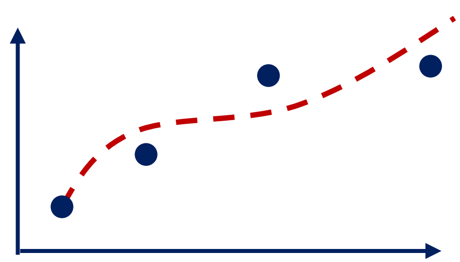
Сеточная функция — Интерполяционный полином

Основное условие интерполяции: равенство функции и интерполяционного полинома в узлах интерполяции

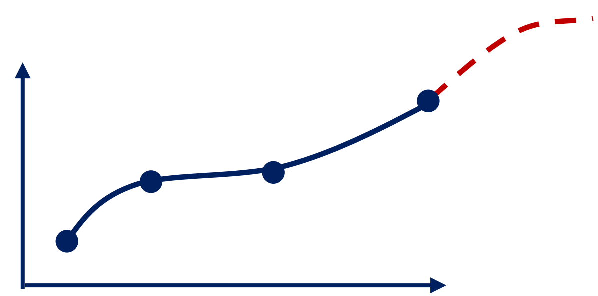
$$\boxed{P_N(x_i) \equiv f_i}$$



Интерполяция

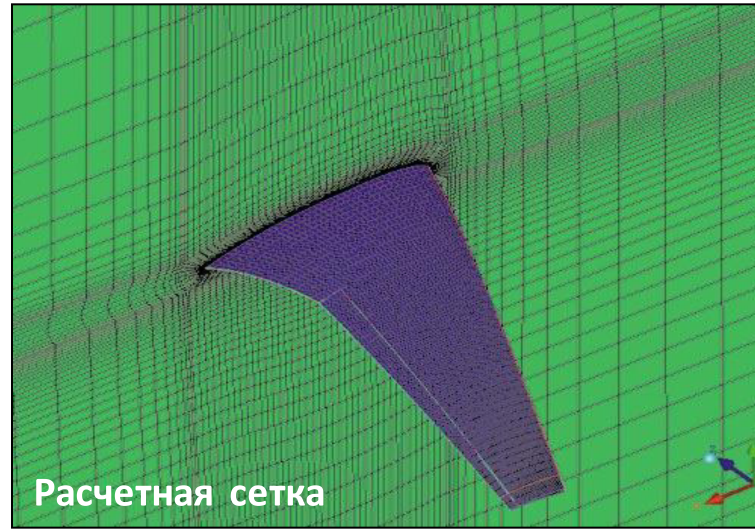


Аппроксимация



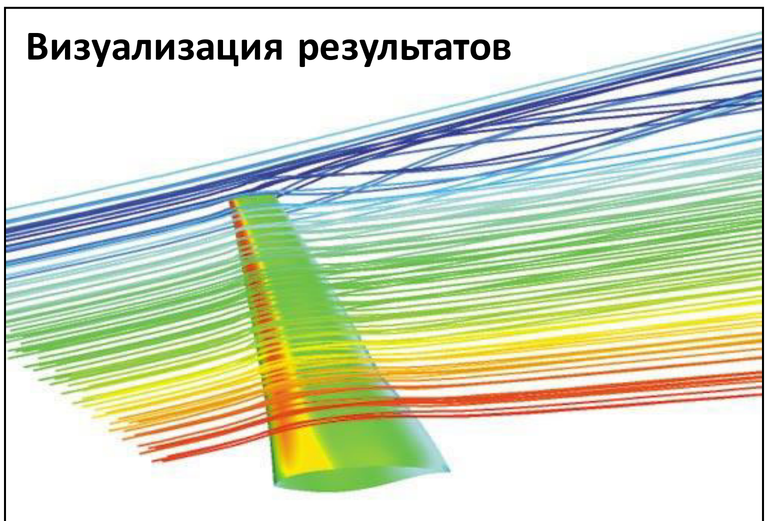
Экстраполяция

Пример из области автоматизации проектирования



Математическая модель течения

Численная реализация



Иллюстрации из: Плыкин М. FSI-технологии ANSYS // САПР и графика. – 2006. – Т. 7.

Методы построения интерполяционного полинома

Интерполяция алгебраическими полиномами

Сеточная функция

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	…	x_N
$f(x)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	…	f_N

Строим интерполянт в виде полинома: $P_N(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N$

неизвестны

Требуем выполнения основного условия интерполяции $P_N(x_i) = f_i$ и находим a_i из решения СЛАУ:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_N x_0^N = f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_N x_1^N = f_1 \\ \quad\quad\quad\quad \dots \\ a_0 + a_1 x_N + \cdots + a_N x_N^N = f_N \end{cases}$$

Определитель матрицы – детерминант Вандермонда. В случае различия всех узлов сетки он отличен от нуля, и, значит, существует единственное решение системы – набор коэффициентов.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j \le i \le N} (x_i - x_j) = 0$$

$$\Updownarrow$$

Существует пара (x_i, x_j): $x_i = x_j, \quad i \neq j$

Утверждение Если заданы $N + 1$ узлов x_0, …, x_N среди которых нет совпадающих, и значения функции в этих узлах $f(x_0)$, …, $f(x_N)$, то существует один и только один многочлен степени не выше N, принимающий в узлах x_i заданные значения $f(x_i)$.

Метод Лагранжа

Строим интерполяционный полином в виде: $L_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) f_k$

Из основного условия интерполяции получаем $L_N(x_i) = f_i \quad \forall i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x_i) f_k = f_i$

Соответственно $\varphi_k(x_i) = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases} \qquad i = 0, \dots, N$

Каждая из функций $\varphi_k(x)$ имеет не менее N нулей на $[a, b]$. $\Rightarrow$ Ищем $\varphi_k(x)$ в виде полинома степени N

$$\varphi_k(x) = \alpha_k (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_N)$$

Из условия $\varphi_k(x_k) = 1$ находим α_k

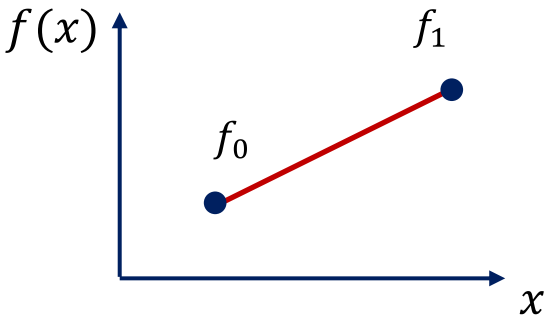
$$\alpha_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_N)}$$

$$\boxed{\varphi_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N} \frac{x - x_i}{x_k - x_j}}$$

Примеры построенных методом Лагранжа полиномов

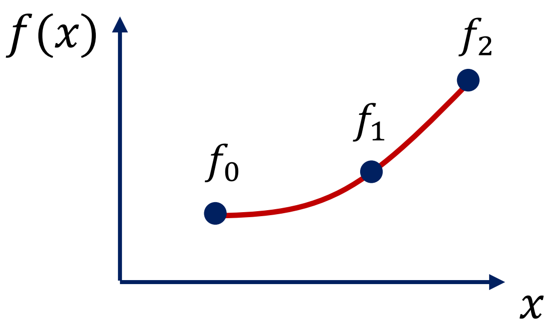
$$L_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) f_k \qquad \varphi_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N} \frac{x - x_i}{x_k - x_j}$$

Линейная интерполяция:



$$L_1(x) = \sum_{k=0}^{1} \varphi_k(x) f_k = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Квадратичная интерполяция:



$$L_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \varphi_k(x) f_k = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} +$$

$$+ f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Метод Ньютона

Интерполяционный полином в форме Ньютона – разностный аналог формулы Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2 f''(x_0)}{2!} + \cdots$$

Разделенная разность первого порядка

$$f_{ij} = f(x_i, x_j) = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j}, \qquad i, j = 0, \dots, N \quad i \neq j$$

Разделенная разность второго порядка

$$f_{j\ j+1\ j+2} = f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}) = \frac{f_{j j+1} - f_{j+1\ j+2}}{x_j - x_{j+2}} = \frac{\dfrac{f_j - f_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} + \dfrac{f_{j+1} - f_{j+2}}{x_{j+1} - x_{j+2}}}{x_j - x_{j+2}}$$

Разделенная разность k-го порядка

$$f_{j\ j+1\ j+2\ \dots j+k} = f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) = \frac{f_{j+1 \dots j+k} - f_{j \dots j+k-1}}{x_{j+k} - x_j}$$

Интерполяционный полином в форме Ньютона

$$P_N = f_0 + (x - x_0)f_{01} + (x - x_0)(x - x_1)f_{012} + \cdots (x - x_0) \dots (x - x_{N-1})f_{012\dots N}$$

Метод Ньютона

Разделенная разность k-го порядка

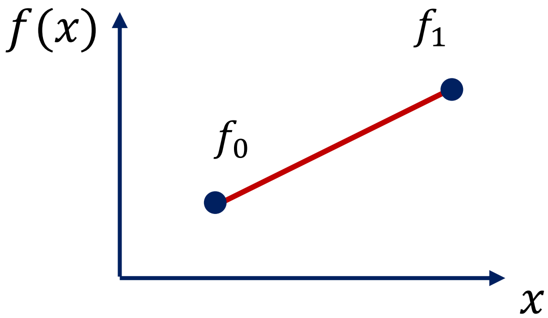
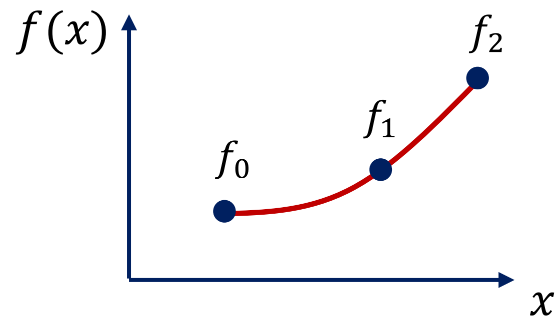
$$f_{j\ j+1\ j+2\ \dots j+k} = f\left(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}\right) = \frac{f_{j+1\dots j+k} - f_{j\ \dots j+k-1}}{x_{j+k} - x_j}$$

x_0	f_0				
		f_{01}			
x_1	f_1		f_{012}		
		f_{12}	.		
x_2	f_2	.	.	...	$f_{0\dots N}$
.	.	.	.		
.	.	.	$f_{N\text{-}2\ N\text{-}1\ N}$		
.	.	$f_{N\text{-}1\ N}$			
x_N	f_N				

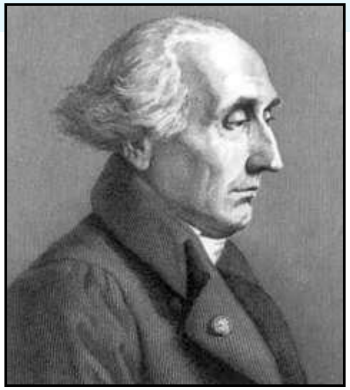
Интерполяционный полином в форме Ньютона

$$P_N = f_0 + (x - x_0)f_{01} + (x - x_0)(x - x_1)f_{012} + \cdots (x - x_0) \dots (x - x_{N-1})f_{012\dots N}$$

Примеры построенных методом Ньютона полиномов

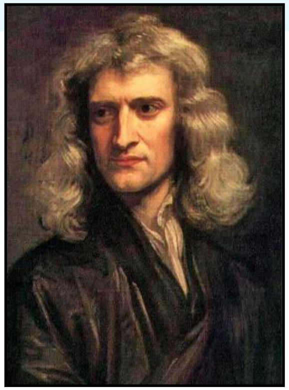
<table>
<tr><th>Линейная интерполяция</th><th>Квадратичная интерполяция</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лагранж</td></tr>
<tr><td>$$L_1(x) = f_0\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$</td><td>$$L_2(x) = f_0\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$ $$+f_1\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ньютон</td></tr>
<tr><td>$$P_1(x) = f_0 + (f_1 - f_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$
Добавка к $P_1(x)$</td><td>$$P_2(x) = f_0 + (f_1 - f_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} +$$ $$+(x - x_0)(x - x_1)\frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$</td></tr>
</table>

Лагранж vs Ньютон



Используют при доказательствах теорем

Рекомендуется использовать при программной реализации



Удобно применять, когда узлы интерполяции фиксированы и интерполируется не одна, а несколько функций.

Удобно применять, когда интерполируется одна и та же функция, но число узлов интерполяции постепенно увеличивается.

$$L_1(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} =$$

$$= x \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} - \frac{f_0 x_1 - f_1 x_0}{x_0 - x_1}$$

$$P_1(x) = f_0 + (f_1 - f_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} =$$

$$= x \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + \frac{f_0 x_1 - f_1 x_0}{x_1 - x_0}$$

$L_N(x)$ и $P_N(x)$ – различные формы записи одного и того же многочлена

Погрешность интерполяции

Погрешность интерполяции

Опр: Разница между функцией и интерполяционным полиномом N-ой степени в точке x называется остаточным членом интерполяции: $R_N(x) = f(x) - L_N(x)$

Утверждение Пусть на отрезке $[a,b]$ функция $u(x)$ $(N+1)$ раз непрерывно дифференцируема. Тогда:

$$\boxed{R_N(x) = \frac{u^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\prod_{j=0}^{N}(x-x_j), \qquad \xi \in [a,b]}$$

Доказательство. Если $x = x_j$, то утверждение верно. Иначе введем в рассмотрение функцию:

$$g(t) = f(t) - L_N(t) - [f(x) - L_N(x)]\prod_{j=0}^{N}\frac{(t-x_j)}{(x-x_j)}$$

Функция $g(t)$, имеет $N+2$ нуля на $[a,\, b]$:

$$g(x_i) = f(x_i) - L_N(x_i) - [f(x) - L_N(x)]\prod_{j=0}^{N}\frac{(x_i-x_j)}{(x-x_j)} = 0, \qquad i = 0, \ldots N$$

$$g(x) = f(x) - L_N(x) - [f(x) - L_N(x)]\prod_{j=0}^{N}\frac{(x-x_j)}{(x-x_j)} = 0.$$

По обобщенной теореме Ролля: $\exists \xi \in [a,b]\colon\ g^{(N+1)}(\xi) = 0$

$$g^{(N+1)}(\xi) = f^{(N+1)}(\xi) - 0 - [f(x) - L_N(x)]\frac{(N+1)!}{\prod_{j=0}^{N}(x-x_j)} = 0$$

$$f(x) - L_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\prod_{j=0}^{N}(x-x_j) \Rightarrow \max|f(x) - L_N(x)| = \frac{\max\limits_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(N+1)}(\xi)\right|}{(N+1)!}\left|\prod_{j=0}^{N}(x-x_j)\right|$$

Погрешность интерполяции на равномерной сетке

Утверждение Для случая равномерной сетки на отрезке $[a,b]$

$$\{x_i\}_{i=0}^{N}, \qquad x_i = a + ih, \qquad h = (b-a)/N$$

для любого x на отрезке $[a,\, b]$

$$\boxed{|f(x) - L_N(x)| \le \frac{h^{N+1}}{N+1} \max_{\xi\in[a,b]} \left|f^{(N+1)}(\xi)\right|.}$$

Доказательство. Положим $\quad x = x_k + \alpha h, \qquad \alpha \in (0,1), \qquad k = 0, \dots N-1$

Тогда $\quad x - x_j = kh + \alpha h - jh = h(k + \alpha - j)$

$$\prod_{j=0}^{N} (x - x_j) = h^{N+1} \prod_{j=0}^{N} (k + \alpha - j) \le h^{N+1} N!$$

$$|f(x) - L_N(x)| = \frac{\max\limits_{\xi\in[a,b]} \left|f^{(N+1)}(\xi)\right|}{(N+1)!} \left|\prod_{j=0}^{N} (x - x_j)\right|$$

$$\Longrightarrow \quad |f(x) - L_N(x)| \le \frac{h^{N+1}}{N+1} \max_{\xi\in[a,b]} \left|f^{(N+1)}(\xi)\right|.$$

j	0	...	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	...	N
$\lvert k+\alpha-j\rvert$	$k+\alpha$	...	$2+\alpha$	$2+\alpha$	α	$1-\alpha$	$2-\alpha$	...	$N-k-\alpha$
Маж. мн. в $N!$	$k+1$	...	3	2	1	1	$2+k$	...	N

Погрешность в задаче экстраполяции

Экстраполяция – аппроксимация функции **вне** отрезка, на котором заданы узлы интерполяции.

$$x \in [b, b+h]: \qquad |R_N(x)| \le h^{N+1} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(N+1)}(\xi) \right|$$

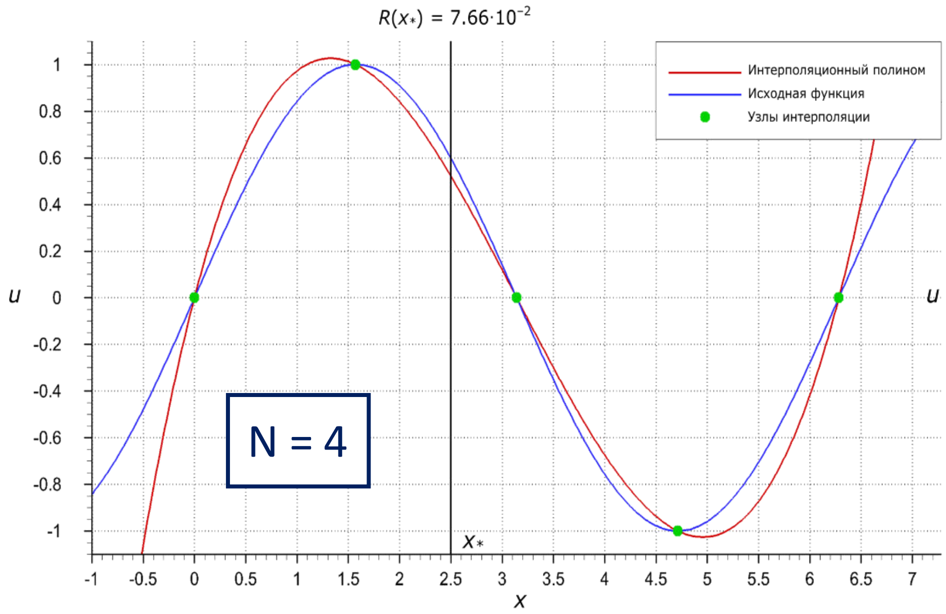
$$x \in [b+h, b+2h]: \quad |R_N(x)| \le (N+2)\, h^{N+1} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(N+1)}(\xi) \right|$$

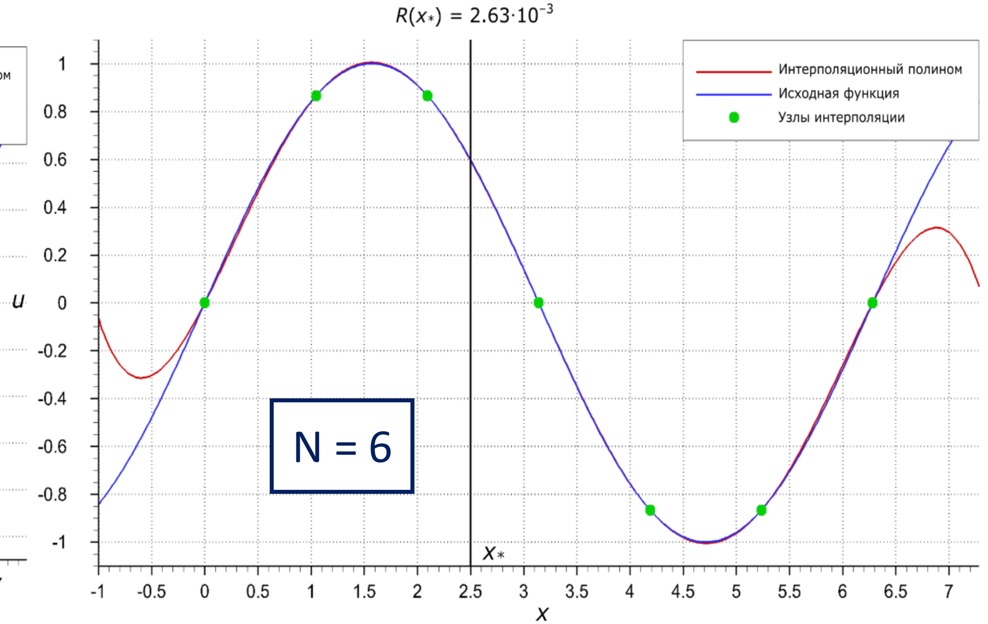
$$x \in [b+2h, b+3h]: \quad |R_N(x)| \le \frac{(N+2)(N+3)}{2} h^{N+1} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(N+1)}(\xi) \right|$$

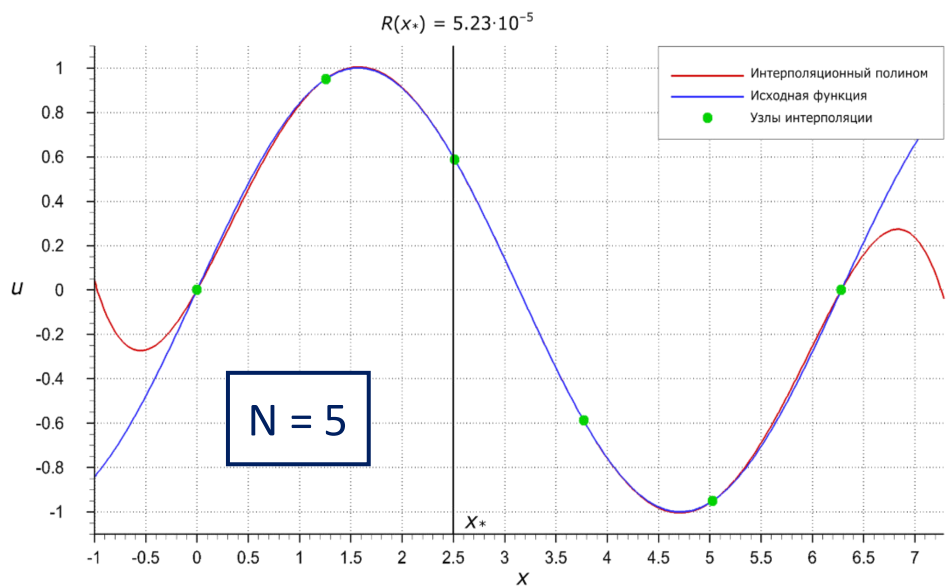
Оценка ухудшается как за счет появления множителей, пропорциональных *N*, так и за счет увеличения оценки производной.

Экстраполяция функции менее надежна, чем интерполяция, и ее точность резко падает по мере удаления от носителя информации.

$$u(x) = \sin x, \qquad x \in [0, 2\pi], \qquad x_* = 2.5$$







$$P_4(x) = 1.7x^4 - 8.1 \cdot 10^{-1}x^3 + 8.6 \cdot 10^{-2}x^2 + 4.2 \cdot 10^{-9}\,x$$

$$P_5(x) = -6.0 \cdot 10^{-3}x^5 + 9.4 \cdot 10^{-2}x^4 - 4.3 \cdot 10^{-1}x^3 + 3.4 \cdot 10^{-1}x^2 + 8.3 \cdot 10^{-1}\,x$$

$$P_6(x) = -1.6 \cdot 10^{-10}x^6 - 5.7 \cdot 10^{-3}x^5 + 9.0 \cdot 10^{-2}x^4 - 4.1 \cdot 10^{-1}x^3 + 3.0 \cdot 10^{-1}x^2 + 8.7 \cdot 10^{-1}\,x$$

Увеличение числа узлов интерполяции

Сетка на $[a, b]$: $\Omega_N = \{\{x_i\}_{i=0}^{N}: a \le x_0 < x_1 < \dots < x_N \le b\}$

Рассмотрим последовательность сеток с возрастающим числом узлов:

$$\Omega_0 = \left\{x_0^{(0)}\right\}, \Omega_1 = \left\{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\right\}, \dots, \Omega_N = \left\{x_0^{(N)}, x_1^{(N)}, \dots x_N^{(N)}\right\}, \dots$$

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$. Построим последовательность интерполяционных многочленов для функции $f(x)$ по ее значениям в узлах сетки Ω_N: $L_N[f(x)]$.

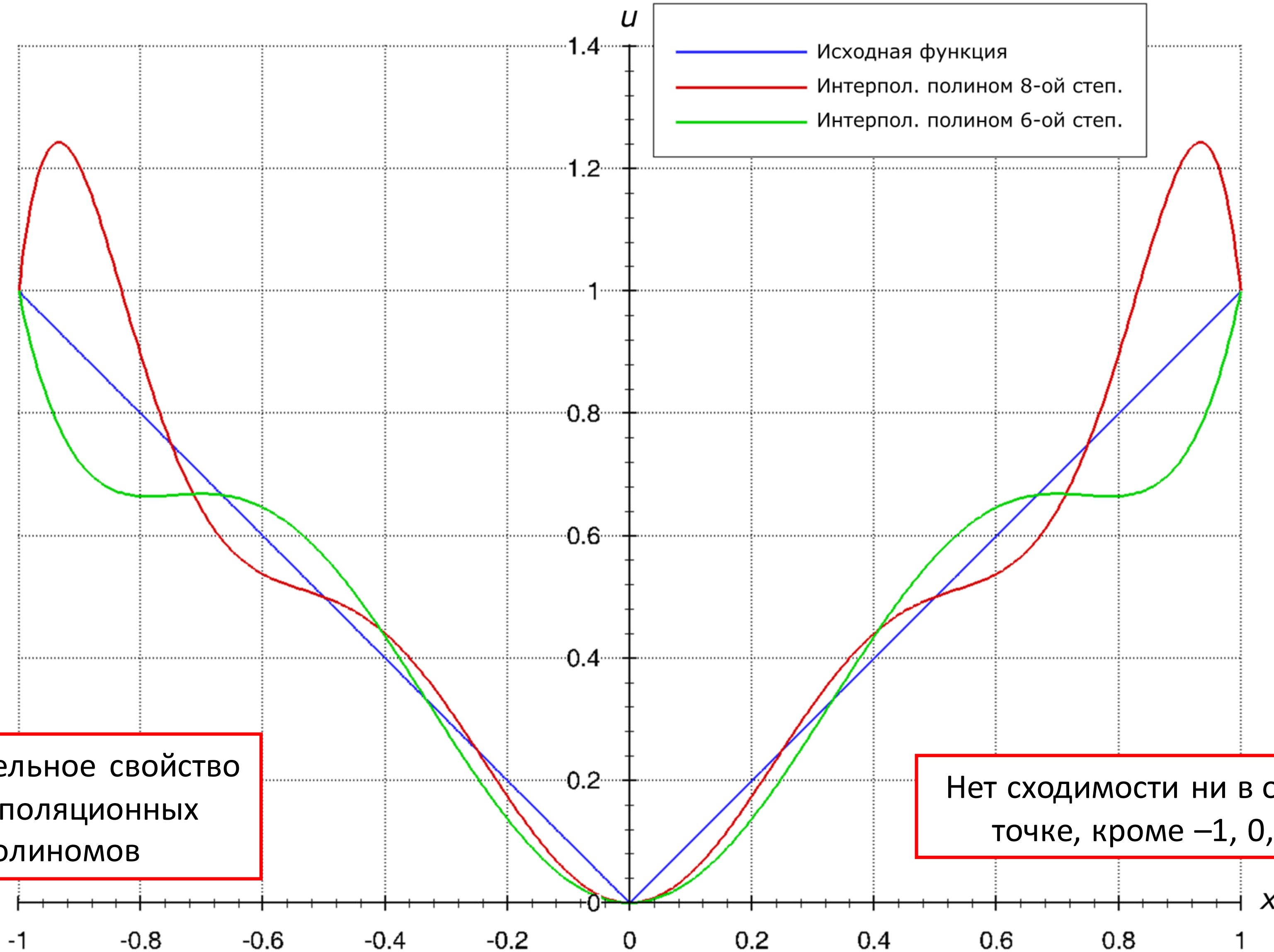
Поточечная сходимость в точке $x^* \in [a, b]$:

$$\exists \lim_{N\to\infty} L_N[f(x^*)] = \lim_{x_i \to x^*} f(x^*) + L'_N(x_i - x^*) + O(x_i - x^*)^2 = f(x^*)$$

Равномерная сходимость на $[a, b]$:

$$\lim_{N\to\infty} \left\{\max_{x\in[a,b]} |f(x) - L_N[f(x)]|\right\} = \lim_{N\to\infty} \left\{\max_{x\in[a,b]} \left|\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{N} (x - x_j)\right|\right\} = 0$$

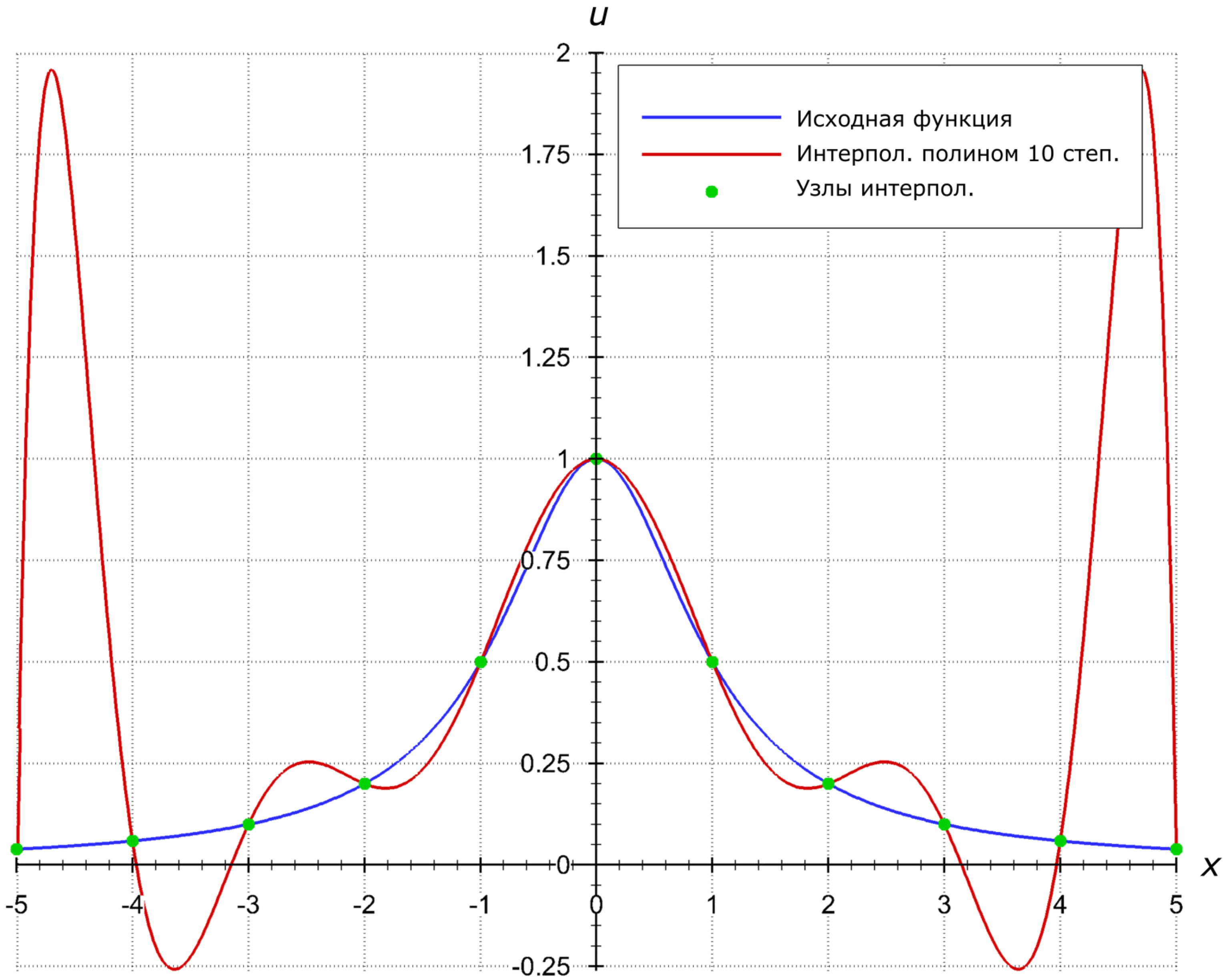
Пример С.Н. Берштейна $u(x) = |x|$, равномерная сетка



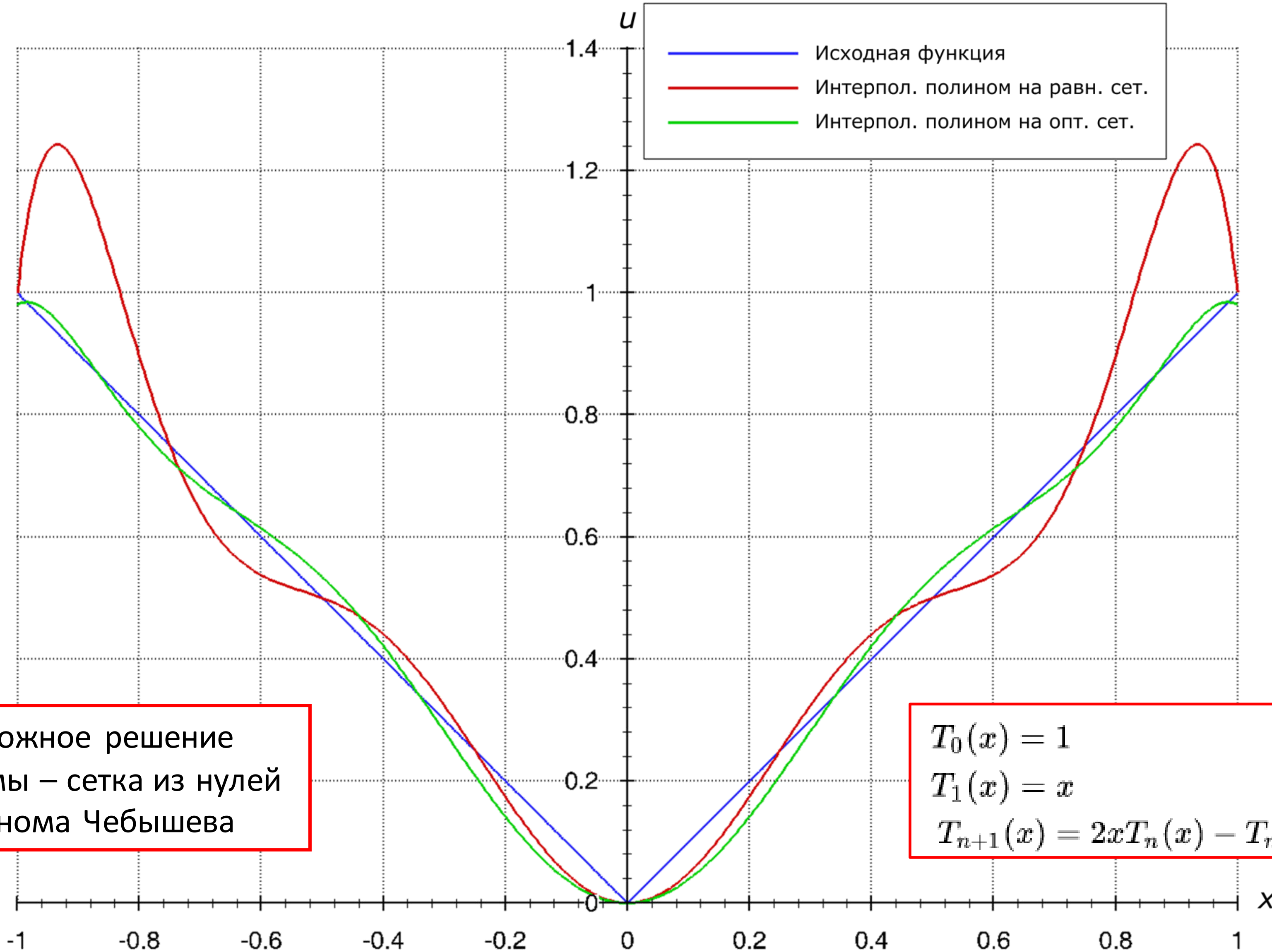
Колебательное свойство интерполяционных полиномов

Нет сходимости ни в одной точке, кроме –1, 0, 1.

Пример Рунге, $u(x) = 1/(\ 1 + x^2\ )$, равномерная сетка



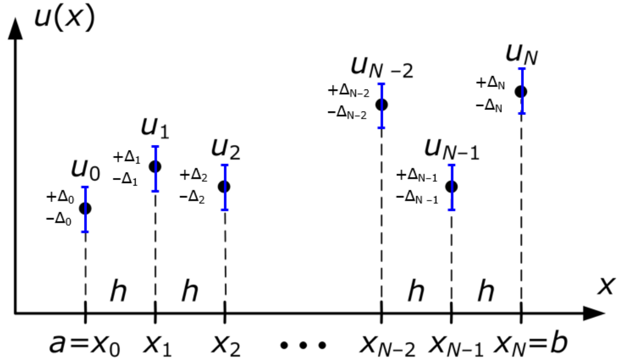
$U(x) = |x|$, равномерная сетка vs оптимальная сетка



Возможное решение проблемы – сетка из нулей полинома Чебышева

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Влияние неустранимой погрешности



$$\Delta = \max_i \Delta_i$$

$L_N(x)$ - Интерполяционный полином, построенный по **точным** значениям функции

$\tilde{L}_N(x)$ - Интерполяционный полином, построенный по **возмущенным** значениям функции

$$\left|\tilde{R}_N(x)\right| = \left|u(x) - \tilde{L}_N(x)\right| = \left|u(x) - L_N(x) + L_N(x) + \tilde{L}_N(x)\right| \le |u(x) - L_N(x)| + \left|L_N(x) - \tilde{L}_N(x)\right| \le$$

$$\le |R_N(x)| + \Delta_p$$

Знаем как оценить

Необходимо оценить

$$\Delta_p = \left|L_N(x) - \tilde{L}_N(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) u_k - \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) \tilde{u}_k\right|$$

$$\varphi_k(x) = \prod_{i=0, i\ne k}^{N} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$\Delta_p = \left|\sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x)(u_k - \tilde{u}_k)\right| \le \sum_{k=0}^{N} \Delta_k |\varphi_k(x)| \le \mathbf{L}\Delta$$

$$\boxed{\mathbf{L} = \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=0}^{N} |\varphi_k(x)|}$$

Константа Лебега

Пример. Константа Лебега для случая линейной интерполяции

$$\tilde{L}_1(x) = \sum_{k=0}^{1} \varphi_k(x) \tilde{u}_k = \tilde{u}_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \tilde{u}_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \qquad x_0 = a, x_1 = b$$

$$\mathbf{L} = \max_{x\in[a,b]} \left(\left|\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right| + \left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right| \right) = \max_{x\in[a,b]} \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) = 1$$

Недостатки глобальной интерполяции

Глобальная интерполяция многочленом высокой степени $(N > 10 \div 20)$ нежелательная, поскольку:

- При вычислении многочлена высокой степени могут накапливаться ошибки округления (например как при суммировании ряда Тейлора);
- Интерполяционный многочлен может плохо приближать исходную функцию (примеры Берштейна и Рунге на равномерной сетке);
- Задача интерполяции может быть плохо обусловлена (интерполяционный многочлен чувствителен к возмущениям значений в узлах сетки);

Частично указанные проблемы можно решить введением Чебышевской сетки, но не всегда такое возможно.

Задача интерполяции: По данному набору значения $u(x)$ на сетке $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ восстановить функцию U(x),

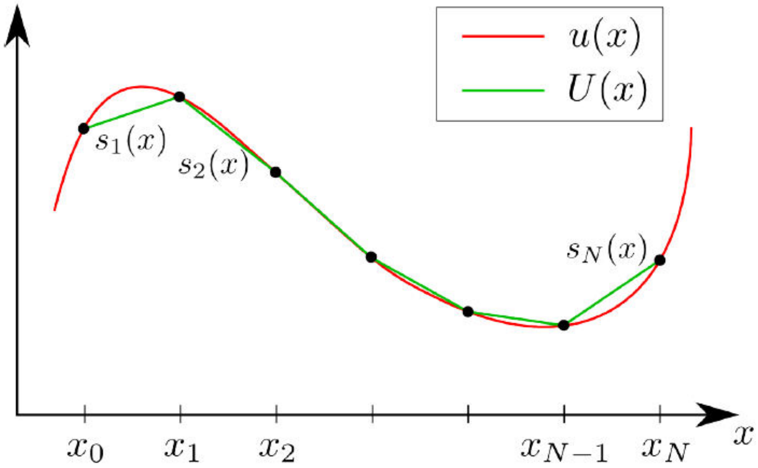
Совпадающую с $u(x_i)$ в узлах x_i.

- Ранее функцию $U(x)$ мы искали в виде полинома от x
- Рассмотрим теперь вариант, когда на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция является некоторым многочленом $s_i(x)$, причем для каждого отрезка эта функция своя.
- В такой постановке задача имеет множество решений. Единственность решения можно обеспечить потребовав от функции U(x) некоторой гладкости в местах стыков функций $s_i(x)$, то есть в узлах интерполяции

Интерполяция сплайнами

Примеры сплайнов

Кусочно-линейная интерполяция

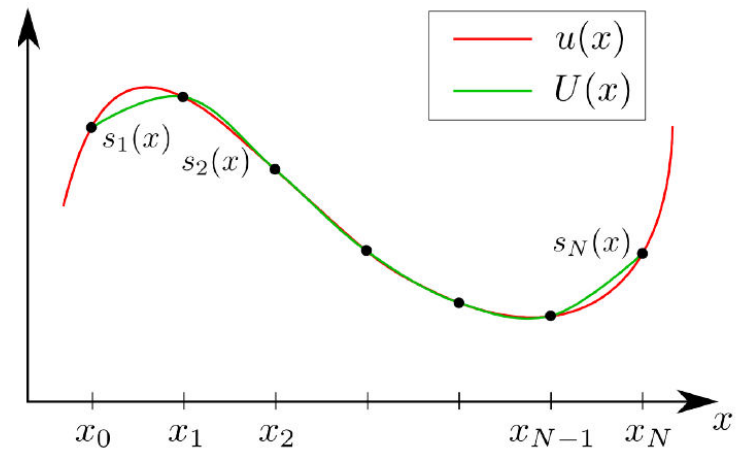


$$U(x) = s_i(x), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s_i(x) = u_{i-1}\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + u_i\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

На каждом отрезке функция приближается линейной. Дополнительных условия не требуется, условия гладкости на $U(x)$ в данном случае не налагаются.

Гладкая кусочно-кубическая интерполяция



$$U(x) = s_i(x), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$$

$$s_i''(x_i) = s_{i+1}''(x_i)$$

На каждом отрезке функция приближается кубическим многочленом. Дополнительно требуется непрерывность первой и второй производных $U(x)$ на всем отрезке $[x_0, x_N]$.

Построение сплайна

Характеристики сплайна

- Степенью сплайна называется максимальная из степеней многочленов $s_i(x)$.
- **Гладкостью** сплайна называется количество непрерывных производных, которые U(x) имеет на всем отрезке $[x_0, x_N]$.
- **Дефектом** сплайна называется разность между степенью и гладкостью сплайна.

Например, кусочно-линейный сплайн имеет степень 1, гладкость 0 и дефект 1.
Гладкий кусочно-кубический сплайн имеет степень 3, гладкость 2 и дефект 1.

Построение сплайна

Найдем выражения для функций $s_i(x)$, составляющих гладкий кубический сплайн.

Поскольку сплайн имеет степень 3, все функции $s_i(x)$ являются многочленами степени 3. Запишем их в виде:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

Такая форма записи соответствует ряду Тейлора для $s_i(x)$ в окрестности точки x_i. Поскольку $s_i(x)$ – кубический многочлен, его ряд Тейлора обрывается после кубического слагаемого. Из аналогии с рядом Тейлора заключаем, что

$$a_i = s_i(x_i) \qquad b_i = s_i'(x_i) \qquad c_i = s_i''(x_i) \qquad d_i = s_i''(x_i)$$

Хотя в этом можно убедиться и обычной подстановкой.