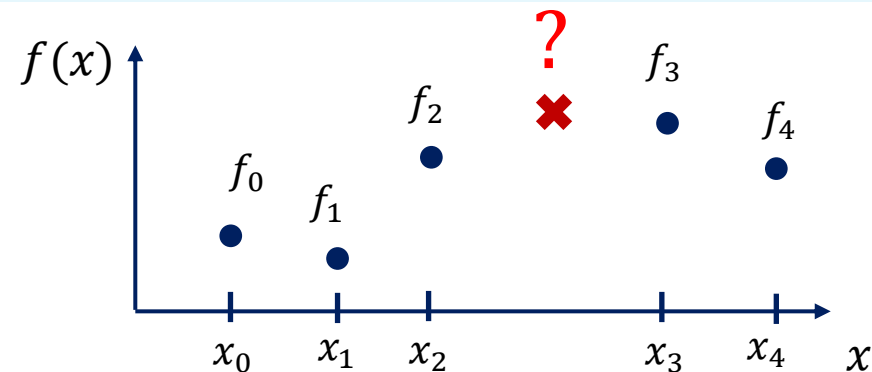


# Интерполяция функций

## Часть 2

К.ф.-м.н. Завьялова Наталья Александровна  
[natalia.zavyalova@gmail.com](mailto:natalia.zavyalova@gmail.com)

# Задача интерполяции



**Интерполяция** – это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

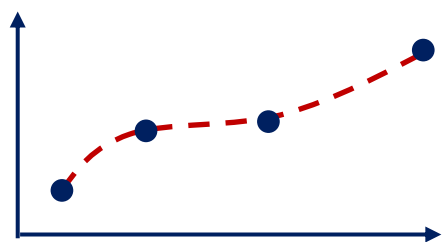
$x_i$  – узлы интерполяции

Алгебраическая  
интерполяция

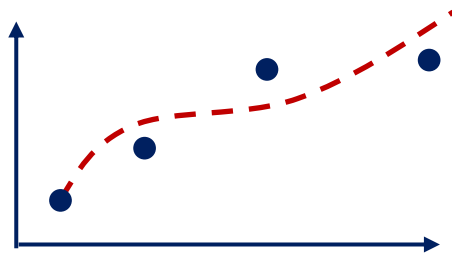


**Основное условие интерполяции:** равенство функции и интерполяционного полинома в узлах интерполяции

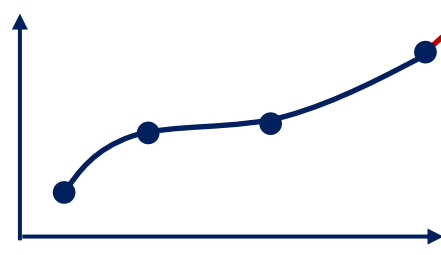
$$P_N(x_i) \equiv f_i$$



Интерполяция

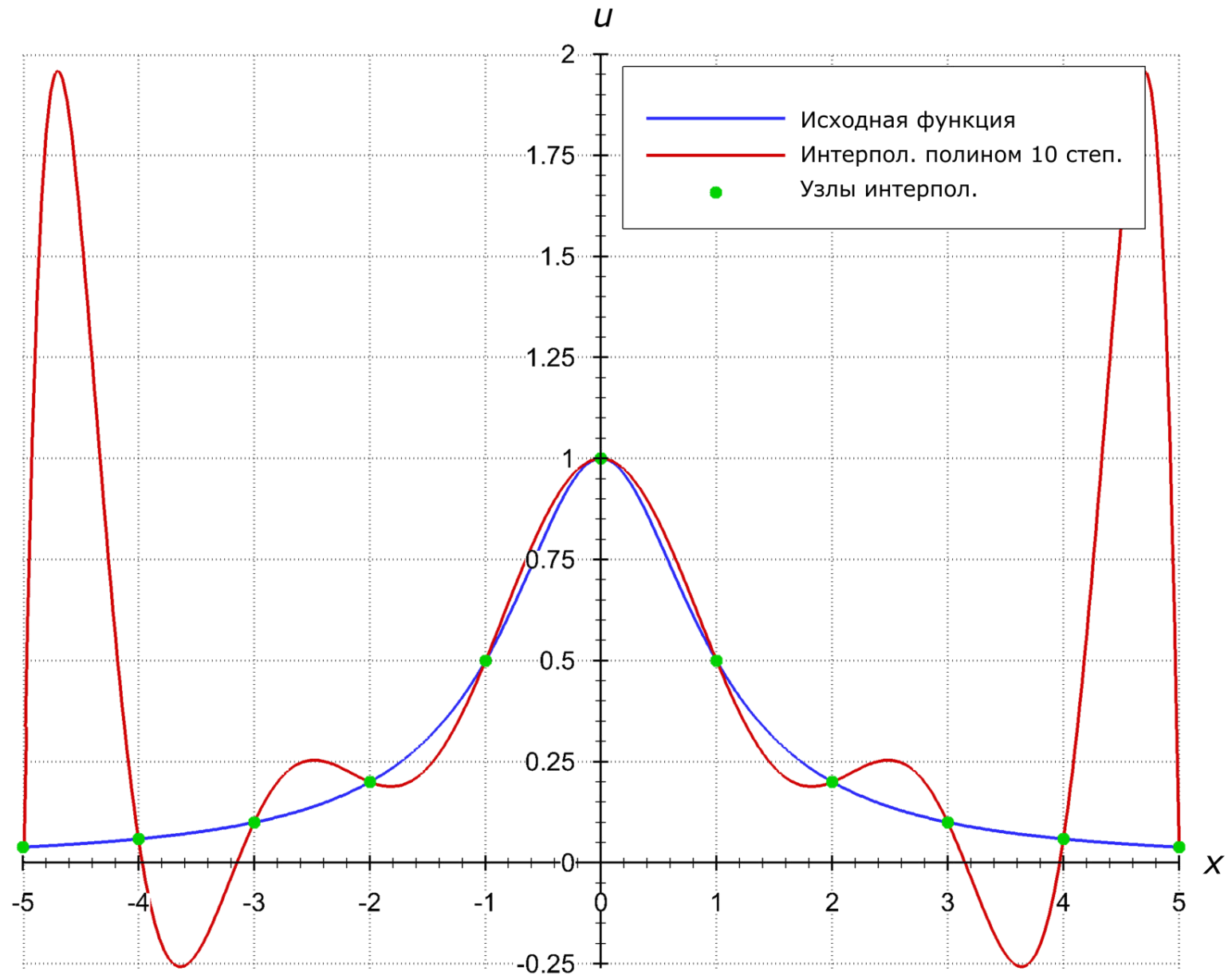


Аппроксимация

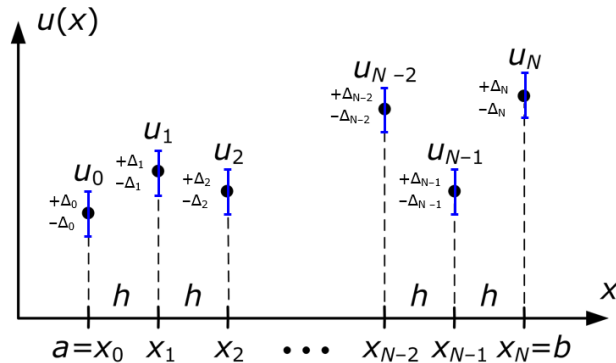


Экстраполяция

# Пример Рунге, $u(x) = 1/(1 + x^2)$ , равномерная сетка



# Влияние неустранимой погрешности



$$\Delta = \max_i \Delta_i$$

$L_N(x)$  - Интерполяционный полином, построенный по **точным** значениям функции

$\tilde{L}_N(x)$  - Интерполяционный полином, построенный по **возмущенным** значениям функции

$$|\tilde{R}_N(x)| = |u(x) - \tilde{L}_N(x)| = |u(x) - L_N(x) + L_N(x) + \tilde{L}_N(x)| \leq |u(x) - L_N(x)| + |L_N(x) - \tilde{L}_N(x)| \leq$$

$$\leq |R_N(x)| + \Delta_p$$

Знаем как оценить

Необходимо оценить

$$\Delta_p = |L_N(x) - \tilde{L}_N(x)| = \left| \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) u_k - \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) \tilde{u}_k \right|$$

$$\varphi_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^N \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$\Delta_p = \left| \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) (u_k - \tilde{u}_k) \right| \leq \sum_{k=0}^N \Delta_k |\varphi_k(x)| \leq L \Delta$$

$$L = \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^N |\varphi_k(x)|$$

Константа Лебега

**Пример.** Константа Лебега для случая линейной интерполяции

$$\tilde{L}_1(x) = \sum_{k=0}^1 \varphi_k(x) \tilde{u}_k = \tilde{u}_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \tilde{u}_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad x_0 = a, x_1 = b$$

$$L = \max_{x \in [a, b]} \left( \left| \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right| + \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| \right) = \max_{x \in [a, b]} \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) = 1$$

# Асимптотики для константы Лебега

$$\mathbf{L} = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^N |\varphi_k(x)|$$

Константа  
Лебега

$\mathbf{L} \sim 2^N$  Для равномерной сетки

$\mathbf{L} \sim \ln N$  Для сетки, построенной на  
нулях полинома Чебышёва

# Недостатки глобальной интерполяции

Глобальная интерполяция многочленом высокой степени ( $N > 10 \div 20$ ) нежелательная, поскольку:

- При вычислении многочлена высокой степени могут накапливаться ошибки округления (например как при суммировании ряда Тейлора);
- Интерполяционный многочлен может плохо приближать исходную функцию (примеры Берштейна и Рунге на равномерной сетке);
- Задача интерполяции может быть плохо обусловлена (интерполяционный многочлен чувствителен к возмущениям значений в узлах сетки);

Частично указанные проблемы можно решить введением Чебышевской сетки, но не всегда такое возможно.

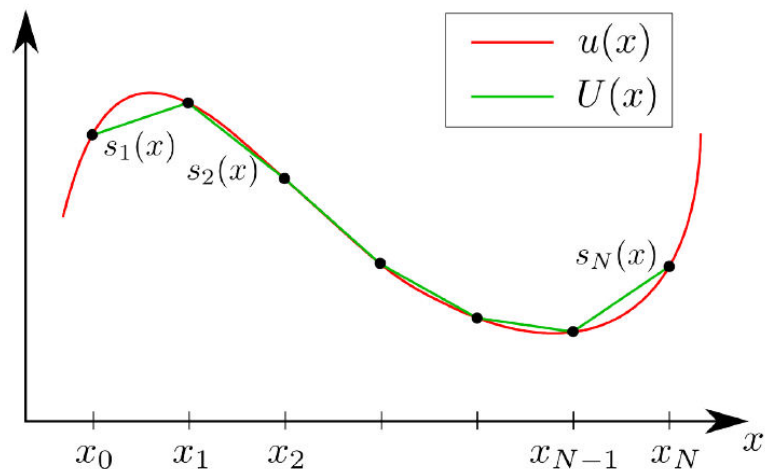
Задача интерполяции: По данному набору значения  $u(x)$  на сетке  $\{x_i\}_{i=0}^N$  восстановить функцию  $U(x)$ , Совпадающую с  $u(x_i)$  в узлах  $x_i$ .

- Ранее функцию  $U(x)$  мы искали в виде полинома от  $x$
- Рассмотрим теперь вариант, когда на каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  функция является некоторым многочленом  $s_i(x)$ , причем для каждого отрезка эта функция своя.
- В такой постановке задача имеет множество решений. Единственность решения можно обеспечить потребовав от функции  $U(x)$  некоторой гладкости в местах стыков функций  $s_i(x)$ , то есть в узлах интерполяции

# Интерполяция сплайнами

# Примеры сплайнов

## Кусочно-линейная интерполяция

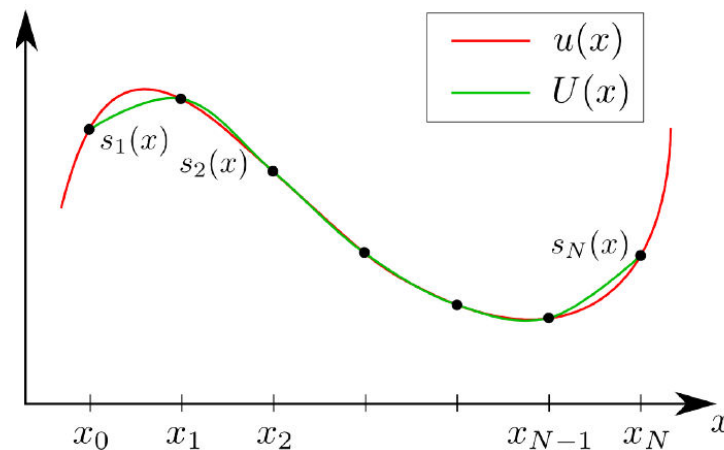


$$U(x) = s_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s_i(x) = u_{i-1} \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + u_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

На каждом отрезке функция приближается линейной. Дополнительные условия не требуется, условия гладкости на  $U(x)$  в данном случае не налагаются.

## Гладкая кусочно-кубическая интерполяция



$$U(x) = s_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_i)$$

$$s''_i(x_i) = s''_{i+1}(x_i)$$

На каждом отрезке функция приближается кубическим многочленом. Дополнительно требуется непрерывность первой и второй производных  $U(x)$  на всем отрезке  $[x_0, x_N]$ .



# Построение сплайна

## Характеристики сплайна

- Степенью сплайна называется максимальная из степеней многочленов  $s_i(x)$ .
- **Гладкостью** сплайна называется количество непрерывных производных, которые  $U(x)$  имеет на всем отрезке  $[x_0, x_N]$ .
- **Дефектом** сплайна называется разность между степенью и гладкостью сплайна.

Например, кусочно-линейный сплайн имеет степень 1, гладкость 0 и дефект 1.

Гладкий кусочно-кубический сплайн имеет степень 3, гладкость 2 и дефект 1.

## Построение сплайна

Найдем выражения для функций  $s_i(x)$ , составляющих гладкий кубический сплайн.

Поскольку сплайн имеет степень 3, все функции  $s_i(x)$  являются многочленами степени 3. Запишем их в виде:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

Такая форма записи соответствует ряду Тейлора для  $s_i(x)$  в окрестности точки  $x_i$ . Поскольку  $s_i(x)$  – кубический многочлен, его ряд Тейлора обрывается после кубического слагаемого. Из аналогии с рядом Тейлора заключаем, что

$$a_i = s_i(x_i) \quad b_i = s_i'(x_i) \quad c_i = s_i''(x_i) \quad d_i = s_i'''(x_i)$$

Хотя в этом можно убедиться и обычной подстановкой.

# Построение сплайна

## Условия непрерывности

Выразим условия непрерывности и гладкости сплайна в терминах коэффициентов  $a_i, b_i, c_i, d_i$ . Для удобства введем обозначение для длины  $i$ -го отрезка  $h_i = x_i - x_{i-1}$ . Запишем условие непрерывности  $U(x)$  в точке  $x_{i-1}$ :

$$a_{i-1} = s_{i-1}(x_{i-1}) = s_i(x_{i-1}) = a_i + b_i(x_{i-1} - x_i) + \frac{c_i}{2}(x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x_{i-1} - x_i)^3$$

Пользуясь обозначением  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,

$$a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3, \quad i = 2, \dots, N. \quad (1)$$

## Условия гладкости

Выпишем условия непрерывности первой и второй производной  $U(x)$  в точках  $x_{i-1}$ :

$$\begin{aligned} b_{i-1} &= s'_{i-1}(x_{i-1}) = s'_i(x_{i-1}) = b_i + c_i(x_{i-1} - x_i) + \frac{d_i}{2}(x_{i-1} - x_i)^2, \\ c_{i-1} &= s''_{i-1}(x_{i-1}) = s''_i(x_{i-1}) = c_i + d_i(x_{i-1} - x_i). \end{aligned}$$

Пользуясь  $h_i$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2, \quad i = 2, \dots, N, \quad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \quad i = 2, \dots, N. \quad (3)$$

# Построение сплайна

## Основное условия интерполяции

Выпишем условия интерполирования, то есть  $U(x_i) = u(x_i)$ :

$$a_i = s_i(x_i) = U(x_i) = u(x_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Кроме этого, есть еще условия в точке  $x_0$ ,

$$a_1 + b_1(x_0 - x_1) + \frac{c_1}{2}(x_0 - x_1)^2 + \frac{d_1}{6}(x_1 - x_0)^3 = s_1(x_0) = U(x_0) = u(x_0).$$

Мы не требуем дополнительно  $s_{i+1}(x_i) = U(x_i)$ , поскольку эти условия автоматически удовлетворяются при выполнении условия непрерывности.

$$a_i = u(x_i), \quad i = 1, \dots, N \tag{4}$$

$$a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) \tag{5}$$

# Система для нахождения сплайна

Объединим полученные ранее уравнения в единую систему

$$a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3, \quad i = 2, \dots, N \quad (1)$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2, \quad i = 2, \dots, N \quad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \quad i = 2, \dots, N \quad (3)$$

$$a_i = u(x_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

$$a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) \quad (5)$$

В этой системе  $3(N-1) + N + 1 = 4N - 2$  уравнения и  $4N$  неизвестных. Обычно, 2 недостающих условия задают в концах отрезка  $x_0$  и  $x_N$ . В этом случае они называются краевыми условиями.

## Краевые условия

- «Естественный сплайн»  
$$U''(x_0) = U''(x_N) = 0.$$
- Понижение степени сплайна на краях до второй  
$$U'''(x_0) = U'''(x_N) = 0.$$
- Периодический сплайн  
$$U'''(x_0) = U'''(x_N),$$
$$U''(x_0) = U''(x_N).$$

Рассмотрим наиболее используемый вариант

$$c_N = s_N''(x_N) = U''(x_N) = 0 \quad (6)$$

$$c_1 - d_1 h_1 = s_1''(x_0) = U''(x_0) = 0 \quad (7)$$

# Линейная система

- После добавления двух краевых условия количество уравнений совпало с количеством неизвестных. Можно было бы на этом остановиться, ведь формально, задача сведена к хорошо изученной.
- Тем не менее, можно значительно упростить эту систему линейных уравнений, сведя ее к системе линейных уравнений специального трехдиагонального вида.

Начнем с исключения из системы неизвестных  $a_i$ :

$$a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3, \quad i = 2, \dots, N \quad (1)$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2, \quad i = 2, \dots, N \quad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \quad i = 2, \dots, N \quad (3)$$

$$a_i = u(x_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

$$a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) \quad (5)$$

$$c_N = 0 \quad (6)$$

$$c_1 - d_1 h_1 = 0 \quad (7)$$

Удобно воспользоваться обозначениями разделенных разностей Ньютона

$$u(x_{i-1}, x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}} = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i}$$

# Упрощение системы

Подставим вместо  $a_i$  значения  $u(x_i)$ :

$$b_i - \frac{c_i}{2}h_i + \frac{d_i}{6}h_i^2 = u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 2, \dots, N \quad (1')$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2}h_i^2, \quad i = 2, \dots, N \quad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \quad i = 2, \dots, N \quad (3)$$

$$b_1 - \frac{c_1}{2}h_1 + \frac{d_1}{6}h_1^2 = u(x_0, x_1) \quad (5')$$

$$c_N = 0 \quad (6)$$

$$c_1 - d_1 h_1 = 0 \quad (7)$$

Из уравнения (3) и (7) выразим  $d_i h_i$ :

$$d_1 h_1 = c_1, \quad d_i h_i = c_i - c_{i-1}, \quad i = 2, \dots, N$$

Исключим  $d_i$  из уравнений

$$b_i - \frac{c_i}{2}h_i + \frac{h_i}{6}(c_i - c_{i-1}) = u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 2, \dots, N \quad (1'')$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{h_i}{2}(c_i - c_{i-1}), \quad i = 2, \dots, N \quad (2')$$

$$b_1 - \frac{c_1}{2}h_1 + \frac{h_1}{6}c_1 = u(x_0, x_1) \quad (5'')$$

$$c_N = 0 \quad (6)$$

и приведем подобные при  $c_i$

# Упрощение системы

После приведения подобных

$$b_i - \frac{c_i}{3}h_i - \frac{c_{i-1}}{6}h_i = u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 2, \dots, N \quad (1''')$$

$$b_i - b_{i-1} - \frac{c_i}{2}h_i - \frac{c_{i-1}}{2}h_i = 0, \quad i = 2, \dots, N \quad (2'')$$

$$b_1 - \frac{c_1}{3}h_1 = u(x_0, x_1) \quad (5''')$$

$$c_N = 0 \quad (6)$$

Выразим  $b_i$

$$b_1 = \frac{c_1 h_1}{3} + u(x_0, x_1)$$

$$b_i = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1}}{6}h_i + u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 2, \dots, N$$

И подставим в уравнение (2'')

Заметим, что выражение для  $b_1$  формально совпадает с выражением для  $b_i$  при  $i = 1$ , если доопределить  $c_0 = 0$ .

$$b_i = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1}}{6}h_i + u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$b_i - b_{i-1} = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1} h_i}{6} - \frac{c_{i-1} h_{i-1}}{3} - \frac{c_{i-2} h_{i-1}}{6} + u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1}).$$

Подставляя это в выражение (2'') и упрощая, получаем

$$\begin{aligned} \frac{h_{i-1}}{6}c_{i-2} + \left(\frac{h_i}{3} + \frac{h_{i-1}}{3}\right)c_{i-1} + \frac{h_i}{6}c_i &= \\ &= u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1}), \quad i = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2''')$$

$$c_0 = c_N = 0. \quad (6')$$

# Трехдиагональная система

Для удобства умножим каждое уравнение на  $\frac{6}{h_i + h_{i-1}}$ . Заметим, что

$$\frac{u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1})}{h_i + h_{i-1}} = \frac{u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1})}{x_i - x_{i-2}} = u(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)$$

В результате серии упрощений у нас получилась система, относительно значений  $c_1, \dots, c_{N-1}$ , причем, структура уравнений довольно специфическая. В  $i$ -е уравнение системы входят только три неизвестные.

$$\begin{array}{rcccl} 2c_1 & + & \frac{h_2}{h_1+h_2}c_2 & = & 6u(x_0, x_1, x_2) \\ & \ddots & & & \\ \frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}c_{i-1} & + & 2c_i & + & \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}c_{i+1} = 6u(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \\ & & \ddots & & \\ \frac{h_{N-1}}{h_{N-1}+h_N}c_{N-2} & + & 2c_{N-1} & = & 6u(x_{N-2}, x_{N-1}, x_N) \end{array}$$



## Трёхдиагональная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}$$

A diagram showing a matrix  $A$  with a large red X over it, indicating it is not invertible. The matrix is represented by a large left parenthesis followed by two blue diagonal lines, an ellipsis, another two blue diagonal lines, and a large right parenthesis. The red X is drawn over the entire matrix structure.

# Алгоритм прогонки

Для матриц вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_0 & c_0 & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \\ & & & & & a_M & b_M \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{M-1} \\ d_M \end{pmatrix}$$

Прогоночное уравнение

$$x_i = x_{i+1}p_{i+1} + q_{i+1}$$

Для первого уравнения

$$x_0 b_0 + x_1 c_0 = d_0$$

$$\Rightarrow x_0 = -\frac{c_0}{b_0}x_1 + \frac{d_0}{b_0}$$
$$x_0 = p_1 x_1 + q_1$$

# Алгоритм прогонки

Для  $i$ -го уравнения

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

$$x_{i-1} = x_i p_i + q_i$$



$$a_i(x_i p_i + q_i) + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

$$(a_i p_i + b_i) x_i = -c_i x_{i+1} + d_i - a_i q_i$$

$$x_i = \frac{-c_i}{a_i p_i + b_i} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i q_i}{a_i p_i + b_i}$$

$$x_i = x_{i+1} p_{i+1} + q_{i+1}$$

Последнее уравнение

$$x_{M-1} = x_M p_M + q_M$$

$$a_M x_{M-1} + b_M x_M = d_M$$



$$x_M = \frac{d_M - a_M q_M}{p_M a_M + b_M}$$

$$x_i = x_{i+1} p_{i+1} + q_{i+1}$$

# Свойства сплайна

Оказывается, что если  $u(x)$  непрерывна, то последовательность кубических сплайнов  $U_N(x)$  будет сходиться к  $u(x)$  равномерно, то есть

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \max h_i \rightarrow 0}} \max_{[x_0, x_N]} |U_N(x) - u(x)| = 0$$

Построенный сплайн относится к глобальным. Если изменить значение  $u(x_i)$  в какой-либо точке, это приведет к изменению всего сплайна  $U(x)$ . Правда, амплитуда изменения быстро уменьшается при удалении от точки  $x_i$ .

# Двухмерная интерполяция сплайнами

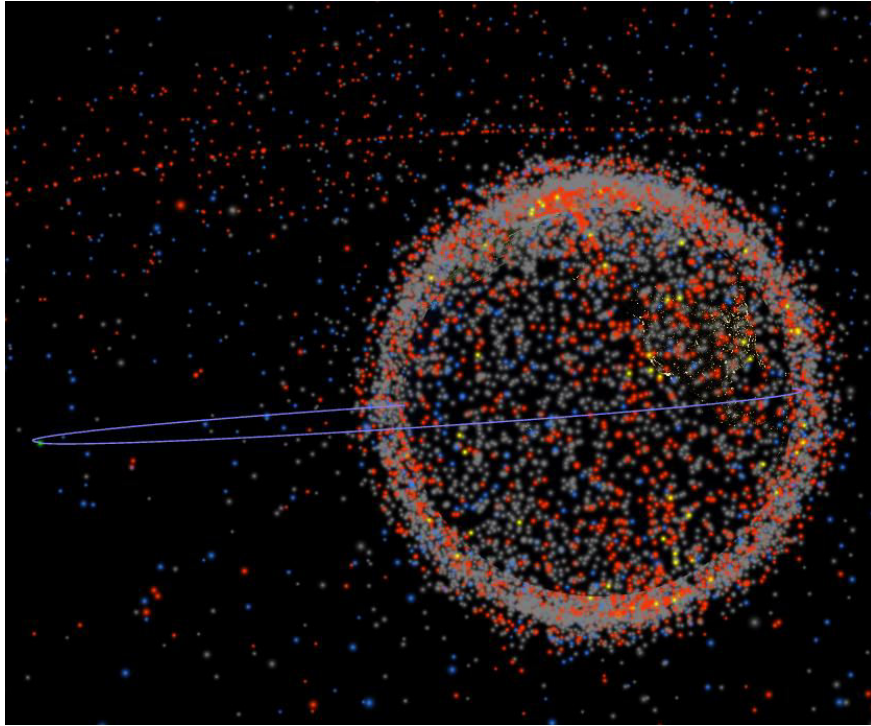
## Сплайн 3-го порядка

$$\begin{aligned} S_{ij} = & a_{33}x^3y^3 + a_{32}x^3y^2 + a_{31}x^3y + a_{30}x^3 + \\ & a_{23}x^2y^3 + a_{22}x^2y^2 + a_{21}x^2y + a_{20}x^2 + \\ & a_{13}x y^3 + a_{12}x y^2 + a_{11}x y + a_{10}x + \\ & a_{03}y^3 + a_{02}y^2 + a_{01}y + a_{00} \end{aligned}$$



Необходимо 16 уравнений для каждой «секции» сплайна

# Задача определения баллистической траектории



## Дифференциальная задача

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi$$

$\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  - Дискретизируется с помощью методов численного дифференцирования и решения ОДУ

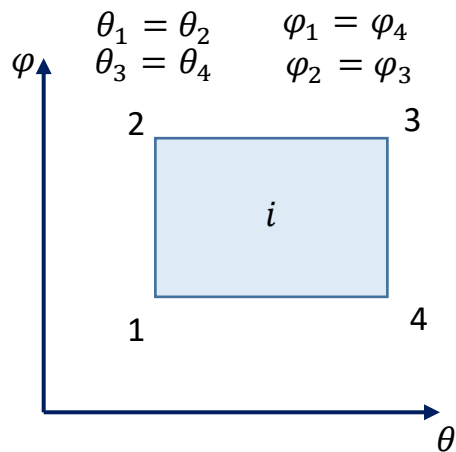
## Гравитационный потенциал Земли

$$V(r, \phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right]$$

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \theta)^n} (\cos^2 \theta - 1)^n.$$

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x),$$

# Построение сплайна



Грав. потенциал  $\rightarrow f(\varphi_k, \theta_k) = f^k = \sum_{i,j} a_{ij} \varphi_k^i \theta_k^j$     4 уравнения

$S'_{i\varphi} = \sum_{i,j} a_{ij} \varphi_k^{i-1} \theta_k^j = S'_{1\varphi} = S'_{2\varphi} = S'_{8\varphi}$     3 уравнения для каждой точки



$S'_{i\varphi} = S'_{1\varphi} \quad S'_{i\varphi} = S'_{2\varphi} \quad S'_{i\varphi} = S'_{8\varphi}$

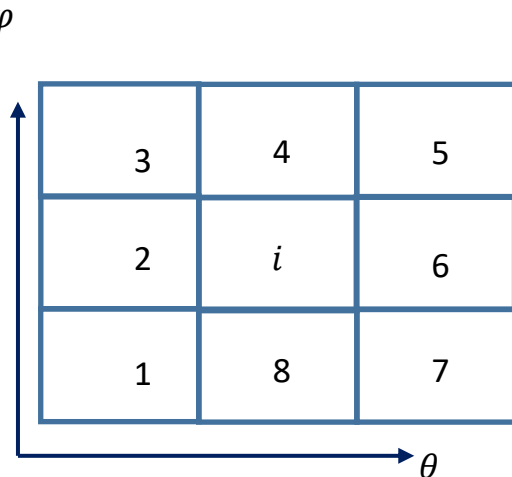
$S'_{i\theta} = \sum_{i,j} a_{ij} \varphi_k^i \theta_k^{j-1} = S'_{1\theta} = S'_{2\theta} = S'_{8\theta}$     3 уравнения для каждой точки

$S''_{i\varphi\theta} = \sum_{i,j} a_{ij} \varphi_k^{i-1} \theta_k^{j-1} = S''_{1\varphi\theta} = S''_{2\varphi\theta} = S''_{8\varphi\theta}$     3 уравнения для каждой точки

$S''_{i\theta} = \sum_{i,j} a_{ij} \varphi_k^i \theta_k^{j-2} = S''_{1\theta} = S''_{2\theta} = S''_{8\theta}$     3 уравнения для каждой точки

$S''_{i\varphi} = \sum_{i,j} a_{ij} \varphi_k^{i-2} \theta_k^j = S''_{1\varphi} = S''_{2\varphi} = S''_{8\varphi}$     3 уравнения для каждой точки

**16\*N уравнений связанных в СЛАУ (N – число узлов)**



Для одного космического аппарата ускорение расчетов составило более 15 раз.

Хранение коэффициентов сплайна занимает менее 1 Гб оперативной памяти.



Оптимальный выбор узлов  
интерполяции. Многочлены  
Чебышева.

# Минимизации погрешности интерполяции

$$\left| u(x) - L_N(x) \right| \leq \frac{\max_{\xi \in [a,b]} \left| u^{(N+1)}(\xi) \right|}{(N+1)!} \underbrace{\left| \prod_{j=0}^N (x - x_j) \right|}$$

Минимизируем за счет выбора  
узлов интерполяции

Получили задачу на минимакс  
(или задачу о построении полинома,  
наименее уклоняющемся от нуля на заданном  
отрезке):

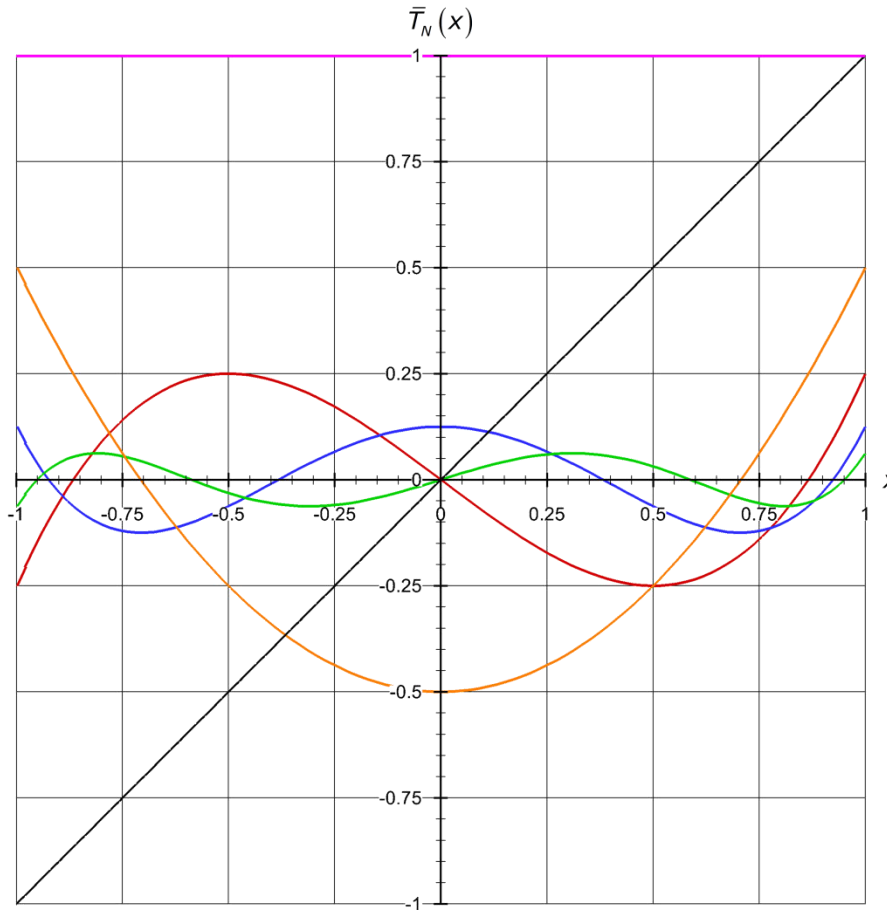
$$\min_{\{x_j\}_{j=0}^N} \left\{ \max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{j=0}^N (x - x_j) \right| \right\}$$

Решение задачи – **нормированный многочлен Чебышева степени  $N$** , а оптимальный  
выбор узлов интерполяции – **нули многочлена Чебышева**.

# Многочлены Чебышева

Многочлены, наименее уклон. от 0:  $\bar{T}_N(x) = 2^{1-N} T_N(x) = x^N + \dots, N > 0.$

Многочлены Чебышева:  $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x), N > 0.$



—  $\bar{T}_0(x) = 1$

—  $\bar{T}_1(x) = x$

—  $\bar{T}_2(x) = x^2 - 1/2$

—  $\bar{T}_3(x) = x^3 - 3/4 x$

—  $\bar{T}_4(x) = x^4 - x^2 + 1/8$

—  $\bar{T}_5(x) = x^5 - 5/4 x^3 + 5/16 x$

# Другая форма записи многочленов Чебышева

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= \\ &= 2 \cos \alpha \cos \beta\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\forall \theta \quad \cos([N + 1]\theta) = 2 \cos \theta \cos(N\theta) - \cos([N - 1]\theta)$$

При  $\theta = \arccos x$

$$\cos([N + 1]\arccos x) = 2x \cos(N \arccos x) - \cos([N - 1]\arccos x)$$

Функция  $\cos(N \arccos x)$  удовлетворяет тому же разностному уравнению, что и  $T_N(x)$

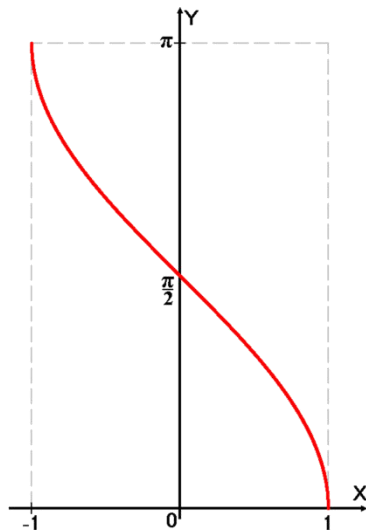
$$\cos(0 \cdot \arccos x) = 1 = T_0(x) \quad \cos(1 \cdot \arccos x) = x = T_1(x)$$

$$T_N(x) = \cos(N \arccos x), \quad x \in [-1, 1]$$

# Нули полиномов Чебышева

## Отрезок $[-1, 1]$

$$T_N(x) = \cos(N \arccos x) = 0 \rightarrow N \arccos x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m = 0, \dots, N-1$$



$$\arccos x = \frac{(2m+1)\pi}{2N}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

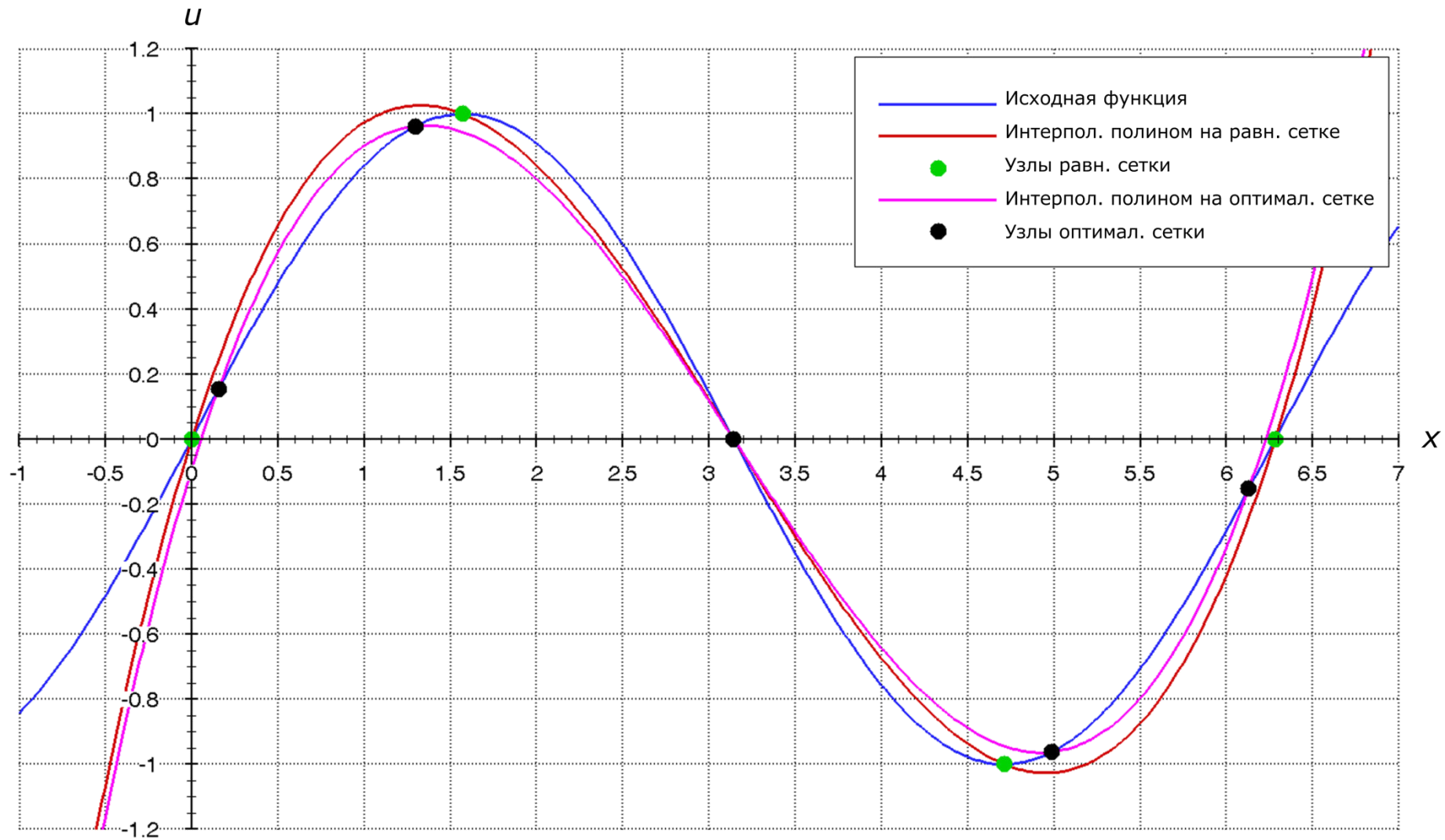
$$x_m = \cos \frac{(2m+1)\pi}{2N}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

## Отрезок $[a, b]$

$$\bar{T}_N(x) = \frac{(b-a)^N}{2^{2N-1}} \cos \left( N \arccos \frac{2x - (b+a)}{b-a} \right) = 0$$

$$x_m = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2m+1)\pi}{2N}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

Пример:  $u(x) = \sin x$ ,  $x \in [0; 2\pi]$ ,  $N = 4$ , равн. сетка и оптимальная



1. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: учеб. пособие. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий. Бином. Лаборатория знаний, 2006. – С. 133 – 141.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – С. 127 – 134.
3. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику: учеб. пособие. – М.: Изд-во МФТИ, 1994. – С. 28 – 34.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – С. 58 – 62.
5. Press W.H. et al. Numerical Recipes in C. – Cambridge University Press. – P. 120. – [пример программной реализации построения интерполяционных полиномов.](#)

Спасибо за внимание!