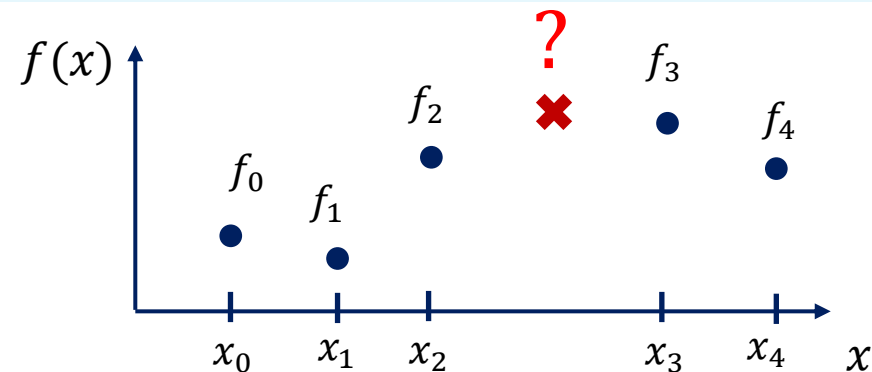


Интерполяция функций

К.ф.-м.н. Завьялова Наталья Александровна
natalia.zavyalova@gmail.com

Задача интерполяции



Интерполяция – это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

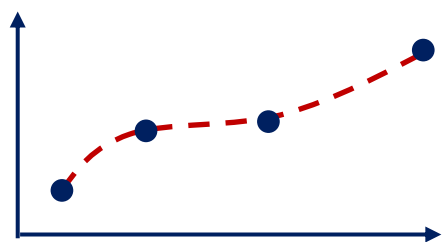
x_i – узлы интерполяции

Алгебраическая
интерполяция

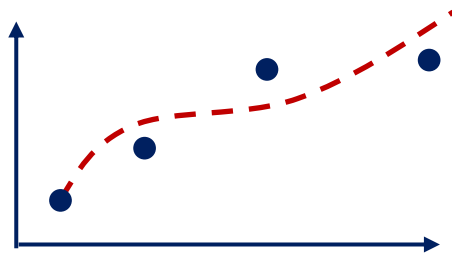


Основное условие интерполяции: равенство функции и интерполяционного полинома в узлах интерполяции

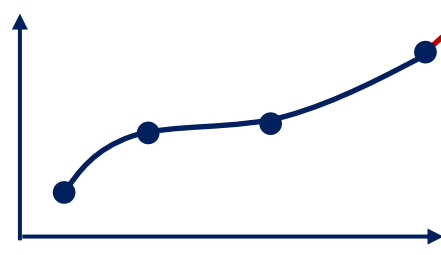
$$P_N(x_i) \equiv f_i$$



Интерполяция

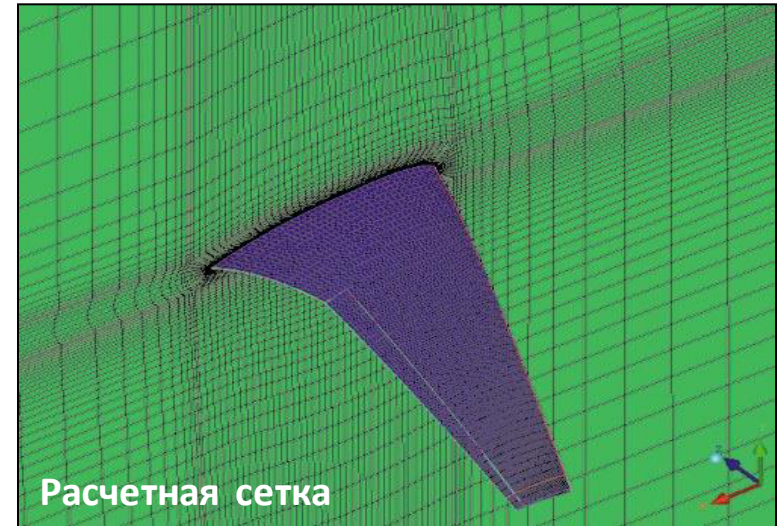
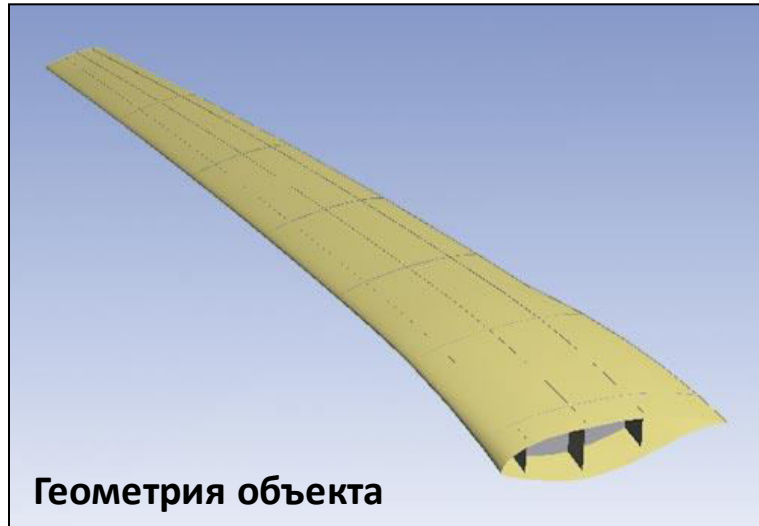


Аппроксимация



Экстраполяция

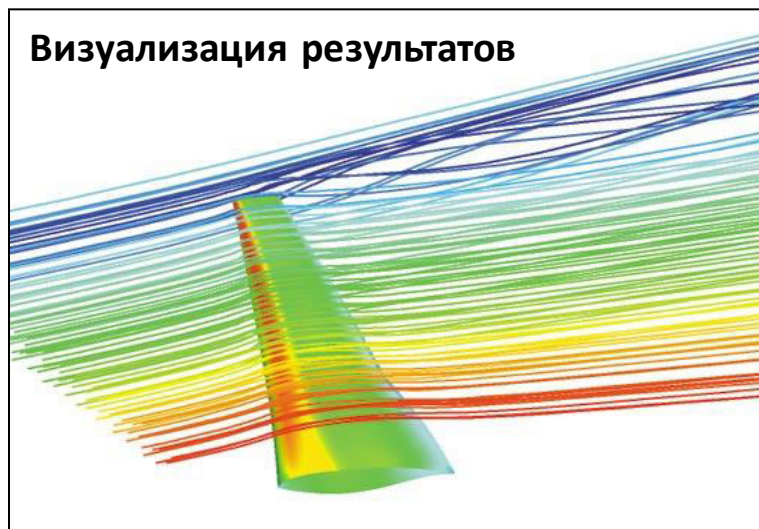
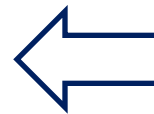
Пример из области автоматизации проектирования



Математическая модель течения



Численная реализация



Методы построения интерполяционного полинома

Интерполяция алгебраическими полиномами

Сеточная функция

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\dots	x_N
$f(x)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	\dots	f_N

Строим интерполянт в виде полинома: $P_N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N$

НЕИЗВЕСТНЫ

Требуем выполнения основного условия интерполяции $P_N(x_i) = f_i$ и находим a_i из решения СЛАУ:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_Nx_0^N = f_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_Nx_1^N = f_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_N + \dots + a_Nx_N^N = f_N \end{cases}$$

Определитель матрицы – детерминант Вандермонда. В случае различия всех узлов сетки он отличен от нуля, и, значит, существует единственное решение системы – набор коэффициентов.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq N} (x_i - x_j) = 0$$



Существует пара (x_i, x_j) : $x_i = x_j$, $i \neq j$

Утверждение Если заданы $N + 1$ узлов x_0, \dots, x_N среди которых нет совпадающих, и значения функции в этих узлах $f(x_0), \dots, f(x_N)$, то существует один и только один многочлен степени не выше N , принимающий в узлах x_i заданные значения $f(x_i)$.

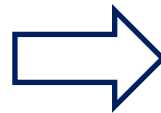
Метод Лагранжа

Строим интерполяционный полином в виде: $L_N(x) = \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) f_k$

Из основного условия интерполяции получаем $L_N(x_i) = f_i \quad \forall i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^N \varphi_k(x_i) f_k = f_i$

Соответственно $\varphi_k(x_i) = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases} \quad i = 0, \dots, N$

Каждая из функций $\varphi_k(x)$ имеет не менее N нулей на $[a, b]$.



Ищем $\varphi_k(x)$ в виде полинома степени N

$$\varphi_k(x) = \alpha_k (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_N)$$

Из условия $\varphi_k(x_k) = 1$ находим α_k

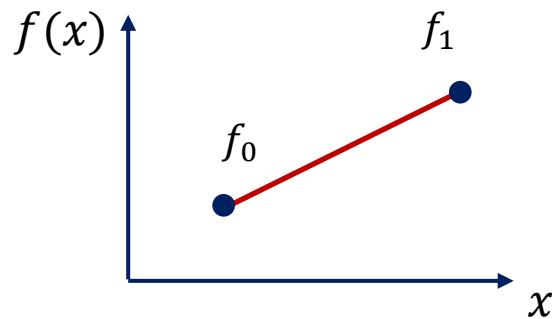
$$\alpha_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_N)}$$

$$\varphi_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^N \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Примеры построенных методом Лагранжа полиномов

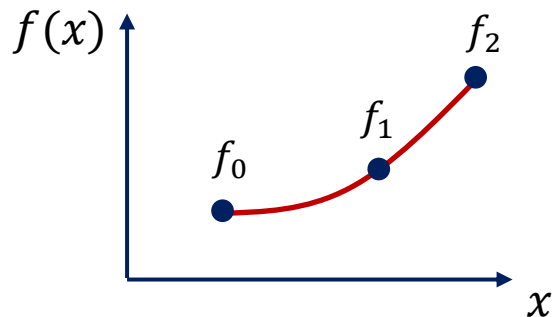
$$L_N(x) = \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) f_k \quad \varphi_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^N \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Линейная интерполяция:



$$L_1(x) = \sum_{k=0}^1 \varphi_k(x) f_k = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Квадратичная интерполяция:



$$L_2(x) = \sum_{k=0}^2 \varphi_k(x) f_k = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} +$$
$$+ f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Метод Ньютона

Интерполяционный полином в форме Ньютона – разностный аналог формулы Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2 f''(x_0)}{2!} + \dots$$

Разделенная разность первого порядка

$$f_{ij} = f(x_i, x_j) = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j}, \quad i, j = 0, \dots, N \quad i \neq j$$

Разделенная разность второго порядка

$$f_{j \ j+1 \ j+2} = f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}) = \frac{f_{j \ j+1} - f_{j+1 \ j+2}}{x_j - x_{j+2}} = \frac{\frac{f_j - f_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} + \frac{f_{j+1} - f_{j+2}}{x_{j+1} - x_{j+2}}}{x_j - x_{j+2}}$$

Разделенная разность k -го порядка

$$f_{j \ j+1 \ j+2 \ \dots \ j+k} = f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) = \frac{f_{j+1 \ \dots \ j+k} - f_{j \ \dots \ j+k-1}}{x_{j+k} - x_j}$$

Интерполяционный полином в форме Ньютона

$$P_N = f_0 + (x - x_0)f_{01} + (x - x_0)(x - x_1)f_{012} + \dots (x - x_0) \dots (x - x_{N-1})f_{012 \dots N}$$

Метод Ньютона

Разделенная разность k -го порядка

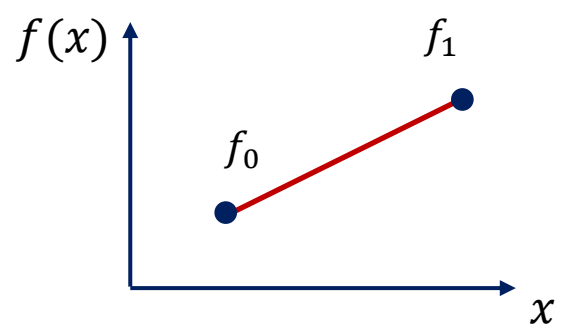
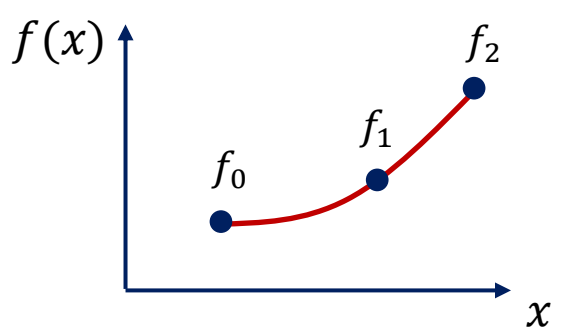
$$f_{j \ j+1 \ j+2 \ \dots j+k} = f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) = \frac{f_{j+1 \dots j+k} - f_{j \dots j+k-1}}{x_{j+k} - x_j}$$

x_0	f_0				
		f_{01}			
x_1	f_1		f_{012}		
		f_{12}	.		
x_2	f_2	$f_{0 \dots N}$
.	.	.	.		
.	.	.	$f_{N-2 \ N-1 \ N}$		
.	.	$f_{N-1 \ N}$			
x_N	f_N				

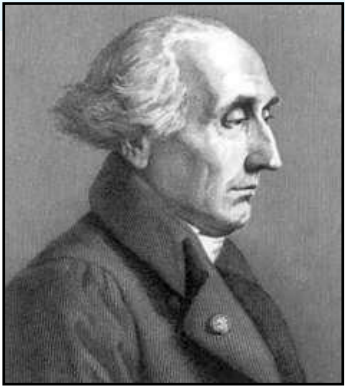
Интерполяционный полином в форме Ньютона

$$P_N = f_0 + (x - x_0)f_{01} + (x - x_0)(x - x_1)f_{012} + \dots (x - x_0) \dots (x - x_{N-1})f_{012 \dots N}$$

Примеры построенных методом Ньютона полиномов

Линейная интерполяция	Квадратичная интерполяция
	
Лагранж	
$L_1(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$	$L_2(x) = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$
НЬЮТОН	
$P_1(x) = f_0 + (f_1 - f_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$	$P_2(x) = f_0 + (f_1 - f_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} +$ <div style="border: 2px solid red; border-radius: 50%; padding: 10px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> $+ (x - x_0)(x - x_1) \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$ </div> <p style="color: red; margin-top: 10px;">Добавка к $P_1(x)$ →</p>

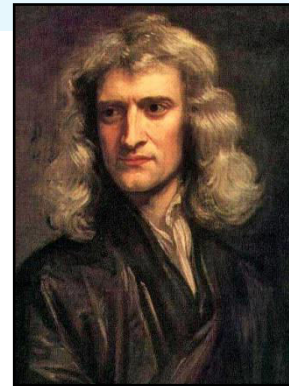
Лагранж vs Ньютон



Используют при
доказательствах
теорем

Удобно применять, когда узлы интерполяции фиксированы и интерполируется не одна, а несколько функций.

$$\begin{aligned} L_1(x) &= f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \\ &= x \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} - \frac{f_0 x_1 - f_1 x_0}{x_0 - x_1} \end{aligned}$$



Рекомендуется
использовать при
программной реализации

Удобно применять, когда интерполируется одна и та же функция, но число узлов интерполяции постепенно увеличивается.

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f_0 + (f_1 - f_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \\ &= x \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + \frac{f_0 x_1 - f_1 x_0}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

$L_N(x)$ и $P_N(x)$ – различные формы записи одного и того же многочлена

Погрешность интерполяции

Погрешность интерполяции

Опр: Разница между функцией и интерполяционным полиномом N -ой степени в точке x называется остаточным членом интерполяции: $R_N(x) = f(x) - L_N(x)$

Утверждение Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $u(x)$ $(N+1)$ раз непрерывно дифференцируема. Тогда:

$$R_N(x) = \frac{u^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{j=0}^N (x - x_j), \quad \xi \in [a, b]$$

Доказательство. Если $x = x_j$, то утверждение верно. Иначе введем в рассмотрение функцию:

$$g(t) = f(t) - L_N(t) - [f(x) - L_N(x)] \prod_{j=0}^N \frac{(t - x_j)}{(x - x_j)}$$

Функция $g(t)$, имеет $N+2$ нуля на $[a, b]$:

$$g(x_i) = f(x_i) - L_N(x_i) - [f(x) - L_N(x)] \prod_{j=0}^N \frac{(x_i - x_j)}{(x - x_j)} = 0, \quad i = 0, \dots, N$$

$$g(x) = f(x) - L_N(x) - [f(x) - L_N(x)] \prod_{j=0}^N \frac{(x - x_j)}{(x - x_j)} = 0.$$

По обобщенной теореме Ролля: $\exists \xi \in [a, b]: g^{(N+1)}(\xi) = 0$

$$g^{(N+1)}(\xi) = f^{(N+1)}(\xi) - 0 - [f(x) - L_N(x)] \frac{(N+1)!}{\prod_{j=0}^N (x - x_j)} = 0$$

$$f(x) - L_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{j=0}^N (x - x_j) \quad \Rightarrow \quad \max |f(x) - L_N(x)| = \frac{\max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|}{(N+1)!} \left| \prod_{j=0}^N (x - x_j) \right|$$

Погрешность интерполяции на равномерной сетке

Утверждение Для случая равномерной сетки на отрезке $[a, b]$

$$\{x_i\}_{i=0}^N, \quad x_i = a + ih, \quad h = (b - a)/N$$

для любого x на отрезке $[a, b]$

$$|f(x) - L_N(x)| \leq \frac{h^{N+1}}{N+1} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|.$$

Доказательство. Положим $x = x_k + \alpha h, \quad \alpha \in (0, 1), \quad k = 0, \dots, N-1$

Тогда $x - x_j = kh + \alpha h - jh = h(k + \alpha - j)$

$$\prod_{j=0}^N (x - x_j) = h^{N+1} \prod_{j=0}^N (k + \alpha - j) \leq h^{N+1} N!$$

$$|f(x) - L_N(x)| = \frac{\max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|}{(N+1)!} \left| \prod_{j=0}^N (x - x_j) \right| \Rightarrow |f(x) - L_N(x)| \leq \frac{h^{N+1}}{N+1} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|,$$

j	0	...	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$...	N
$ k + \alpha - j $	$k + \alpha$...	$2 + \alpha$	$2 + \alpha$	α	$1 - \alpha$	$2 - \alpha$...	$N - k - \alpha$
Маж. мн. в $N!$	$k+1$...	3	2	1	1	$2 + k$...	N

Погрешность в задаче экстраполяции

Экстраполяция – аппроксимация функции **вне** отрезка, на котором заданы узлы интерполяции.

$$x \in [b, b + h]: \quad |R_N(x)| \leq h^{N+1} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|$$

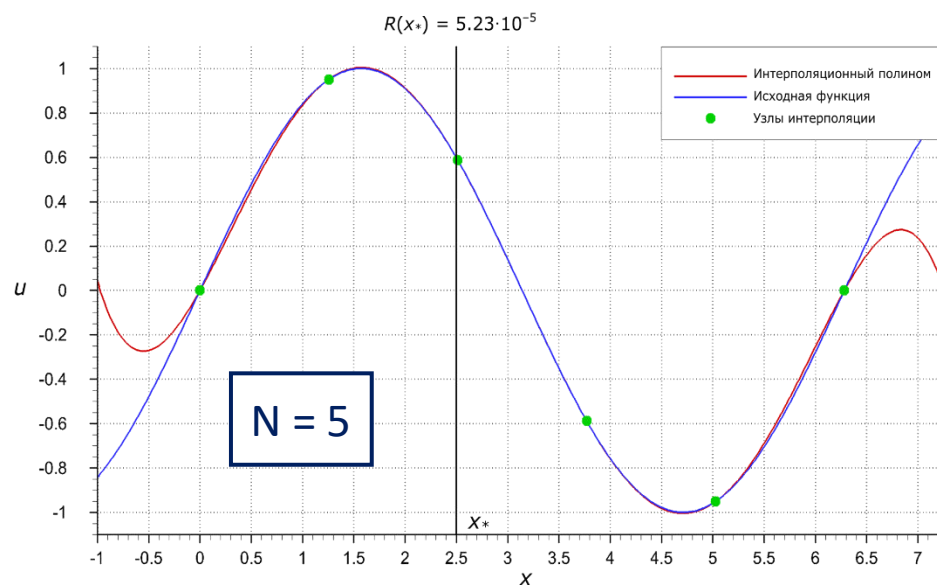
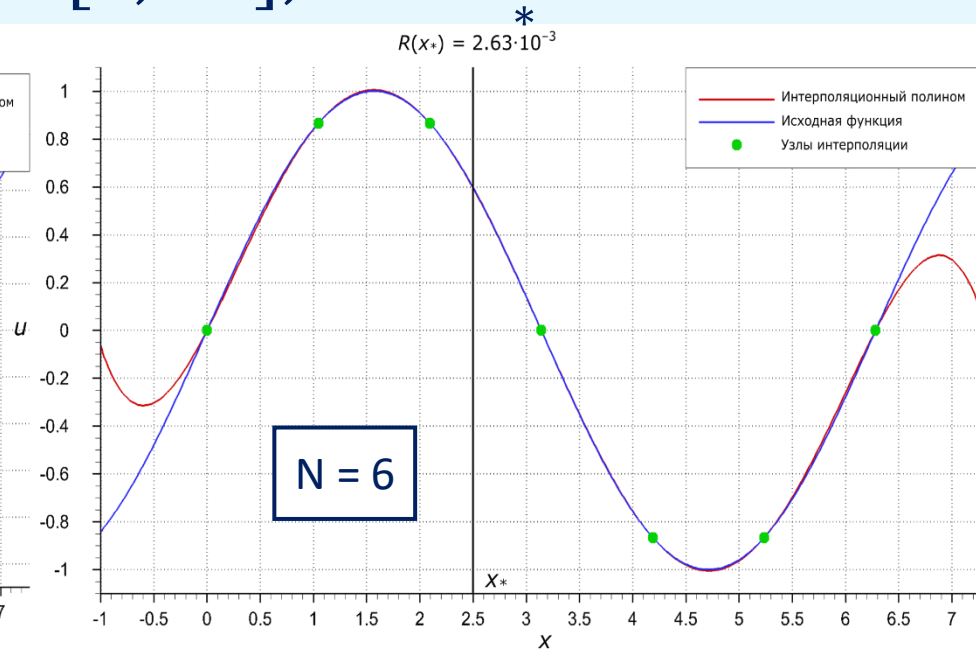
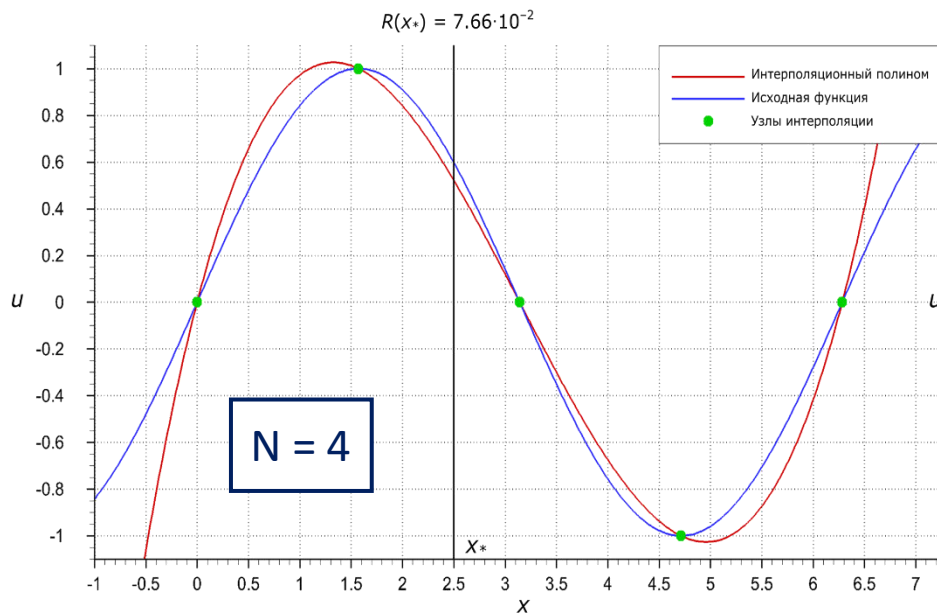
$$x \in [b + h, b + 2h]: \quad |R_N(x)| \leq (N + 2)h^{N+1} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|$$

$$x \in [b + 2h, b + 3h]: \quad |R_N(x)| \leq \frac{(N + 2)(N + 3)}{2} h^{N+1} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|$$

Оценка ухудшается как за счет появления множителей, пропорциональных N , так и за счет увеличения оценки производной.

Экстраполяция функции менее надежна, чем интерполяция, и ее точность резко падает по мере удаления от носителя информации.

$$u(x) = \sin x, \quad x \in [0, 2\pi], \quad x^* = 2.5$$



$$P_4(x) = 1.7x^4 - 8.1 \cdot 10^{-1}x^3 + 8.6 \cdot 10^{-2}x^2 + 4.2 \cdot 10^{-9}x$$

$$P_5(x) = -6.0 \cdot 10^{-3}x^5 + 9.4 \cdot 10^{-2}x^4 - 4.3 \cdot 10^{-1}x^3 + 3.4 \cdot 10^{-1}x^2 + 8.3 \cdot 10^{-1}x$$

$$P_6(x) = -1.6 \cdot 10^{-10}x^6 - 5.7 \cdot 10^{-3}x^5 + 9.0 \cdot 10^{-2}x^4 - 4.1 \cdot 10^{-1}x^3 + 3.0 \cdot 10^{-1}x^2 + 8.7 \cdot 10^{-1}x$$

Увеличение числа узлов интерполяции

Сетка на $[a, b]$: $\Omega_N = \{x_i\}_{i=0}^N: a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N \leq b\}$

Рассмотрим последовательность сеток с возрастающим числом узлов:

$$\Omega_0 = \{x_0^{(0)}\}, \Omega_1 = \{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\}, \dots, \Omega_N = \{x_0^{(N)}, x_1^{(N)}, \dots, x_N^{(N)}\}, \dots$$

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$. Построим последовательность интерполяционных многочленов для функции $f(x)$ по ее значениям в узлах сетки Ω_N : $L_N[f(x)]$.

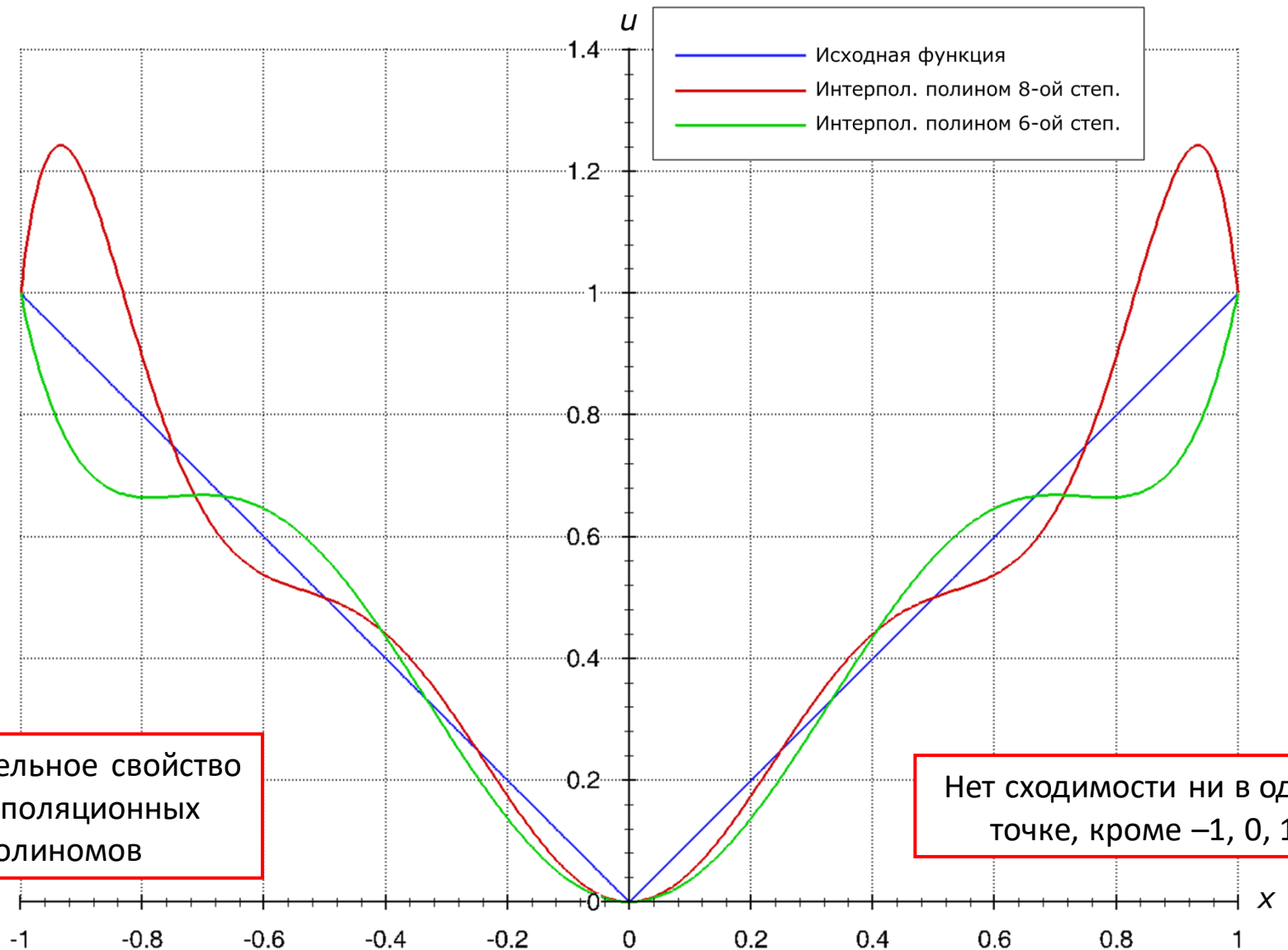
Поточечная сходимость в точке $x^* \in [a, b]$:

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} L_N[f(x^*)] = \lim_{x_i \rightarrow x^*} f(x^*) + L'_N(x_i - x^*) + O(x_i - x^*)^2 = f(x^*)$$

Равномерная сходимость на $[a, b]$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \max_{x \in [a, b]} |f(x) - L_N[f(x)]| \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{j=0}^N (x - x_j) \right| \right\} = 0$$

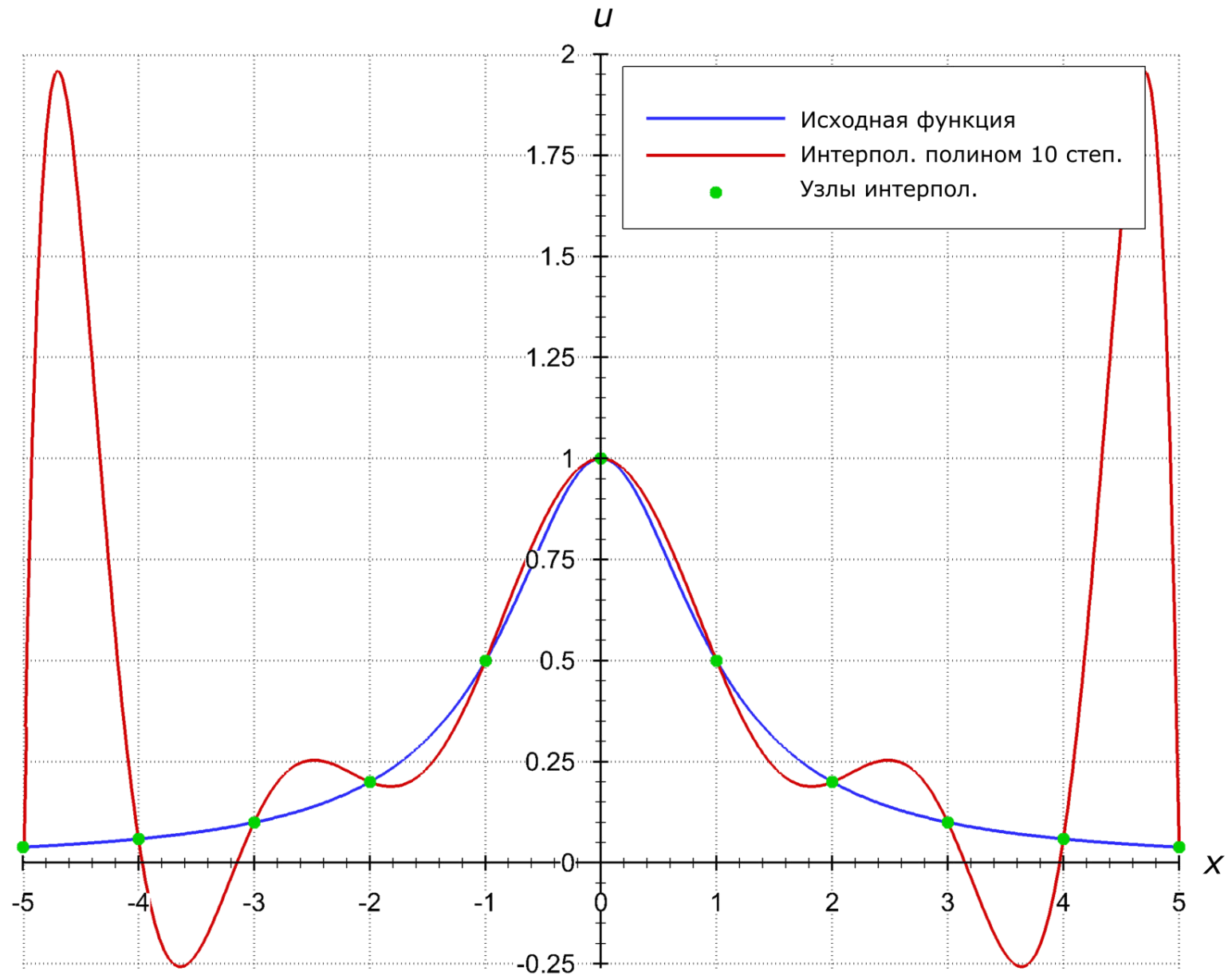
Пример С.Н. Берштейна $u(x) = |x|$, равномерная сетка



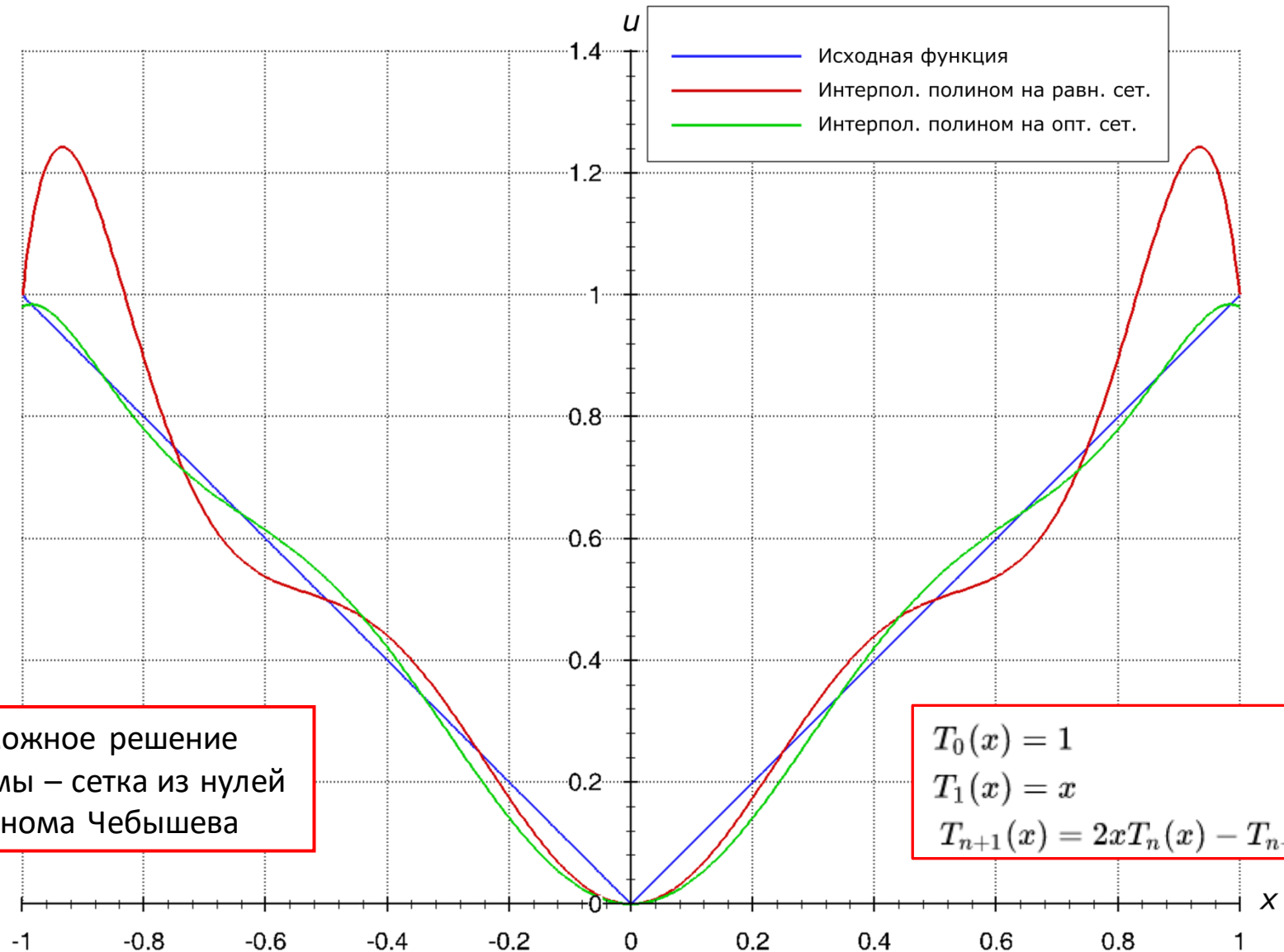
Колебательное свойство
интерполяционных
полиномов

Нет сходимости ни в одной
точке, кроме $-1, 0, 1$.

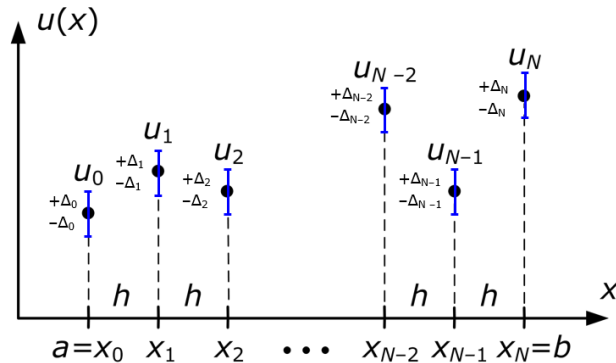
Пример Рунге, $u(x) = 1/(1 + x^2)$, равномерная сетка



$U(x) = |x|$, равномерная сетка vs оптимальная сетка



Влияние неустранимой погрешности



$$\Delta = \max_i \Delta_i$$

$L_N(x)$ - Интерполяционный полином, построенный по **точным** значениям функции

$\tilde{L}_N(x)$ - Интерполяционный полином, построенный по **возмущенным** значениям функции

$$|\tilde{R}_N(x)| = |u(x) - \tilde{L}_N(x)| = |u(x) - L_N(x) + L_N(x) + \tilde{L}_N(x)| \leq |u(x) - L_N(x)| + |L_N(x) - \tilde{L}_N(x)| \leq$$

$$\leq |R_N(x)| + \Delta_p$$

Знаем как оценить

Необходимо оценить

$$\Delta_p = |L_N(x) - \tilde{L}_N(x)| = \left| \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) u_k - \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) \tilde{u}_k \right|$$

$$\varphi_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^N \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$\Delta_p = \left| \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) (u_k - \tilde{u}_k) \right| \leq \sum_{k=0}^N \Delta_k |\varphi_k(x)| \leq L \Delta$$

$$L = \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^N |\varphi_k(x)|$$

Константа Лебега

Пример. Константа Лебега для случая линейной интерполяции

$$\tilde{L}_1(x) = \sum_{k=0}^1 \varphi_k(x) \tilde{u}_k = \tilde{u}_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \tilde{u}_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad x_0 = a, x_1 = b$$

$$L = \max_{x \in [a, b]} \left(\left| \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right| + \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| \right) = \max_{x \in [a, b]} \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) = 1$$

Недостатки глобальной интерполяции

Глобальная интерполяция многочленом высокой степени ($N > 10 \div 20$) нежелательная, поскольку:

- При вычислении многочлена высокой степени могут накапливаться ошибки округления (например как при суммировании ряда Тейлора);
- Интерполяционный многочлен может плохо приближать исходную функцию (примеры Берштейна и Рунге на равномерной сетке);
- Задача интерполяции может быть плохо обусловлена (интерполяционный многочлен чувствителен к возмущениям значений в узлах сетки);

Частично указанные проблемы можно решить введением Чебышевской сетки, но не всегда такое возможно.

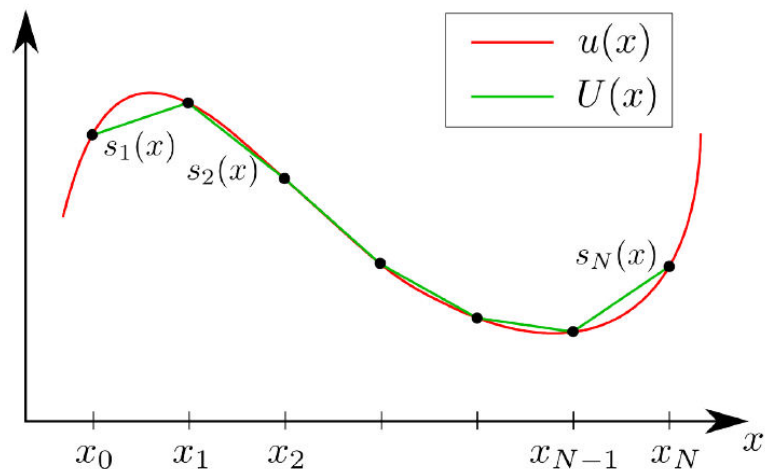
Задача интерполяции: По данному набору значения $u(x)$ на сетке $\{x_i\}_{i=0}^N$ восстановить функцию $U(x)$, Совпадающую с $u(x_i)$ в узлах x_i .

- Ранее функцию $U(x)$ мы искали в виде полинома от x
- Рассмотрим теперь вариант, когда на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция является некоторым многочленом $s_i(x)$, причем для каждого отрезка эта функция своя.
- В такой постановке задача имеет множество решений. Единственность решения можно обеспечить потребовав от функции $U(x)$ некоторой гладкости в местах стыков функций $s_i(x)$, то есть в узлах интерполяции

Интерполяция сплайнами

Примеры сплайнов

Кусочно-линейная интерполяция

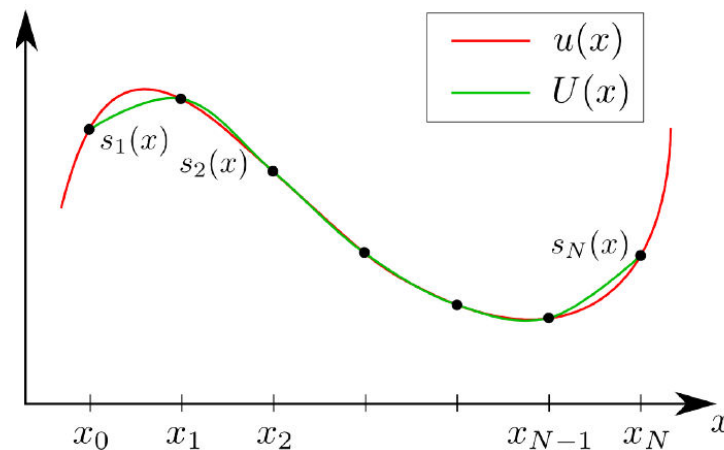


$$U(x) = s_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s_i(x) = u_{i-1} \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + u_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

На каждом отрезке функция приближается линейной. Дополнительные условия не требуется, условия гладкости на $U(x)$ в данном случае не налагаются.

Гладкая кусочно-кубическая интерполяция



$$U(x) = s_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_i)$$

$$s''_i(x_i) = s''_{i+1}(x_i)$$

На каждом отрезке функция приближается кубическим многочленом. Дополнительно требуется непрерывность первой и второй производных $U(x)$ на всем отрезке $[x_0, x_N]$.

Построение сплайна

Характеристики сплайна

- Степенью сплайна называется максимальная из степеней многочленов $s_i(x)$.
- **Гладкостью** сплайна называется количество непрерывных производных, которые $U(x)$ имеет на всем отрезке $[x_0, x_N]$.
- **Дефектом** сплайна называется разность между степенью и гладкостью сплайна.

Например, кусочно-линейный сплайн имеет степень 1, гладкость 0 и дефект 1.

Гладкий кусочно-кубический сплайн имеет степень 3, гладкость 2 и дефект 1.

Построение сплайна

Найдем выражения для функций $s_i(x)$, составляющих гладкий кубический сплайн.

Поскольку сплайн имеет степень 3, все функции $s_i(x)$ являются многочленами степени 3. Запишем их в виде:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

Такая форма записи соответствует ряду Тейлора для $s_i(x)$ в окрестности точки x_i . Поскольку $s_i(x)$ – кубический многочлен, его ряд Тейлора обрывается после кубического слагаемого. Из аналогии с рядом Тейлора заключаем, что

$$a_i = s_i(x_i) \quad b_i = s_i'(x_i) \quad c_i = s_i''(x_i) \quad d_i = s_i'''(x_i)$$

Хотя в этом можно убедиться и обычной подстановкой.