Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Краевые задачи

К.ф.-м.н. Завьялова Наталья Александровна

natalia.zavyalova@gmail.com

Задача Штурма-Лиувилля

Общая постановка

$$\frac{d}{dt}\left(k(t)\frac{dy}{dt}\right) + c(t)y = \lambda y$$ - Самосопряженная постановка

$$y(0) = 0 \qquad y(T) = 0$$

Нужно найти такие λ при которых задача имеет нетривиальные решения

Тогда

λ – собственные значения, совокупность собств. значений - спектр

y – собственные функции

Метод стрельбы

$$\frac{d}{dt}\left(k(t)\frac{dy}{dt}\right) + c(t)y = \lambda y$$

$$y(0) = 0 \qquad\qquad y(T) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

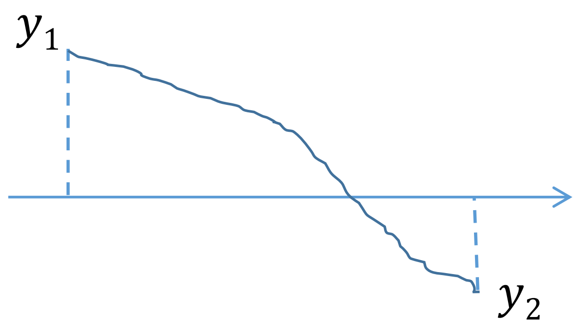
1. Берем произвольное λ

2. Решаем задачу Коши, находим y

3. Сравниваем со значением на конце отрезка $\Delta y_1 = y(T) - y^*(T)$

4. Выбираем другое λ, находим $\Delta y_2 = y(T) - y^*(T)$

5. Далее двигаемся методом деления отрезка пополам



Метод дополненного вектора

Запишем дискретизацию дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(k(t)\frac{dy}{dt}\right) + c(t)y = \lambda y$$

$$y(0) = 0 \qquad\qquad y(T) = 0$$

$$\frac{1}{\tau}\left(k_{n+\frac{1}{2}}\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} - k_{n-\frac{1}{2}}\frac{y^n - y^{n-1}}{\tau}\right) + c_n y^n = \lambda y^n$$

$N + 1$

$$y^0 = 0$$

$$y^N = 0$$

Вектор неизвестных $\quad Y = (y^0, y^1, y^2 \dots y^N, \lambda)^T \quad$ $N + 2$

Получается **нелинейная** система, нужно использовать, например, метод Ньютона

$$Y^{s+1} = Y^s - \left[\frac{\partial F(Y^s)}{\partial Y}\right]^{-1} F(Y^s)$$

Для доопределения системы вводим, условие нормировки

$$y_i^{S+1} = y_i^S$$

Пример

Решить спектральную задачу и найти соответствующие собственные функции для аналогичной разностной задачи.

$$y''(x)-p(x)y(x)=\lambda\rho(x)y(x)$$

$$y(0)=0 \qquad y(X)=0$$

$$p(x)=0$$

$$\rho(x)=1$$

$$\begin{cases} y''(x)=\lambda y(x), \\ y(0)=0, \\ y(X)=0; \end{cases}$$

Введем сетку $h=XN^{-1}$

N — число узлов сетки. Представим разностную задачу для решения краевой задачи в виде ,

$$\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}-p_n y_n=\lambda\rho_n y_n \qquad n=1,\dots,N-1$$

$$y_0=0 \qquad y_N=0$$

Пример

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = \lambda y_n, \ n = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = 0, \\ y_N = 0. \end{cases}$$

Некраевые уравнения имеют вид

$$y_{n+1} - \left(2 + \lambda h^2\right) y_n + y_{n-1} = 0$$

Найдем решение этой разностной задачи $y_n \to c\mu^n$

Характеристическое уравнение

$$\mu^2 - \left(2 + \lambda h^2\right)\mu + 1 = 0$$

Решением разностной зачади будет μ_1 и μ_2 Отсюда

$$y_n = c_1\mu_1^n + c_2\mu_2^n$$

Из характеристического уравнения на основании теоремы Виета следует, что $\mu_1 = \dfrac{1}{\mu_2}$

Отсюда решение разностной задачи $y_n = c_1\mu^n + c_2\mu^{-n}$

Пример

На основании краевых условий получаем

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1\mu^N + c_2\mu^{-N} = 0, \end{cases} \qquad \text{откуда} \quad c_1 = -c_2 = c$$

Следует подчеркнуть, что осуществляется поиск нетривиальных собственных значений и собственных функций. Решение системы имеет нетривиальное решение в том случае, когда детерминант матрица

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu^N & \mu^{-N} \end{pmatrix} = 0 \qquad \mu^{-N} - \mu^N = 0$$

Из курса теории функций комплексных переменных решением уравнения

$$\mu^{2N} = 1 \qquad \text{является} \qquad \mu_m = e^{\frac{2\pi im}{2N}} = e^{\frac{\pi im}{N}} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Возвращаемся к характеристическому уравнению для поиска собственных чисел

$$\lambda_m = \frac{\mu_m - \mu_m^{-1} - 1}{h^2} = \frac{e^{\frac{\pi im}{N}} - e^{-\frac{\pi im}{N}} - 1}{h^2} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right) - 2}{h^2} = -\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi m}{2N}\right)$$

Найдем соответствующие собственные функции

$$y_n^m = c\left(e^{\frac{\pi imn}{N}} - e^{-\frac{\pi imn}{N}}\right) = C\sin\left(\frac{\pi mn}{N}\right)$$

Системы уравнений

Проблема решения системы дифференциальных уравнений

Пусть есть система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) + f$$

Линеаризуем задачу

Пусть $\mathbf{U}^*$ - точное решение, тогда $\quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^* + \delta\mathbf{U}$

$$\frac{\partial(\mathbf{U}^* + \delta\mathbf{U})}{\partial t} \approx \mathbf{F}(\mathbf{U}^*) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}\delta\mathbf{U} + f$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{U}^*) + f$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial(\delta\mathbf{U})}{\partial t} \approx \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}\delta\mathbf{U}$$

Линейное уравнение для приращения

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_N} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial u_N} \end{pmatrix}$$

Проблема решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial(\delta\mathbf{U})}{\partial t} \approx \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{U}}\delta\mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \delta\mathbf{U} = \sum_i C_i \mathbf{e}_i e^{\lambda_i t}$$

Функция устойчивости

$$R(z) = R(\lambda_i \tau)$$

Область устойчивости

$$|R(z)| = |R(\lambda_i \tau)| \leq 1$$

$$\Downarrow$$

Большие собственные значения ограничивают шаги интегрирования всей системы уравнений

Преобразование системы

$$\frac{d\mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{AU}$$

$\mathbf{U}$ – вектор неизвестных 1 x N
$\mathbf{A}$ – квадратная матрица N x N

Спектральное разложение

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}_{л}^{-1}\Lambda\mathbf{\Omega}_{л}}$$

$$\mathbf{\Omega}_{л} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 &= (x_{11} \quad x_{12} \quad \cdots \quad x_{1n}) \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= (x_{21} \quad x_{22} \quad \cdots \quad x_{2n}) \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\omega}_n &= (x_{n1} \quad x_{n2} \quad \cdots \quad x_{nn}) \end{aligned}$$

квадратная матрица N x N
с собственными **векторами-строками**

Приведение к системе инвариантов Римана

Нахождение собственных векторов-строк

$$\boldsymbol{\omega}_i \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}_i \lambda$$

собственное значение

ЗАМЕТИМ (!): $(\boldsymbol{\omega}_i \mathbf{A})^{\boldsymbol{T}} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}_i^T = \boldsymbol{\omega}_i^T \lambda \quad \lambda_{A^T} = \lambda_A$

собственные **векторы-столбцы**

$$\boxed{\mathbf{A} = {\boldsymbol{\Omega}_{\text{п}}^T}^{-1} \Lambda \boldsymbol{\Omega}_{\text{п}}^T}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{п}}^T = \boldsymbol{\Omega}_{\text{л}} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

квадратная матрица N x N
с собственными **векторами-столбцами,**
которая транспонируется

Решение систем гиперболических уравнений

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9$$

ЛЕВЫЕ собственные векторы-строки

$$\lambda_1 = 3 \qquad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad \omega_{1л} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Omega}_л = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{\Omega}_л^T$$

$$\lambda_2 = -3 \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \omega_{2л} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Omega}_л^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{\Omega}_л}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_л^{-1}\mathbf{\Omega}_л = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_л^{-1}\Lambda\mathbf{\Omega}_л = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -12 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение систем гиперболических уравнений

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9$$

ПРАВЫЕ собственные векторы-СТОЛБЦЫ

$$\lambda_1 = 3 \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \omega_{1п} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Omega_п = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Omega_п^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \omega_{2п} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Omega_п^{\ -1} = \frac{1}{\det\Omega_п}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\omega_{1л} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_{2л} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_п^{T^{-1}} \Lambda \Omega_п^T = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -12 & 3 \end{pmatrix}$$

Вид методов Рунге-Кутты для систем

Пусть дана задача: $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{U})$ $\mathbf{U}(0) = \varphi$ Пусть $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f(t,x,y) \\ g(t,x,y) \end{pmatrix}$

Решить методом Рунге-Кутты

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}
$$

Тогда

$$x^{n+1} = x^n + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\tau}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$k_1 = f(t_n, x^n, y^n)$$

$$m_1 = g(t_n, x^n, y^n)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, x^n + \frac{\tau}{2}k_1, y^n + \frac{\tau}{2}m_1)$$

$$m_2 = g(t_n + \frac{\tau}{2}, x^n + \frac{\tau}{2}k_1, y^n + \frac{\tau}{2}m_1)$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, x^n + \frac{\tau}{2}k_2, y^n + \frac{\tau}{2}m_2)$$

$$m_3 = g(t_n + \frac{\tau}{2}, x^n + \frac{\tau}{2}k_2, y^n + \frac{\tau}{2}m_2)$$

$$k_4 = f(t_n + \tau, x^n + \tau k_3, y^n + \tau m_3)$$

$$m_4 = g(t_n + \tau, x^n + \tau k_3, y^n + \tau m_3)$$

Метод квазилинеаризации

Метод Ньютона

Пусть постановка краевой задачи для системы ОДУ следующая

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\vec{x},t\right) \qquad 0 \le t \le T$$
$$\vec{\Phi}\left(\vec{x}\left(0\right),\vec{x}\left(T\right)\right)=0$$

Пусть имеется некоторое начальное приближение $\vec{x}^{0}\left(t\right)$

Тогда введем второе приближение, отличающее от первого на небольшую величину $\delta\vec{x}^{0}\left(t\right)$

пусть, $\vec{x}^{1}\left(t\right)=\vec{x}^{0}\left(t\right)+\delta\vec{x}^{0}\left(t\right)$

Величину $\delta\vec{x}^{0}\left(t\right)$ найдем, подставляя в систему второе приближение,

$$\dot{\vec{x}}^{0}\left(t\right)+\delta\dot{\vec{x}}^{0}\left(t\right)=\vec{f}\left(\vec{x}^{0}\left(t\right)+\delta\vec{x}^{0}\left(t\right),t\right)$$

В силу малости приращения $\delta\vec{x}^{0}\left(t\right)$

$$\dot{\vec{x}}^{0}\left(t\right)+\delta\dot{\vec{x}}^{0}\left(t\right)=\vec{f}\left(\vec{x}^{0}\left(t\right),t\right)+f_{x}\left(\vec{x}^{0}\left(t\right),t\right)\delta\vec{x}^{0}\left(t\right)$$

Получаем линейную неоднородную систему ОДУ

$$\delta\dot{\vec{x}}^{0}\left(t\right)=f_{x}'\left(\vec{x}^{0}\left(t\right),t\right)\delta\vec{x}^{0}\left(t\right)+\vec{f}\left(\vec{x}^{0}\left(t\right),t\right)-\dot{\vec{x}}^{0}\left(t\right)=g\left(t\right)\delta\vec{x}^{0}\left(t\right)+d\left(t\right)$$

Метод Ньютона

Для краевого условия

$$\Phi\left(\vec{x}^0(0)+\delta\vec{x}^0(0),\vec{x}^0(T)+\delta\vec{x}^0(T)\right)=0$$

Выполняем линеаризацию

$$\Phi\left(\vec{x}^0(0),\vec{x}^0(T)\right)+\Phi'_{x(0)}\left(\vec{x}^0(0),\vec{x}^0(T)\right)\delta\vec{x}^0(0)+\Phi'_{x(T)}\left(\vec{x}^0(0),\vec{x}^0(T)\right)\delta\vec{x}^0(T)=0$$

В силу выполнения краевого условия для начального приближения

$$\Phi'_{x(0)}\left(\vec{x}^0(0),\vec{x}^0(T)\right)\delta\vec{x}^0(0)+\Phi'_{x(T)}\left(\vec{x}^0(0),\vec{x}^0(T)\right)\delta\vec{x}^0(T)=0$$

или

$$A\delta\vec{x}^0(0)+B\delta\vec{x}^0(T)=0$$

Таким образом, получаем линейную краевую задачу для $\delta\vec{x}^0(t)$

$$\delta\dot{\vec{x}}^0(t)=g(t)\delta\vec{x}^0(t)+d(t),$$
$$A\delta\vec{x}^0(0)+B\delta\vec{x}^0(T)=0,$$

решая которую получаем оценку точности для нового приближения

$$\vec{x}^2(t)=\vec{x}^1(t)+\delta\vec{x}^1(t)$$

Пример

Используя метод Ньютона, найти следующее приближение для решения краевой задачи

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\sqrt{2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1}-12e^{y-x}-2=0$$

$$y(0)=0 \qquad y(1)=1$$

Подобрать начальное приближение.

Пусть $y^0(x)$ — начальное приближение $y^1(x)$ -следующее приближение, тогда приращение тогда для приращения $v(x)$

$$y^1(x)=y^0(x)+v(x)$$

Причем $\quad |v(x)| \ll 1 \qquad |v'(x)| \ll 1$

Тогда в силу справедливости (с точки зрения порядка точности по малому параметру $v(x)$) краевой задачи для приближения $y^1(x)$ получаем

$$\frac{d^2y^0(x)}{dx^2}+\frac{d^2v(x)}{dx^2}+2\sqrt{2\left(\frac{dy^0(x)}{dx}+\frac{dv(x)}{dx}\right)^2-1}-12e^{y^0(x)+v(x)-x}-2=0$$

В силу малости приращения $v(x)$ осуществляем линеаризацию уравнения

$$y^{0\prime\prime}+v''+2\sqrt{2\left(y^{0\prime}\right)^2\left(1+\frac{v'}{y^{0\prime}}\right)^2-1}-12e^{y^0-x}e^v-2=0$$

Пример

$$y^{0''} + v'' + 2\sqrt{2\left(y^{0'}\right)^2\left(1 + 2\frac{v'}{y^{0'}}\right) - 1} - 12e^{y^0 - x}\left(1 + v\right) - 2 = 0$$

$$y^{0''} + v'' + 2\sqrt{2\left(y^{0'}\right)^2 + 4v'y^{0'} - 1} - 12e^{y^0 - x} - 12e^{y^0 - x}v - 2 =$$

$$y^{0''} + v'' + 2\sqrt{2\left(y^{0'}\right)^2 - 1}\sqrt{1 + \frac{4v'y^{0'}}{2\left(y^{0'}\right)^2 - 1}} - -12e^{y^0 - x} - 12e^{y^0 - x}v - 2 \approx$$

$$y^{0''} + v'' + 2\sqrt{2\left(y^{0'}\right)^2 - 1}\left(1 + \frac{2v'y^{0'}}{2\left(y^{0'}\right)^2 - 1}\right) - 12e^{y^0 - x} - 12e^{y^0 - x}v - 2 =$$

$$= y^{0''} + v'' + 2\sqrt{2\left(y^{0'}\right)^2 - 1} + \frac{4v'y^{0'}}{\sqrt{2\left(y^{0'}\right)^2 - 1}} - 12e^{y^0 - x} - 12e^{y^0 - x}v - 2 = 0.$$

Таким образом, выражение для приращения приближения

$$v'' + \frac{4y^{0'}}{\sqrt{2\left(y^{0'}\right)^2 - 1}}v' - 12e^{y^0 - x}v + 2\sqrt{2\left(y^{0'}\right)^2 - 1} - 12e^{y^0 - x} + y^{0''} - 2 = 0$$

Пример

Получаем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, решение которого в общем виде представляется затруднительным. Однако в условии предлагается подобрать начальное условие самостоятельно.

$$y^0(x) = x$$ - выбираем, условие так же удовлетворяет граничным условиям

$$v'' + \frac{4\cdot 1}{\sqrt{2(1)^2 - 1}} v' - 12e^{x-x}v + 2\sqrt{2\cdot 1^2 - 1} - 12e^{x-x} + 0 - 2 = v'' + 4v' - 12v - 12 = 0$$

решить которое уже труда не составляет. Характеристическое уравнение для дифференциального однородного

$$\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+12} = -2 \pm 4 = \{-6, 2\}$$

Однородное решение

$$v_o(x) = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{2x}$$

Частное решение $v_ч(x) = -1$

Приращение имеет вид $v(x) = v_o(x) - v_ч(x) = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{2x} - 1$

Константы найдем из условия равенства нулю функции приращения на краях отрезка

Пример

Константы найдем из условия равенства нулю функции приращения на краях отрезка

$$v(0)=v(1)=0$$

$$\begin{cases} c_1+c_2-1=0, \\ c_1e^{-6}+c_2e^2-1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2=1-c_1, \\ c_1\left(e^{-6}-e^2\right)+e^2-1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1=\dfrac{e^2-1}{e^2-e^{-6}}, \\ c_2=\dfrac{1-e^{-6}}{e^2-e^{-6}}. \end{cases}$$

Приращение

$$v(x)=\frac{e^2-1}{e^2-e^{-6}}e^{-6x}+\frac{1-e^{-6}}{e^2-e^{-6}}e^{2x}-1$$

Следующее приближение

$$y^1(x)=\frac{e^2-1}{e^2-e^{-6}}e^{-6x}+\frac{1-e^{-6}}{e^2-e^{-6}}e^{2x}+x-1$$

Замечание. Численное решение краевой задачи $v''+4v'-12v-12=0$

$$v(0)=v(1)=0$$

может осуществляться через метод прогонки.

Устойчивость метода имеет вид

$$\left|-2-12h^2\right|>\left|1+\frac{1}{2}4h\right|+\left|1-\frac{1}{2}4h\right|$$

$$\left|-2-12h^2\right|>\left|1+2h\right|+\left|1-2h\right|$$

$$2+12h^2>2$$

Условие устойчивости выполнено

Спасибо за внимание!