Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Краевая задача

К.ф.-м.н. Завьялова Наталья Александровна

natalia.zavyalova@gmail.com

Метод построения общего решения

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)y + \mathbf{f}(t) \qquad\qquad t \in [0, T]$$

Краевые (граничные) условия

$$\mathbf{B}y(0) + \mathbf{C}\mathbf{y}(T) = \varphi$$

Решение может быть записано в виде фундаментальной системы решений

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{y}_k(t) + \boldsymbol{\psi}(t)$$

Должны удовлетворять граничным условиям

Подставляем в граничные условия

$$\sum \alpha_k\, \mathbf{B}\mathbf{y}_k(0) + \mathbf{B}\boldsymbol{\psi}(0) + \sum \alpha_k\, \mathbf{C}\mathbf{y}_k(T) + \mathbf{C}\boldsymbol{\psi}(T) = \varphi$$

Получается СЛАУ относительно α_k

Осталось найти y_k

Построим систему решений

Для нахождения решения задачи:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)y + \mathbf{f}(t) \qquad t \in [0, T]$$

Краевые (граничные) условия

$$\mathbf{B}y(0) + \mathbf{Cy}(T) = \varphi$$

Введем расчетную сетку $\{t_m\colon\ t_m = m\tau, \tau = \frac{T}{M},\ m = 0 \dots M\}$

Будем искать множество решений $\{\mathbf{y}_k^m\}$, однородной задачи такое что

$$\dot{\mathbf{y}}_k = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}_k$$
$$\mathbf{y}_k^o = e_l$$

$$e_l = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

На l-й позиции

Для решения N задач Коши можно воспользоваться любым численным методом Решения ОДУ

Можно выписать сеточное приближение к решению

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \{\mathbf{y}_k^m\} + \{\mathbf{y}_0^m\}$$

Частное решение неоднородного

Решения задач Коши независимы

Для нахождения β_k используется граничные условия

Пример

$$\dot{x} = 100y$$

$$\dot{y} = 100x$$

Аналитическое решение этой системы находится в виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \mathbf{e}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{e}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Найдем собственные значения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 100 \\ 100 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 100^2 \qquad \lambda_{12} = \pm 100$$

Линейно независимые решения задач Коши будут комбинацией растущей и убывающей экспонент. На левой границе отрезка $[0, T]$ всё хорошо, они линейно независимы.

На правой границе отрезка затухающая экспонента обнулится с точностью до машинного эпсилона и 2 решения станут линейно зависимы.

Это приведет к вырождению матрицы для поиска коэффициентов β_k.

Но такая краевая задача решается!

Просто метод построения общего решения не всегда работает.

Метод прогонки

Рассмотрим краевую задачу, содержащую дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = f(x)$$

$$y(0) = \varphi$$
$$y(T) = \psi$$

Одномерные уравнения диффузии или теплопроводности

Одномерные стационарные задачи

Введем расчетную сетку $\{t\}_{n=1}^{N}$ и запишем дискретизацию

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + g_n \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + h_n y^n = f_n$$

$$y^0 = \varphi \qquad\qquad y^N = \psi$$

Перегруппируем слагаемые

$$y^{n+1}\underbrace{\boxed{(1 + g_n\tau)}}_{a_n} + y^n\underbrace{\boxed{(-2 - g_n\tau + \tau^2 h_n)}}_{b_n} + y^{n-1}\underbrace{\boxed{\cdot\, 1}}_{c_n} = \underbrace{\boxed{\tau^2 f_n}}_{d_n}$$

Получаем систему с трехдиагональной матрицей

$$y^0 = \varphi$$
$$y^{n+1}a_n + y^n b_n + y^{n-1}c_n = \tau^2 f_n \qquad n = 1 \ldots N-1$$
$$y^N = \psi$$

Метод прогонки (алгоритм Томаса)

$$\mathbf{AX} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} y^0 \\ \dots \\ y^N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_0 & c_0 & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & a_{N-1} & b_{N-1} & a_{N-1} \\ & & & & a_N & b_N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} d^0 \\ \dots \\ d^N \end{pmatrix}$$

Прогоночное уравнение

$$y_i = p_{i+1} y_{i+1} + q_{i+1}$$

Для первого уравнения

$$y_0 b_0 + y_1 c_0 = d_0$$

$$y_0 = -\frac{c_0}{b_0} y_1 + \frac{d_0}{b_0}$$

$$y_0 = p_1 y_1 + q_1$$

Для i-го уравнения

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i$$

$$y_{i-1} = p_i y_i + q_i$$

$$a_i (p_i y_i + q_i) + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i$$

$$(a_i p_i + b_i) y_i = -c_i y_{i+1} + d_i - a_i q_i$$

Метод прогонки (алгоритм Томаса)

$$y_i = \boxed{\frac{-c_i}{a_i p_i + b_i}} y_{i+1} + \boxed{\frac{d_i - a_i q_i}{a_i p_i + b_i}}$$

$$y_i = \boxed{p_{i+1}} y_{i+1} + \boxed{q_{i+1}}$$

Последнее уравнение

$$y_{N-1} = p_N y_N + q_N$$

$$a_N y_{N-1} + b_N y_N = d_N$$

$$\Rightarrow \quad y_N = \frac{d_N - a_N q_N}{a_N p_N + b_N}$$

Прямой ход метода прогонки: вычисляем для *i = 0,…,N* p_i, q_i, а также y_N

Обратный ход метода прогонки: вычисляем y_i, *i = N-1,…,0*

$$y_i = p_{i+1} y_{i+1} + q_{i+1}$$

Достаточное условие устойчивости**:** выполнение нестрогого диагонального преобладания, во всех строках матрицы А и хотя бы для одной строки диагональное преобладание строгое. Кроме того, $0 < p_1 < 1$.

Метод прогонки (алгоритм Томаса)

$$\mathbf{AX} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} y^0 \\ \dots \\ y^N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & a_{N-1} & b_{N-1} & a_{N-1} \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} d^0 \\ \dots \\ d^N \end{pmatrix}$$

Необходимое условие устойчивости

$$\forall i \;\; |b_i| \geq |a_i| + |c_i|$$

$$\exists j \;\; |b_j| > |a_j| + |c_j|$$ - выполняется на границах

$$\Downarrow$$

$$|-2 - g_n\tau + \tau^2 h_n| \geq |1 + g_n\tau| + 1$$

Считаем, что τ - мало

$$\Downarrow$$

$$2 + g_n\tau - \tau^2 h_n \geq 2 + g_n\tau \;\Rightarrow\; \boxed{h_n \leq 0}$$ - Условие устойчивости

Повышение порядка точности

Рассмотрим, следующую краевую задачу

$$y'' = f(t)$$
$$y(0) = \varphi$$
$$y(T) = \psi$$

Исследуем на аппроксимацию разностное уравнение

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} = f^n \qquad y^{n\pm1} = \cancel{y^n} \cancel{\pm \tau y'} + \frac{\tau^2}{2} y'' \cancel{\pm \frac{\tau^3}{6}} y''' + \frac{\tau^4}{24} y^{IV} + O(\tau^5)$$

$$r^n = \frac{\tau^2}{12} y^{IV} + O(\tau^4)$$

Значит нужно скорректировать разностное уравнение на главный член невязки

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} - \frac{\tau^2}{12} y^{IV} = f^n$$

$$y'' = f(t)$$
$$y''' = f'(t)$$
$$y^{IV} = f''(t)$$

Нужно перевести производную в конечные разности

Тогда

$$\boxed{\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} - \frac{\tau^2}{12} \frac{f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}}{\tau^2} = f^n}$$

Схема 4-го порядка точности на 3-х точках

Аппроксимация Нумерова

Метод дифференциальной прогонки

Рассмотрим систему из двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)y + f(t)$$

$$\dot{y} = c(t)x + d(t)y + g(t)$$

Считаем, для определенности, что заданы граничные условия 1-го рода

$$x(0) = \varphi \quad y(T) = \psi$$

Пусть неизвестные в уравнении связаны **прогоночным соотношением**

$$x(t) = p(t)y(t) + q(t)$$

Оно должно выполняться для всех точек отрезка в том числе и для $t = 0$

Тогда $p(0) = 0, \qquad q(0) = \varphi$

Продифференцируем прогоночное соотношение

$$x' = p'y + py' + q'$$

Исключаем y' $\qquad x' = p'y + p(cx + dy + g) + q'$

Исключаем x' $\qquad ax + by + f = p'y + p(cx + dy + g) + q'$

Исключаем x $\qquad a(py + q) + by + f = p'y + p(c(py + q) + dy + g) + q'$

Метод дифференциальной прогонки

$$a(py+q)+by+f=p'y+p(c(py+q)+dy+g)\ +q'$$

Это уравнение должно выполняться $\forall y$

Соответственно, коэффициент при y должен быть равен 0

$$y(ap+b-p'-p^2c-pd)+aq+f-pcq-pg-q'=0$$

$$\Downarrow$$

$ap+b-p'-p^2c-pd=0$ Сперва интегрируется уравнение для *p*

$aq+f-pcq-pg-q'=0$ Потом интегрируется линейное уравнение для *q*

Получаем, что на правой границе коэффициенты *p* и *q* известны

Однако, с правой границы не всегда получается перенести решение. Как в прошлом примере могут быть и растущие и убывающие экспоненты и при интегрировании справа налево решение снова будет неустойчивым.
Если y соответствует убывающая экспонента, то в обратном ходе она будет сильно возрастать.
В этом случае интегрируем x, а y определяем на каждом шаге из прогоночного соотношения.

Т.е. нужно решить 3 задачи Коши: для p, q и y

Решение нелинейных задач

Метод стрельбы (метод пристрелки)

Рассмотрим уравнение, разрешенное относительно второй производной

$$y'' + f(t, y, y') = 0$$

$$y(0) = \varphi \quad y(T) = \psi$$

Сведение к задаче Коши

$$y' = v$$
$$v' = -f(t, y, v)$$

$$y(0) = \varphi$$
$$v(0) = \alpha_0$$

Решаем с помощью какого-либо метода Р-К
и находим значение y на правой части:

$$y_M(\alpha_0) - \psi = r_0$$

невязка

Будем искать решение методом Ньютона (методом последовательных приближений)

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \left(\frac{\partial y_M(\alpha)}{\partial \alpha}\right)^{-1} r_0$$

Вопрос в том, как посчитать $\frac{\partial y_M(\alpha)}{\partial \alpha}$

Метод стрельбы (метод пристрелки)

Представляем, что $y = y(t, \alpha)$

Дифференцируем исходное уравнение по α

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y'' + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0$$

Это дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

Вычисляются на каждом шаге

$$p = \frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

$$p'' + \frac{\partial f}{\partial y} p' + \frac{\partial f}{\partial y} p = 0$$

$$p(0) = 0 \qquad p'(0) = 1$$

Получаются дифференцированием граничных условий

Т.е. решаются 2 задачки Коши, находится следующее приближение к решению и решение задач запускается снова.

Метод квазилианеризации

$$y'' = f(t, y, y')$$

$$y(0) = \varphi_0 \quad y(T) = \varphi_1$$

Выберем произвольную функцию y^0

Тогда $\quad y_0(0) = \varphi_0 \quad y_0(T) = \varphi_1$

Подставляем в уравнение $\quad y_0'' - f(t, y_0, y_0') = r(y_0)$

Следующее приближение к решению ищем в виде $\quad y_{n+1} = y_n + \delta y_n$

Подставляем в таком виде в уравнение

$$y_0'' + \delta y_0'' = f\left(t, y_0 + \delta y_0\ , y_0' + \delta y_0'\right) \approx$$

$$\approx f\left(t, y_0', y_0\ \right) + \frac{\partial f}{\partial y'}(t, y_0, y_0')\delta y_0' + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_0, y_0')\delta y_0$$

Для δy_0 получаем другую, линейную, краевую задачу

Метод квазилианеризации

Краевая задача для уравнения в вариациях

$$\delta y_0'' - \frac{\partial f}{\partial y'} f(t, y_0, y_0')\delta y_0' - \frac{\partial f}{\partial y} f(t, y_0, y_0')\delta y_0 = f\left(t, y_0', y_0\right) - y_0''$$

$$\delta y_0(0) = \delta y_0(T) = 0$$

может быть решена любым методом

После того, как найдено δy_0, находим следующее приближение к решению

$$y_1 = y_0 + \delta y_0$$

Переходим на следующий шаг

$$y_2 = y_1 + \delta y_1$$

Известно неизвестно

Далее, решаем линейную краевую задачу для следующего приращения

Граничные условия 3-го рода

Рассмотрим задачу, где функция правой части не зависит от производной

$$y'' = f(t, y)$$

Пусть заданы граничные условия 3-го рода

$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = \varphi_1$$
$$\alpha_2 y(T) + \beta_2 y'(T) = \varphi_2$$

Поменяем последовательность действий. Сначала делаем дискретизацию, потом решаем нелинейную систему уравнений.

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} = f(t_n, y_n)$$

$$\alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y_1 - y_0}{\tau} = \varphi_1$$
$$\alpha_1 y_N + \beta_1 \frac{y_N - y_{N-1}}{\tau} = \varphi_2$$

Далее решение системы нелинейных алгебраических уравнений методом Ньютона

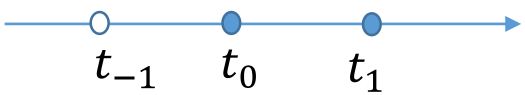
У разностного уравнения порядок аппроксимации второй, а у граничных условий – первый. Следовательно итоговый порядок аппроксимации будет **первым.**

Аппроксимация граничных условий

Рассмотрим граничное условие на левой границе, на правой аналогично

$$\alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y^1 - y^0}{\tau} = \varphi_1$$

1. Использование фиктивных узлов (самый популярный метод)



Аппроксимируем граничное условие формулой второго порядка точности

$$\alpha_1 y^0 + \beta_1 \frac{y^1 - y^{-1}}{2\tau} = \varphi_1$$

Для выражения значения y_{-1} используем само разностное уравнение для этих узлов

$$\frac{y^1 - 2y^0 + y^{-1}}{\tau^2} = f(t_0, y^0) \quad \Rightarrow \quad y^{-1} = \tau^2 f(t_0, y^0) - y^1 + 2y^0$$

Тогда граничное условие

$$\alpha_1 y^0 + \beta_1 \frac{2y^1 - 2y^0 - \tau^2 f(t_0, y^0)}{2\tau} = \varphi_1$$

Аппроксимация граничных условий

Рассмотрим граничное условие на левой границе, на правой аналогично

$$\alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y^1 - y^0}{\tau} = \varphi_1$$

2. Коррекция на главный член погрешности

$$y^1 = y^0 + \tau y' + \frac{\tau^2}{2} y'' \pm \frac{\tau^3}{6} y''' + \frac{\tau^4}{24} y^{IV} + O(\tau^5)$$

$$r^0 = \beta_1 \frac{\tau}{2} y'' + O(\tau^2)$$

Вычитаем это граничное условие

$$\alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y^1 - y^0}{\tau} - \beta_1 \frac{\tau}{2} y'' = \varphi_1$$

$$y'' = f(t, y)$$

$$\alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y^1 - y^0}{\tau} - \beta_1 \frac{\tau}{2} f = \varphi_1$$ Условие второго порядка

Спасибо за внимание!