МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра вычислительной математики

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ЗАДАНИЙ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ. VI СЕМЕСТР, ОДУ. РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ

Учебно-методическое пособие

Составитель *Р. С. Пастушков*

МОСКВА
МФТИ
2015

УДК 519.63

Рецензент
Кандидат физико-математических наук *С. С. Симаков*

Типовые задачи заданий по вычислительной математике. VI семестр, ОДУ. Решения, указания, ответы : учебно-метод. пособие / сост. Р. С. Пастушков. – М. : МФТИ, 2015. – 48 с.

Рассмотрены задачи и упражнения по разделу вычислительной математики *Обыкновенные дифференциальные уравнения*: задача Коши (общее решение, методы Рунге–Кутты, таблицы Бутчера, функции устойчивости), краевая задача для линейных уравнений (общее решение, порядок аппроксимации, вариационные и проекционные методы решения, собственные значения задачи Штурма–Лиувилля), краевая задача для нелинейных уравнений (метод стрельбы, метод квазилинеаризации).

К большинству задач приведены решения. Может быть использовано при проведении семинарских занятий и лабораторных работ по вычислительной математике и самостоятельной подготовке студентов всех факультетов для сдачи заданий

УДК 519.63

Учебное издание

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ЗАДАНИЙ
ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ.
VI СЕМЕСТР, ОДУ.
РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ

Учебно-методическое пособие

Составитель ***Пастушков*** *Роман Серафимович*

Редактор *И. А. Волкова*. Корректор *Н. Е. Кобзева*
Подписано в печать 19.06.2015. Формат $60 \times 84\ {}^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,9.
Тираж 100 экз. Заказ № 226.
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408 84 30, e-mail: polygraph@mipt.ru

1.Общее решение

1.1. На сетке $D_h = \left\{ x_n : x_n = nh,\ n = \overline{0,N},\ Nh = 1,\ N = 2 \right\}$ построить конечномерное приближение к общему решению ОДУ: $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + xy = x,\ 0 < x < 1.$

Аппроксимируем ОДУ в единственном внутреннем узле сетки $n = 1$:

$$\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} + \frac{1}{2} y_1 = \frac{1}{2} .$$

С учётом $h = \dfrac{1}{2}$ получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка (старший индекс минус младший = 2):

$$8y_0 - 15y_1 + 8y_2 = 1 .$$

Его общее решение:

$$y_n^{\text{общ.неодн.}} = y_n^{\text{общ.одн.}} + y_n,\ n = \overline{0,2} ,$$

$$y_n^{\text{общ.одн.}} = C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)},$$

где $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ – два *любых линейно независимых* решения *однородного* уравнения

$$8y_0 - 15y_1 + 8y_2 = 0 ,$$

y_n – *частное* решение исходного *неоднородного* уравнения.

Решение задачи путём сведения к задаче Коши.

$y_n^{(1).}, y_n^{(2).}$ получаем решением двух задач Коши с двумя наборами *линейно независимых начальных* условий, например,

$$y_0^{(1)} = 0,\ y_1^{(1)} = 1 \text{ и } y_0^{(2)} = 1,\ y_1^{(2)} = 0 .$$

Отметим, что поскольку исходное разностное уравнение второго порядка, то каждый набор содержит по два начальных условия.

В результате получаем два линейно независимых решения:

$$y_n^{(1)} = \left(0,\ 1,\ 15/8\right)^T ,\ y_n^{(2)} = \left(1,\ 0,\ 1\right)^T .$$

Для получения частного решения неоднородного уравнения

$$8y_0 - 15y_1 + 8y_2 = 1$$

используем *произвольные начальные* условия. Например, такие: $y_0 = 0,\ y_1 = 0$.

В результате получаем $y_n = \left(0,\ 0,\ 1/8\right)^T$.

Общий результат $y_n^{\text{общ. неодн.}} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 15/8 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/8 \end{pmatrix}$.

Решение задачи в рамках краевой задачи.

Для получения $y_n^{(1).}$, $y_n^{(2).}$ используем два набора *линейно независимых* двух *граничных* условий, например,

$y_0^{(1)} = 0,\ y_2^{(1)} = 1$ и $y_0^{(2)} = 1,\ y_2^{(2)} = 0$.

В результате получаем два линейно независимых решения:

$y_n^{(1)} = \left(0,\ 8/15,\ 1\right)^T$, $y_n^{(2)} = \left(1,\ 8/15,\ 0\right)^T$.

Для получения частного решения *неоднородного* уравнения

$8y_2 - 15y_1 + 8y_0 = 1$

используем *произвольные* *граничные* условия. Например, такие $y_0 = 0,\ y_2 = 0$.

В результате получаем $y_n = \left(0,\ -1/15,\ 0\right)^T$.

Общий результат: $y_n^{\text{общ. неодн.}} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 8/15 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 8/15 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/15 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Замечание 1. Получение из общего решения конкретного (удовлетворяющего, например, граничным условиям $y_0 = 0,\ y_2 = 2$) путём определения констант $C_1 = 1, C_2 = 0$ – в первом случае и $C_1 = 2, C_2 = 0$ – во втором будет, естественно, давать один и тот же результат:

1) $y_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 15/8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.   2) $y_n = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 8/15 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

Замечание 2. Простота решения рассмотренных задач обусловлена минимальным размером сетки (всего один внутренний узел при решении краевой задачи и один узел для определения решения задачи Коши). При больших значениях N (при решении задачи на подробной сетке) в каждом из использованных выше подходов могут появиться особенности. См. следующую задачу.

1.2. Предложить алгоритмы построения конечномерных приближений к общим решениям уравнений:

а) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(10+x^2\right)y=xe^x,\ 0<x<1,$ б) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(10+x^2\right)y=xe^x,\ 0<x<1.$

а) Вводим сетку $D_h=\left\{x_n : x_n=nh,\, n=\overline{0,N},\ Nh=1\right\}$ и аппроксимируем уравнение во внутренних узлах $n=\overline{1,(N-1)}$:

$$\frac{y_{n-1}-2y_n+y_{n+1}}{h^2}-\left(10+n^2h^2\right)y_n=nhe^{nh},\ n=\overline{1,\left(N-1\right)}.$$

Или

$$y_{n-1}-\left(2+10h^2+n^2h^4\right)y_n+y_{n+1}=nh^3e^{nh},\ n=\overline{1,\left(N-1\right)}.$$

Общее решение этой системы неоднородных разностных уравнений второго порядка (наибольший индекс минус наименьший = 2):

$$y_n^{\text{общ. неодн.}}=y_n^{\text{общ. одн.}}+y_n^{\text{частн. неодн.}},\ n=\overline{0,N},$$

$$y_n^{\text{общ. одн.}}=C_1y_n^{(1)}+C_2y_n^{(2)},$$

где $y_n^{(1)},\ y_n^{(2)},\ n=\overline{0,N}-$ два *любых линейно независимых* решения соответствующей *однородной* системы уравнения

$$y_{n-1}-\left(2+10h^2+n^2h^4\right)y_n+y_{n+1}=0,\ n=\overline{1,\left(N-1\right)},$$

$y_n,\ n=\overline{0,N}-$ *частное* решение исходной *неоднородной* системы уравнений.

Вариант решения в рамках краевой задачи.

Для получения $y_n^{(1).},\ y_n^{(2).}$ используем два набора *линейно независимых* двух *граничных* условий, например,

$$y_0^{(1)}=0,\ y_N^{(1)}=1 \text{ и } y_0^{(2)}=1,\ y_N^{(2)}=0.$$

Подставляя $y_0^{(1)}=0$ в первое уравнение исходной однородной системы и $y_N^{(1)}=1$ в последнее, получаем СЛАУ для $y_n^{(1)},\ n=\overline{1,\left(N-1\right)}$

$$-\left(2+10h^2+h^4\right)y_1^{(1)}+y_2^{(1)}=0,$$

$$y_{n-1}^{(1)}-\left(2+10h^2+n^2h^4\right)y_n^{(1)}+y_{n+1}^{(1)}=0,\ n=\overline{2,\left(N-2\right)},$$

$$y_{N-2}^{(1)}-\left(2+10h^2+\left(N-1\right)^2h^4\right)y_{N-1}^{(1)}=-1.$$

Аналогично, подставляя $y_0^{(2)}=1$ в первое уравнение и $y_N^{(2)}=0$ в последнее, получаем СЛАУ для определения $y_n^{(2)},\ n=\overline{1,\left(N-1\right)}$:

$$-\left(2+10h^2+h^4\right)y_1^{(2)}+y_2^{(3)}=-1,$$

$$y_{n-1}^{(2)}-\left(2+10h^2+n^2h^4\right)y_n^{(2)}+y_{n+1}^{(2)}=0,\ n=\overline{2,(N-2)},$$

$$y_{N-2}^{(2)}-\left(2+10h^2+(N-1)^2h^4\right)y_{N-1}^{(2)}=0.$$

Для получения частного решения $y_n,\ n=\overline{0,N}$ *неоднородной* системы уравнений используем *произвольные граничные* условия. Например, такие:

$$y_0=0,\ y_N=0\ .$$

Аналогично двум предыдущим случаям получаем СЛАУ

$$-\left(2+10h^2+h^4\right)y_1+y_2=h^3e^h,$$

$$y_{n-1}-\left(2+10h^2+n^2h^4\right)y_n+y_{n+1}=nh^3e^{nh},\ \ n=\overline{2,(N-2)},$$

$$y_{N-2}-\left(2+10h^2+(N-1)^2h^4\right)y_{N-1}=(N-1)h^3e^{(N-1)h}.$$

Замечание 1. Матрицы всех трёх полученных СЛАУ трёхдиагональные с диагональным преобладанием, являющимся достаточным условием получения устойчивого решения этих СЛАУ методами прогонки.

Вариант решения путём сведения к задаче Коши.

Для получения решения задачи Коши преобразуем исходное уравнение второго порядка в систему двух уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{f},\ \ \mathbf{y}=\begin{pmatrix}y\\ \xi\end{pmatrix},\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ (10+x^2) & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{f}=\begin{pmatrix}0\\ xe^x\end{pmatrix}.$$

В этом случае $\mathbf{y}_n^{(1).}$, $\mathbf{y}_n^{(2).}$, , $n=\overline{0,N}$ можно пытаться получить в результате решения (например, каким-либо методом Рунге–Кутты, см. следующий раздел) однородной системы при $\mathbf{f}=0$ с использованием двух *линейно независимых* наборов двух *начальных* условий. Например, таких

$$y^{(1)}(0)=0,\ \xi^{(1)}(0)=1\ \text{ и }\ y^{(2)}(0)=1,\ \xi^{(2)}(0)=0\ .$$

Для получения же частного решения $\mathbf{y}_n,\ n=\overline{0,N}$ *неоднородной* системы используем *произвольные начальные* условия. Например, такие

$$y(o)=0,\ \xi(0)=0\ .$$

Замечание 2. Устойчивость решений выписанной выше линейной системы уравнений первого порядка методами Рунге–Кутты при больших значениях N не обеспечивается, поскольку не выполняются условия $\operatorname{Re}\lambda_i^{(\mathbf{A})}\le 0,\ \lambda_{1,2}^{(\mathbf{A})}=\pm\left(10+x^2\right)^{1/2}-$ собственные значения матрицы $\mathbf{A}$.

Кроме того, получение общего решения путём сведения к задаче Коши может осложниться в этом случае и в результате появления больших значений частного решения y_n. Причины те же: отрицательность и большие значения коэффициента $-(10+x^2)<0, \left|10+x^2\right| \gg 1$, приводящие к экспоненциальному характеру решения.

б) Вводим сетку $D_h = \left\{x_n : x_n = nh,\ n=\overline{0,N},\ Nh=1\right\}$ и аппроксимируем уравнение во внутренних узлах $n=\overline{1,(N-1)}$:

$$(y_{n-1}-2y_n+y_{n+1})/h^2+\left(10+n^2h^2\right)y_n = nhe^{nh},\ n=\overline{1,\left(N-1\right)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_{n-1}-\left(2-10h^2-n^2h^4\right)y_n+y_{n+1} = nh^3e^{nh},\ n=\overline{1,\left(N-1\right)}.$$

Общее решение этой системы неоднородных разностных уравнений второго порядка (старший индекс минус младший = 2):

$$y_n^{\text{общ.неодн.}} = y_n^{\text{общ.одн.}} + y_n,\ n=\overline{0,N},$$
$$y_n^{\text{общ.одн.}} = C_1y_n^{(1)}+C_2y_n^{(2)},$$

где $y_n^{(1)},\ y_n^{(2)},\ n=\overline{0,N}$ – два *любых линейно независимых* решения *однородной* системы уравнения

$$y_{n-1}-\left(2-10h^2-n^2h^4\right)y_n+y_{n+1}=0,\ n=\overline{1,\left(N-1\right)},$$

$y_n,\ n=\overline{0,N}$ – *частное* решение исходной *неоднородной* системы.

Вариант решения задачи в рамках краевой задачи.

Для получения $y_n^{(1)},\ y_n^{(2)}$ используем два набора *линейно независимых* двух *граничных* условий, например,

$$y_0^{(1)}=0,\ y_N^{(1)}=1 \text{ и } y_0^{(2)}=1,\ y_N^{(2)}=0.$$

В первом случае, подставляя $y_0^{(1)}=0$ в первое уравнение и $y_N^{(1)}=1$ в последнее, получаем СЛАУ для определения $y_n^{(1)},\ n=\overline{1,\left(N-1\right)}$,

$$-\left(2-10h^2-h^4\right)y_1^{(1)}+y_2^{(1)}=0,$$
$$y_{n-1}^{(1)}-\left(2-10h^2-n^2h^4\right)y_n^{(1)}+y_{n+1}^{(1)}=0,\ n=\overline{2,\left(N-2\right)},$$
$$y_{N-2}^{(1)}-\left(2-10h^2-\left(N-1\right)^2h^4\right)y_{N-1}^{(1)}=-1.$$

Во втором случае, подставляя $y_0^{(2)}=1$ в первое уравнение и $y_N^{(2)}=0$ в последнее, получаем СЛАУ для определения $y_n^{(2)},\ n=\overline{1,\left(N-1\right)}$,

$$-\left(2-10h^2-h^4\right)y_1^{(2)}+y_2^{(3)}=-1,$$
$$y_{n-1}^{(2)}-\left(2-10h^2-n^2h^4\right)y_n^{(2)}+y_{n+1}^{(2)}=0,\ n=\overline{2,(N-2)},$$
$$y_{N-2}^{(2)}-\left(2-10h^2-(N-1)^2h^4\right)y_{N-1}^{(2)}=0.$$

Аналогично двум предыдущим случаям с использованием
$$y_0=0,\ y_N=0\ .$$
получаем СЛАУ для частного решения *неоднородной* системы уравнений
$$-\left(2-10h^2-h^4\right)y_1+y_2=h^3e^h,$$
$$y_{n-1}-\left(2-10h^2-n^2h^4\right)y_n+y_{n+1}=nh^3e^{nh},\ \ n=\overline{2,(N-2)},$$
$$y_{N-2}-\left(2-10h^2-(N-1)^2h^4\right)y_{N-1}=(N-1)h^3e^{(N-1)h}.$$

Замечание 3. Матрицы всех трёх полученных СЛАУ не обладают диагональным преобладанием, что при больших значениях N не даёт возможности решения этих СЛАУ методом трёхдиагональной прогонки.

Вариант решения путём сведения к задаче Коши.

Подход, реализованный в задаче а), для задачи б) годится, поскольку в этом случае решение имеет колебательный характер и, как следствие, условие устойчивости $\mathrm{Re}\,\lambda_i^{(\mathbf{A})}\le 0,\ \lambda_{1,2}^{(\mathbf{A})}=\pm i\sqrt{10+x^2}$ – собственные значения матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -(10+x^2) & 0\end{pmatrix}$ выполняется.

Отметим также. что задачу Коши для уравнения второго порядка
$$d^2y/dx^2=f(x,y),\ f(x,y)=-\left(10+x^2\right)y+xe^x,\ 0<x<1.$$
можно решить и без его преобразования к системе двух уравнений первого порядка, например, методом Штёрмера:
$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=h^2f(x_n,y_n)\ ,$$
либо более точным методом Нумерова
$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=h^2\left(f(x_{n-1},y_{n-1})+10f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})\right)/12\,.$$

В последнем случае $y_n^{(1).}$, $y_n^{(2).}$ с учётом линейности $f(x,y)$ получаем решением двух задач
$$y_{n+1}^{(1)}=\left(\alpha_n y_n^{(1)}-\alpha_{n-1`}y_{n-1}^{(1)}\right)/\alpha_{n+1},\ n=\overline{1,N-1},\ y_0^{(1)}=1,\ y_1^{(1)}=0,$$
$$y_{n+1}^{(2)}=\left(\alpha_{n`}y_n^{(2)}-\alpha_{n-1`}y_{n-1}^{(2)}\right)/\alpha_{n+1},\ n=\overline{1,N-1},\ y_0^{(2)}=0,\ y_1^{(2)}=1,$$
$$\alpha_{n-1`}=1-h^2\left(10+(n-1)^2h^2\right)/12,\ \alpha_n=2+10h^2\left(10+n^2h^2\right)/12,$$
$$\alpha_{n+1`}=1-h^2\left(10+(n+1)^2h^2\right)/12.$$

Соответственно, y_n получаем решением задачи

$$y_{n+1} = \left(\alpha_n y_n - \alpha_{n-1} y_{n-1} + \beta\right)/\alpha_{n+1},\ n = \overline{1, N-1},\ y_0 = 0,\ y_1 = 0,$$
$$\alpha_{n-1} = 1 - h^2\left(10 + (n-1)^2 h^2\right)/12,\ \alpha_n = 2 + 10h^2\left(10 + n^2 h^2\right)/12,$$
$$\alpha_{n+1} = 1 - h^2\left(10 + (n+1)^2 h^2\right)/12,$$
$$\beta = h^3 e^{nh}\left((n-1)e^{-h} + 10n + (n+1)e^{h}\right)/12.$$

Сопоставляя обе задачи, приходим к выводу: задачу а) предпочтительно решать в рамках краевой задачи, а задачу б) как задачу Коши.

2. Задача Коши. Методы Рунге–Кутты, таблицы Бутчера, функции устойчивости

2.1. Для задачи Коши $dy/dx = f(x, y),\ y(0) = y_0$ построить метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера $\begin{array}{c|cc} 1/3 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}$.

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + h\left(3k_1^{(n)} + k_2^{(n)}\right)/4,\ x^{(n)} = nh,\ y^{(0)} = y_0,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$k_1^{(n)} = f\left(x^{(n)} + h/3,\ y^{(n)} + 5hk_1^{(n)}/12 - hk_2^{(n)}/12\right),$$
$$k_2^{(n)} = f\left(x^{(n)} + h,\ y^{(n)} + 3hk_1^{(n)}/4 + hk_2^{(n)}/4\right).$$

Замечание. Метод неявный. Поэтому в общем случае для вычислений $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}$ $\forall n$ надо решать систему двух нелинейных уравнений.

2.2. Задача Коши $dy/dx + 5y^5 + 2\sin\pi x = 0,\ y(0) = 1$ решается методом Рунге–Кутты, заданным таблицей Бутчера $\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$.

При $y(0) = 1$ получить для неё функцию и условие устойчивости, исследовать метод на A- и L- устойчивость.

Функция устойчивости $R(z)$ вводится при решении модельного уравнения (тестового уравнения Далквиста) $d\delta/dx = \lambda\delta,\ \lambda = \mathrm{const}$ (в общем случае комплексная) каким-либо численным методом (в частности, методами Рунге–Кутты) и связывает решения этого уравнения при двух последовательных значениях аргумента $x_n, x_{n+1}: \delta_{n+1} = R(z)\delta_n$, $z = \lambda h$, h – шаг метода Рунге–Кутты.

Для заданного уравнения тестовым будет линеаризованное уравнение для ошибки решения. Поэтому получим его.

Введя обозначение нелинейной части уравнения $f(y) = 5y^5$, производим его квазилинеаризацию при $y_0 = 1$:

$$\frac{dy}{dx} + 5y^5 + 2\sin\pi x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + f(y_0) + \left.\frac{df}{dy}\right|_{y_0} (y - y_0) + 2\sin\pi x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -25y - 2\sin\pi x + 25.$$

Переходим к уравнению для ошибки решения

$y = y_{\text{точн}} + \delta$: $d\delta / dx = \lambda\delta,\ \lambda = -25$.

Используя таблицу Бутчера (для однократно диагонально неявного метода Рунге–Кутты), получаем решение этого уравнения.

$$\delta_{n+1} = \delta_n + h\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right)/6,$$

$$k_1 = \lambda y_n,\ k_2 = \lambda\left(y_n + hk_1/4 + hk_2/4\right),\ k_3 = \lambda\left(y_n + hk_2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \lambda\delta_n,\ k_2 = \frac{1 + z/4}{1 - z/4}\lambda\delta_n,\ k_3 = \frac{1 + 3z/4 + z^2/4}{1 - z/4}\lambda\delta_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_{n+1} = \frac{1 + 3z/4 + z^2/4 + z^3/24}{1 - z/4}\delta_n \Rightarrow R(z) = \frac{1 + 3z/4 + z^2/4 + z^3/24}{1 - z/4}.$$

$\lambda = -25 < 0$. Поэтому анализ устойчивости проводим для $z \in \mathbb{C}^-$.

Проверяем выполнение необходимого и достаточного условия A-устойчивости (область выполнения $|R(z)| \le 1:\ S \supset \mathbb{C}^-$)

$$|R(iy)|^2 \le 1\ \forall y \in \mathbb{R},$$

основанного на выполнении принципа максимума, согласно которому модуль функции $F(z), F \ne 0$ комплексного переменного z, имеющей в каждой точке области её определения конечную производную, не может достигать своего максимального значения внутри этой области.

$$.\,|R(iy)|^2 = \frac{1 + y^2/16 + y^4/8 + 73y^6/576}{1 + y^2/16} \ge 1\ \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ метод не A-устойчив $\Rightarrow$ метод не L-устойчив.

Для определения условия устойчивости находим область устойчивости на оси $\operatorname{Re} z$: $|R(\operatorname{Re} z)| \le 1$ при $-5.5 \le \operatorname{Re} z \le 0$. Отсюда получаем условие устойчивости: $h \le 5.5/|\lambda|,\ \lambda = -25$.

2.3. Определить условия устойчивости решения систем

а) $\dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y},\ \ \mathbf{y} = (y_1,\, y_2)^T$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 98 & 198 \\ -99 & -199 \end{pmatrix}$,

б) $\dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(\mathbf{y}),\ \mathbf{y} = (y_1,\, y_2)^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \left(A + y_1^2 y_2 - (B+1)y_1,\ By_1 - y_1^2 y_2\right)^T$

в области $y_1 = y_1^* = A,\ y_2 = y_2^* = B/A,\ A, B > 0$

явными методами Рунге–Кутты, у которых число стадий S равно порядку аппроксимации p: 1) $S = p = 1$, 2) $S = p = 2$, 3) $S = p = 3$, 4) $S = p = 4$.

Определить числа жёсткости задач s.

а) Поскольку собственные значения $\lambda_1^{(\mathbf{A})} = -1,\ \lambda_2^{(\mathbf{A})} = -100$ матрицы $\mathbf{A}$ действительны и не кратны, то имеет место представление:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1},\ \mathbf{\Lambda} = diag(\lambda_1^{(\mathbf{A})},\, \lambda_2^{(\mathbf{A})}),\ \mathbf{P} = \begin{pmatrix} e_1(\lambda_1^{(\mathbf{A})}) & e_1(\lambda_2^{(\mathbf{A})}) \\ e_2(\lambda_1^{(\mathbf{A})}) & e_2(\lambda_2^{(\mathbf{A})}) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{e}(\lambda_1^{(\mathbf{A})}),\ \mathbf{e}(\lambda_2^{(\mathbf{A})})$ – соответствующие собственные векторы.

Тогда исходная система разбивается на систему двух независимых тестовых линейных уравнений для компонент вектора $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}$:

$$\frac{d\mathbf{y}}{xt} = \mathbf{A}\mathbf{y} \Rightarrow \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1}\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y} \Rightarrow \frac{d(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y})}{dx} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y} \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dx} = \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\omega},$$

которая в покомпонентной записи имеет вид:

$$\frac{d\omega_1}{dx} = \lambda_1^{(\mathbf{A})}\omega_1,\ \frac{d\omega_2}{dx} = \lambda_2^{(\mathbf{A})}\omega_2.$$

Для каждой из функций устойчивости явных методов Рунге–Кутты $R(z)$ ($z = \lambda_1^{(\mathbf{A})}h$ – для первого уравнения, $z = \lambda_2^{(\mathbf{A})}h$ – для второго), с $S = p \le 4$, имеющих вид

$$R(z) = \begin{cases} 1 + z/1!,\ S = p = 1, \\ 1 + z/1! + z^2/2!,\ S = p = 2, \\ 1 + z/1! + z^2/2! + z^3/3!,\ S = p = 3, \\ 1 + z/1! + z^2/2! + z^3/3! + z^4/4!,\ S = p = 4, \end{cases}$$

условие $|R(iy)|^2 \le 1 \; \forall y \in \mathrm{R}$ (си. задачу 2.2) не выполняется. Поэтому все эти методы не A- и, следовательно, не L-устойчивы.

Используя условие устойчивости на действительной оси $|R(\mathrm{Re}\, z)| \le 1$, получаем условия на шаг h для каждого из этих методов:

$$h \le \frac{2}{\max\limits_i \left|\mathrm{Re}\,\lambda_i^{(\mathbf{A})}\right|},\ \Delta h \le \frac{2}{\max\limits_i \left|\mathrm{Re}\,\lambda_i^{(\mathbf{A})}\right|},\ h \le \frac{2.54}{\max\limits_i \left|\mathrm{Re}\,\lambda_i^{(\mathbf{A})}\right|},\ h \le \frac{2.83}{\max\limits_i \left|\mathrm{Re}\,\lambda_i^{(\mathbf{A})}\right|}.$$

По определению число жёсткости задачи

$$s = \max_i \left|\mathrm{Re}\,\lambda_i^{(\mathbf{A})}\right| / \min_i \left|\mathrm{Re}\,\lambda_i^{(\mathbf{A})}\right| = 10^2 .$$

б) Система нелинейная, поэтому для определения функции устойчивости необходима её квазилинеаризация:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(y_1^*, y_2^*) + \left[\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right]_* (y_1 - y_1^*) + \left[\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right]_* (y_2 - y_2^*),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(y_1^*, y_2^*) + \left[\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right]_* (y_1 - y_1^*) + \left[\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right]_* (y_2 - y_2^*).$$

Переходим к СЛАУ для ошибок $\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_1,\, \delta_2\right)^T$:

$$y_1 = y_1^{\text{точн}} + \delta_1,\ y_2 = y_2^{\text{точн}} + \delta_2 ,$$

а затем аналогично задаче а) и к разделённой системе для компонент вектора $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\delta}$ (обозначения см. далее).

$$\frac{d\boldsymbol{\delta}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta},\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right]_* & \left[\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right]_* \\ \left[\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right]_* & \left[\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right]_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (B-1) & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dx} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\delta},\ \mathbf{A} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1},\ \mathbf{P} = \begin{pmatrix} e_1(\lambda_1^{(\mathbf{A})}) & e_1(\lambda_2^{(\mathbf{A})}) \\ e_2(\lambda_1^{(\mathbf{A})}) & e_2(\lambda_2^{(\mathbf{A})}) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = diag(\lambda_1^{(\mathbf{A})},\, \lambda_2^{(\mathbf{A})}),\ \lambda_1^{(\mathbf{A})} = (B-1),\ \lambda_2^{(\mathbf{A})} = -A^2..$$

Аналогично задаче а):

$$h \le \frac{2}{\max\limits_i \left|\lambda_i^{(\mathbf{A})}\right|},\ h \le \frac{2}{\max\limits_i \left|\lambda_i^{(\mathbf{A})}\right|},\ h \le \frac{2.54}{\max\limits_i \left|\lambda_i^{(\mathbf{A})}\right|},\ h \le \frac{2.83}{\max\limits_i \left|\lambda_i^{(\mathbf{A})}\right|},$$

$$s = \max_i \left|\lambda_i^{(\mathbf{A})}\right| / \min_i \left|\lambda_i^{(\mathbf{A})}\right| .$$

2.4. Для однократно диагонально неявного 2-стадийного ($S=2$) метода Рунге–Кутты, заданного таблицей Бутчера $\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$, получить функцию устойчивости. Определить значения параметра γ, при которых метод а) A-устойчив, б) L-устойчив, в) имеет третий порядок аппроксимации ($p=3$).

а) Получаем решение тестового уравнения $d\delta/dx=\lambda\delta,\ \lambda=\text{const}$ и, как следствие, функцию устойчивости $R(z),\ z=\lambda h$:

$$\delta_{n+1}=\delta_n+h\left(k_1+k\right)/2,$$

$$k_1=\lambda\left(y_n+\gamma hk_1\right),\ k_2=\lambda\left[y_n+\left(1-2\gamma\right)hk_1+\gamma hk_2\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1=\lambda y_n/(1-\gamma z),\ k_2=\lambda y_n\left[1+\left(1-3\gamma\right)z\right]/\left(1-\gamma z\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\delta_{n+1}=\frac{1+\left(1-2\gamma\right)z+\left(1/2-2\gamma+\gamma^2\right)z^2}{1-2\gamma+\gamma^2z^2}\delta_n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(z)=\frac{1+\left(1-2\gamma\right)z+\left(1/2-2\gamma+\gamma^2\right)z^2}{1-2\gamma+\gamma^2z^2}.$$

Условие A-устойчивости (область устойчивости $S\supset\mathbb{C}^-$) :

$$\left|R(iy)\right|^2=\frac{\left[1-\left(1/2-2\gamma+\gamma^2\right)y^2\right]^2+\left(1-2\gamma\right)^2y^2}{\left(1-\gamma^2y^2\right)^2+4\gamma^2y^2}\le 1\ \forall y\ni\mathbb{R}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\gamma^3+5\gamma^2-2\gamma+1/4\le 0\Rightarrow\gamma\ge 1/4.$$

б) Условие L-устойчивости (A-устойчивость плюс $\lim\limits_{z\to-\infty}R(z)=0$) :

$$1/2-2\gamma+\gamma^2=0\Rightarrow\gamma_{1,2}=(2\pm\sqrt{2})/2.$$

в) Для определения значений γ, при которых $p=3$, воспользуемся условиями достижения такого порядка (необходимыми и достаточными), накладываемыми на коэффициенты таблицы Бутчера при выполнении соотношений $c_i=\sum_{j=1}^{S}a_{i,j}\ \forall i$.

Эти соотношения выполнены: $\gamma=\gamma,1-\gamma=(1-2\gamma)+\gamma$. Поэтому добиваемся выполнения *четырёх* условий порядка $p=3$:

$$\sum_{i=1}^{S}b_i=1\Rightarrow 1/2+1/2=1\Rightarrow 1=1\Rightarrow p=1,$$

$$\sum_{i=1}^{S}b_ic_i=1/2\Rightarrow\gamma/2+(1-\lambda)/2=1/2\Rightarrow 1/2=1/2\Rightarrow p=2,$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{S} b_i c_i^2 = 1/3 \Rightarrow 6\gamma^2 - 6\gamma + 1 = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = \left(3 \pm \sqrt{3}\right)/6,\\ \sum_{i,j=1}^{S} b_i a_{i,j} c_j = 1/6 \Rightarrow 6\gamma^2 - 6\gamma + 1 = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = \left(3 \pm \sqrt{3}\right)/6.\end{array}\right\} \Rightarrow p = 3$$

При этом выполнение *первого* условия обеспечивает $p=1$, выполнение *первых двух* даёт $p=2$, *всех четырёх* даёт $p=3$.

Получили: $p=2\ \forall\gamma$ и $p=3$ при $\gamma_{1,2}=\left(3\pm\sqrt{3}\right)/6$.

Замечание. Для заданной таблицы Бутчера выполняются соотношения: $\sum_{i=1}^{2} b_i a_{i,j} = b_j(1-c_j),\ j=1,2.$ Поэтому последнее (четвёртое) условие порядка $p=3$ является следствием предыдущих и излишним.

3. Краевая задача. Линейные уравнения

3.1. Граничные условия краевой задачи

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1+x}{1+x^2}\frac{dy}{dx} - (\cos x)y = \frac{1}{1+x^2},\ 0 \le x \le 1,\ 2y'_x(0) + y(0) = 3,\ y'_x(1) = 2,$$

решаемой на сетке $D_h = \left\{x_n : x_n = nh,\ Nh = 1,\ n = \overline{0,N}\right\}$, аппроксимировать с использованием двух приграничных узлов с точностью $O(h^2)$.

Аппроксимируем *левое* граничное условие с ошибкой $O(h)$ (выписав её в явном виде):

$$2\frac{y_1 - y_0}{h} - \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_0 h + O(h^2) + y_0 = 3 \quad (\textit{знак у ошибки:} -\ ).$$

Из уравнения и левого граничного условия определяем $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_0$:

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_0 = 1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]_0 + y_0,\quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_0 = \frac{3}{2} - \frac{y_0}{2} \to \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_0 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}y_0.$$

Подставляя это выражение в исходную аппроксимацию, получаем левое граничное условие с ошибкой $O(h^2)$

$$y_1 = (1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4})y_0 + (\frac{3h}{2} + \frac{5h^2}{4}) + O(h^2).$$

Аналогично для *правого* граничного условия

$$\frac{y_N - y_{N-1}}{h} + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_N h + O(h^2) = 2 \quad (\textit{здесь знак у ошибки: } +).$$

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_N=\frac{1}{2}+\left[\frac{dy}{dx}\right]_N+(\cos 1)y_N,\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_N=2\Rightarrow\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_N=\frac{5}{2}+(\cos 1)y_N.$$

$$y_N=(y_{N-1}+2h-5h^2/4)(1+0.5h^2\cos 1)^{-1}+O(h^2).$$

3.2. Краевую задачу $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{1+x}{1+x^2}\dfrac{dy}{dx}-(\cos x)y=\dfrac{1}{1+x^2},\ 0\le x\le 1,$

$2y'_x(0)+y(0)=3,\ y'_x(1)=2$

аппроксимировать на сетке $D_h=\left\{x_n:x_n=nh,\ Nh=1,\ n=\overline{0,N}\right\}$ с точностью $O(h^2)$. Предложить метод решения полученной СЛАУ.

Используя аппроксимации второго порядка точности

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_n\approx\frac{y_{n-1}-2y_n+y_{n+1}}{h^2}+O(h^2),$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_n\approx\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}+O(h^2),\ n=\overleftarrow{1,(N-1)},$$

значения $x_n=nh$ и результат предыдущей задачи по аппроксимации с ошибками $O(h^2)$ граничных условий, получаем для определения $y_n,\ n=\overleftarrow{0,N}$ трёхдиагональную СЛАУ

$$\left(1-h/2+h^2/4\right)y_0-y_1=-\left(3h/2+5h^2/4\right),$$

$$a_ny_{n-1}+b_ny_n+c_ny_{n+1}=2h^2/\left(1+(nh)^2\right),\ n=\overleftarrow{1,(N-1)},$$

$$y_{N-1}-\left(1+(h^2\cos 1)/2\right)y_N=-\left(2h-5h^2/4\right),$$

$$a_n=\left(2+\frac{(1+nh)h}{1+(nh)^2}\right),\ c_n=\left(2-\frac{(1+nh)h}{1+(nh)^2}\right),\ b_n=-2\left(2+h^2\cos(nh)\right),$$

аппроксимирующую всю задачу в целом с точностью $O(h^2)$.

Эффективным методом решения полученной СЛАУ является трёхдиагональная прогонка. Достаточные условия устойчивости этого метода выполняются ($|b_n|>|a_n|+|c_n|$).

3.3. Краевую задачу $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{1+x}{1+x^2}\dfrac{dy}{dx}+(\cos x)y=\dfrac{1}{1+x^2},\ 0\le x\le 1,$

$2y'_x(0)+y(0)=3,\ y'_x(1)=2,$

аппроксимировать на сетке $D_h = \left\{ x_n : x_n = nh,\ Nh = 1,\ n = \overline{0, N} \right\}$ с точностью $O(h^2)$. Предложить метод решения полученной СЛАУ.

Отмечаем, что единственным отличием постановок этой задачи и предыдущей является знак коэффициента свободного слагаемого ($+\cos x$ в этой задаче и $-\cos x$ в предыдущей). В результате решение этой задачи методом, использованным при решении предыдущей, приведёт к невыполнению достаточного условия метода трёхдиагональной прогонки.

Поэтому применяем метод сведения краевой задачи к задаче Коши.

Для этого сначала подучим численное общее решение исходного уравнения:

$$y_n = y_n^{\text{общ.одн.}} + y_n^{\text{частн.неодн.}},\ n = \overline{0, N},$$
$$y_m^{\text{общ.одн.}} = C_1 y_m^{(1)} + C_2 y_m^{(2)},$$

где $y_n^{(1)}, y_n^{(2)} -$ два *любых линейно независимых* численных решений задачи Коши соответствующего *однородного* разностного уравнения.

$y_n^{\text{частн.неодн.}}$ – *частное* решение задачи Коши исходного разносного *неоднородного* уравнения.

При этом для обеспечения линейной независимости каждую из трёх задач по нахождению $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, y_n^{\text{частн.неодн.}}$ будем решать с использованием линейно независимых начальных условий. Например, взятых из задачи 1.1. Точность $O(h^2)$ обеспечим использованием аппроксимаций из предыдущей задачи.

Таким образом, для получения $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, y_n^{\text{частн.неодн.}}$ имеем разностные уравнения:

$$y_{n+1}^{(1)} = \left(-a_n y_{n-1}^{(1)} - b_n y_n^{(1)}\right) / c_n,$$
$$y_0^{(1)} = 0,\ y_1^{(1)} = 1,\ n = \overleftarrow{1,(N-1)},$$
$$y_{n+1}^{(2)} = \left(-a_n y_{n-1}^{(2)} - b_n y_n^{(2)}\right) / c_n,$$
$$y_0^{(2)} = 1,\ y_1^{(2)} = 0,\ n = \overleftarrow{1,(N-1)},$$
$$y_{n+1}^{\text{частн.неодн.}} = \left(-a_n y_{n-1}^{\text{частн.неодн.}} - b_n y_n^{\text{частн.неодн.}} + 2h^2 / \left(1 + (nh)^2\right)\right) / c_n,$$
$$y_0^{\text{частн.неодн.}} = 1,\ y_1^{\text{частн.неодн.}} = 0,\ n = \overleftarrow{1,(N-1)},$$
$$a_n = \left(2 + \frac{(1+nh)h}{1+(nh)^2}\right),\ c_n = \left(2 - \frac{(1+nh)h}{1+(nh)^2}\right),\ b_n = -2\left(2 - h^2 \cos(nh)\right).$$

Константы C_1, C_2 общего решения

$$y_n = C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + y_n^{\text{частн.неодн.}}$$

определяем с использованием граничных условий исходной задачи, аппроксимированных с точностью $O(h^2)$:

$$(1-h/2+h^2/4)y_0 - y_1 = -(3h/2+5h^2/4),$$
$$y_{N-1} - (1-0.5h^2\cos 1)y_N = -(2h-5h^2/4).$$

В результате для определения C_1, C_2 имеем СЛАУ:

$$\left(y_1^{(1)} - \alpha y_0^{(1)}\right)C_1 + \left(y_1^{(2)} - \alpha y_0^{(2)}\right)C_2 = \left(\frac{3h}{2} + \frac{5h^2}{4}\right) + \alpha y_0^{\text{частн. неодн.}} - y_1^{\text{частн. неодн.}},$$

$$\left(\beta y_N^{(1)} - y_{N-1}^{(1)}\right)C_1 + \left(\beta y_N^{(2)} - y_{N-1}^{(2)}\right)C_2 = \left(2h - \frac{5h^2}{4}\right) + y_{N-1}^{\text{частн. неодн.}} - \beta y_N^{\text{частн. неодн.}},$$

$$\alpha = 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4},\ \beta = 1 + \frac{h^2(\cos 1)}{2}.$$

См. *замечание* 4 задачи 1.2.

3.4. Для решения краевой задачи

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x,\ x \in [0, 2\pi],\ y(0) = y(2\pi),\ \frac{dy}{dx}(0) = \frac{dy}{dx}(2\pi)$$

на сетке $D_h = \left\{x_n : x_n = nh,\ Nh = 2\pi,\ n = \overline{0,(N+1)},\ x_0 = x_N, x_1 = x_{N+1}\right\}$ предложена разностная схема

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = -\sin nh,\ y_0 = y_N,\ y_1 - y_0 = y_{N+1} - y_N,\ n = \overline{1,N}.$$

Исследовать разностную схему на аппроксимацию и на сходимость её решения y_n к следу решения дифференциальной задачи $[y]_n$.

Особенности задачи. Дифференциальное уравнение второго порядка, неоднородное с периодическими граничными условиями.

Физические размерности второго граничного условия разностной схемы и дифференциального уравнения не совпадают.

Исследование аппроксимации.

При проведении исследования на аппроксимацию должны выполняться два условия: а) разностное уравнение и разностные начальные условия должны быть записаны в однородном виде; б) *физические размерности* разностного уравнения и разностных начальных условий должны совпадать с таковыми исходной дифференциальной задачи.

Выполняя эти требования, записываем разностную схему в виде

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}+h^2\sin nh=0,\ y_0-y_N=0,\ (y_1-y_0)/h-(y_{N+1}-y_N)/h=0,$$
$$n=\overline{1,N}.$$

и вводим её обобщённый вектор невязок размерности $(N+2)$

$$\delta\mathbf{r}=\left(\delta r_0,\ \delta r_n,\ \delta r_{N+1}\right)^T,\ n=\overleftarrow{1,N},$$

где $\delta r_0,\ \delta r_n,\ \delta r_{N+1}$ – невязки аппроксимации первого граничного условия, уравнения и второго граничного условия.

По определению схема имеет порядок аппроксимации p, если

$$\|\delta\mathbf{r}\|_1=\max_{0\le i\le N+1}|\delta r_i|\le O(h^p).$$

Значения всех невязок определяются в результате замены в разностном уравнении и в разностных граничных условиях входящих туда *сеточных функций* (в рассматриваемой задаче $y_{n-1},\ y_n,\ y_{n+1}$) на соответствующие *следы решения* $[y]_{n-1},\ [y]_n,\ [y]_{n+1}$ *дифференциальной задачи*:

$$\delta r_0=[y]_0-[y]_N,$$
$$\delta r_n=\frac{[y]_{n+1}-2[y]_n+[y]_{n-1}}{h^2}+\sin nh,\ n=\overline{1,N},$$
$$\delta r_{N+1}=\frac{[y]_1-[y]_0}{h}-\frac{[y]_{N+1}-[y]_N}{h}.$$

Невязки δr_n будем определять относительно узлов разностной сетки, *в которых в разностном уравнении точно вычисляется правая часть решаемого уравнения* (т.е. относительно узлов $x_n=nh,\ n=\overline{1,N}$), а невязки $\delta r_0,\ \delta r_{N+1}$ – относительно нулевого узла.

Для определения $\delta r_n,\ n=\overline{1,N}$ получим следы $y(x)$ в узлах $x_{n-1},\ x_n,\ x_{n+1}$, вычисленных по формулам Тейлора относительно узла x_n:

$$[y]_{n-1}=[y]_n-\left[\frac{dy}{dx}\right]_n h+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_n h^2-\frac{1}{6}\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_n h^3+\frac{1}{24}\left[\frac{d^4y}{dx^4}\right]_n h^4+O(h^5),$$
$$[y]_n=[y]_n,$$
$$[y]_{n+1}=[y]_n+\left[\frac{dy}{dx}\right]_n h+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_n h^2+\frac{1}{6}\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_n h^3+\frac{1}{24}\left[\frac{d^4y}{dx^4}\right]_n h^4+O(h^5).$$

Тогда

$$\boldsymbol{\delta}r_n=\frac{[y]_{n-1}-2[y]_n+[y]_{n+1}}{2h}-\sin nh=\left[\frac{d^2y}{dx^2}-\sin x\right]_n+\left[\frac{d^4y}{dx^4}\right]_n h^2\le O(h^2).$$

При этом учли, что

$\left[d^2y/dx^2+\sin x\right]_n=0$, а $\left[d^4y/dx^4\right]_n\neq 0$.

Первое граничное условие $y(0)=y(2\pi)$ аппроксимировано в разностной схеме точно: $y_0=y_N$. Поэтому $\delta r_0=0$.

Определяем порядок аппроксимации второго граничного условия:

$$\delta r_{N+1}=\left(\left[y\right]_0+\left[\frac{dy}{dx}\right]_0 h+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_0 h^2+\frac{1}{6}\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_0 h^3+O(h^4)-\left[y\right]_0\right)/h-$$

$$-\left(\left[y\right]_N+\left[\frac{dy}{dx}\right]_N h+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_N h^2+\frac{1}{6}\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_N h^3+O(h^4)-\left[y\right]_N\right)/h=0.$$

При этом учли следствия дифференциальной задачи:

$\left[d^ky/dx^k\right]_0=\left[d^ky/dx^k\right]_N=0,\ k=1,2,3,\ldots$

Таким образом, $\delta\mathbf{r}=\left(0,\ O(h^2),\ 0\right)^T$ и точность аппроксимации всей задачи в целом $\left\|\delta\mathbf{r}\right\|_1=\max\limits_{0\le i\le N+1}\left|\delta r_i\right|\le O(h^2)$.

Исследование сходимости.

По определению разностное решение y_n сходится с порядком p к следу дифференциального решения $\left[y\right]_n$, если

$\left\|y_n-\left[y\right]_n\right\|_1\overset{h\to 0}{\le} O(h^p),\ n=\overline{0,N}$.

Решение дифференциальной задачи $y(x)=\mathrm{const}+\sin x$. Поэтому $\left[y\right]_n=\mathrm{const}+\sin nh$.

Получим теперь *аналитическое решение* y_n разностной задачи.

Разностное уравнение неоднородное. Поэтому его общее решение

$y_n^{\text{общ неодн}}=y_n^{\text{общ одн}}+y_n^{\text{частн неодн}}$.

Общее нетривиальное решение $y_n^{\text{общ одн}}$ линейного однородного разностного уравнения *второго* порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}=0,\ n=\overline{1,N}$$

получим в виде линейной комбинации *двух* линейно независимых решений вида $y_n=q^n$, где q − решение характеристического уравнения

$q^2-2q+1=0$,

получаемого подстановками $y_{n-1}=q^{n-1}, y_n=q^n,\ y_{n+1}=q^{n+1}$ в исходное однородное разностное уравнение и сокращением на $q^{n-1}\neq 0$.

При этом могут реализоваться *три* варианта:

а) корни $q_1,\ q_2$ – действительные и $q_1\neq q_2$; тогда $y_n=C_1q_1^n+C_2q_2^n$,

б) $q_1=q_2=q$ (кратный действительный корень); тогда $y_n=C_1q^n+C_2nq^n$,

в) $q_{1,2}=a\pm\mathbf{i}b$; $y_n=|q|^n(C_1\cos n\varphi+C_2\sin n\varphi),\ |q|=(a^2+b^2)^{1/2},\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{b}{a}$.

В нашем случае $q_{1,2}=1$ и, следовательно,

$$y_n^{\text{общ одн}}=C_1+C_2n\ .$$

Получим теперь *частное* решение *неоднородного разностного уравнения*. С учётом того, что $x_n=nh$, придадим этому уравнению вид

$$y_{n+1}-2y_n+y_{-1}=-h^2\sin nh,\ n=\overleftarrow{1,N}\ .$$

Вид правой части этого уравнения позволяет использовать следующий алгоритм нахождения его частного решения.

Пусть $q=a\pm\mathrm{i}b$ − выражение произвольного корня характеристического уравнения (при этом может быть, как в нашем случае, $b=0$).

При правой части неоднородного уравнения, имеющей вид

$$f_n=\alpha^n[P_k(n)\cos\beta n+Q_l(n)\sin\beta n],$$

где $\alpha,\ \beta$ − параметры, $P_k(n),\ Q_l(n)$ − полиномы степени k и l, его частное решение можно искать в виде

$$y_n^{\text{частн неодн}}=n^s\alpha^n[R_m(n)\cos\beta n+T_m(n)\sin\beta n],$$

где $R_m(n),\ T_m(n)$ − полиномы степени $m=\max(k,\ l)$, а

$$s=\begin{cases}\text{кратности корня, если } \alpha=(a^2+b^2)^{1/2},\ \operatorname{tg}\beta=\dfrac{b}{a} \text{ одновременно},\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Для правой части задачи $f_n=-h^2\sin nh$ можно положить

$$\alpha=1,\ \beta=h,\ P_0(n)=0,\ Q_0(n)=-h^2.$$

Поэтому для нашего случая одно из равенств в первом условии определения s не выполняется ($\operatorname{tg}h\neq b/a=0$). Следовательно, для рассматриваемой задачи $s=0$ и частное решение неоднородного уравнения можно искать в виде

$$y_n^{\text{частн еодн}}=A\cos nh+B\sin nh\ .$$

Подстановка его в неоднородное разностное уравнение даёт

$$A\left[\cos(n+1)h - 2\cos nh + A\cos(n-1)h\right] +$$
$$+B\left[\sin(n+1)h - 2\sin nh + A\sin(n-1)h\right] + h^2 \sin nh = 0.$$

Обнулив после тригонометрических преобразований коэффициенты при $\cos nh$ и $\sin nh$, получим $A = 0,\ B = h^2 / (4\sin^2 h/2)$. Это даёт

$$y_n^{\text{частн неодн}} = \frac{h^2}{4\sin^2 \dfrac{h}{2}} \sin nh,$$

$$y_n = y_n^{\text{общ одн}} + y_n^{\text{частн неодн}} = C_1 + nC_2 + \frac{h^2}{4\sin^2 \dfrac{h}{2}} \sin nh.$$

Используя разностные граничные условия, получаем

$$C_2 = 0,\ C_1 = \text{const} \ \Rightarrow y_n = \text{const} + \frac{h^2}{4\sin^2(h/2)} \sin nh.$$

Исследование сходимости:

$$\left\| y_n - [y]_n \right\|_1^{h\to 0} = \left\| \sin nh - \frac{h^2}{4\sin^2(h/2)} \sin nh \right\|_1^{h\to 0} =$$

$$= \left\| \sin nh - \left(1 + \frac{2}{3}h^2 + O(h^4)\right) \sin nh \right\|_1^{h\to 0} \le O(h^2).$$

3.5. Для решения краевой задачи

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\sin x,\ x \in [0, 2\pi],\ y(0) = y(2\pi),\ \frac{dy}{dx}(0) = \frac{dy}{dx}(2\pi)$$

на сетке $D_h = \left\{ x_n : x_n = nh,\ Nh = 2\pi,\ n = \overline{0, N},\ x_0 = x_N \right\}$

предложена разностная схема

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = -\sin nh,\ y_0 = y_N,\ y_1 - y_0 = y_N - y_{N-1},\ n = \overline{1,(N-1)}.$$

Исследовать разностную схему на аппроксимацию и на сходимость её решения y_n к следу решения дифференциальной задачи $[y]_n$.

Особенности задачи. Дифференциальное уравнение второго порядка, неоднородное с периодическими граничными условиями.

Физические размерности второго граничного условия разностной схемы и дифференциального уравнения не совпадают.

Указание. Обратить внимание на некоторые различия в использованной сетке и разностной аппроксимации второго граничного условия этой задачи и предыдущей.

Повторить выкладки предыдущей задачи и убедиться в совпадении порядка аппроксимации и сходимости.

Используем общее решение предыдущей задачи

$$y_n = y_n^{\text{общ одн}} + y_n^{\text{частн неодн}} = C_1 + nC_2 + \frac{h^2}{4\sin^2(h/2)}\sin nh.$$

Из первого граничного условия получаем $C_2 = 0$. Из второго $C_1 = \mathrm{const}$. В результате

$$y_n = \mathrm{const} + + \frac{h^2}{4\sin^2(h/2)}\sin nh\,.$$

4. Краевая задача. Вариационные и проекционные методы решения

4.1. Исследовать на самосопряжённость и положительную определённость оператор $Lu = -d^2u/dx^2$, заданный на множестве $K(w) = \left\{w, w \in C^2[0,1],\ w_x'(0) - \alpha w(0) = 0, w_x'(1) + \beta w(1) = 0\right\}$ со скалярным произведением $(u,v) = \int_0^1 uvdx,\ u,v \in K$.

Исследование самосопряжённости $(Lu,\ v) = (u,\ Lv)$.

$$(Lu,\ v) = -\int_0^1 vd^2u/dx^2dx = v(0)u_x'(0) - v(1)u_x'(1) + \int_0^1 (du/dx)(dv/dx)dx\,.$$

С учётом $u_x'(0) = \alpha u(0),\ u_x'(1) = -\beta u(1)$ получаем:

$$(Lu,\ v) = \alpha v(0)u(0) + \beta v(1)u(1) + \int_0^1 (du/dx)(dv/dx)dx \Rightarrow (Lv,\ u) = (u,\ Lv)\,.$$

Исследование положительной определённости

$(Lu,u) \ge 0,\ (Lu,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Из полученного выражения для $(Lu,\ v)$ следует, что

$$(Lu,\ u) = \alpha\left(u(0)\right)^2 + \beta\left(u(1)\right)^2 + \int_0^1 (du/dx)^2dx\,,$$

и достаточными условиями $\left(Lu,u\right)\ge 0,\ \left(Lu,u\right)=0 \Leftrightarrow u=0$ будут:

$\alpha \ge 0,\ \beta \ge 0$ при $\alpha \ne 0,\ \beta \ne 0$ одновременно

Если $\alpha=\beta=0$ граничными условиями будут $u'(0)=0,\ u'(1)=0$ и

$$\left(Lu,\,u\right)=\int_0^1 (du/dx)^2\,dx\,,$$

Но $u=\mathrm{const}\ne 0$ удовлетворяет этим граничным условиям и $u\in K$. Однако, в этом случае $\left(Lu,\,u\right)=0$ и тогда Lu по определению не является положительно определённым.

4.2. Исследовать самосопряжённость $\left(Lu,\,v\right)=\left(u,\,Lv\right)$ и положительную определённость $\left(Lu,u\right)\ge 0,\ \left(Lu,u\right)=0 \Leftrightarrow u=0$ оператора

$$Lu=-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)+p(x)u,\ k(x)=x^2-1,\ p(x)=\sin\frac{\pi x}{2}\,,$$

заданного на множестве $K(w)=\left\{w, w\in C^2\left[-1,1\right]\right\}$ со скалярным произведением $\left(u,v\right)=\int_{-1}^{1} uvdx,\ u,v\in K$.

Исследование самосопряжённости.

Вводим $Q(x)=vk(x)\dfrac{du}{dx}$ и замечаем, что $Q(-1)=Q(1)=0$.

Дифференцированием получаем

$$\frac{dQ}{dx}=v\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)+k(x)\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -v\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)=-\frac{dQ}{dx}+k(x)\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Поэтому $\left(Lu,v\right)=-\int_{-1}^{1} v\dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right)dx+\int_{-1}^{1} p(x)vudx=$

$$\left(Lu,v\right)=-\int_{-1}^{1} v\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)dx+\int_{-1}^{1} p(x)vudx=$$

$$=-\int_{-1}^{1}\frac{dQ}{dx}dx+\int_{-1}^{1} k(x)\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)dx+\int_{-1}^{1} p(x)vudx=$$

$$=\int_{-1}^{1} k(x)\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)dx+\int_{-1}^{1} p(x)vudx.$$

Очевидно, что $(Lu,v)=(Lv,u)=(u,Lv)$ (оператор самосопряжён).
Исследование знакоопределённости.

Замена в только что полученном выражении v на u даёт

$$(Lu,u)=\int_{-1}^{1}k(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx+\int_{-1}^{1}p(x)u^2dx$$

Первый интеграл отрицательно определён (поскольку $k(x)\le 0,\ x\in[-1,1]$)., второй интеграл не является знакоопределённым (поскольку $p(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ не знакоопределёна на $x\in[-1,1]$).

Оператор (Lu,u) не является знакоопределённым.

Замечание. Отметим, что он был бы положительно определённым при выполнении $k(x)\ge k_0>0,\ p(x)\ge 0,\ x\in[-1,1]$.

4.3. Показать, что оператор $Lu=-d^2u/dx^2+\lambda u$ самосопряжён $(Lu,\ v)=(u,\ Lv)$ на множествах а), б), в) и не самосопряжён на множествах г), д). Скалярные произведения множеств $(u,v)=\int_0^1 uvdx,\ u,v\in K$.

а) $K(w)=\left\{\,w,w\in C^2[0,1],\ w(0)=0,w(1)=0\,\right\}$.

б) $K(w)=\left\{\,w,w\in C^2[0,1],\ w'_x(0)=0,w_x(1)=0\,\right\}$.

в) $K(w)=\left\{\,w,w\in C^2[0,1],\ w(0)=w(1),w'_x(0)=w_x(1)\,\right\}$.

г) $K(w)=\left\{\,w,w\in C^2[0,1],\ w(0)=w(1),w'_x(0)=-w_x(1)\right\}$.

д) $K(w)=\left\{\,w,w\in C^2[0,1],\ w(0)=-w(1),w'_x(0)=w_x(1)\,\right\}$.

$$(Lu,v)=\int_0^1\left(d^2u/dx^2+\lambda u\right)vdx=v(du/dx)\Big|_0^1-\int_0^1\left[(du/dx)(dv/dx-\lambda uv)\right]dx\ .$$

Для задач а), б), в) $v(du/dx)\Big|_0^1=0\Rightarrow(Lu,\ v)=(u,\ Lv)$.

Для г) и д) $v(du/dx)\Big|_0^1=-2\dfrac{du}{dx}(0)v(0)\Rightarrow(Lu,\ v)\ne(u,\ Lv)$

4.4. При каких значениях c для решения краевых задач а), б), в)
$-d^2u/dx^2+cu=f(x),\ x\in[0,1]$,
а) $u(0)=0,\ u(1)=0,$ б) $u'_x(0)=0,\ u'_x(1)=0,$ *в)* $u(0)=u(1),u'_x(0)=-u'_x(1)$

будет обоснованным применение метода Ритца со скалярным произведением $(u,v)=\int_0^1 uvdx$?

Обоснованность применения метода Ритца определяется наличием самосопряжённости и положительной определённости оператора левой части уравнения $L(y)=-d^2u/dx^2+cu$.

Этот оператор самосопряжённый для задач а), б) и не самосопряжённый для задачи в) (см. задачу 4.3).

Условие $(Lu,u)\geq 0, (Lu,u)=0 \Leftrightarrow u=0$ положительной определённости оператора $L(y)=-d^2u/dx^2+cu$ эквивалентно требованию положительности всех его собственных значений.

В результате получаем условия применения метода Ритца.

Для задачи а): $c>-\lambda_{\min}=-\pi^2$, для б): $c>-\lambda_{\min}=0$,

где $\lambda_{\min}$ – минимальные собственные значения соответствующих задач

$$d^2u/dx^2=-\lambda u,\ u(0)=0, u(1)=0: \lambda_n=n^2\pi^2,\ \ n=1,2,3,...$$
$$d^2u/dx^2=-\lambda u,\ u'_x(0)=0, u'_x(1)=0: \lambda_n=(n-1)^2\pi^2,\ n=1,2,3,...$$

Для решения задачи в) метод Ритца неприменим из-за несамосопряжённости и невозможности получения в этом случае значений c, при которых оператор $L(y)=-d^2u/dx^2+cu$ был бы положительно определённым. Выписанное выше условие $c>-\lambda_{\min}$ невыполнимо, поскольку собственными значениями задачи

$$d^2u/dx^2=-\lambda u,\ \ u(0)=u(1),\ u'_x(0)=-u'_x(1)$$

являются любые действительные числа.

Замечание. Отметим, что обоснованность использования метода Ритца не означает сходимости решения, которая будет зависеть от выбираемой системы базовых функций.

4.5. Определить достаточные условия, при которых оператор

$$L(u)=-p(x)\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{dp}{dx}\frac{du}{dx}+q(x)u,\ (p(x)\geq \text{const}>0,\ p(x),\ \frac{dp}{dx},\ q(x)-$$

непрерывны), действующий на множестве $K(w)=\{w\in C^2[a,b],$

$$\alpha_1 w(a)+\alpha_2 w'_x(a)=0,\ \beta_1 w(b)+\beta_2 w'_x(b)=0,\ |\alpha_1|+|\alpha_2|>0,\ |\beta_1|+|\beta_2|>0\}$$

со скалярным произведением $(u,v)=\int\limits_a^b uvdx,\ u,v\in K$, является положительно определённым.

По определению оператор $L(u)$ положительно определён, если в области его действия $(Lu,u)\ge 0,\ (Lu,u)=0 \Leftrightarrow u=0$.

Вычисляем

$$(Lu,u)=\int_a^b L(u)u\,dx=-\int_a^b\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)u-q(x)u^2\right]dx=$$

$$=p(x)\frac{du}{dx}u\Big|_a^b+\int_a^b p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx+\int_a^b q(x)u^2dx=$$

$$=-\frac{\beta_2}{\beta_1}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\Bigg|_{x=b}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\Bigg|_{x=a}+\int_a^b p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx+\int_a^b q(x)u^2dx.$$

Очевидно, что при

$$q(x)\ge \text{const}>0,\ \beta_1\beta_2\le 0,\ \alpha_1\alpha_2\ge 0$$

оператор Lu будет положительно определённым.

4.6. На сетке $D_h=\left\{x_n: x_n=nh,\ h=1,\ \ n=\overline{0,N},\ N=2\right\}$, используя базисную функцию $\eta_n(x)=\begin{cases}0, & |x-x_n|\ge h,\\ \dfrac{x-x_{n-1}}{h}, & x_{n-1}\le x\le x_n,\ n=1,\\ \dfrac{x_{n+1}-x}{h}, & x_n\le x\le x_{n+1},\end{cases}$

построить конечномерное приближение к решению краевой задачи

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+2u=x,\ \ x\in[-1,1],\ u(-1)=1,\ u(1)=-3$$

а) методом Ритца, б) методом Бубнова–Галёркина.

При использовании любого из этих методов решение ищем в виде

$$u_1(x)=u_0(x)+\alpha_1\eta_1(x)\,,\quad u_0(x)=-(1+2x)\,,$$

где $u_0(x)$ в общем случае произвольная, но удовлетворяющая граничным условиям задачи $u_0(-1)=1,\ u_0(1)=-3$, $\eta_1(x)$ – базисная функция, α_1 подлежит определению.

Поскольку $\eta_1(-1)=\eta_1(1)=0$, то и $u_1(x)$ удовлетворяет граничным условиям $u(-1)=1,\ u(1)=-3$.

а) Оператор $L(u) = -\dfrac{d^2u}{dx^2} + 2u,\ x \in [-1,1]$ самосопряжён и положительно определён (см. *Замечание* к предыдущей задаче). Поэтому получение решения метолом Рица обосновано.

Для решения задачи вида

$$-\frac{d}{dx}k(x)\frac{du}{dx} + p(x)u = f(x),\ x \in [a,b],$$

$$u(a) = U_a,\ u(b) = U_b,\ k(x) \ge k_0 > 0,\ p(x) \ge 0$$

методом Ритца используем функционал $J(u)$, принимающий на решении этого уравнения минимальное значение

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_a^b \left[k(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + p(x)u^2 \right] dx - \int_a^b f(x)u\,dx$$

Поэтому α_1 определяется из решения уравнения $dJ / d\alpha_1 = 0$.

Для решаемой задачи $J(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2u^2\right]dx - \int_{-1}^{1} xu\,dx$.

Поэтому при $u_1(x) = u_0(x) + \alpha_1\eta_1(x)$ определяем α_1 из уравнения

$$\frac{dJ}{d\alpha_1} = \int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{du_1}{dx}\right)\frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{du_1}{dx}\right) + 2u_1\frac{du_1}{d\alpha_1}\right]dx - \int_{-1}^{1} x\frac{du_1}{d\alpha_1}dx = 0 .$$

Замечание 1. Предварительное вычисление $J(u_1)$ с последующим дифференцированием $dJ / d\alpha_1$ потребует более объёмных выкладок.

Для конкретной базисной функции интегрирование разбивается на две отрезка $[-1,0], [0,1]$. При этом полагаем, что

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 1+x, \\ 1-x, \end{cases} \frac{du_1}{dx} = \begin{cases} -2+\alpha_1, \\ -2-\alpha_1, \end{cases} \frac{du_1}{d\alpha_1} = \begin{cases} 1+x, \\ 1-x, \end{cases} \frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{du_1}{dx}\right) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 0, \\ -1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Замечание 2. Все производные в точках $x = -1,0,1$ доопределены до непрерывности.

Подставляя эти выражения в уравнение $dJ / d\alpha_1 = 0$ и вычисляя интегралы для каждого интервала, получаем соотношение

$$\left(-\frac{12}{6} + \frac{20\alpha_1}{6}\right) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{3}{5} \Rightarrow u_1(x) = \begin{cases} -(1+2x) - \dfrac{3}{5}(1+x), & -1 \le x \le 0, \\ -(1+2x) - \dfrac{3}{5}(1-x). & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Замечание 3. При наличии $N-1>1$ внутренних узлов сетки решение ищется в виде $u_{N-1}(x)=u_0(x)+\sum_{n=1}^{N-1}\alpha_n\eta_n(x)$ и для определения $\alpha_n,\ n=\overline{1,(N-1)}$ строится СЛАУ $dJ/d\alpha_n=0,\ n=\overline{1,(N-1)}$.

б) Вычисляем (см. *Замечание* 2)

$$\eta_1(x)=\begin{cases}1+x, \\ 1-x,\end{cases}\ \frac{du_1}{dx}=\begin{cases}-2+\alpha_1, & -1\le x\le 0,\\ -2-\alpha_1, & 0\le x\le 1\end{cases}$$

и подставляем эти выражения в интегральное тождество

$$\int_{-1}^{1}\left(-\frac{d}{dx}\left(\frac{du_1}{dx}\right)+2u_1\right)\eta_1(x)dx=\int_{-1}^{1}x\eta_1(x)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{-1}^{0}\left(-\frac{d}{dx}\left(\frac{du_1}{dx}\right)+2u_1\right)\eta_1(x)dx+\int_{0}^{1}\left(-\frac{d}{dx}\left(\frac{du_1}{dx}\right)+2u_1\right)\eta_1(x)dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}x\eta_1(x)dx+\int_{0}^{1}x\eta_1(x)dx.$$

Первые слагаемые левой части интегрируем по частям (см. далее *Замечание* 4) и получаем уравнение для определения α_1

$$-\left(\frac{du_1}{dx}\right)\eta_1(x)\Big|_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}\left(\frac{du_1}{dx}\right)\left(\frac{d\eta_1}{dx}\right)dx+\int_{-1}^{0}2u_1\eta_1(x)dx+$$

$$-\left(\frac{du_1}{dx}\right)\eta_1(x)\Big|_{0}^{1}+\int_{0}^{1}\left(\frac{du_1}{dx}\right)\left(\frac{d\eta_1}{dx}\right)dx+\int_{-1}^{0}2u_1\eta_1(x)dx=\int_{-1}^{0}x\eta_1(x)dx+\int_{0}^{1}x\eta_1(x)dx.$$

Интегрируя, получаем $\alpha_1=3/5$

Замечание 4. При используемой базисной функции (комбинации линейных функций) $u_1(x)=u_0(x)+\alpha_1\eta_1(x)-$ кусочно-гладкая, $dy/dx-$ кусочно-непрерывная и не является дифференцируемой в точках разрыва $x=-1,0,1$ (d^2u_1/dx^2 здесь не определена). Именно поэтому интегрирование $\int_{-1}^{1}d^2u_1/dx^2\eta_1(x)dx$ производится по частям..

Замечание 5. Полученные приближённые решения, естественно, зависят и от принятого вида $u_0(x)$. Например, при использовании в решаемых задачах $u_0=x^2-2x-2$ получим $\alpha_1=17/10$.

4.7. На сетке $D_h = \left\{ x_n : x_n = nh,\ h = 1/2),\ \ n = \overline{0, N},\ N = 2 \right\}$, используя базисную функцию $\eta_n(x) = x^n\left(1 - x\right),\ n = 1,$ построить конечномерные приближения $u_1(x)$ к решению краевой задачи

$$L(u) = (\pi^2 / 4)x,\ L(u) = d^2u / dx^2 + (\pi^2 / 4)u,\ x \in \left[0,1\right],\ u(0) = 0,\ u(1) = 0$$

а) методом Бубнова–Галёркина б) методом Ритца.

Используя точное решение $u^*(x) = x - \sin\left(\pi x / 2\right)$ оценить погрешности $u_1(x)$ в норме заданного конечномерного пространства.

Обсудить обоснованность использования метода Ритца.

Граничные условия задачи позволяют искать решение в виде $u_1(x) = \alpha_1\eta_1(x)$, где α_1 подлежит определению.

Поскольку $\eta_1(0) = \eta_1(1) = 0$, то и $u_1(x)$ удовлетворяет граничным условиям $u_1(0) = 0,\ u_1(1) = 0$.

а) С учётом $d^2u_1 / dx^2 = -2\alpha_1$ используем интегральное тождество

$$\int_0^1 \left(d^2u_1 / dx^2 + \left(\pi^2 / 4\right)u_1\right)\eta_1(x)dx = \int_0^1 \left(\pi^2 / 4\right)x\eta_1(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(-2\alpha_1 + (\pi^2 / 4)\alpha_1 x(1 - x)\right)x(1 - x)dx = \int_0^1 (\pi^2 / 4)x^2(1 - x)dx.$$

Произведя интегрирование, получаем

$$\alpha_1 = -5\pi^2 / \left(2(40 - \pi^2)\right),\ u_1(x) = -5\pi^2 x\left(1 - x\right) / \left(2(40 - \pi^2)\right).$$

Оцениваем погрешность полученного решения

$$\delta = \left\| 0,\ u^*\left(1/2\right) - u_1\left(1/2\right),\ 0 \right\|_1 = \left| 1/2 - \sqrt{2}/2 + 5\pi^2 / \left(8(40 - \pi^2)\right) \right|.$$

б) Результат аналогичен.

Использование метода Ритца корректно, поскольку оператор $L(u) = d^2u / dx^2 + (\pi^2 / 4)u,\ x \in \left[0,1\right],\ u(0) = 0,\ u(1) = 0$ самосопряжён и положительно определён (см. задачи 4.3, 4.4).

4.8. На сетке $D_h = \left\{ x_n : x_n = nh,\ h = \pi / N,\ \ n = \overline{0, N},\ N = 2 \right\}$ построить конечномерное приближение к решению краевой задачи

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \cos x\frac{du}{dx} + \frac{2(\cos x)u}{\pi} = 1 - \frac{4x\cos x}{\pi^2},\ 0 \le x \le \pi,\ u(0) = 1,\ u(\pi) = -1.$$

методом Бубнова–Галёркина с базисными функциями $\eta_n(x) = \sin nx,\ n = 1$.

Решение ищем в виде $u_1(x)=u_0(x)+\alpha_1\eta_1(x)$, где $u_0(x)=1-2x/\pi$ в общем случае произвольная, но удовлетворяющая граничным условиям $u_0(0)=1,\ u_0(\pi)=-1$, а α_1 подлежит определению. Поскольку $\eta_1(0)=\eta_1(\pi)=0$, то и $u_1(x)$ удовлетворяет граничным условиям $u_1(0)=1,\ u_1(\pi)=-1$.

Вычисляем $du_1/dx=-2/\pi+\alpha_1\cos x,\quad d^2u_1/dx^2=-\alpha_1\sin x$ и подставляем в интегральное тождество

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{d^2u_1}{dx^2}+\cos x\frac{du_1}{dx}+\frac{2(\cos x)u_1}{\pi}\right)\eta_1(x)dx=\int_0^{\pi}(1-\frac{4x\cos x}{\pi^2})\eta_1(x)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^{\pi}\left(-\alpha_1\sin x+\alpha_1\cos^2x+\alpha_1/\pi\sin 2x-1\right)\sin x dx=0.$$

Проведя интегрирование, получаем $\alpha_1=-12/\left(3\pi-4\right)$.

Таким образом, $u_1(x)=(1-2x/\pi)-12\sin x/\left(3\pi-4\right)$.

Замечание. При наличии $N-1>1$ внутренних узлов сетки решение ищется в виде $u_{N-1}(x)=u_0(x)+\sum\limits_{n=1}^{N-1}\alpha_n\eta_n(x)$ и для определения $\alpha_k,\ k=\overline{1,K}$ строится СЛАУ путём последовательной подстановки в интегральное тождество базовых функций $\eta_n(x),\ n=\overrightarrow{1,(N-1)}$.

5. Собственные значения задачи Штурма–Лиувилля

5.1. На сетке $D_h=\left\{x_n:x_n=nh,\ h=1/3,\ \ n=\overline{0,3}\right\}$

найти наименьшее собственное значение задачи

$$\frac{d^2u}{dx^2}+(\lambda-x)u=0,\ 0<x<1,\ u(0)=0,\ u'_x(1)=0$$

с точностью $O(h^2)$ и $O(h)$.

Аппроксимируем уравнение задачи во внутренних узлах $n=1,\ 2$ с ошибкой аппроксимации $O(h^2)$:

$$\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2} + (\lambda - \frac{1}{3})u_1 = 0,$$
$$\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{h^2} + (\lambda - \frac{2}{3})u_2 = 0.$$

Полученные два уравнения, содержащие четыре неизвестных, дополняем двумя уравнениями, аппроксимирующими два граничных условия: также с ошибкой $O(h^2)$:

$$u_0 = 0,\ u_x'(1) \approx \frac{3u_3 - 4u_2 + u_1}{2h} = 0 \ \to u_0 = 0,\ u_3 = -\frac{1}{3}u_1 + \frac{4}{3}u_2.$$

Замечание 1. Напомним в связи с решаемой задачей, что $u_x'(0) \approx \dfrac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} + O(h^2)$.

Исключив из первоначальной системы u_0, u_3, получаем с учётом $h^2 = 1/9$:

$$(\lambda - \frac{55}{3})u_1 + 9u_2 = 0,$$
$$6u_1 + (\lambda - \frac{20}{3})u_2 = 0.$$

Теперь используем условие существования нетривиального решения этой системы:

$$(\lambda - 55/3)(\lambda - 20/3) - 54 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 25\lambda - 54 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 27,\ \lambda_2 = -2 \Rightarrow \lambda_{\min} = -2.$$

Вариант решения задачи с менее точной аппроксимацией граничного условия (с ошибкой $O(h)$).

В этом случае аппроксимация граничных условий даёт:

$$u_0 = 0,\ \left(u_3 - u_2\right)/h = 0 \ \Rightarrow u_0 = 0,\ u_3 = u_2,$$

а СЛАУ для вычисления λ принимает вид

$$(\lambda - 55/3)u_1 + 9u_2 = 0,$$
$$9u_1 + (\lambda - 29/3)u_2 = 0.$$

Далее аналогично. $(\lambda - 55/3)(\lambda - 29/3) - 81 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 28\lambda - 81 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_1 = 14 + \sqrt{277}\ \ \lambda_2 = 14 - \sqrt{277} \Rightarrow \lambda_{\min} = 14 - \sqrt{277}.$

Замечание 2. Простота решения задачи обусловлена малым числом внутренних узлов сетки.

5.2. Определить все $\lambda^{(h)}$, при которых разностная задача

$$\frac{y_{n-1}-2y_n+y_{n+1}}{h^2}=-\lambda y_n,\quad n=\overline{1,(N-1)},\ N\ge 2,\ h=\frac{1}{N}$$

имеет нетривиальные решения при следующих граничных условиях:

а) $y_0=0,\ y_N=0$;

б) $y_0=0,\ y_{N-1}=y_N$;

в) $y_0=y_1,\ y_N=0$;

г) $y_0=y_1,\ y_{N-1}=y_N$;

д) $y_0=y_N,\ y_1-y_o=y_N-y_{N-1}$;

е) $y_0=-y_N,\ y_1-y_o=-(y_N-y_{N-1})$.

Определить эти решения (сеточные собственные функции).

Дать оценку $\left|\lambda_k^{(h)}-\lambda_k^{\text{диф}}\right|^{h\to 0}=O(h^p)\ \forall k=\overline{1,(N-1)}$, то есть определить порядок точности p вычисления $\lambda_k^{(h)},\ k=\overline{1,(N-1)}$ при $h\to 0$. $\lambda_k^{\text{диф}},\ k=1,2,\ldots -$ собственные значения соответствующих дифференциальных задач $d^2u/dx^2=-\lambda u,\ 0<x<1$:

а) $y(0)=0,\ y(1)=0:\ \lambda_k^{\text{диф}}=k^2\pi^2,\ k=1,2,\ldots,$

б) $y(0)=0,\ y'_x(1)=0:\ \lambda_k^{\text{диф}}=\left(2k-1\right)^2\pi^2/4,\ k=1,2,\ldots,$

в) $y'_x(0)=0,\ y(1)=0:\ \lambda_k^{\text{диф}}=\left(2k-1\right)^2\pi^2/4,\ k=1,2,\ldots,$

г) $y'_x(0)=0,\ y'_x(1)=0:\ \lambda_k^{\text{диф}}=(k-1)^2\pi^2,\ k=1,2,\ldots,$

д) $y(0)=y(1),\ y'_x(0)=y'_x(1):\ \lambda_k^{\text{диф}}=4(k-1)^2\pi^2,\ k=1,2,\ldots$

(в этой задаче все $\lambda_k^{\text{диф}}$, кроме $\lambda_1^{\text{диф}}=0$, кратные),

е) $y(0)=-y(1),\ y'_x(0)=-y'_x(1):\ \lambda_k^{\text{диф}}=(2k-1)^2\pi^2,\ k=1,2,\ldots$

(в этой задаче все $\lambda_k^{\text{диф}}$ кратные).

Общая часть для всех вариантов граничных условий а) – д).

Решение исходного однородного разностного уравнения

$$y_{n+1}-2(1-\frac{\lambda h^2}{2})y_n+y_{n-1}=0$$

ищем в виде $y_n=q^n$. Получаем характеристическое уравнение

$$q^2-2(1-\frac{\lambda h^2}{2})q+1=0.$$

Поскольку $q_1q_2=1$, то оно может иметь корни трёх видов:

1) $q_1\ne q_2$, действительные различные и $q_1\ne\pm1,\ q_2\ne\pm1$.

Общее решение: $y_n=C_1q_1^n+C_2q_2^n$.

2) $q_1 = q_2 = q = \pm 1$, кратные действительные.

Общее решение: $y_n = C_1 q^n + C_2 n q^n$.

Заметим, что в этом случае, как это видно из характеристического уравнения, при $q = 1$ получаем $\lambda^{(h)} = 0$, а $\lambda^{(h)} = 4 / h^2$ при $q = -1$.

3) $q_{1,2} = \cos\varphi \pm \mathrm{i}\, \sin\varphi$, комплексно-сопряжённый (учли, что $|q| = 1$).

Общее решение: $y_n = |q|^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi) = C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi$.

Кроме того, в этом случае $q_1 + q_2 = 2\cos\varphi$.

С другой стороны, из характеристического уравнения $q_1 + q_2 = 2(1 - \dfrac{\lambda h^2}{2})$.

Поэтому для задач а) – д) $\cos\varphi = (1 - \dfrac{\lambda h^2}{2}) \to \lambda^{(h)} = \dfrac{4}{h^2} \sin^2 \dfrac{\varphi}{2}$.

Анализ корней характеристического уравнения, вычисление значений φ и вида y_n производим для каждого варианта а) – д) отдельно.

а) Используя граничные условия, получаем СЛАУ для C_1, C_2 при различных действительных корнях характеристического уравнения.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ q_1^N C_1 + q_2^N C_2 = 0. \end{cases}$$

Система однородная. Поэтому детерминант этой системы:

$q_2^N - q_1^N = 0$.

Поскольку $q_1 q_2 = 1$ и $q_{1,2} \neq \pm 1$ *и одного знака* $\to q_1 = q_2$, то пришли в противоречие с исходным предположением: $q_1 \neq q_2$.

Рассматриваем случай кратных корней $q_1 = q_2 = q = \pm 1$.

Подстановка $q = 1$ в характеристическое уравнение даёт $\lambda^{(h)} = 0$, а $y_n = C_1 q^n + C_2 n q^n$ с учётом граничных условий приводит к $C_1 = 0,\ C_2 = 0$. Получили тривиальное решение.

Для $q = -1$ получаем $\lambda^{(h)} = h^2 / 4$ и также тривиальное решение.

Рассматриваем случай комплексно-сопряжённого корня.

Для определения φ используем общее решение этого варианта $y_n = C_1 \cos n\phi + C_2 \sin n\phi$ и граничные условия. Получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin N\varphi = 0. \end{cases}$$

Поскольку $C_2 \neq 0$ (в противном случае тривиальное решение), то

$$N\varphi = k\pi,\ k = \overline{1,(N-1)} \Rightarrow \varphi = k\pi / N\ .$$

$$\lambda_k^{(h)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi}{2N},\ \ y_{k\,n} = C\sin\frac{kn\pi}{N},\ k = \overline{1,(N-1)},\ n = \overline{0,N}.$$

При $k = 0, N$ имеем $\lambda_0^{(h)} = 0,\ \lambda_N^{(h)} = h^2/4$, дающие, как было уже получено, тривиальные решения. При $k > N,\ (k = N+1,\ N+2, \ldots)$ будет повторение уже имеющихся значений $\lambda_{N-1}^{(h)}, \lambda_{N-2}^{(h)}, \ldots, \lambda_1^{(h)}$ и $y_{k\,n}$.

Определяем порядок сходимости $\lambda_k^{(h)}$ к $\lambda_k^{\text{диф}}$ при $h = 1/N \to 0$.

$$\left|\lambda_k^{(h)} - \lambda_k^{\text{диф}}\right|^{h\to 0} = \left|\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2} - k^2\pi^2\right|^{h\to 0} =$$

$$= \left|\frac{4}{h^2}\left(\left(\frac{k\pi h}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)^4 + O(h^6) - \ldots\right) - k^2\pi^2\right|^{h\to 0} = O(h^2).$$

Интересно также оценить минимальное и максимальное значения:

$$\lambda_1^{(h)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2N} \approx \frac{4}{h^2}\left(\frac{\pi}{2N}\right)^2 = \pi^2, \quad \lambda_{N-1}^{(h)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(N-1)\pi}{2N} \approx \frac{4}{h^2} = 4N^2.$$

б) Используя граничные условия, получаем СЛАУ для C_1, C_2 при различных действительных корнях характеристического уравнения.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ (1-q_1)q_1^{N-1}C_1 + (1-q_2)q_2^{N-1}C_2 = 0. \end{cases}$$

Для существования нетривиального решения необходимо:

$$(1-q_2)q_2^{N-1} - (1-q_1)q_1^{N-1} = 0\ .$$

Поскольку $q_1 q_2 = 1$ и $q_{1,2} \neq \pm 1$ *и одного знака* $\to q_1 = q_2$, то получили противоречие с исходным предположением: $q_1 \neq q_2$.

Рассматриваем случай кратных корней $q_1 = q_2 = q_{1,2} = \pm 1$.

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ (N-1)q_{1,2}^{N-1}C_2 = Nq_{1,2}^{N}C_2. \end{cases}$$

Выполняется только при $C_2 = 0$. Получили тривиальное решение.

Рассматриваем случай комплексно-сопряжённого корня.

Для определения φ используем общее решение этого варианта $y_n = C_1\cos n\varphi + C_2\sin n\varphi$ и граничные условия.

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2(\sin N\varphi - \sin(N-1)\varphi) = 0 \Rightarrow C_2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{(2N-1)\varphi}{2} = 0 \end{cases}.$$

Поскольку $C_2 \neq 0$ (в противном случае тривиальное решение), то

$$\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{(2N-1)\varphi}{2}=0 \Rightarrow \begin{cases}\cos\dfrac{(2N-1)\varphi}{2}=0\\ \sin\dfrac{\varphi}{2}=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{(2N-1)\varphi}{2}=\dfrac{(2k-1)\pi}{2},\ k=\overline{1,(N-1)} \Rightarrow \varphi=\dfrac{(2k-1)\pi}{(2N-1)},\ k=\overline{1,(N-1)},\\ \varphi/2=(k-1)\pi,\ k=1,2,\ldots \Rightarrow \varphi=2(k-1)\pi,\ k=1,2,\ldots\end{cases}$$

$\varphi=2(k-1)\pi,\ k=1,2,\ldots$ приводят к тривиальному решению. Поэтому

$$\lambda_k^{(h)}=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{2(2N-1)},\ y_{kn}=C\sin\frac{(2k-1)n\pi}{(2N-1)},\ k=\overline{1,(N-1)},\ n=\overline{0,N}.$$

При $k=N$ решение только тривиальное, а при $k \geq N+1$ имеем циклическое повторение уже полученных значений $\lambda_{N-1}^{(h)}, \lambda_{N-2}^{(h)}, \ldots, \lambda_1^{(h)}$ и соответствующих y_{kn}.

Определяем порядок сходимости $\lambda_k^{(h)}$ к $\lambda_k^{\text{диф}}$ при $h=1/N \to 0$.

$$\left|\lambda_k^{(h)}-\lambda_k^{\text{диф}}\right|^{h\to 0}=\left|\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(2k-1)\pi h}{2(2-h)}-\frac{(2k-1)^2\pi^2}{4}\right|^{h\to 0}=$$

$$=\left|\frac{4}{h^2}\left[\left(\frac{(2k-1)\pi h}{2(2-h)}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{(2k-1)\pi h}{2(2-h)}\right)^4+O(h^6)\right]-\frac{(2k-1)^2\pi^2}{4}\right|^{h\to 0}=O(h^2).$$

в) Используя граничные условия, получаем СЛАУ для C_1, C_2 при различных действительных корнях характеристического уравнения.

$$\begin{cases}(1-q_1)C_1+(1-q_2)C_2=0,\\ q_1^N C_1+q_2^N C_2=0.\end{cases}$$

Система однородная. Для существования нетривиального решения необходимо:

$$(1-q_1)q_2^N-(1-q_2)q_1^N=0.$$

Поскольку $q_1 q_2 = 1$ и $q_{1,2} \neq \pm 1$, *и одного знака* $\to q_1 = q_2$.

Пришли в противоречие с исходным предположением: $q_1 \neq q_2$.

Рассматриваем случай кратных действительных корней $q_1=q_2=q=\pm 1$.

$$\begin{cases}(q-1)C_1+qC_2=0,\\ q^NC_1+Nq^NC_2=0.\end{cases}$$

При $q=1$ выполняется только при $C_1,C_2=0$. Получили тривиальное (нулевое) решение. При $q=-1$ результат аналогичен.

Рассматриваем случай комплексно-сопряжённого корня.

Для определения φ используем общее решение этого варианта $y_n=C_1\cos n\varphi+C_2\sin n\varphi$ и граничные условия.

$$\begin{cases}(1-\cos\varphi)C_1-C_2\sin\varphi=0\\ C_1\cos N\varphi+C_2\sin N\varphi=0.\end{cases}.$$

Условие существования нетривиального решения:

$$\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{(2N-1)\varphi}{2}=0\Rightarrow\begin{cases}\cos\dfrac{(2N-1)\varphi}{2}=0,\\ \sin\dfrac{\varphi}{2}=0,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{(2N-1)\varphi}{2}=\dfrac{(2k-1)\pi}{2},\ k=\overline{1,(N-1)}\Rightarrow\varphi=\dfrac{(2k-1)\pi}{(2N-1)},\ k=\overline{1,(N-1)},\\ \dfrac{\varphi}{2}=(k-1)\pi,\ k=1,2,\,...\Rightarrow\varphi=2(k-1)\pi,\ k=1,2,\,...\end{cases}$$

$\varphi=2(k-1)\pi,\ k=1,2,\,...$ приводят к тривиальному решению. Поэтому

$$\lambda_k^{(h)}=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{2(2N-1)},\ k=\overline{1,(N-1)}\,.$$

Используя с учётом вычисленных значений $\varphi=\dfrac{(2k-1)\pi}{(2N-1)}$ связь $C_2=C_1\sin\dfrac{\varphi}{2}/\cos\dfrac{\varphi}{2}$, получаем сеточные собственные функции

$$\lambda_k^{(h)}=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{2(2N-1)},\ y_{k\,n}=C\cos\frac{(2k-1)(2n-1)\pi}{2(2N-1)},\ k=\overline{1,(N-1)},\ n=\overline{0,N}.$$

При $k=N$ имеем тривиальное решение, при $k=N+1,\ N+2,\,...$ повторение уже полученных $\lambda_{N-1}^{(h)},\,\lambda_{N-2}^{(h)},\,...,\,\lambda_1^{(h)}$ и $y_{k\,n}$.

Анализ сходимости $\lambda_k^{(h)}$ к $\lambda_k^{\text{диф}}$ см. в задаче б).

г) Используя граничные условия, получаем СЛАУ для C_1,C_2 при различных действительных корнях характеристического уравнения.

$$\begin{cases}(1-q_1)C_1+(1-q_2)C_2=0,\\ q_1^{N-1}\left(1-q_1\right)C_1+q_2^{N-1}\left(1-q_2\right)C_2=0.\end{cases}$$

Условие существования нетривиального решения:

$(1-q_1)(1-q_2)(q_1^{N-1}-q_2^{N-1})=0$.

Каждое из решений $q_1=1,\ q_2=1,\ q_1=q_2$ противоречит исходным условиям этого варианта $q_1\neq q_2$, $q_{1,2}\neq\pm1$.

Рассматриваем случай $q_1=q_2=q=\pm1$.

$$\begin{cases}\left(q-1\right)C_1+qC_2=0.\\ \left(q^{N-1}-q^N\right)C_1+\left[\left(N-1\right)q^{N-1}-Nq^N\right]C_2=0.\end{cases}$$

Для $q=1$ (при котором $\lambda^{(h)}=0$) получаем $C_2=0$ и

$\lambda^{(h)}=0,\ y_n=\text{const}\neq0,\ n=\overline{0,N}.$

Для $q=-1$ (при котором $\lambda^{(h)}=4/h^2$) получаем СЛАУ

$$\begin{cases}2C_1+C_2=0,\\ \left((-1)^{N-1}-(-1)^N\right)C_1+\left(\left(N-1\right)\left(-1\right)^{N-1}-N\left(-1\right)^N\right)C_2=0,\end{cases}$$

имеющую только тривиальное решение.

Рассматриваем случай комплексно-сопряжённого корня.

Для определения φ используем общее решение этого варианта $y_n=C_1\cos n\varphi+C_2\sin n\varphi$ и граничные условия.

$$\begin{cases}\left(1-\cos\varphi\right)C_1-C_2\sin\varphi=0,\\ C_1\left(\cos N\varphi-\cos\left(N-1\right)\varphi\right)+C_2\left(\sin N\varphi-\sin\left(N-1\right)\varphi\right)=0.\end{cases}.$$

Условие существования нетривиального решения:

$$\sin^2(\varphi/2)\sin(N-1)\varphi=0\Rightarrow\begin{cases}\sin(N-1)\varphi=0,\\ \sin(\varphi/2)=0,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(N-1)\varphi=(k-1)\pi,\ k=\overline{1,(N-1)}\Rightarrow\varphi=\dfrac{(k-1)\pi}{(N-1)},\\ \varphi/2=\left(k-1\right)\pi,\ k=1,2,\ldots\Rightarrow\varphi=2\left(k-1\right)\pi,\ k=1,2,\ldots\end{cases}$$

Поэтому $\lambda_k^{(h)}=\dfrac{4}{h^2}\sin^2\dfrac{(k-1)\pi}{2(N-1)},\ k=\overline{1,(N-1)}$.

Используя $C_2=C_1\sin\dfrac{\varphi}{2}/\cos\dfrac{\varphi}{2}$, получаем

$$\lambda_k^{(h)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(k-1)\pi}{2(N-1)},\ y_{k\,n} = C\cos\frac{(k-1)(2n-1)\pi}{2(N-1)},\ k=\overline{1,(N-1)},\ n=\overline{0,N}.$$

При $k=N$ получаем тривиальные решения, при $k>N$ циклическое повторение значений $\lambda_1^{(h)}, \lambda_2^{(h)}, \ldots$ и соответствующих $y_{k\,n}$.

Определяем порядок сходимости $\lambda_k^{(h)}$ к $\lambda_k^{\text{диф}}$ при $h = 1/N \to 0$.

$$\left|\lambda_k^{(h)} - \lambda_k^{\text{диф}}\right|^{h\to 0} = \left|\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(k-1)\pi h}{2(1-h)} - (k-1)^2\pi^2\right|^{h\to 0} =$$

$$= \left|\frac{4}{h^2}\left[\left(\frac{(k-1)\pi h}{2(1-h)}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{(k-1)\pi h}{2(1-h)}\right)^4 + O(h^6)\right] - (k-1)^2\pi^2\right|^{h\to 0} = O(h^2).$$

д) При различных действительных корнях характеристического уравнения $q_1 \neq q_2$ СЛАУ для вычисления C_1, C_2 имеет вид

$$\begin{cases} \left(1-q_1^N\right)C_1 + \left(1-q_2^N\right)C_2 = 0, \\ \left[\left(1-q_1\right)\left(1-q_1^{N-1}\right)\right]C_1 + \left[\left(1-q_2\right)\left(1-q_2^{N-1}\right)\right]C_2 = 0. \end{cases}$$

Для существования нетривиального решения необходимо:

$$\left(1-q_2\right)\left(1-q_2^{N-1}\right)\left(1-q_1^N\right) - \left(1-q_1\right)\left(1-q_1^{N-1}\right)\left(1-q_2^N\right) = 0,$$

что с учётом $q_1 q_2 = 1$ выполняется только при $q_1 = \pm 1,\ q_2 = \pm 1$. Пришли в противоречие с исходным предположением: $q_1 \neq q_2$.

Рассматриваем случай кратных действительных корней $q_1 = q_2 = q = \pm 1$ Подстановка $q=1$ в характеристическое уравнение даёт $\lambda_1^{(h)} = 0$. Система для определения C_1, C_2 сводится к

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1\left(1-1-1^{N-1}+1^N\right) = 0, \end{cases}$$

решение которой $C_2 = 0,\ C_1 = \text{const}$.

Для $q=-1$ получаем $\lambda_2^{(h)} = 4/h^2$ и $C_1 = 0, C_2 = 0$.

Таким образом, при $q=1$ имеем нетривиальное решение $\lambda_1^{(h)} = 0,\ y_n = \text{const}$.

Рассматриваем случай комплексно-сопряжённого корня.

Для определения φ используем общее решение этого варианта $y_n = C_1\cos n\varphi + C_2\sin n\varphi$ и граничные условия. Получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} C_1 \sin^2 \dfrac{N\varphi}{2} - C_2 \sin \dfrac{N\varphi}{2} \cos \dfrac{N\varphi}{2} = 0, \\ C_1 \sin \dfrac{\varphi}{2} \sin \dfrac{(N-1)\varphi}{2} \cos \dfrac{N\varphi}{2} + C_2 \sin \dfrac{\varphi}{2} \sin \dfrac{(N-1)\varphi}{2} \sin \dfrac{N\varphi}{2} = 0. \end{cases}.$$

Необходимое условие существования нетривиального решения:

$$\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{N\varphi}{2}\sin\frac{(N-1)\varphi}{2} = 0 .$$

Каждый сомножитель порождает своё семейство собственных значений и собственных функций решаемой задачи.

Первое семейство:

$$\sin(\varphi/2) = 0 \Rightarrow \varphi/2 = (k-1)\pi,\ k = 1,2,\ldots \Rightarrow \varphi = 2(k-1)\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_k^{(h)} = (4/h^2)\sin^2(k-1)\pi = 0,\ y_{kn} = C\cos 2(k-1)n\pi = \text{const} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1^{(h)} = 0,\ y_{1n} = \text{const}.$$

Второе семейство:

$$\sin\frac{N\varphi}{2} = 0 \Rightarrow N\varphi = 2(k-1)\pi,\ \Rightarrow \varphi = 2(k-1)\pi/N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_k^{(h)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(k-1)\pi}{N},\ y_{kn} = C\sin\frac{2(k-1)n\pi}{N},$$

$$k = \overline{2,M},\ M = \begin{cases} N/2 & \text{при } N \text{ чётном}, \\ (N-1)/2 & \text{при } N \text{ нечётном}, \end{cases}\ n = \overline{0,N}.$$

При получении y_{kn} было использовано: $C_1 = 0, \forall C_2$.

Третье семейство:

$$\sin\frac{(N-1)\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{(N-1)\varphi}{2} = (k-1)\pi,\ \Rightarrow \varphi = 2(k-1)\pi/(N-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_k^{(h)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(k-1)\pi}{(N-1)},\ y_{kn} = C\cos\frac{(k-1)(2n-1)\pi}{(N-1)},$$

$$k = \overline{2,M},\ M = \begin{cases} (N-2)/2 & \text{при } N \text{ чётном}, \\ (N-1)/2 & \text{при } N \text{ нечётном}, \end{cases}\ n = \overline{0,N}.$$

При получении y_{kn} было использовано решение СЛАУ для определения C_1, C_2: $\forall C_1,\ C_2 = C_1 \sin\dfrac{N(k-1)\pi}{(N-1)} / \cos\dfrac{N(k-1)\pi}{(N-1)}$ ..

Общий результат: $\lambda_1^{(h)} = 0,\ y_n = \text{const}$ и два выписанные выше линейно независимые семейства $\lambda_k^{(h)}$ и y_{kn} .

Определяем порядок сходимости $\lambda_k^{(h)}$ к $\lambda_k^{\text{диф}}$ при $h \to 0$.

С учётом $h=\dfrac{1}{N}$ получаем для первого семейства

$$\left|\lambda_k^{(h)}-\lambda_k^{\text{диф}}\right|^{h\to 0}=\left|\frac{4}{h^2}\sin^2(k-1)\pi h-4(k-1)^2\pi^2\right|^{h\to 0}=$$

$$=\left|\frac{4}{h^2}\left[\left((k-1)\pi h\right)^2-\frac{1}{3}\left((k-1)\pi h\right)^4+O(h^6)\right]-4(k-1)^2\pi^2\right|^{h\to 0}=O(h^2).$$

Аналогично и для второго семейства

е) ***Указание.***

Получить условие существования нетривиального решения
$\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{N\varphi}{2}\cos\dfrac{(N-1)\varphi}{2}=0$.

Убедиться, что условие $\sin\dfrac{\varphi}{2}=0$ приводит к тривиальному решению, а два оставшихся дают

$$\lambda_k^{(h)}=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{2N},\ y_{kn}=C\sin\frac{(2k-1)n\pi}{N},$$

$$k=\overline{1,M},\ M=\begin{cases}\dfrac{N}{2} & \text{при } N \text{ чётном},\\ \dfrac{N-1}{2} & \text{при } N \text{ нечётном},\end{cases}\quad n=\overline{0,N},$$

$$\lambda_k^{(h)}=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{(N-1)},\ y_{kn}=C\cos\frac{(2k-1)(2n-1)\pi}{(N-1)},$$

$$k=\overline{1,M},\ M=\begin{cases}\dfrac{N-2}{2} & \text{при } N \text{ чётном},\\ \dfrac{N-1}{2} & \text{при } N \text{ нечётном},\end{cases}\quad n=\overline{0,N}.$$

5.3. Определить все $\lambda^{(h)}$, при которых разностная задача

$$\frac{y_{n-1}-2y_n+y_{n+1}}{h^2}=-\lambda y_n,\quad n=\overline{1,(N-1)},\ h=\frac{1}{N}$$

имеет нетривиальные решения при следующих граничных условиях:

а) $y_0=0,\ y_1-y_0=y_N-y_{N-1}$,

б) $y_0=y_{N-1},\ y_1=y_N$.

Определить эти решения (сеточные собственные функции).

Предварительно см. начальную общую часть решения задач 5.2.

а) В случае различных действительных корней характеристического уравнения $q_1 \neq q_2 \neq \pm 1$ СЛАУ для вычисления C_1, C_2 имеет вид

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ (1-q_1)\left(1-q_1^{N-1}\right)C_1 + (1-q_2)\left(1-q_2^{N-1}\right)C_2 = 0. \end{cases}$$

Для существования нетривиального решения необходимо:

$$(1-q_2)\left(1-q_2^{N-1}\right) - (1-q_1)\left(1-q_1^{N-1}\right) = 0 .$$

С учётом $q_1 q_2 = 1$ это условие принимает вид

$$(1-q_1)\left(1-q_1^{N-1}\right)\left(1-q_1^{N}\right) = 0$$

и выполняется при $q_1 = q_2 = \pm 1$, что противоречит исходному предположению: $q_1 \neq q_2 \neq \pm 1$.

При кратных действительных корнях $q_1 = q_2 = q = \pm 1$ в случае $q = 1$ из характеристического уравнения получаем $\lambda^{(h)} = 0$, а система для определения C_1, C_2 сводится к

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2\left(N(1)^N - (N-1)(1)^{N-1} - 1\right) = 0. \end{cases}$$

Её решение $C_1 = 0,\ C_2 = \mathrm{const}$ приводит к решению задачи

$$\lambda_1^{(h)} = 0,\ y_{1n} = Cn,\ n = \overline{0, N}$$

Для $q = -1$ получаем $\lambda^{(h)} = h^2/4$, но в этом случае решение будет тривиальным ($C_1 = 0,\ C_2 = 0$).

Рассматриваем случай комплексно-сопряжённого корня.

Для определения φ используем общее решение этого варианта $y_n = C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi$ и граничные условия. Получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2\left(\sin\varphi - \left(\sin N\varphi - \sin(N-1)\varphi\right)\right) = 0. \end{cases}$$

Поскольку $C_2 \neq 0$ (в противном случае опять будет тривиальное решение), то приравнивая нулю множитель в скобках, получаем условие нетривиального решения

$$\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{N\varphi}{2}\sin\frac{(N-1)\varphi}{2} = 0$$

Каждый сомножитель порождает своё семейство собственных значений и собственных функций решаемой задачи.

Первое семейство с нулевыми собственными значениями и тривиальными решениями $\lambda_k^{(h)} = 0,\ y_{k\,n} = 0$:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = (k-1)\pi,\ k = 1,2,... \Rightarrow \varphi = 2(k-1)\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_k^{(h)} = \frac{4}{h^2}\sin^2(k-1)\pi = 0,\ y_{k\,n} = C_2\sin 2(k-1)n\pi = 0.$$

Второе семейство:

$$\sin\frac{N\varphi}{2} = 0 \Rightarrow N\varphi = 2(k-1)\pi,\ \Rightarrow \varphi = 2(k-1)\pi / N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_k^{(h)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(k-1)\pi}{N},\ y_{k\,n} = C\sin\frac{2(k-1)n\pi}{N},$$

$$k = \overline{2,M},\ M = \begin{cases} N/2) & \text{при } N \text{ чётном,} \\ (N-1)/2 & \text{при } N \text{ нечётном,} \end{cases} n = \overline{0,N}.$$

Третье семейство:

$$\sin\frac{(N-1)\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{(N-1)\varphi}{2} = (k-1)\pi,\ \Rightarrow \varphi = 2(k-1)\pi / (N-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_k^{(h)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(k-1)\pi}{(N-1)},\ y_{k\,n} = C\sin\frac{2(k-1)n\pi}{(N-1)},$$

$$k = \overline{2,M},\ M = \begin{cases} (N-2)/2 & \text{при } N \text{ чётном,} \\ (N-1)/2 & \text{при } N \text{ нечётном,} \end{cases} n = \overline{0,N}.$$

В двух последних случаях при получении $y_{k\,n}$ было использовано решение СЛАУ для определения C_1, C_2: $C_1 = 0,\ \forall C_2$.

Общий результат: $\lambda_1^{(h)} = 0,\ y_n = Cn$ и два выписанные выше линейно независимые семейства $\lambda_k^{(h)}$ и y_{kn} (второе и третье).

б) Используя граничные условия задачи, получаем СЛАУ для вычисления C_1, C_2 в случае различных действительных корней характеристического уравнения:

$$\begin{cases} (1-q_1^{N-1})C_1 + (1-q_2^{N-1})C_2 = 0, \\ q_1(1-q_1^{N-1})C_1 + q_2(1-q_2^{N-1})C_2 = 0. \end{cases}$$

Для существования нетривиального решения необходимо:

$$(1-q_1^{N-1})(1-q_2^{N-1})(q_2 - q_1) = 0.$$

Каждое из решений $q_1=\pm1,\ q_2=\pm1,\ q_1=q_2$ противоречит исходным условиям этого варианта $q_1\neq q_2$, $q_1\neq\pm1,\ q_2\neq\pm1$.

Рассматриваем случай кратных действительных корней $q_1=q_2=q=\pm1$.

Для $q=1$ (при котором $\lambda=0$) получаем собственное значение и соответствующую ненулевую собственную функцию задачи

$$\lambda=0,\ y_n=C,\ C=\text{const}\neq0,\ n=\overline{0,N}.$$

Для $q=-1$ (при котором $\lambda^{(h)}=4/h^2$) имеем СЛАУ

$$\begin{cases}\left(1-(-1)^{N-1}\right)C_1-(N-1)(-1)^{N-1}C_2=0,\\ \left(1+(-1)^{N}\right)C_1+\left(1+N(-1)^{N}\right)C_2=0,\end{cases}$$

Нетривиальное решение существует только при условии

$1+(-1)^N=0$.

В результате при нечётных значениях N, имеем собственное значение и соответствующую собственную функцию задачи

$$\lambda^{(h)}=4/h^2,\ y_n=(-1)^nC,\ C=\text{const}\neq0,\ \ n=\overline{0,N},\ N-\text{нечётное.}$$

При чётных значениях N решение только тривиальное.

Рассматриваем случай комплексно-сопряжённого корня.

Для определения φ используем общее решение этого варианта $y_n=C_1\cos n\varphi+C_2\sin n\varphi$ и граничные условия. Получаем СЛАУ:

$$\begin{cases}C\left(1-\cos(N-1)\varphi\right)-C_2\sin(N-1)\varphi=0,\\ C_1(\cos\varphi-\cos N\varphi)+C_2(\sin\varphi-\sin N\varphi)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_1\sin^2\dfrac{(N-1)\varphi}{2}-C_2\sin\dfrac{(N-1)\varphi}{2}\cos\dfrac{(N-1)\varphi}{2}=0,\\ C_1\sin\dfrac{(N-1)\varphi}{2}\sin\dfrac{(N+1)\varphi}{2}-C_2\sin\dfrac{(N-1)\varphi}{2}\cos\dfrac{(N+1)\varphi}{2}=0.\end{cases}$$

Условие существования нетривиального решения этой СЛАУ:

$$\sin^2\frac{(N-1)\varphi}{2}\sin\varphi=0\Rightarrow\begin{cases}\sin\dfrac{(N-1)\varphi}{2}=0,\\ \sin\varphi=0.\end{cases}$$

Первое условие даёт

$$\frac{(N-1)\varphi}{2}=(k-1)\pi,\ k=\begin{cases}\overline{1,(N+1)/2},\ N-\text{нечётное,}\\ \overline{1,N/2},\ N-\text{чётное.}\end{cases}$$

Как результат

$$\varphi = \frac{2(k-1)\pi}{(N-1)},\ k = \begin{cases} \overline{1,(N+1)/2},\ N - \text{нечётное}, \\ \overline{1,N/2},\ N - \text{чётное}. \end{cases}$$

Второе условие $(\sin\varphi = 0)$ даёт

$$\varphi = (k-1)\pi,\ k = 1,2,3,\ \ldots,$$

что порождает два уже ранее полученных собственных значения и соответствующих собственных функций задачи

$$\lambda^{(h)} = 0,\ y_n = C,\ n = \overline{0,N},\ C = \text{const};$$

$$\lambda^{(h)} = 4/h^2,\ y_n = C(-1)^n,\ n = \overline{0,N},\ N - \text{нечётное},\ C = \text{const}.$$

Объединение всех случаев даёт общий результат:

$$\lambda_k^{(h)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(k-1)\pi}{(N-1)},\ y_{kn} = C_1\cos\frac{2(k-1)n\pi}{(N-1)} + C_2\sin\frac{2(k-1)n\pi}{(N-1)},$$

$$k = \overline{1,(N+1)/2},\ N - \text{нечётное};\ k = \overline{1,N/2},\ N - \text{чётное}.\quad n = \overline{0,N}.$$

Отметим, что при нечётном N имеем два однократных собственных значения задачи с соответствующими собственными функциями

$$\lambda_1^{(h)} = 0,\ y_1 = \text{const};\quad \lambda_{(N+1)/2}^{(h)} = 4/h^2,\ y_{(N+1)/2} = C(-1)^n,$$

а оставшиеся $k = \overline{2,(N-1)/2}$ порождают двукратные.

При чётном N нулевое собственное значение однократно

$$\lambda_1^{(h)} = 0,\ y_1 = \text{const},$$

а оставшиеся $k = \overline{2,N/2}$ порождают двукратные.

Поэтому возможна и единая (при любом N) запись результата:

$$\lambda_k^{(h)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{(k-1)\pi}{(N-1)},\ y_{kn} = C_1\cos\frac{2(k-1)n\pi}{(N-1)} + C_2\sin\frac{2(k-1)n\pi}{(N-1)},$$

$$k = \overline{1,(N-1)},\quad n = \overline{0,N}.$$

При $k > (N-1)$ получаем циклическое повторение решений.

5.4. Определить все $\lambda^{(h)}$, при которых разностная задача

$$\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} = -\lambda y_n,\ \ n = \overline{1,(N-1)},\ h = \frac{1}{N},\ y_0 = y_N,\ y_1 - y_0 = -(y_N - y_{N-1})$$

имеет нетривиальные решения.

Определить эти решения $y_n^{(h)}$ (сеточные собственные функции).

Предварительно см. начальную общую часть решения задач 5.2.

В случае различных действительных корней характеристического уравнения $q_1 \neq q_2 \neq \pm 1$, при которых $\lambda^{(h)} \neq 0,\ 4/h^2$, СЛАУ для вычисления C_1, C_2 с учётом $y_n^{(h)} = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$ имеет вид

$$\begin{cases} \left(1-q_1^N\right)C_1 + \left(1-q_2^N\right)C_2 = 0, \\ \left[\left(1-q_1\right)\left(1+q_1^{N-1}\right)\right]C_1 + \left[\left(1-q_2\right)\left(1+q_2^{N-1}\right)\right]C_2 = 0. \end{cases}$$

Для существования нетривиального решения необходимо:

$$\left(1-q_2\right)\left(1+q_2^{N-1}\right)\left(1-q_1^N\right) - \left(1-q_1\right)\left(1+q_1^{N-1}\right)\left(1-q_2^N\right) = 0,$$

что с учётом $q_1 q_2 = 1$ всегда выполняется при $q_1 \forall,\ q_2 \forall$.

Используя характеристическое уравнение, получаем

$$\lambda^{(h)} = -(q_1-1)^2/(q_1 h^2),\ q_1 = 1 + h\sqrt{-\lambda + \lambda^2 h^2/2} - \lambda h^2/2 > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_n^{(h)} = C\left[(q_1^n - q_1^{-n}) + (q_1^{N-n} - q_1^{-(N-n)}\right],\ \forall \lambda \neq 0,\ 4/h^2.,$$

В случае кратных корней $y_n^{(h)} = C_1 q^n + C_2 n q^n,\ q_1 = q_2 = q \pm 1$ получаем $\lambda^{(h)} = 0,\ y_n^{(h)} = \text{const}$ (при $q = 1$) и $\lambda^{(h)} = 4/h^2$ и $y_n^{(h)} = 0$ (при $q = -1$).

При комплексно-сопряжённом корне с использованием общего решения $y_n^{(h)} = C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi$ и граничных условий получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} C_1 \sin^2 \dfrac{N\varphi}{2} - C_2 \sin\dfrac{N\varphi}{2}\cos\dfrac{N\varphi}{2} = 0, \\ C_1 \sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{(N-1)\varphi}{2}\sin\dfrac{N\varphi}{2} - C_2 \sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{(N-1)\varphi}{2}\cos\dfrac{N\varphi}{2} = 0. \end{cases}.$$

Необходимое условие существования нетривиального решения $D = 0$ (детерминант системы равен нулю) всегда выполняется при $\forall \varphi$.

С учётом $C_2 = C_1 \sin\dfrac{N\varphi}{2} / \cos\dfrac{N\varphi}{2}$ получаем

$$\lambda^{(h)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha\pi}{2},\ 0 < \alpha < 1,\ y_n^{(h)} = C\cos\frac{(N-2n)\alpha\pi}{2}.$$

Результирующее решение задачи:

$$y_n^{(h)}=\begin{cases} C\left[(q_1^n-q_1^{-n})+(q_1^{N-n}-q_1^{-(N-n)}\right], & \lambda^{(h)}>4/h^2,\ -1<q_1<0,\\ 0,\ \text{тривиальное решение}, & \lambda^{(h)}=4/h^2,\\ C\cos\dfrac{(N-2n)\alpha\pi}{2}, & \lambda^{(h)}=\dfrac{4}{h^2}\sin^2\dfrac{\alpha\pi}{2}>0,\ 0<\alpha<1,\\ \text{const}, & \lambda^{(h)}=0,\\ C\left[(q_1^n-q_1^{-n})+(q_1^{N-n}-q_1^{-(N-n)}\right], & \lambda^{(h)}<0,\ q_1>1,\\ q_1=1+h\sqrt{-\lambda+\lambda^2h^2/2}-\lambda h^2/2. \end{cases}$$

При $h\to 0$ две первые ветви решения исчезают из-за смещения границы их существования в положительную бесконечность, а оставшиеся сходятся к решению соответствующей дифференциальной задачи

$$y(x)=\begin{cases} C\cos\sqrt{\lambda}\left(1/2-x\right), & \lambda>0,\\ \text{const}, & \lambda=0,\\ C\,\mathrm{ch}\sqrt{-\lambda}\left(1/2-x\right), & \lambda<0. \end{cases}$$

5.5. Определить все $\lambda^{(h)}$, при которых разностная задача имеет нетривиальные решения.

$$(y_{n+1}-y_{n-1})/2h=-\lambda y_n,\ y_0=0,\ y_N=0,\ n=\overline{1,(N-1)},\ h=1/N\ .$$

Решение разностного уравнения $y_{n+1}+2\lambda h y_n-y_{n-1}=0$ ищем в виде $y_n=q^n$. Получаем характеристическое уравнение

$$q^2+2\lambda hq-1=0\,.$$

Его корни $q_{1,2}=-\lambda h\pm\sqrt{1+h^2\lambda^2}$. Поэтому $y_n=C_1q_1^n+C_2q_2^n$.

Используя граничные условия, получаем СЛАУ для C_1, C_2

$$\begin{cases} C_1+C_2=0,\\ C_1q_1^N+C_2q_2^N=0, \end{cases}$$

ненулевое решение которой существует только при $q_1^N=q_2^N$.

Поэтому $q/q_2=1^{1/N}=\exp\left(i2\pi k/N\right),\ k=\overline{1,(N-1)}$.

Поскольку из характеристического уравнения $q_1q_2=-1$, то

$$q_1=i\exp\left(i\pi k/N\right),\ q_2=i\exp\left(-i\pi k/N\right) \text{ и}$$

$$q_1+q_2=i\left[\exp\left(i\pi k/N\right)+\exp\left(-i\pi k/N\right)\right]=2i\cos\left(\pi k/N\right).$$

С другой стороны, из характеристического уравнения

$$q_1+q_2=-2\lambda h\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\lambda_k^{(h)}h=2i\cos\frac{k\pi}{N}\Rightarrow \lambda_k^{(h)}=-\frac{i}{h}\cos\frac{k\pi}{N},\ k=\overline{1,(N-1)}\ .$$

6. Краевая задача. Нелинейные уравнения

6.1. На сетке $D_h = \left\{ x_n = nh,\ n = \overline{0,2},\ h = 1/2 \right\}$ краевую задачу

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - x\sqrt{y} = 0,\ 1 < x < 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = 2$$

решить методом стрельбы с точностью $\Delta = \left| y(1) - y_2 \right| \le 0.1$.

Аппроксимируем уравнение во внутреннем узле $n = 1\,(x_1 = 1/2)$:

$$\left(y_0 - 2y_1 + y_2 \right) / h^2 - \sqrt{y_1} / 2 = 0 .$$

С учётом левого граничного условия $y_0 = 0$ придаём ему вид

$$y_2 = 2y_1 + h^3 \sqrt{y_1}$$

и вместо исходной краевой задачи решаем задачу Коши, дополнив это уравнение уравнением для наклона решения на левой границе:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \lambda_k .$$

Параметр $\lambda_k,\ k = 1, 2, ...$ будем подбирать методом последовательных приближений до удовлетворения требуемой точности опущенного правого граничного условия. В разностном виде это дополнительное уравнение запишем в виде:

$$\left(y_1 - y_0 \right) / h = \lambda_k .$$

Опять таки, с учётом $y_0 = 0$ имеем систему:

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_k, \\ y_2 = 2y_1 + h^3 \sqrt{y_1}, \end{cases}$$

которую решаем подбором $\lambda_k,\ k = 1, 2, ...$ до удовлетворения условия

$$\Delta_k = \left| 2 - y_2 \right| \le 0.1 .$$

Возможный метод подбора λ_k:

1) Исходное значение λ_1 оцениваем по граничным условиям: $\lambda_1 = \left(y(1) - y(0) \right) / 2h = (2 - 0) / 2h = 2$.

Получаем

$$y_1 = 2,\ y_2 = 2.125 \to \Delta_1 = \left| 2 - 2.125 \right| = 0.125 > 0.1 \quad \text{(“перелёт”).}$$

2) Уменьшаем наклон решения в начальном левом узле:

$$\lambda_2 = 1{,}5 \to y_1 = 1.5,\ y_2 = 1.608,\ \Delta_2 = \left| 2 - 1.606 \right| = 0.392 > 0.1 .$$

Но уже “недолёт” и таким образом получили “вилку” ошибок решения.

3) В этом случае при разных знаках двух предыдущих ошибок Δ_1 и Δ_2 (“вилка”) следующее значение λ_3 (как и последующих “выстрелах” при аналогичных ситуациях) можно оценивать, например, по линейной интерполяции $\lambda_3 = (\Delta_2\lambda_1 - \Delta_1\lambda_2)/(\Delta_2 - \Delta_1) = 1.878$ Тогда

$$y_1 = 1/878,\ y_2 = 2.102 \to \Delta_3 = |2 - 2.102| = 0.102 .$$

С учётом точности производимых вычислений получили требуемый результат $y_n = (0,\ 1.878,\ 2.102)$

6.2. Краевую задачу $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{y^4}{8} = 0,\ y(0) = 1,\ y(2) = 3,\ 0 < x < 2$

на сетке $D_h = \left\{x_n : x_n = nh, n = \overline{0, N}, N = 2, h = 1\right\}$

решить методом квазилинеаризации. Выполнить две итерации.

Аппроксимируем уравнение в единственном внутреннем узле сетки $x_1 = h$ с квазилинеаризацией по итерациям нелинейного члена

$$f(y) = \frac{y^4}{8}: \quad f(y^{(k+1)}) = f(y^{(k)}) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(y^{(k)}\right)\left(y^{(k+1)} - y^{(k)}\right)$$

$$\frac{y_0^{(k+1)} - 2y_1^{(k+1)} + y_2^{(k+1)}}{h^2} - \frac{\left(y_1^{(k)}\right)^4}{8} - \frac{4\left(y_1^{(k)}\right)^3}{8}\left(y_1^{(k+1)} - y_1^{(k)}\right) = 0,$$

$k = 0, 1, 2, \ldots -$ номер итерации.

Получаем разрешённое уравнение относительно $y_1^{(k+1)}$:

$$\left(\frac{2}{h^2} + \frac{\left(y_1^{(k)}\right)^3}{2}\right)y_1^{(k+1)} = \frac{y_0 + y_2}{h^2} - \frac{\left(y_1^{(k)}\right)^4}{8} + \frac{4\left(y_1^{(k)}\right)^3}{8}y_1^{(k)}$$

Используя граничные условия $y_0 = 1,\ y_2 = 3$, значение $h = 1$ и взяв начальное приближение $y_1^{(0)}$, например, линейным относительно y_0, y_2

$$y_1^{(0)} = 0.5\left(y_0 + y_2\right) = 2 ,$$

получаем результат первой $\left(k = 0\right)$ итерации $y_1^{(1)} = 5/3 \approx 1.66$.

Используя $y_1^{(1)}$, реализуем вторую итерацию $\left(k = 1\right)$: $y_1^{(2)} \approx 1.59$.

Замечание 1. При $N \ge 3$ (при $(N-1)$ внутреннем узле) на каждой итерации должна будет решаться СЛАУ $(N-1)$ порядка (при $N \ge 4$ с трёхдиагональной матрицей).