

Интегрирование функций

К.ф.-м.н. Завьялова Наталья Александровна
natalia.zavyalova@gmail.com

Постановка задачи

Для заданной функции $f(x)$ вычислить значение определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Желательно, чтобы метод численного интегрирования обладал следующими свойствами:

- *Универсальность.* Функция $f(x)$ может быть задана в виде «черного ящика», как способ вычисления $f(x)$ по данному x .
- *Экономичность.* Количество вычислений функции $f(x)$ по возможности должно быть сведено к минимуму.
- *Хорошая обусловленность.* Неустранимые погрешности Δf в значениях $f(x)$ не должны приводить к значительной итоговой ошибке ΔI .

Численное интегрирование может применяться для

- интегрирования функций, известных только в некоторых точках, например, полученных в результате измерений;
- интегрирования сложных выражений, не имеющих элементарных первообразных, либо имеющих слишком громоздкие выражения для них;
- построения методов численного решения уравнений в обыкновенных и частных производных (методы конечных элементов, интегро-интерполяционные методы).

Методы, основанные на определении интеграла

Вспомним, как определяется определенный интеграл Римана.

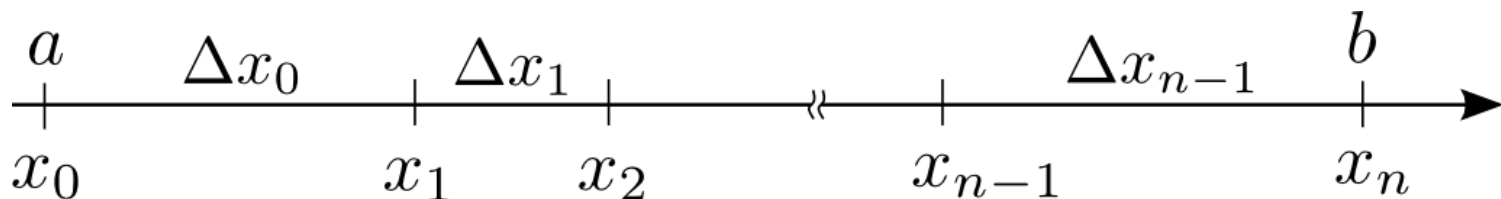
Рассмотрим на отрезке интегрирования $[a, b]$ сетку $a = x_0, x_1, \dots, x_N = b$.

Возьмем от каждого отрезка по одной точке-представителю $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составим интегральную сумму

$$S_N = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \Delta x_i$$

Значение интеграла определяется как предел при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ значений интегральных сумм

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \Delta x_i$$



Формула прямоугольников

Возьмем в качестве приближенного значения интеграла значение некоторой интегральной суммы:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \Delta x_i$$

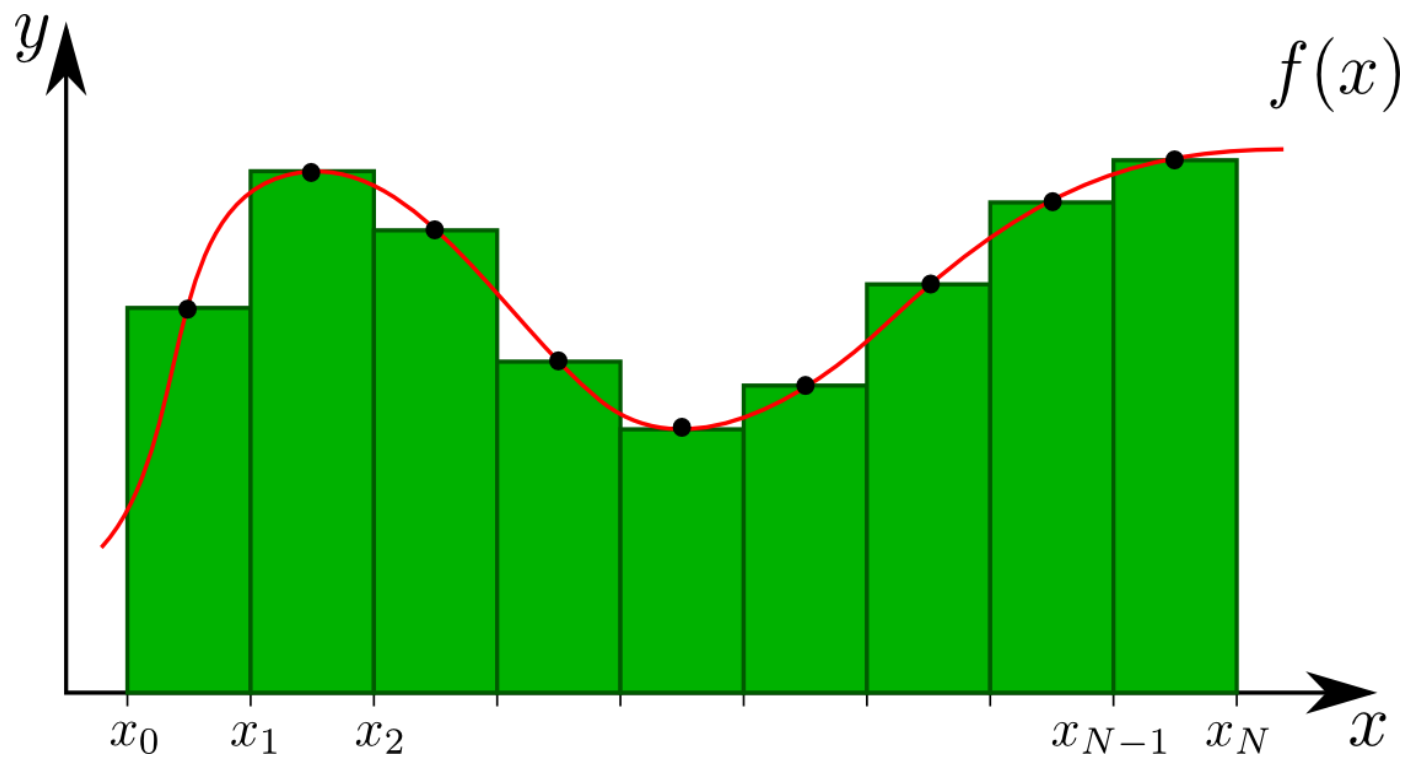
Возьмем в качестве ξ_i середину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \Delta x_i$$

Методы численного интегрирования называют **квадратурными формулами** или просто **квадратурами**.

Данный метод называется формулой **средней точки** или формулой средних **прямоугольников**.

Формула средних прямоугольников

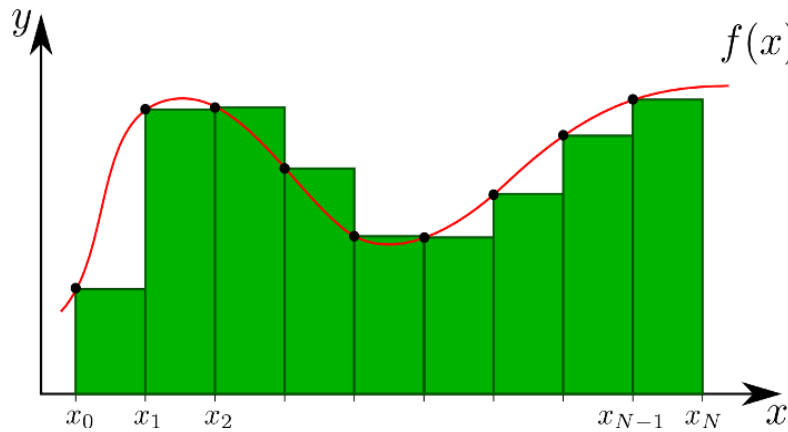


$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \Delta x$$

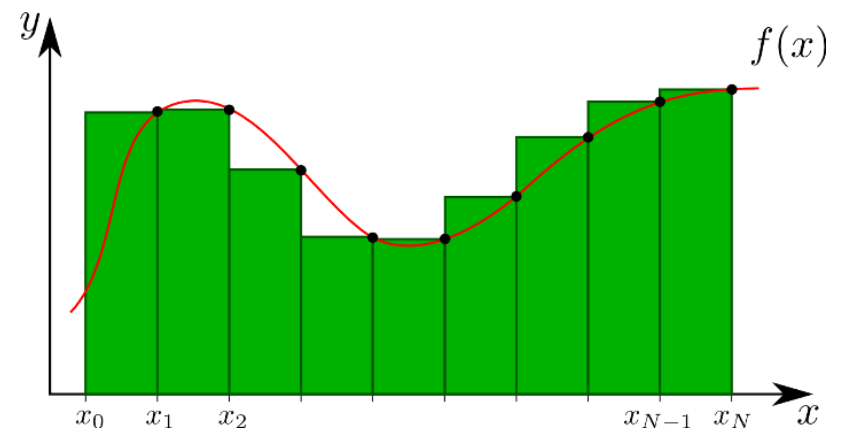
Формулы односторонних прямоугольников

Выбор в качестве ξ_j средней точки интервала не принципиален, можно взять, например, левый или правый конец интервала.

Соответствующие формулы называются формулами **левых** и **правых прямоугольников**.



$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N f(x_{i-1}) \Delta x$$



$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x$$

Составные квадратурные формулы

Построенные формулы прямоугольников являются **составными** квадратурными формулами. Квадратурная формула называется составной, если является результатом применения некоторой элементарной квадратурной формулы к каждому интервалу $[x_{i-1}, x_i]$.

Элементарная квадратура

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f(a)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f(b)$$

Составная квадратура

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N f(x_{i-1}) \Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i$$

Будем дальше строить только элементарные квадратурные формулы, составные получаются из них тривиально.

Приближение подынтегральной функции

Пусть подынтегральная функция $f(x)$ хорошо приближается некоторой просто интегрируемой функцией $P(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P(x) dx$$

В качестве функции $P(x)$ могут выступать

- многочлены;
- тригонометрические многочлены;
- экспоненциальные многочлены и тому подобные.

Остановимся на случае, когда $P(x)$ - многочлен. Тогда задача приближения $f(x)$ с помощью функции $P(x)$ может быть решена, например, с помощью алгебраической интерполяции.

Интерполяционные квадратурные формулы

Введем на отрезке $[a, b]$ некоторую сетку

$$\Omega_s = \{a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_s \leq b\}$$

Построим на этой сетке интерполяционный многочлен в форме Лагранжа:

$$L_s(x) = \sum_{k=0}^s \varphi_k(x) f(x_k)$$

где $\varphi_k(x)$ - это базисные интерполяционные многочлены Лагранжа

$$\varphi_k(x) = \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Интегрируя $L_s(x)$ по отрезку $[a, b]$, имеем:

$$\int_a^b L_s(x) dx = (b - a) \sum_{k=0}^s w_k f(x_k)$$

$$w_k \equiv \frac{1}{b - a} \int_a^b \varphi_k(x) dx$$

Интерполяционные квадратурные формулы

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_s(x)dx = (b-a) \sum_{k=0}^s w_k f(x_k) \qquad w_k \equiv \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi_k(x)dx$$

Утверждение

Величины w_k не зависят от конкретных значений a, b, x_i , а зависят лишь от относительного расположения узлов x_i .

Доказательство

Сделаем замену переменных $x = \frac{a+b}{2} + \xi \frac{b-a}{2} \quad \xi \in [-1, 1]$:

$$w_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \prod_{i \neq k} \frac{\xi - \xi_i}{\xi_k - \xi_i} d\xi$$

Интерполяционные квадратурные формулы

Вид квадратурной формулы

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a) \sum_{k=0}^s w_k f(x_k)$$

является универсальным, и мог быть написан из общих соображений линейности квадратурной формулы по значениям подынтегральной функции (по аналогии с линейностью самого интеграла).

Величины w_k называются **весами квадратурной формулы**. Веса не зависят от конкретного отрезка интегрирования, и могут быть вычислены на некотором «стандартном» отрезке. Обычно используют отрезок $[0, 1]$ или $[-1, 1]$.

Соответственно x_k называются **узлами квадратурной формулы**. Они также обычно приводятся для стандартного отрезка, а для конкретного отрезка $[a, b]$ они получаются линейным преобразованием.

Формулы Ньютона-Котеса

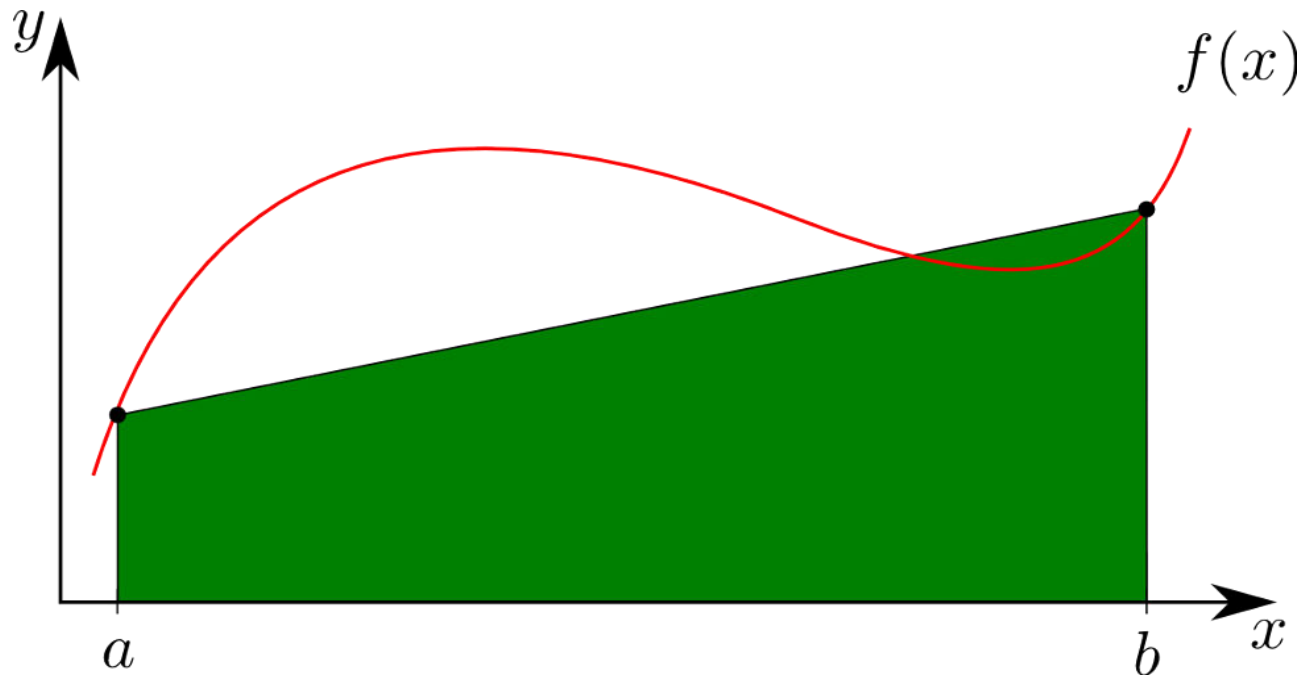
Изучим случай, когда Ω - равномерная сетка:

$$x_i = a + \frac{b-a}{s}i, \quad i = 0, \dots, s$$

Интерполяционные квадратурные формулы на такой сетке называются формулами **Ньютона-Котеса**. Некоторые из них имеют свои названия.

Название	Узлы	Весы	Вид
Трапеций	a, b	$1/2$	$(b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$
Симпсона	a, b	$1/6$	$(b-a) \frac{f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)}{6}$
	$\frac{a+b}{2}$	$2/3$	
Правило 3/8	a, b	$1/8$	$\frac{f(a) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + f(b)}{8/(b-a)}$
	$\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}$	$3/8$	

Формула трапеций



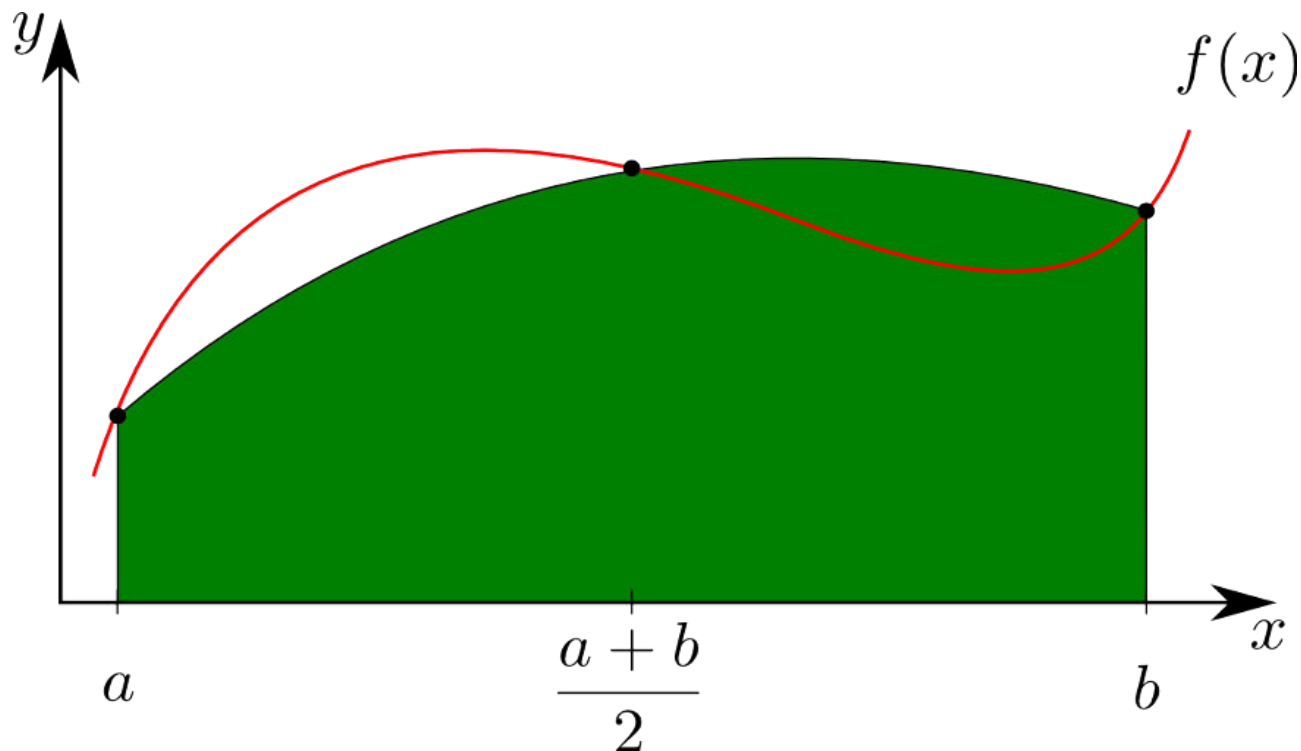
Для одного отрезка:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Составная формула:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta x_i$$

Формула Симпсона

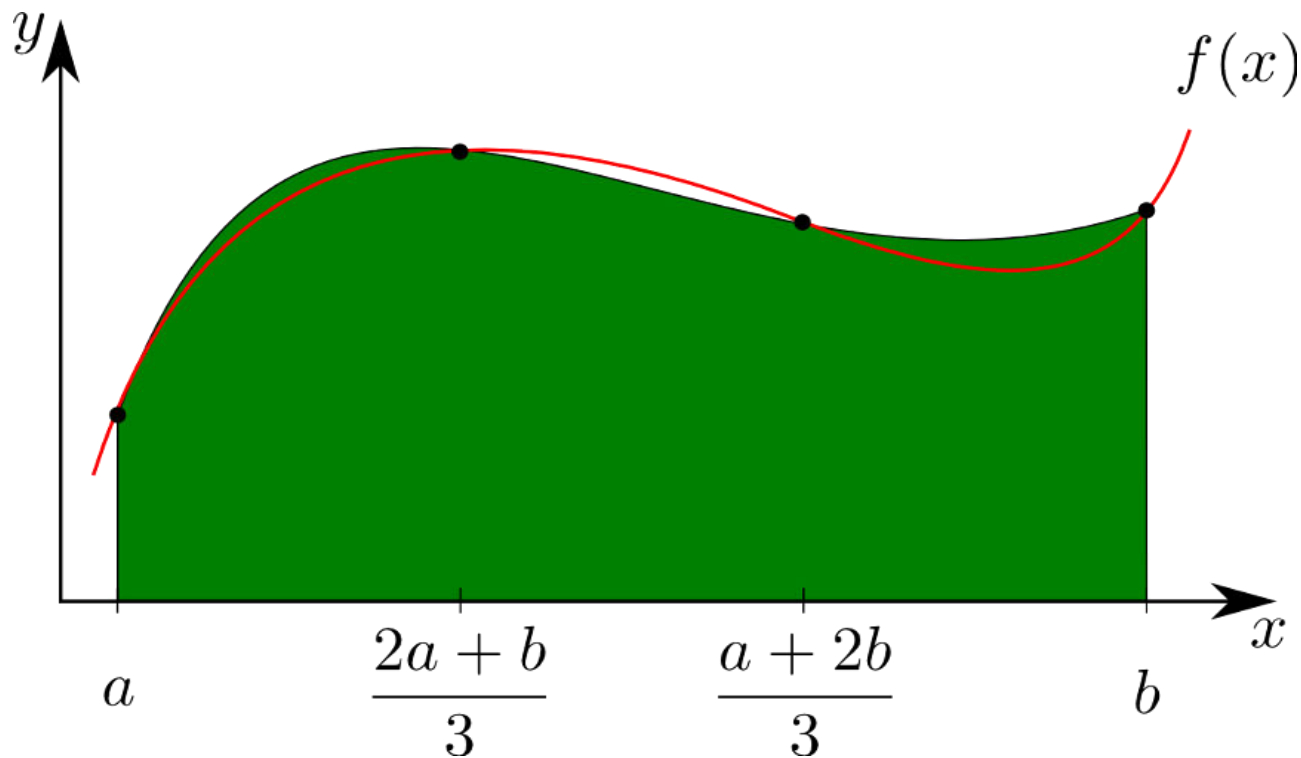


Для одного отрезка:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \frac{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6}$$

Составная формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^N \frac{f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i)}{6} \Delta x_i$$

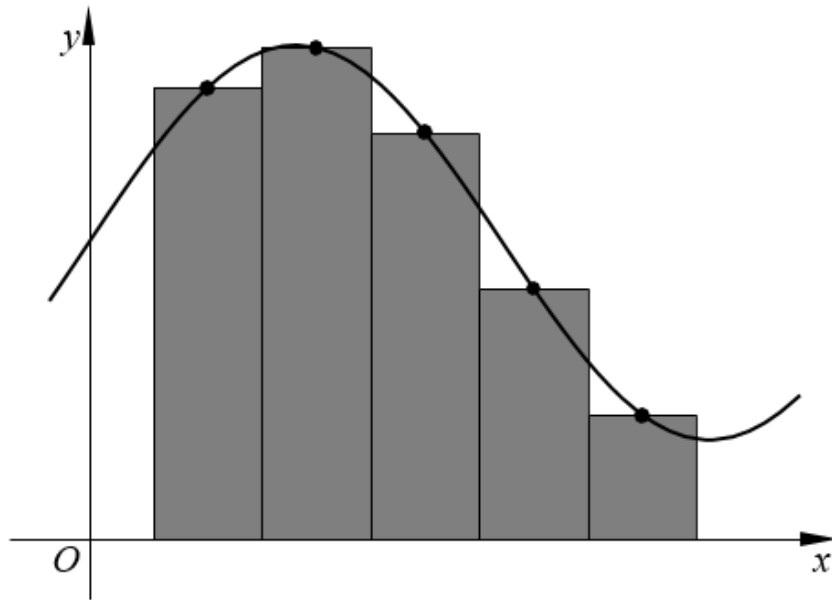


Для одного отрезка:
$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)}{8}$$

Составная формула:
$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N \frac{f(x_{i-1}) + 3f\left(\frac{2x_{i-1}+x_i}{3}\right) + 3f\left(\frac{x_{i-1}+2x_i}{3}\right) + f(x_i)}{8} \Delta x_i$$

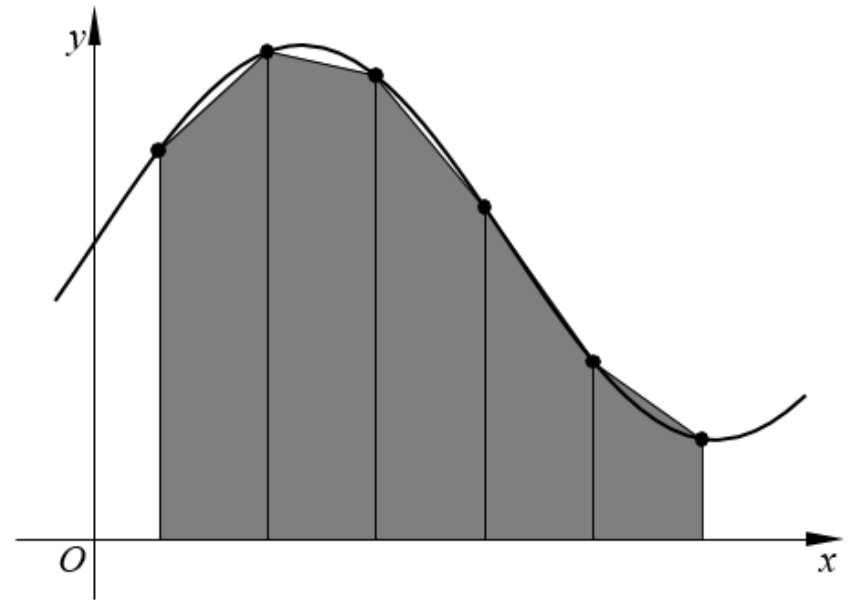
Что точнее?

Попробуйте угадать, какая из двух квадратурных формул точнее:



Метод средней точки

Ошибка $\sim 1\%$



Метод трапеций

Ошибка $\sim 2\%$

Для этого случая

Степень квадратурной формулы

Будем говорить, что квадратурная формула **имеет алгебраическую степень точности** m , если она точно интегрирует все многочлены степени не более m , а некоторые многочлены степени $m + 1$ уже нет. Например, формула средней точки имеет алгебраическую степень 1: она точна для всех линейных функций

$$\int_a^b (\alpha x + \beta) dx = (b - a) + \alpha \frac{b^2 - a^2}{2} = (b - a) \left(\alpha \frac{a + b}{2} + \beta \right)$$

И не точна, например, для $3x^2$

$$\int_a^b 3x^2 dx = b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2) \neq (b - a) \frac{3}{4} (a^2 + ab + b^2)$$

Условия заданной степени

Утверждение

Для того, чтобы квадратурная формула имела алгебраическую степень m необходимо и достаточно, чтобы она точно интегрировала функции $1, x, x^2, \dots, x^m$.

Доказательство

Достаточность. Пусть $P_m(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_m x^m$

$$(b-a) \sum_{k=0}^s w_k P_m(x) = (b-a) \sum_{k=0}^s w_k \sum_{r=0}^m \alpha_r x^r =$$

$$= \sum_{r=0}^s \alpha_r (b-a) \sum_{k=0}^m w_k x^r = \sum_{r=0}^m \alpha_r \int_a^b x^r dx = \int_a^b P_m(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{k=0}^s w_k f(x_k)$$
$$w_k \equiv \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi_k(x) dx$$

Необходимость очевидна.

Условия заданной степени

Условия из утверждения позволяют строить квадратурные формулы степени m , решая систему уравнений (для простоты взят отрезок $[-1, 1]$):

$$2 \sum_{k=0}^s w_k = \int_{-1}^1 dx = 2$$

$$2 \sum_{k=0}^s x_k w_k = \int_{-1}^1 x dx = 0$$

$$2 \sum_{k=0}^s x_k^2 w_k = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

...

$$2 \sum_{k=0}^s x_k^m w_k = \int_{-1}^1 x^m dx = \frac{1 + (-1)^m}{m + 1}$$

Погрешность интегрирования

Для краткости обозначим

$$I[f] = (b - a) \sum_{k=0}^s w_k f(x_k)$$

$$E[f] = \int_a^b f(x) dx - I[f]$$

Функционал $E[f]$ назовем **остаточным членом квадратуры** или просто, **погрешностью квадратуры**.

Если квадратура имеет алгебраическую степень m , то $E[P_m] \equiv 0$.

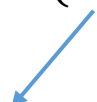
Остаточный член квадратурной формулы

Для определения $E[f]$ представим $f(x)$ в виде формулы Тейлора с интегральным остаточным членом:

$$f(x) = f(a) + f'(x-a) + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!} (x-a)^m + R_m(x)$$

$$R_m(x) = \int_a^x \frac{f^{(m+1)}(t)}{m!} (x-t)^m dt = \int_a^x \frac{f^{(m+1)}(t)}{m!} (x-t)_+^m dt$$

$z_+ = \max(z, 0) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ z, & z > 0 \end{cases}$



Так как $f(x) - R_m(x)$ является многочленом степени m , он интегрируется квадратурной формулой точно:

$$E[f] = E[R_m]$$

Остаточный член квадратурной формулы

Остаточный член квадратурной формулы совпадает с погрешностью интегрирования остаточного члена формулы Тейлора.

$$R_m(x) = \int_a^b \frac{f^{(m+1)}(t)}{m!} (x - t)_+^m dt$$

$$E[f] = E[R_m] = \int_a^b R_m(x) dx - (b - a) \sum_{k=0}^s w_k R_m(x_k)$$

Подставим выражение для $R_m(x)$ и поменяем последовательность интегрирования:

$$E[f] = \int_a^b \frac{f^{(m+1)}(t)}{m!} \underbrace{\left[\int_a^b (x - t)_+^m dx - (b - a) \sum_{k=0}^s w_k (x_k - t)_+^m \right]}_{Q(t)} dt$$

Остаточный член квадратурной формулы

Итак, остаточный член квадратуры выражен в виде

$$E[f] = \int_a^b \frac{f^{(m+1)}}{m!} Q(t) dt$$

где

$$Q(t) = \int_a^b (x - t)^m dx - (b - a) \sum_{k=0}^s w_k (x_k - t)^m$$

— функция, зависящая только от конкретного вида квадратурной формулы и ее степени m .
Заметим, что $Q(t)$ достаточно вычислить только для стандартного отрезка $\tau \in [-1, 1]$.

$$Q\left(\frac{a+b}{2} + \tau \frac{b-a}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{m+1} q(\tau)$$

$$q(\tau) = \int_{\tau}^1 (\xi - \tau)^m d\xi - 2 \sum_{k: \xi_k > \tau} w_k (\xi_k - \tau)^m$$

Остаточный член квадратурной формулы

Если $Q(t) > 0$ (< 0) на всем отрезке $[a, b]$, то из теоремы об интегральном среднем,

$$E[f] = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{m!} \int_a^b Q(t) dt = \frac{f^{(m+1)}(\xi)(b-a)^{m+2}}{2^{m+2}m!} \int_{-1}^1 q(\tau) d\tau \quad \xi \in [a, b]$$

$$|E[f]| \leq \frac{M_{m+1}(b-a)^{m+2}}{2^{m+2}m!} \left| \int_{-1}^1 q(\tau) d\tau \right|$$

Если $Q(t)$ меняет знак, то наилучшая оценка выглядит так:

$$|E[f]| \leq \frac{M_{m+1}(b-a)^{m+2}}{2^{m+2}m!} \int_{-1}^1 |q(\tau)| d\tau$$

Остаточные члены стандартных формул

Формула	m	$q(\tau)$	$E[f]$
Левых прямоугольников	0	$1 - \tau$	$\frac{f'(\zeta)(b-a)^2}{2}$
Правых прямоугольников	0	$-1 - \tau$	$-\frac{f'(\zeta)(b-a)^2}{2}$
Средней точки	1	$\frac{(1- \tau)^2}{2}$	$\frac{f''(\zeta)(b-a)^3}{24}$
Трапеций	1	$\frac{\tau^2-1}{2}$	$-\frac{f''(\zeta)(b-a)^3}{12}$
Симпсона	3	$\frac{(\tau -1)^3(1+3 \tau)}{12}$	$-\frac{f^{IV}(\zeta)(b-a)^5}{2880}$
Правило «3/8»	3	$\begin{cases} \frac{9\tau^4-1}{36}, & \tau \leq 1/3 \\ \frac{(\tau -1)^3 \tau }{4}, & \tau > 1/3 \end{cases}$	$-\frac{f^{IV}(\zeta)(b-a)^5}{6480}$

Остаточный член составной формулы

Для элементарных квадратурных формул степени m остаточный член имеет вид

$$E[f] = \frac{f^{(m+1)}(\xi)(b-a)^{m+2}}{C} \quad \text{либо} \quad |E[f]| = \frac{M_{m+1}(b-a)^{m+2}}{C}$$

Найдем соответствующее выражение для составной квадратурной формулы с равномерным шагом $\Delta x_i = h = \text{const}$:

$$\tilde{E}[f] = \sum_{i=1}^N \frac{f^{(m+1)}(\xi_i)h^{m+2}}{C} = (b-a) \frac{f^{(m+1)}(\xi)h^{m+1}}{C}, \quad \xi \in [a, b]$$

$$|\tilde{E}[f]| \leq \sum_{i=1}^N \frac{M_{m+1}\Delta x_i^{m+2}}{C} \leq \frac{M_{m+1}N\Delta x_i^{m+2}}{C} \leq (b-a) \frac{M_{m+1}h^{m+1}}{C}.$$

Последнее выражение верно и для неравномерной сетки, если $h \equiv \max \Delta x_i$ — максимальный шаг сетки.

Порядок сходимости

Теперь ясна связь между алгебраическим порядком квадратурной формулы и порядком сходимости:

Утверждение

Для составной квадратурной формулы алгебраической степени m ее остаточный член стремится к нулю как $O(h^{m+1})$, где h шаг сетки составной формулы. Иначе говоря, формула имеет **порядок сходимости** $m + 1$.

Недостаточная гладкость

Если $m + 1$ -я производная функции $f(x)$ не ограничена, остаточный член квадратурной формулы m -ой степени может стремиться к нулю медленнее, чем $O(h^{m+1})$. Остаточный член может быть найден тем же способом, но с заменой m на $m' < m$, где $m' + 1$ число ограниченных производных у $f(x)$.

Правило Рунге

Сделаем предположение, что в выражении

$$I^* = I_h + E[f] = I_h + (b - a) \frac{f^{(p)}(\xi)h^p}{p!}$$

точка ξ слабо зависит от h :

$$I^* = I_h + ch^p + o(h^p),$$

где c — константа и не зависит от h . Величина

$$\varepsilon_h = ch^p$$

может считаться главным членом ошибки (то есть ошибкой с точностью до бесконечно малой по h поправки).

Правило Рунге

Вычислим интеграл несколько раз на серии сгущающихся сеток с шагами $h, h/2, h/4, \dots$:

$$I^* = I_h + \varepsilon_h + o(h^p) = I_h + ch^p + o(h^p)$$

$$I^* = I_{h/2} + \varepsilon_{h/2} + o(h^p) = I_{h/2} + 2^{-p}ch^p + o(h^p)$$

$$I^* = I_{h/4} + \varepsilon_{h/4} + o(h^p) = I_{h/4} + 2^{-2p}ch^p + o(h^p)$$

Заметим, что разность приближенных значений интегралов позволяет оценить разность главных членов соответствующих погрешностей:

$$\Delta_{h/2} \equiv I_{h/2} - I_h = \varepsilon_h - \varepsilon_{h/2} + o(h^p) = (2^p - 1)\varepsilon_{h/2} + o(h).$$

Правило Рунге

Правило Рунге позволяет просто оценить главный член погрешности вычисления интеграла на мелкой сетке:

$$\varepsilon_{h/2} = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^p - 1} + o(h)$$

Использование правила Рунге требует осторожности. Требуется контролировать что **фактический порядок сходимости** численного метода соответствует номинальному p . Фактический порядок p^* может в силу некоторых обстоятельств (например, недостаточная гладкость $f(x)$) быть меньше номинального порядка сходимости p . Простейший способ контроля следить за выполнением соотношения

$$p^* = \log_2 \frac{\Delta_h}{\Delta_{h/2}} \approx p$$

Использование правила Рунге, пример 1

Интегрирование методом Симпсона $p = 4$ функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ на $[1, 9]$.

N	I_h	$\Delta_h = I_h - I_{2h}$	$\varepsilon_h = \Delta_h / (2^4 - 1)$	p^*
40	4.0000010223489	★	★	★
80	4.0000000647720	$-9.57577 \cdot 10^{-7}$	$-6.38385 \cdot 10^{-8}$	★
160	4.0000000040624	$-6.07096 \cdot 10^{-8}$	$-4.04731 \cdot 10^{-9}$	3.98
320	4.0000000002541	$-3.80827 \cdot 10^{-9}$	$-2.53885 \cdot 10^{-10}$	3.99
640	4.0000000000159	$-2.38246 \cdot 10^{-10}$	$-1.58831 \cdot 10^{-11}$	4.00
1280	4.0000000000010	$-1.48832 \cdot 10^{-11}$	$-9.92214 \cdot 10^{-13}$	4.00
2560	4.0000000000001	$-8.91731 \cdot 10^{-13}$	$-5.94487 \cdot 10^{-14}$	4.06
5120	4.0000000000000	$-1.16351 \cdot 10^{-13}$	$-7.75676 \cdot 10^{-15}$	2.94
10240	3.9999999999999	$-1.28342 \cdot 10^{-13}$	$-8.55612 \cdot 10^{-15}$	-0.14

Точное значение $I = \int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4.$

Использование правила Рунге, пример 2

Интегрирование методом Симпсона $p = 4$ функции $3 - \sqrt{x}$ на $[0, 9]$.

N	I_h	$\Delta_h = I_{2h} - I_h$	$\varepsilon_h = \Delta_h / (2^4 - 1)$	p^*
40	9.0030633904588	★	★	★
80	9.0010830724831	$-1.98032 \cdot 10^{-3}$	$-1.32021 \cdot 10^{-4}$	★
160	9.0003829239736	$-7.00149 \cdot 10^{-4}$	$-4.66766 \cdot 10^{-5}$	1.50
320	9.0001353840708	$-2.47540 \cdot 10^{-4}$	$-1.65027 \cdot 10^{-5}$	1.50
640	9.0000478654974	$-8.75186 \cdot 10^{-5}$	$-5.83457 \cdot 10^{-6}$	1.50
1280	9.0000169230090	$-3.09425 \cdot 10^{-5}$	$-2.06283 \cdot 10^{-6}$	1.50
2560	9.0000059831870	$-1.09398 \cdot 10^{-5}$	$-7.29321 \cdot 10^{-7}$	1.50
5120	9.0000021153757	$-3.86781 \cdot 10^{-6}$	$-2.57854 \cdot 10^{-7}$	1.50
10240	9.0000007478989	$-1.36748 \cdot 10^{-6}$	$-9.11651 \cdot 10^{-8}$	1.50

Точное значение $I = \int_0^9 3 - \sqrt{x} dx = 9.$

Степень интерполяционных формул

Утверждение

Формулы интерполяционного типа, построенные по $s + 1$ узлу гарантированно будут иметь алгебраическую степень не менее s .

Доказательство

На сетке из $s + 1$ узла интерполяция точно восстанавливает многочлены до степени s включительно. Следовательно, и квадратурная формула будет интегрировать их точно.

Формулы Ньютона-Котеса с нечетным количеством узлов имеют степень на 1 выше, чем гарантируется утверждением

Формула	Количество узлов, $s + 1$	Алгебраическая степень, m
Трапеций	2	$1 = s$
Симсона	3	$3 > s$
Правило «3/8»	4	$3 = s$

Условия повышения степени

Пусть $I[f] = \sum_{k=0}^s w_k f(x_k)$ интерполяционная квадратурная формула.

Рассмотрим произвольный многочлен $P(x)$, степени выше s . Разделим его с остатком на

многочлен $\omega(x) = \prod_{k=0}^s (x - x_k)$

$$P(x) = V(x)\omega(x) + z(x)$$

Многочлен $Z(x)$ имеет степень не выше s , и, следовательно, интегрируется точно $E[Z] = 0$.

Тогда ошибка интегрирования $P(x)$ составляет

$$E[P] = E[V\omega] = \int_a^b V(x)\omega(x)dx - I[V\omega] = \int_a^b V(x)\omega(x)dx$$

Квадратурная формула для $V(x)\omega(x)$ дает 0 поскольку эта функция обнуляется во всех узлах x_k .

Условия повышения степени

Для многочлена

$$P(x) = V(x)\omega(x) + Z(x)$$

ошибка квадратурной формулы составляет

$$E[P] = \int_a^b V(x)\omega(x)dx$$

Например, для формулы Симпсона последний интеграл обнуляется, если $V(x) = V$ - константа

$$\begin{aligned} \int_a^b V(x)(x-a)(x-b) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) dx &= \\ &= V \int_a^b (x-a)(x-b) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) dx = 0 \end{aligned}$$

Стало быть, формула Симпсона будет точной для всех многочленов, которые при делении на $\omega(x)$ дают в частном константу, то есть для всех многочленов степени $s + 1$.

Условия повышения степени

Причина повышения порядка формулы Симпсона в удачном расположении узлов квадратуры.

Задача

Разместить узлы x_k , $k = 0, \dots, s$ квадратуры так, чтобы интеграл

$$E[P] = \int_a^b V(x)\omega(x)dx$$

обнулялся для произвольного многочлена $V(x)$ как можно большей степени d .

Если удастся так расположить узлы квадратуры, то она будет иметь алгебраический порядок $m = s + d + 1$.

Ортогональные многочлены

Построим такой многочлен $\omega(x)$, который был бы ортогонален многочленам $1, x, \dots, x^s$ в смысле

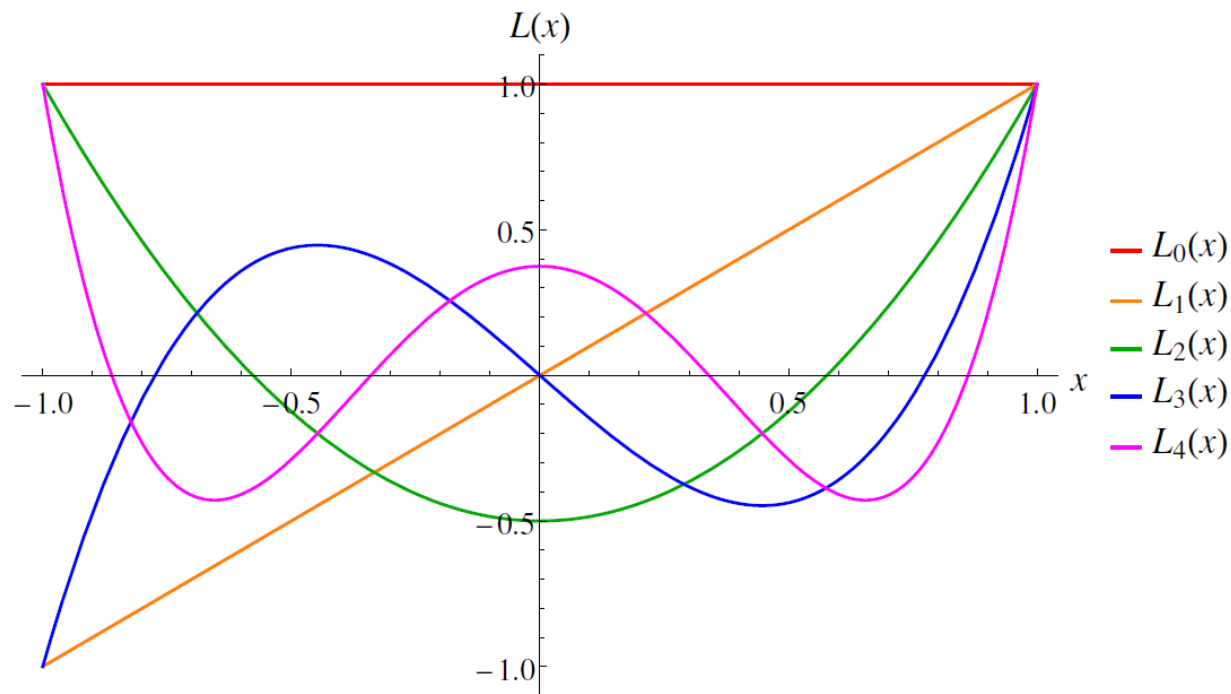
$$(x^r, \omega(x)) \equiv \int_a^b x^r \omega(x) dx = 0, \quad r = 0, \dots, s$$

Для построения такого многочлена $\omega(x)$ можно использовать процесс ортогонализации Грама-Шмидта для набора функций $1, x, \dots, x^{s+1}$.

В результате ортогонализации из многочлена x^{s+1} получится многочлен $\omega(x) = x^{s+1} + \dots$, ортогональный всем функциям $1, x, \dots, x^s$,

а следовательно, и любому многочлену $V(x)$ степени $\deg V \leq s$.

Многочлены Лежандра



Многочлены Лежандра $L_m(x)$ ортогональны

$$\int_{-1}^1 L_m(x) L_n(x) dx = \frac{2}{n+1} \delta_{nm}$$

Каждый многочлен $L_m(x)$ имеет m различных действительных корней на отрезке $[-1, 1]$.

Многочлены Лежандра

Построенный многочлен $\omega(x) = C_{s+1} L_{s+1} \left(\frac{2x - a - b}{b - a} \right)$

C_{s+1} - Некоторый несущественный нормировочный множитель.

Использование в качестве узлов квадратурной формулы корней многочлена Лежандра позволяет добиться обнуления всех интегралов

$$\int_a^b V(x) \omega(x) dx$$

при $\deg V(x) \leq s$, то есть повысить степень квадратуры до $2s + 1$, почти вдвое по сравнению с формулами с произвольным выбором узлов.

Для $\deg V(x) = s + 1$ никакой выбор узлов не обеспечит обнуления интеграла (достаточно взять $V(x) = \omega(x)$). Стало быть, максимальная степень квадратуры с $s + 1$ узлом $2s + 1$.

Формулы Гаусса

Формулами Гаусса называются интерполяционные квадратурные формулы, имеющие максимальную алгебраическую степень для данного числа узлов. Формула Гаусса с K узлами имеет степень $2K - 1$ и порядок $2K$. Формулы Гаусса обычно приводят для стандартного отрезка $[-1, 1]$:

Число узлов, K	Узлы x_k	Веса w_k	$E[f]$
1	0	1	$\frac{f''(\zeta)(b-a)^3}{24}$
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1/2	$\frac{f^{IV}(\zeta)(b-a)^5}{4320}$
3	0 $\pm \frac{\sqrt{15}}{5}$	4/9 5/18	$\frac{f^{VI}(\zeta)(b-a)^7}{2016000}$

Простейшая формула Гаусса совпадает с формулой средней точки. Узлы формул Гаусса не содержат крайних точек отрезка интегрирования.

- 1 Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы. 3-е издание, Москва. БИНОМ, Лаборатория знаний, 2004, 636 с.
- 2 Н.Н. Калиткин, Е.А. Альшина. Численные методы: в 2 кн. Кн. 1 Численный анализ. Москва, Издательский центр «Академия», 2013, 304 с.
- 3 И.П. Мысовских. Интерполяционные кубатурные формулы. Москва. Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981, 336 с.