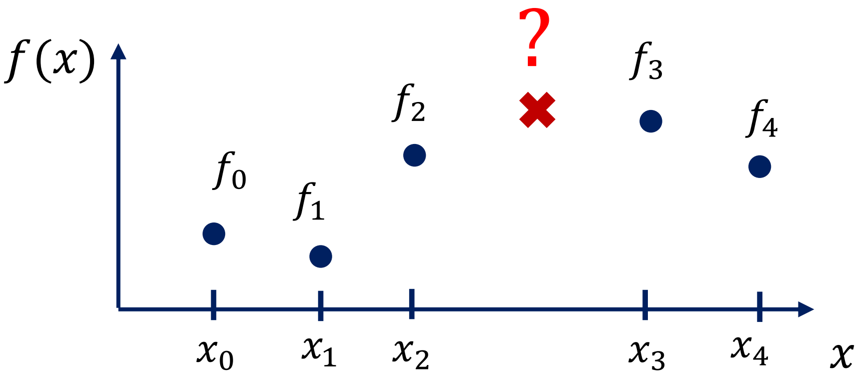
# Интерполяция функций

Часть 2

К.ф.-м.н. Завьялова Наталья Александровна

natalia.zavyalova@gmail.com

# Задача интерполяции




**Интерполяция** – это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

$x_i$ - узлы интерполяции

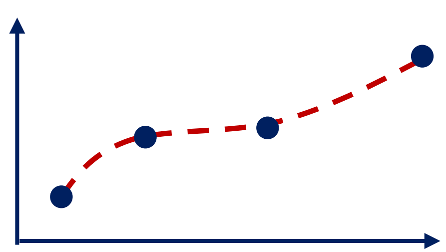
**Алгебраическая интерполяция**

$$\{f_i\}_{i=0}^N \xrightarrow{\quad I \quad} P_N(x)$$

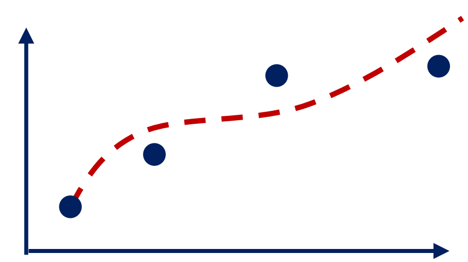
Сеточная функция — Интерполяционный полином

**Основное условие интерполяции:** равенство функции и интерполяционного полинома в узлах интерполяции

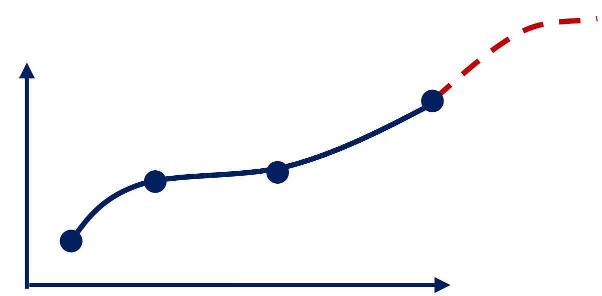
$$\boxed{P_N(x_i) \equiv f_i}$$



Интерполяция

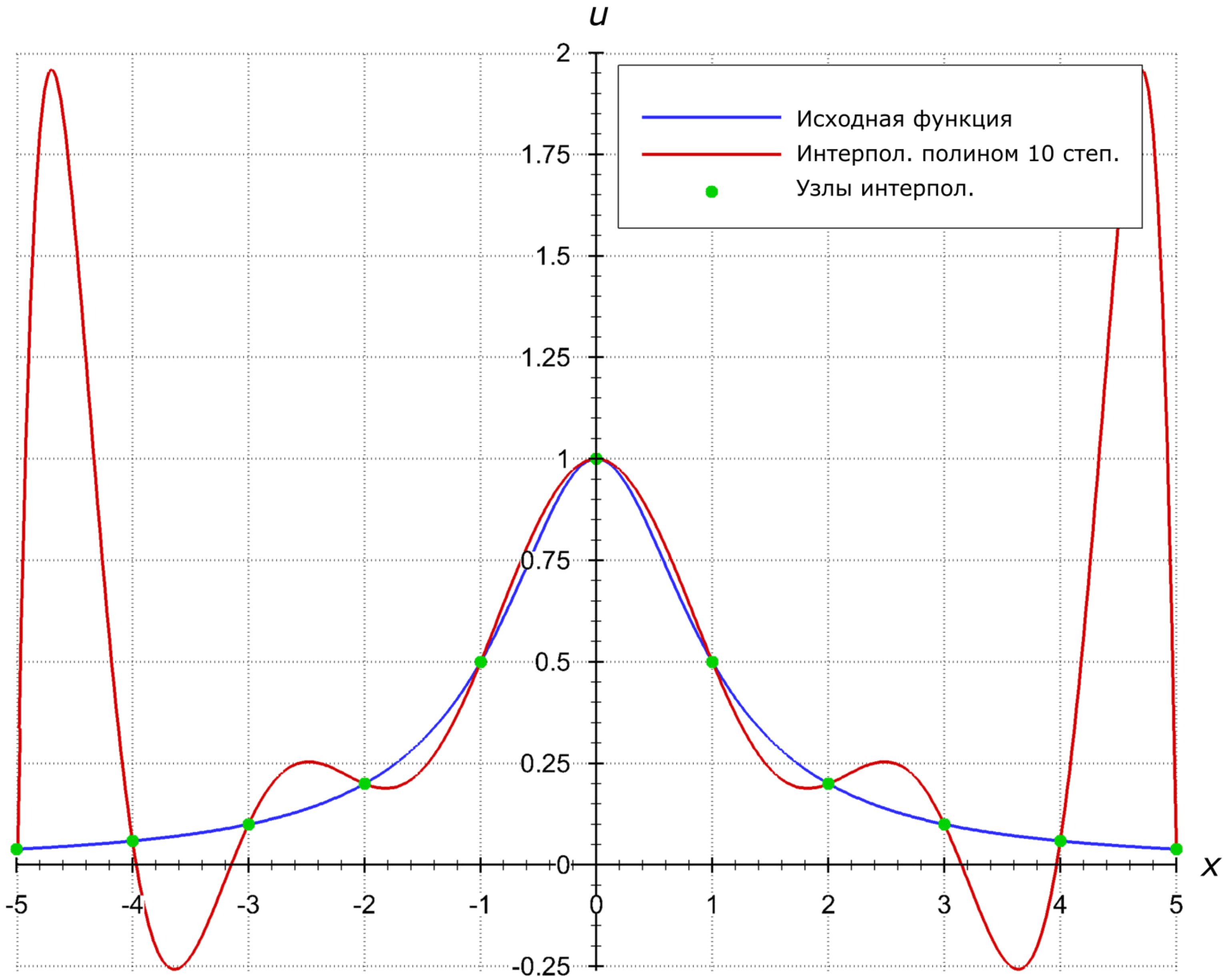


Аппроксимация

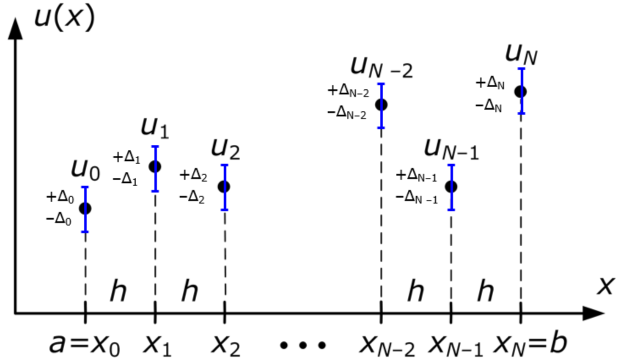


Экстраполяция

# Пример Рунге, $u(x) = 1/(\ 1 + x^2\ )$, равномерная сетка



# Влияние неустранимой погрешности




$$\Delta = \max_i \Delta_i$$

$L_N(x)$ - Интерполяционный полином, построенный по **точным** значениям функции

$\tilde{L}_N(x)$ - Интерполяционный полином, построенный по **возмущенным** значениям функции

$$\left|\tilde{R}_N(x)\right| = \left|u(x) - \tilde{L}_N(x)\right| = \left|u(x) - L_N(x) + L_N(x) + \tilde{L}_N(x)\right| \leq |u(x) - L_N(x)| + \left|L_N(x) - \tilde{L}_N(x)\right| \leq$$

$$\leq |R_N(x)| + \Delta_p$$

Знаем как оценить

Необходимо оценить

$$\Delta_p = \left|L_N(x) - \tilde{L}_N(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) u_k - \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) \tilde{u}_k\right|$$

$$\varphi_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{N} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$\Delta_p = \left|\sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x)(u_k - \tilde{u}_k)\right| \leq \sum_{k=0}^{N} \Delta_k |\varphi_k(x)| \leq \mathbf{L}\Delta$$

$$\boxed{\mathbf{L} = \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=0}^{N} |\varphi_k(x)|}$$

Константа Лебега

**Пример.** Константа Лебега для случая линейной интерполяции

$$\tilde{L}_1(x) = \sum_{k=0}^{1} \varphi_k(x)\, \tilde{u}_k = \tilde{u}_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \tilde{u}_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \qquad x_0 = a, x_1 = b$$

$$\mathbf{L} = \max_{x\in[a,b]} \left( \left|\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right| + \left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right| \right) = \max_{x\in[a,b]} \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) = 1$$

# Асимптотики для константы Лебега

$$\boxed{\mathbf{L} = \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=0}^{N} |\varphi_k(x)|}$$

Константа Лебега

$\mathbf{L} \sim 2^N$ Для равномерной сетки

$\mathbf{L} \sim \ln \mathrm{N}$ Для сетки, построенной на нулях полинома Чебышёва

# Недостатки глобальной интерполяции

Глобальная интерполяция многочленом высокой степени $(N > 10 \div 20)$ нежелательная, поскольку:

- При вычислении многочлена высокой степени могут накапливаться ошибки округления (например как при суммировании ряда Тейлора);
- Интерполяционный многочлен может плохо приближать исходную функцию (примеры Берштейна и Рунге на равномерной сетке);
- Задача интерполяции может быть плохо обусловлена (интерполяционный многочлен чувствителен к возмущениям значений в узлах сетки);

Частично указанные проблемы можно решить введением Чебышевской сетки, но не всегда такое возможно.

Задача интерполяции: По данному набору значения $u(x)$ на сетке $\{x_i\}_{i=0}^N$ восстановить функцию U(x),

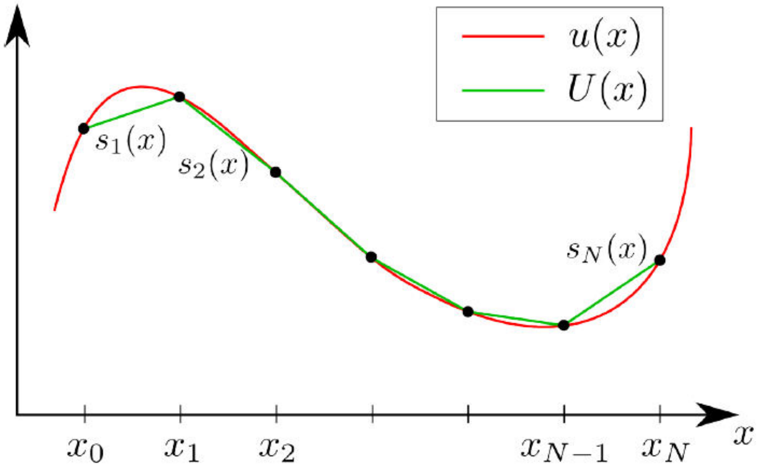
Совпадающую с $u(x_i)$ в узлах $x_i$.

- Ранее функцию $U(x)$ мы искали в виде полинома от $x$
- Рассмотрим теперь вариант, когда на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция является некоторым многочленом $s_i(x)$, причем для каждого отрезка эта функция своя.
- В такой постановке задача имеет множество решений. Единственность решения можно обеспечить потребовав от функции U(x) некоторой гладкости в местах стыков функций $s_i(x)$, то есть в узлах интерполяции

# Интерполяция сплайнами

# Примеры сплайнов

**Кусочно-линейная интерполяция**

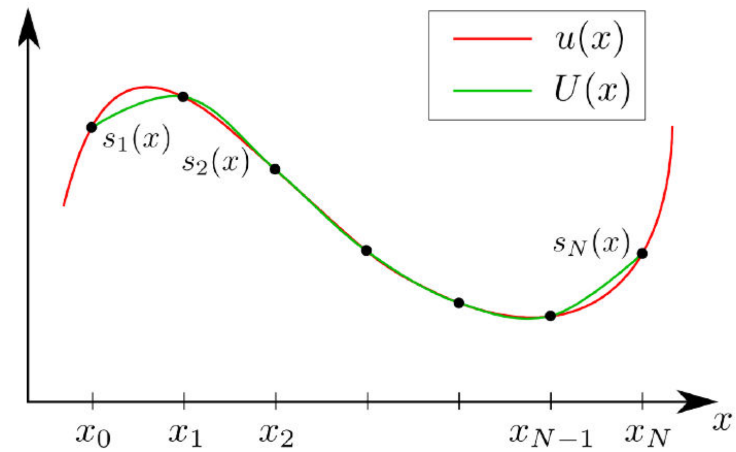



$$U(x) = s_i(x), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s_i(x) = u_{i-1}\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + u_i\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

На каждом отрезке функция приближается линейной. Дополнительных условия не требуется, условия гладкости на $U(x)$ в данном случае не налагаются.

**Гладкая кусочно-кубическая интерполяция**




$$U(x) = s_i(x), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$$

$$s_i''(x_i) = s_{i+1}''(x_i)$$

На каждом отрезке функция приближается кубическим многочленом. Дополнительно требуется непрерывность первой и второй производных $U(x)$ на всем отрезке $[x_0, x_N]$.

# Построение сплайна

## Характеристики сплайна

- Степенью сплайна называется максимальная из степеней многочленов $s_i(x)$.
- **Гладкостью** сплайна называется количество непрерывных производных, которые U(x) имеет на всем отрезке $[x_0, x_N]$.
- **Дефектом** сплайна называется разность между степенью и гладкостью сплайна.

Например, кусочно-линейный сплайн имеет степень 1, гладкость 0 и дефект 1.
Гладкий кусочно-кубический сплайн имеет степень 3, гладкость 2 и дефект 1.

## Построение сплайна

Найдем выражения для функций $s_i(x)$, составляющих гладкий кубический сплайн.

Поскольку сплайн имеет степень 3, все функции $s_i(x)$ являются многочленами степени 3. Запишем их в виде:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

Такая форма записи соответствует ряду Тейлора для $s_i(x)$ в окрестности точки $x_i$. Поскольку $s_i(x)$ – кубический многочлен, его ряд Тейлора обрывается после кубического слагаемого. Из аналогии с рядом Тейлора заключаем, что

$$a_i = s_i(x_i) \qquad b_i = s_i{}'(x_i) \qquad c_i = s_i{}''(x_i) \qquad d_i = s_i'''(x_i)$$

Хотя в этом можно убедиться и обычной подстановкой.

# Построение сплайна

## Условия непрерывности

Выразим условия непрерывности и гладкости сплайна в терминах коэффициентов $a_i, b_i, c_i, d_i$. Для удобства введем обозначение для длины $i$-го отрезка $h_i = x_i - x_{i-1}$. Запишем условие непрерывности $U(x)$ в точке $x_{i-1}$:

$$a_{i-1} = s_{i-1}(x_{i-1}) = s_i(x_{i-1}) = a_i + b_i(x_{i-1} - x_i) + \frac{c_i}{2}(x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x_{i-1} - x_i)^3$$

Пользуясь обозначением $h_i = x_i - x_{i-1}$,

$$a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3, \qquad i = 2, \ldots, N. \qquad (1)$$

## Условия гладкости

Выпишем условия непрерывности первой и второй производной $U(x)$ в точках $x_{i-1}$:

$$b_{i-1} = s'_{i-1}(x_{i-1}) = s'_i(x_{i-1}) = b_i + c_i(x_{i-1} - x_i) + \frac{d_i}{2}(x_{i-1} - x_i)^2,$$
$$c_{i-1} = s''_{i-1}(x_{i-1}) = s''_i(x_{i-1}) = c_i + d_i(x_{i-1} - x_i).$$

Пользуясь $h_i$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2, \qquad i = 2, \ldots, N, \qquad (2)$$
$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \qquad i = 2, \ldots, N. \qquad (3)$$

# Построение сплайна

## Основное условия интерполяции

Выпишем условия интерполирования, то есть $U(x_i) = u(x_i)$:

$$a_i = s_i(x_i) = U(x_i) = u(x_i), \qquad i = 1, \dots, N.$$

Кроме этого, есть еще условия в точке $x_0$,

$$a_1 + b_1(x_0 - x_1) + \frac{c_1}{2}(x_0 - x_1)^2 + \frac{d_1}{6}(x_1 - x_0)^3 = s_1(x_0) = U(x_0) = u(x_0).$$

Мы не требуем дополнительно $s_{i+1}(x_i) = U(x_i)$, поскольку эти условия автоматически удовлетворяются при выполнении условия непрерывности.

$$a_i = u(x_i), \qquad i = 1, \dots, N \tag{4}$$

$$a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) \tag{5}$$

# Система для нахождения сплайна

Объединим полученные ранее уравнения в единую систему

$$a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (1)$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (3)$$

$$a_i = u(x_i), \qquad i = 1, \ldots, N \qquad (4)$$

$$a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) \qquad (5)$$

В этой системе $3(N-1) + N + 1 = \mathbf{4N-2}$ уравнения и $\mathbf{4N}$ неизвестных. Обычно, 2 недостающих условия задают в концах отрезка $x_0$ и $x_N$. В этом случае они называются краевыми условиями.

## Краевые условия

- «Естественный сплайн»

$$U''(x_0) = U''(x_N) = 0.$$

- Понижение степени сплайна на краях до второй

$$U'''(x_0) = U'''(x_N) = 0.$$

- Периодический сплайн

$$U'''(x_0) = U'''(x_N),$$

$$U''(x_0) = U''(x_N).$$

Рассмотрим наиболее используемый вариант

$$c_N = s_N''(x_N) = U''(x_N) = 0 \qquad (6)$$

$$c_1 - d_1 h_1 = s_1''(x_0) = U''(x_0) = 0 \qquad (7)$$

# Линейная система

- После добавления двух краевых условия количество уравнений совпало с количеством неизвестных. Можно было бы на этом остановиться, ведь формально, задача сведена к хорошо изученной.
- Тем не менее, можно значительно упростить эту систему линейных уравнений, сведя ее к системе линейных уравнений специального трехдиагонального вида.

Начнем с исключения из системы неизвестных $a_i$:

$$a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3, \qquad i = 2, \dots, N \qquad (1)$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2, \qquad i = 2, \dots, N \qquad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \qquad i = 2, \dots, N \qquad (3)$$

$$a_i = u(x_i), \qquad i = 1, \dots, N \qquad (4)$$

$$a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) \qquad (5)$$

$$c_N = 0 \qquad (6)$$

$$c_1 - d_1 h_1 = 0 \qquad (7)$$

Удобно воспользоваться обозначениями разделенных разностей Ньютона

$$u(x_{i-1}, x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i}$$

# Упрощение системы

Подставим вместо $a_i$ значения $u(x_i)$:

$$b_i - \frac{c_i}{2}h_i + \frac{d_i}{6}h_i^2 = u(x_{i-1}, x_i), \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (1')$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2}h_i^2, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (3)$$

$$b_1 - \frac{c_1}{2}h_1 + \frac{d_1}{6}h_1^2 = u(x_0, x_1) \qquad (5')$$

$$c_N = 0 \qquad (6)$$

$$c_1 - d_1 h_1 = 0 \qquad (7)$$

Из уравнения (3) и (7) выразим $d_i h_i$:

$$d_1 h_1 = c_1, \qquad \boxed{d_i h_i = c_i - c_{i-1},} \quad i = 2, \ldots, N$$

Исключим $d_i$ из уравнений

$$b_i - \frac{c_i}{2}h_i + \frac{h_i}{6}(c_i - c_{i-1}) = u(x_{i-1}, x_i), \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (1'')$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{h_i}{2}(c_i - c_{i-1}), \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (2')$$

$$b_1 - \frac{c_1}{2}h_1 + \frac{h_1}{6}c_1 = u(x_0, x_1) \qquad (5'')$$

$$c_N = 0 \qquad (6)$$

и приведем подобные при $c_i$

# Упрощение системы

После приведения подобных

$$b_i - \frac{c_i}{3}h_i - \frac{c_{i-1}}{6}h_i = u(x_{i-1}, x_i), \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (1''')$$

$$b_i - b_{i-1} - \frac{c_i}{2}h_i - \frac{c_{i-1}}{2}h_i = 0, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (2'')$$

$$b_1 - \frac{c_1}{3}h_1 = u(x_0, x_1) \qquad (5''')$$

$$c_N = 0 \qquad (6)$$

Выразим $b_i$

$$\boxed{b_1 = \frac{c_1 h_1}{3} + u(x_0, x_1)}$$

$$b_i = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1}}{6}h_i + u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 2, \ldots, N$$

И подставим в уравнение (2’’)

Заметим, что выражение для $b_1$ формально совпадает с выражением для $b_i$ при $i = 1$, если доопределить $c_0 = 0$.

$$b_i = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1}}{6}h_i + u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \ldots, N$$

$$b_i - b_{i-1} = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1} h_i}{6} - \frac{c_{i-1} h_{i-1}}{3} - \frac{c_{i-2} h_{i-1}}{6} + u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1}).$$

Подставляя это в выражение (2’’) и упрощая, получаем

$$\frac{h_{i-1}}{6}c_{i-2} + \left(\frac{h_i}{3} + \frac{h_{i-1}}{3}\right)c_{i-1} + \frac{h_i}{6}c_i =$$

$$= u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1}), \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (2''')$$

$$c_0 = c_N = 0. \qquad (6')$$

# Трехдиагональная система

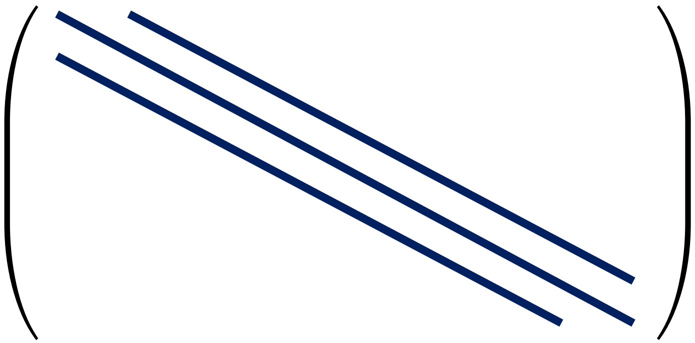
Для удобства умножим каждое уравнение на $\frac{6}{h_i+h_{i-1}}$. Заметим, что

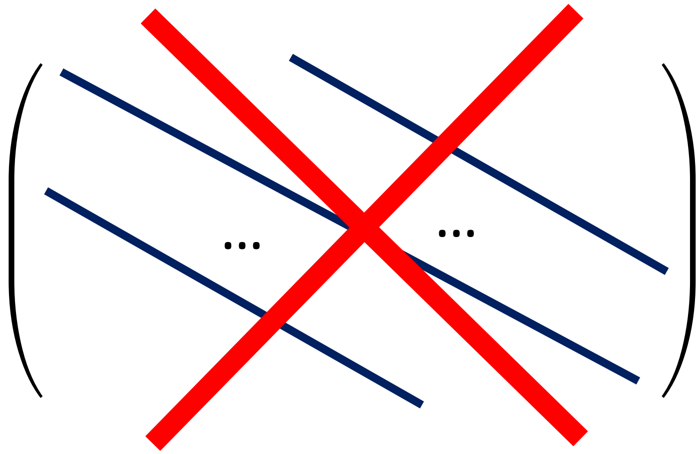
$$\frac{u(x_{i-1},x_i)-u(x_{i-2},x_{i-1})}{h_i+h_{i-1}} = \frac{u(x_{i-1},x_i)-u(x_{i-2},x_{i-1})}{x_i-x_{i-2}} = u(x_{i-2},x_{i-1},x_i)$$

В результате серии упрощений у нас получилась система, относительно значений $c_1$, … $c_{N\text{-}1}$, причем, структура уравнений довольно специфическая. В $i$-е уравнение системы входят только три неизвестные.

$$\begin{array}{ccccccc}
2c_1 & + & \frac{h_2}{h_1+h_2}c_2 & & & = & 6u(x_0,x_1,x_2) \\
 & \ddots & & & & & \\
\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}c_{i-1} & + & 2c_i & + & \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}c_{i+1} & = & 6u(x_{i-1},x_i,x_{i+1}) \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & \frac{h_{N-1}}{h_{N-1}+h_N}c_{N-2} & + & 2c_{N-1} & = & 6u(x_{N-2},x_{N-1},x_N)
\end{array}$$

# Трехдиагональная матрица

$\mathbf{A} =$ 

$\mathbf{A} =$ 

# Алгоритм прогонки

Для матриц вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_0 & c_0 & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \\ & & & & a_M & b_M \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{M-1} \\ d_M \end{pmatrix}$$

Прогоночное уравнение

$$x_i = x_{i+1} p_{i+1} + q_{i+1}$$

Для первого уравнения

$$x_0 b_0 + x_1 c_0 = d_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \boxed{-\frac{c_0}{b_0}} x_1 + \boxed{\frac{d_0}{b_0}}$$

$$x_0 = \boxed{p_1} x_1 + \boxed{q_1}$$

# Алгоритм прогонки

Для $i$-го уравнения

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i\, x_{i+1} = d_i$$

$$x_{i-1} = x_i p_i + q_i$$

$$\Rightarrow$$

$$a_i(x_i p_i + q_i) + b_i x_i + c_i\, x_{i+1} = d_i$$

$$(a_i p_i + b_i)x_i = -c_i\, x_{i+1} + d_i - a_i q_i$$

$$x_i = \boxed{\frac{-c_i}{a_i p_i + b_i}} x_{i+1} + \boxed{\frac{d_i - a_i q_i}{a_i p_i + b_i}}$$

$$x_i = x_{i+1} \boxed{p_{i+1}} + \boxed{q_{i+1}}$$

Последнее уравнение

$$x_{M-1} = x_M p_M + q_M$$

$$a_M x_{M-1} + b_M x_M = d_M$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} x_M = \frac{d_M - a_M q_M}{p_M a_M + b_M} \\ x_i = x_{i+1} p_{i+1} + q_{i+1} \end{gathered}}$$

# Свойства сплайна

Оказывается, что если $u(x)$ непрерывна, то последовательность кубических сплайнов $U_N(x)$ будет сходиться к $u(x)$ равномерно, то есть

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \max h_i\to 0}} \max_{[x_0,x_N]} |U_N(x)-u(x)| = 0$$

Построенный сплайн относится к глобальным. Если изменить значение $u(x_i)$ в какой-либо точке, это приведет к изменению всего сплайна $U(x)$. Правда, амплитуда изменения быстро уменьшается при удалении от точки $x_i$.

# Двухмерная интерполяция сплайнами

**Сплайн 3-го порядка**

$$S_{ij} = a_{33}x^3y^3 + a_{32}x^3y^2 + a_{31}x^3y \quad + a_{30}x^3 +$$

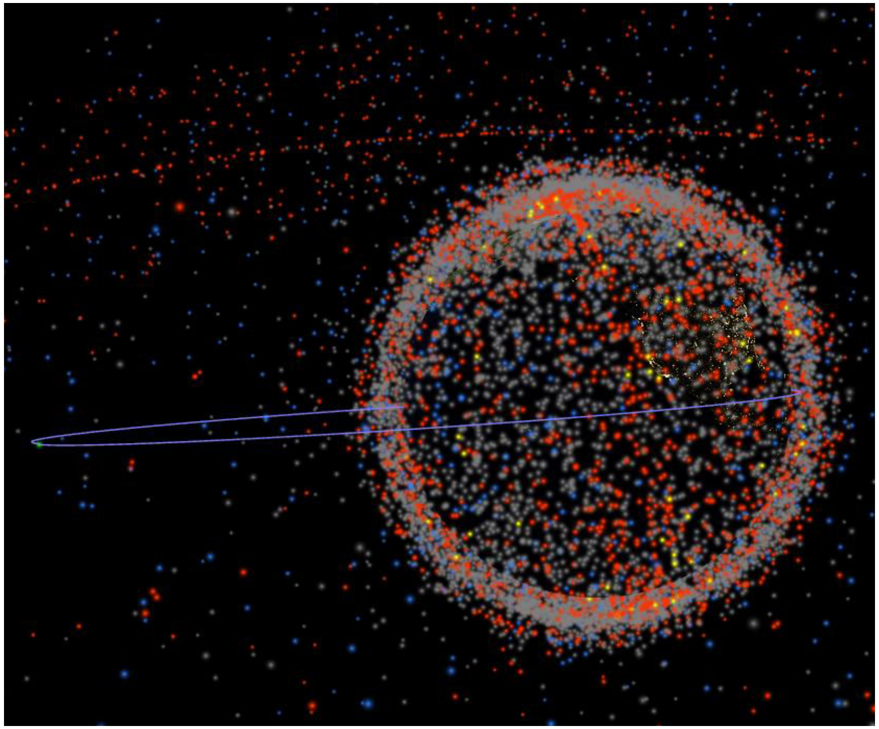
$$a_{23}x^2y^3 + a_{22}x^2y^2 + a_{21}x^2y \quad + a_{20}x^2$$

$$a_{13}x \quad y^3 + a_{12}x \quad y^2 + a_{11}x \quad y \quad + a_{10}x$$

$$a_{03}y^3 + a_{02}y^2 \qquad + a_{01}y \qquad + a_{00}$$

Необходимо 16 уравнений для каждой «секции» сплайна

# Задача определения баллистической траектории



## Дифференциальная задача

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi$$

$\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ - Дискретизуется с помощью методов численного дифференцирования и решения ОДУ

## Гравитационный потенциал Земли

$$V(r,\phi,\lambda) = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin\phi)(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)\right]$$

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d(\cos\theta)^n}(\cos^2\theta - 1)^n.$$

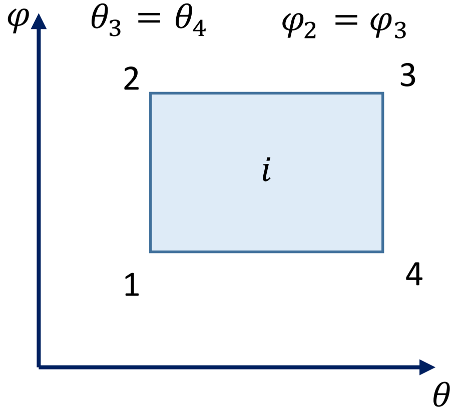
$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x),$$

stuffin.space

# Построение сплайна

$\theta_1 = \theta_2 \qquad \varphi_1 = \varphi_4$

$\theta_3 = \theta_4 \qquad \varphi_2 = \varphi_3$



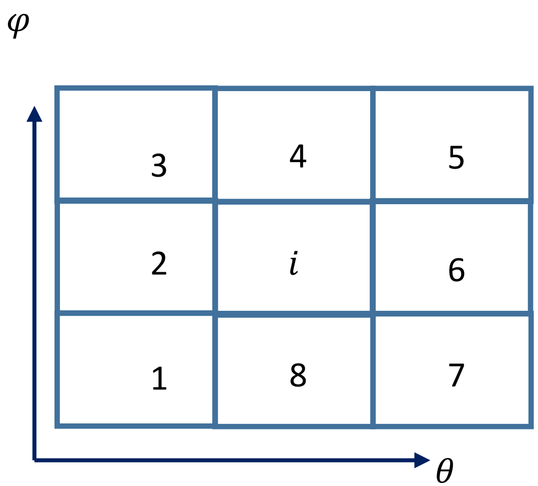

Грав. потенциал $\rightarrow$ $f(\varphi_k, \theta_k) = f^k = \sum_{i,j} a_{ij}\varphi_k^i \theta_k^j$ — 4 уравнения

$$S'_{i\varphi} = \sum_{i,j} a_{ij}\varphi_k^{i-1}\theta_k^j = S'_{1\varphi} = S'_{2\varphi} = S'_{8\varphi}$$ 3 уравнения для каждой точки

$\Updownarrow$

$S'_{i\varphi} = S'_{1\varphi} \qquad S'_{i\varphi} = S'_{2\varphi} \qquad S'_{i\varphi} = S'_{8\varphi}$

$$S'_{i\theta} = \sum_{i,j} a_{ij}\varphi_k^{i}\theta_k^{j-1} = S'_{1\theta} = S'_{2\theta} = S'_{8\theta}$$ 3 уравнения для каждой точки




$$S''_{i\varphi\theta} = \sum_{i,j} a_{ij}\varphi_k^{i-1}\theta_k^{j-1} = S''_{1\varphi\theta} = S''_{2\varphi\theta} = S''_{8\varphi\theta}$$ 3 уравнения для каждой точки

$$S''_{i\theta} = \sum_{i,j} a_{ij}\varphi_k^{i}\theta_k^{j-2} = S''_{1\theta} = S''_{2\theta} = S''_{8\theta}$$ 3 уравнения для каждой точки

$$S''_{i\varphi} = \sum_{i,j} a_{ij}\varphi_k^{i-2}\theta_k^{j} = S''_{1\varphi} = S''_{2\varphi} = S''_{8\varphi}$$ 3 уравнения для каждой точки

**16*$N$ уравнений связанных в СЛАУ (N – число узлов)**

# Результат

Для одного космического аппарата ускорение расчетов составило более 15 раз.

Хранение коэффициентов сплайна занимает менее 1 Гб оперативной памяти.

# Оптимальный выбор узлов интерполяции. Многочлены Чебышева.

# Минимизации погрешности интерполяции

$$\left|u(x) - L_N(x)\right| \le \frac{\max\limits_{\xi\in[a,b]}\left|u^{(N+1)}(\xi)\right|}{(N+1)!}\underbrace{\left|\prod_{j=0}^{N}\left(x - x_j\right)\right|}$$

Минимизируем за счет выбора узлов интерполяции

Получили задачу на минимакс (или задачу о построении полинома, наименее уклоняющемся от нуля на заданном отрезке):

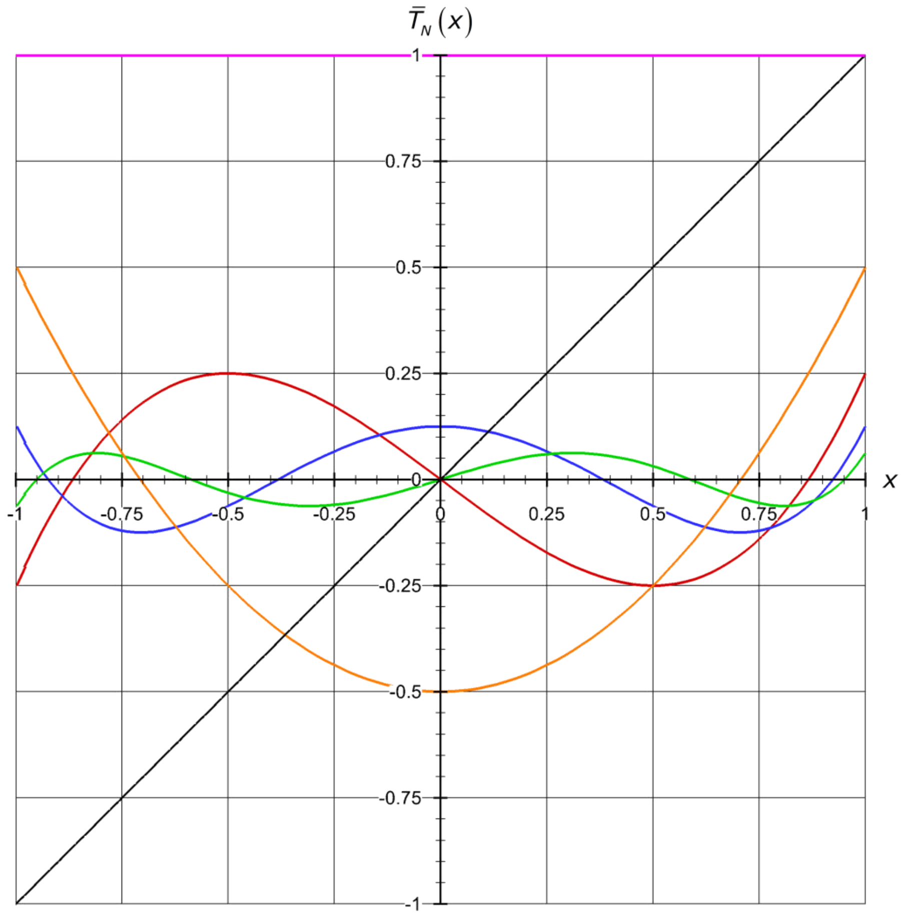
$$\min_{\{x_j\}_{j=0}^{N}}\left\{\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{j=0}^{N}\left(x - x_j\right)\right|\right\}$$

Решение задачи – нормированный многочлен Чебышева степени $N$, а оптимальный выбор узлов интерполяции – нули многочлена Чебышева.

# Многочлены Чебышева

Многочлены, наименее уклон. от 0: $\bar{T}_N(x) = 2^{1-N} T_N(x) = x^N + \ldots,\ N > 0.$

Многочлены Чебышева: $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x),\ N > 0.$




$\bar{T}_0(x) = 1$

$\bar{T}_1(x) = x$

$\bar{T}_2(x) = x^2 - 1/2$

$\bar{T}_3(x) = x^3 - 3/4\,x$

$\bar{T}_4(x) = x^4 - x^2 + 1/8$

$\bar{T}_5(x) = x^5 - 5/4\,x^3 + 5/16\,x$

# Другая форма записи многочленов Чебышева

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = \\ = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\forall\theta\quad \cos([N+1]\theta) = 2\cos\theta\cos(N\theta) - \cos([N-1]\theta)$$

При $\theta = \arccos x$

$$\cos([N+1]\arccos x) = 2x\cos(N\arccos x) - \cos([N-1]\arccos x)$$

Функция $\cos(N\arccos x)$ удовлетворяет тому же разностному уравнению, что и $T_N(x)$

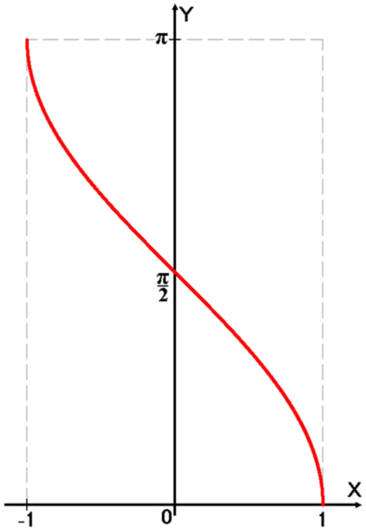
$$\cos(0\cdot\arccos x) = 1 = T_0(x) \qquad \cos(1\cdot\arccos x) = x = T_1(x)$$

$$\boxed{T_N(x) = \cos(N\arccos x),\ x\in[-1,1]}$$

# Нули полиномов Чебышева

## Отрезок $[-1,1]$

$$T_N(x) = \cos(N\arccos x) = 0 \rightarrow \quad N\arccos x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \;\; m = 0,\dots,N-1$$




$$\arccos x = \frac{(2m+1)\pi}{2N}, \;\; m = 0,\dots,N-1$$

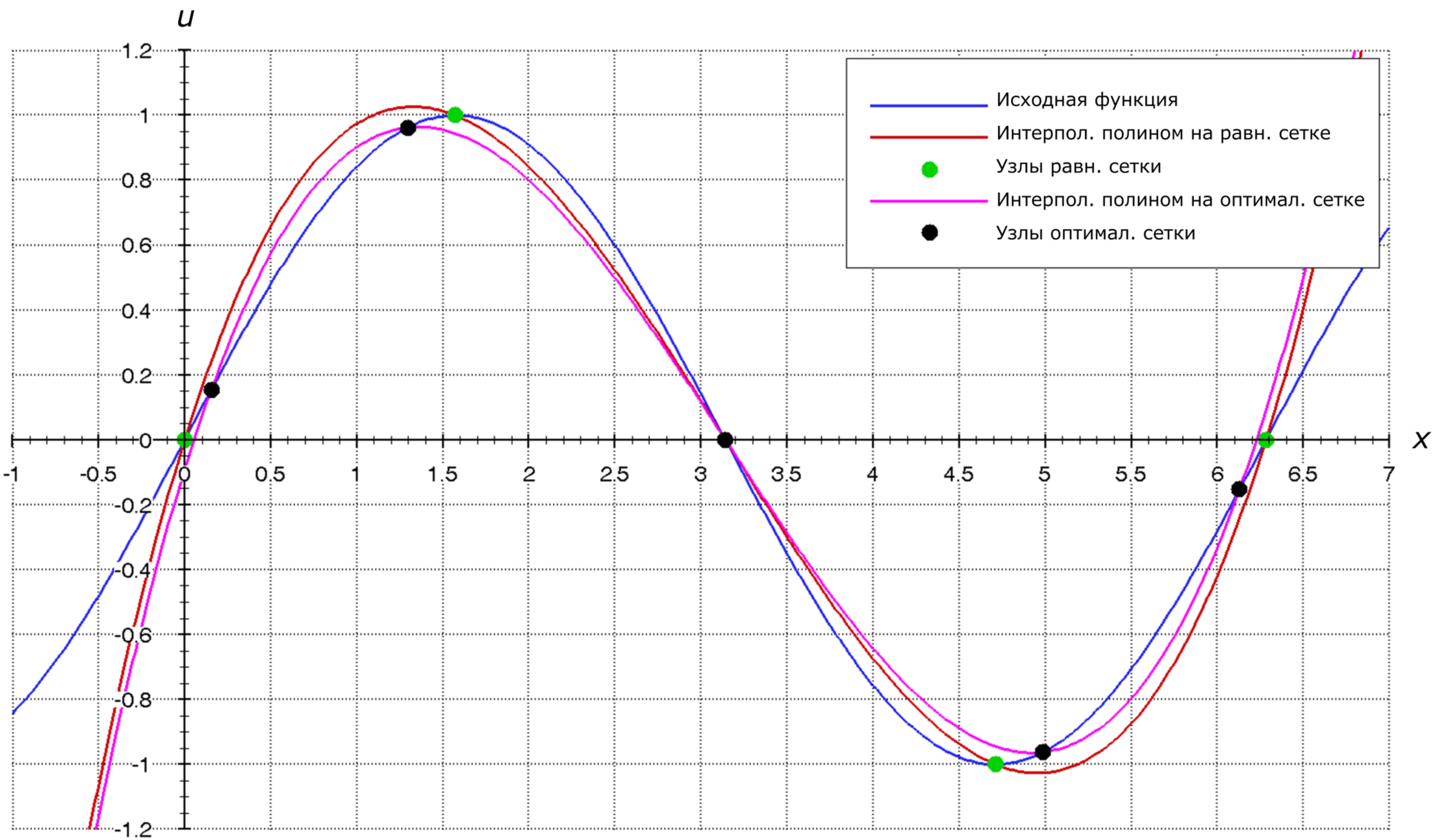
$$\boxed{x_m = \cos\frac{(2m+1)\pi}{2N}, \;\; m = 0,\dots,N-1}$$

## Отрезок $[a,b]$

$$\bar{T}_N(x) = \frac{(b-a)^N}{2^{2N-1}}\cos\left(N\arccos\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) = 0$$

$$\boxed{x_m = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2m+1)\pi}{2N}, \;\; m = 0,\dots,N-1}$$

# Пример: $u(x)=\sin x,\ x\in[0;2\pi],\ N=4,$ равн. сетка и оптимальная



# Литература

1. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: учеб. пособие. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий. Бином. Лаборатория знаний, 2006. – С. 133 – 141.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – С. 127 – 134.
3. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику: учеб. пособие. – М.: Изд-во МФТИ, 1994. – С. 28 – 34.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – С. 58 – 62.
5. Press W.H. et al. Numerical Recipes in C. – Cambridge University Press. – P. 120. – пример программной реализации построения интерполяционных полиномов.

# Спасибо за внимание!