Московский физико-технический институт

Бельдий Дмитрий
1 курс, 773 группа

Вопрос по выбору

Маятник Фуко

29.12.2017

Историческая справка

Французский физик и астроном Жан Фуко **впервые** осуществил свой эксперимент 8 **января** 1851 **года** в погребе своего дома. Для этого был использован маятник длиной 2 метра. В феврале с разрешения Доминика Франсуа Араго он повторил опыт в Парижской обсерватории, на этот раз удлинив маятник до 11 метров. В подготовке эксперимента принимал также участие ассистент Фуко Фромент. **Первая публичная демонстрация** была осуществлена уже в марте 1851 года в парижском Пантеоне: под куполом Пантеона он подвесил металлический **шар массой** 28 **кг** с закрепленным на нём остриём на стальной проволоке **длиной** 67 **м**. Крепление маятника позволяло ему свободно колебаться во всех направлениях, под точкой крепления было сделано круговое ограждение **диаметром** 6 **м**, по краю ограждения была насыпана песчаная дорожка таким образом, чтобы маятник в своём движении мог при её пересечении прочерчивать на песке отметки. **Чтобы избежать бокового толчка** при пуске маятника, его отвели в сторону и привязали верёвкой, после чего верёвку пережгли. **Период колебания** маятника при такой длине подвеса составлял $16,4$ **секунды**, при каждом колебании отклонение от предыдущего пересечения песчаной дорожки составляло около 3 мм, **за час** плоскость колебаний маятника поворачивалась более чем на 11° по часовой стрелке, то есть примерно за 32 **часа** совершала полный оборот и возвращалась в **прежнее положение.**

Теоретическая справка

Маятник Фуко представляет собой математический маятник.
Опыт с маятником Фуко показывает, что Земля (как и другие планеты Солнечной системы), является НИСО. Если бы Земля была ИСО, то на маятник действовали бы только “настоящие силы”: т.е. сила тяжести $F = mg$ и сила натяжения нити T, сила трения нити и сопротивление воздуха (последними двумя можно пренебречь для рассмотрения теоретической части вопроса). В таком случае плоскость колебаний маятника оставалась неподвижной в СО Земли, однако она совершает вращение вокруг оси, проходящей через нить подвеса в состоянии покоя маятника. Значит верно обратное: Земля является НИСО. Предположим, что Земля вращается в некоторой ИСО. Тогда к к “настоящим силам” добавятся еще силы инерции: центробежная и кориолисова. Движение маятника будет описываться уравнением:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + 2m[\vec{v} \cdot \vec{\omega}] + \vec{T} \quad (1),$$

где $2m[\vec{v} \cdot \vec{\omega}] = \vec{F}_k$ - кориолисова сила, которая и поворачивает плоскость колебаний маятника.
Рассмотрим частный случай: пусть маятник расположен ровно на полюсе, тогда $\vec{\omega}$ проходит вдоль оси вращения Земли, и результат очевиден в ИСО: плоскость маятника неподвижна, вращается Земля, на маятник не действуют никакие силы инерции.

В общем случае будем рассматривать уравнение (1) СО Земли на широте θ. Разложим вектор $\vec{\omega}$ на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_v + \vec{\omega}_g,$$
$$\vec{\omega}_v = \vec{\omega}\sin\theta,$$
$$\vec{\omega}_g = \vec{\omega}\cos\theta,$$

Разложим $\vec{\omega}_g$ на составляющие $\vec{\omega}_{||}$ и $\vec{\omega}_\perp$.

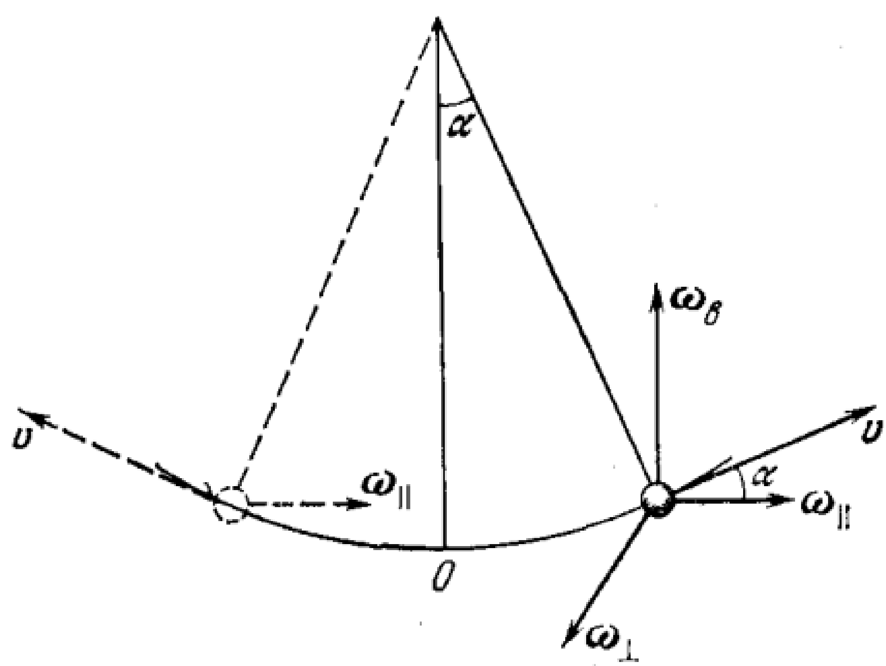

Рис. 1: Рисунок 1.

Таким образом уравнение (1) можно переписать в таком виде:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + 2m[\vec{v}\cdot\vec{\omega}_v] + 2m[\vec{v}\cdot\vec{\omega}_{||}] + 2m[\vec{v}\cdot\vec{\omega}_\perp] + \vec{T} \quad (2).$$

Вектор $\vec{\omega}_{||}$ сонаправлен с силой T, поэтому влияет только на нее (с удлинением нити увеличивается период колебаний). Вектор $\vec{\omega}_\perp$ очень интересен тем, что он всегда сохраняет свое направление, таким образом вектор $2m[\vec{v}\cdot\vec{\omega}_\perp]$ перпендикулярен (за плоскость рисунка) плоскости колебаний маятника в крайних положениях, и направлена противоположно при приближении маятника к положению покоя. Значит эта составляющая вызывает только мелкие аберрации плоскости, зависящие от угла отклонения маятника, а при маленьких углах эти аберрации незначительно, значит эта составляющая на влияет на поворот плоскости маятника на большие углы. Составляющая силы Кориолиса $2m[\vec{v}\cdot\vec{\omega}_v]$ перпендикулярна плоскости колебаний маятника, и вызывает ее поворот. Пренебрегая $2m[\vec{v}\cdot\vec{\omega}_\perp]$, $2m[\vec{v}\cdot\vec{\omega}_{||}]$ и T, уравнение (2) приводим к такому виду:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + 2m[\vec{v}\cdot\vec{\omega}_v] \quad (3).$$

Таким образом мы получили уравнение общего вида для маятника Фуко. Заменив $\vec{\omega}_v$ на $\omega\cdot\sin\theta$ можем решать задачи для маятника расположенного на любой широте. Для полюса $\sin(90^\circ) = 1$, т.е. эквивалентно частному случаю.

Анализ и разработка модели

$$t = \frac{2\pi}{\omega\cdot\sin\theta} = \frac{T}{\sin\theta},$$

где t - время полного оборота плоскости маятника вокруг своей оси, T - период вращения Земли относительно ИСО.
Угловая скорость вращения Земли $\omega = \frac{1}{240} = 0,00416\,[\frac{\text{deg}}{\text{sec}}]$
В опыте Фуко в использовался груз массой 28кг и подвес длинной 67м для того, чтоб маятник за сутки совершил полный оборот без существенной потери амплитуды. Период колебания такого маятника составляет 16, 4с.
Проекция центра шара (конца подвеса) на плоскость, которая касается Земли в проекции центра шара на поверхность Земли (назовем ее плоскостью платформы, над которой маятник совершает колебания), описывает траекторию, подобную лепесткам цветка.

Широта Парижа $= 48.5^\circ$.
В опыте Фуко $t = \frac{86400\,\text{c}}{\sin(48.5^\circ)} = 115360\,\text{c} = 32.044$ часа, что равно данным, полученным опыте.
За час маятник совершает $\frac{3600}{16.4} = 219.51$ колебание, поворачиваясь на 11.02°, т.е. каждое колебание он поворачивается на 0.05°. В опыте сказано, что каждое последующее колебание смещалось на 3мм по окружности в крайней точке. Рассчитаем угол, сжимающий дугу 3мм окружности радиусом 3м:

$$\alpha = \frac{1}{r} = \frac{3\,\text{mm}}{3\,\text{m}} = 0.001\,\text{rad} = 0.057^\circ$$

Т.е. опыт имел погрешность $\sim 12\%$.

Угол между двумя соседними лепестками (оставленными от проекций центра шара на плоскость платформы в двух крайних положениях маятника в пределах одного колебания) можно рассчитать по формуле:

$$\alpha = 180^\circ - \omega\cdot t,$$

где t - полупериод колебания маятника, т.е. $t = 180° - \omega \cdot 2\pi \cdot \frac{\sqrt{\frac{l}{g}}}{2} = 180° - \omega \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$. В опыте Фуко угол между лепестками составлял 179.943°.

Например, при $\omega = \frac{10\pi}{3T}$ получим замкнутую траекторию с тремя лепестками, а при $\omega = \frac{14\pi}{T}$ - с четырьмя.

При разработке использовал JavaScript ES6, ReactJS library. Исходный код опубликован в GitHub репозитории по ссылке: github.com/mityabeldii/foucault-pendulum По состоянию на 29.12.17 модель поддерживает эмуляцию ИСО и НИСО, используемых в ходе доказательства того факта, что Земля является НИСО, и объяснения природы вращения плоскости маятника. Маятник поддерживает затухающие и незатухающие (damped button) колебания с фиксированным коэффициентом затухания $\beta = 0.05$. Изменение длины подвеса маятника и угловой скорости вращения НИСО не реализованы в виде графического интерфейса, однако эти значения можно менять в файле состояния MainReduser.js. Ко всем физическим вычислениям приведены комментарии в коде. Также реализована возможность построения графика координаты $x(t)$ центра шара от времени t. Платформа может вращаться, а маятник совершать колебания независимо друг от друга, таким образом на данной модели можно продемонстрировать природу гармонических затухающих и незатухающих колебаний, а также определить вектор угловой скорости.

P.S.: модель, возможно, будет доступна по ссылке mityabeldii.github.io/foucault-pendulum/, иначе - по описанию в репозитории.

Список литературы

[1] Д. В. Сивухин, ОБЩИЙ КУРС ФИЗИКИ МЕХАНИКА, 1979 г.

[2] ru.wikipedia.org/wiki/Маятник_Фуко