No: Date:

28/12/2019

Lecture «13»

* تكاملات فورييه : «fourier integrals»

تكامل فورييه «F.I» للدالة (f) حيث :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos v(t-x)\,dt\right]dv \quad \text{--- (1)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos vt\,dt\right)\cos xv\,dv\right.$$

$$\left. + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin vt\,dt\right)\sin xv\,dv\right] \quad \text{--- (2)}$$

فإن تكامل فورييه (F.I) يمكن أن يكتب :

$$(F.I): f(x) = \int_{0}^{\infty}\left[A(v)\cos xv\,dv + B(v)\sin xv\,dv\right] \quad \text{... (3)}$$

حيث :

$$A(v) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos vt\,dt$$

$$B(v) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin vt\,dt$$

* تكامل فورييه في الصورة الأسية :-

تكامل فورييه في الصورة الأسية للدالة f ، حيث

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos v(t-x)\,dt$$

No.: Date:

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos v(t-x)\, dt$$

أضفنا دالة فردية كأن أضفنا صفر لأن $f(t)$ دالة زوجية بناءً على خصائص الدوال الزوجية والفردية

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos v(t-x) + i \sin v(t-x)]\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{iv(t-x)}\, dt \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

* لوجب التكامل

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{ivt}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixv}\, dv \quad \Big| \quad e^{ivt} \cdot e^{-ixv}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{ivt}\, dt\right) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixv}\, dv\right]$$

حيث :

$$(F.T): \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{iv} \, dt$$

- يطلق عليه تحويل فورييه للدالة (f) في الصورة الأسية

* تكامل فورييه للدالة الزوجية :

من (2)

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\int_{0}^{\infty} f(t) \cos vt\, dt\right) \cos xv\, dv\right]$$

حيث :

$$(F.C.T): \int_{0}^{\infty} f(t) \cos vt\, dt$$

يطلق عليه تحويل فورييه للدالة الجيب تمام

NOTEBOOK

* تحويلات تكامل فورييه (fourier integral transforms) :-

$$(F.I): f(x) = \int_0^\infty [A(\upsilon)\cos x\upsilon\, d\upsilon + B(\upsilon)\sin x\upsilon\, d\upsilon]$$

$$A(\upsilon) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \upsilon t\, dt$$

$$B(\upsilon) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \upsilon t\, dt$$

$$(F.T): \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\upsilon t}\, dt$$

$$(F.C.I): f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (F.C.T)\cos x\upsilon\, d\upsilon$$

$$(F.C.T): \int_0^\infty f(t)\cos \upsilon t\, dt$$

$$(F.S.I): f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (F.S.T)\sin x\upsilon\, d\upsilon$$

$$(F.S.T): \int_0^\infty f(t)\sin \upsilon t\, dt$$

* تحويلات لابلاس :-

لأي دالة t ، $t \geq 0$ فان

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(S), \quad S \geq 0$$

$$L\{\sin \upsilon t\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin \upsilon t\, dt = \frac{\upsilon}{s^2+\upsilon^2}$$

NOTEBOOK

$$L\{\cos \upsilon t\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos \upsilon t \, dt = \frac{s}{s^2+\upsilon^2}$$

$$L\{e^{\upsilon t}\} = \int_0^\infty (e^{-st} \cdot e^{\upsilon t}) dt = \int_0^\infty e^{-(s-\upsilon)t} dt = \frac{1}{s-\upsilon}$$

* مثال :-

أوجد تكامل فورييه لدالة الجيب تمام (F.C.I) المناظر للدالة f ، حيث :

$$f(x) = e^{-2x}, \quad x>0$$

$$(F.C.I): f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (F.C.T) \cos x\upsilon \, d\upsilon$$

$$(F.C.T) = \int_0^\infty e^{-2t} \cos \upsilon t \, dt = \frac{2}{4+\upsilon^2}$$

$$\therefore (F.C.I) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{2}{4+\upsilon^2} \cos x\upsilon \, d\upsilon.$$

---

* مثال :-

أوجد تكامل فورييه لدالة الجيب المناظر للدالة (f) ، حيث :

$$f(x) = e^{-x}, \quad x>0$$

$$(F.S.I): f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (F.S.T) \sin x\upsilon \, d\upsilon$$

$$(F.S.T) = \int_0^\infty e^{-t} \sin \upsilon t \, dt = \frac{\upsilon}{1+\upsilon^2}$$

No: Date:

$$\therefore (F.S.I) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{v}{1+v^2}\sin xv\,dv$$

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{v}{1+v^2}\sin xv\,dv$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{v}{1+v^2}\sin xv\,dv = \frac{\pi}{2}e^{-x}$$

* مثال :

أوجد تحويل فورييه $(f.T)$ للدالة (f) ، حيث

$$f(x) = 1 , \quad -1 < x < 1$$

$$(f.T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{ivt}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{ivt}}{iv}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{iv}-e^{-iv}}{iv}\right]$$

$$e^{iv} = \cos v + i\sin v$$
$$e^{-iv} = \cos v - i\sin v$$
$$\therefore e^{iv} - e^{-iv} = 2i\sin v$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{iv}-e^{-iv}}{iv}\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{i\sin v}{iv}\right]$$

31/12/2019

Lecture ((14))

$$(F.I) = \int_0^{\infty} A(v)\cos(xv)\,dv + B(v)\sin(xv)\,dv$$

$$B(v) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(vt)\,dt$$

$$B(v) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(vt)\,dt$$

$$(F.T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{ivt}\,dt$$

$$(F.C.I) \Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} (F.C.T)\cos(xv)\,dv$$

$$(F.C.T) = \int_0^{\infty} f(t)\cos(vt)\,dt$$

$$(F.S.I):\ f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} (F.S.T)\sin(xv)\,dv$$

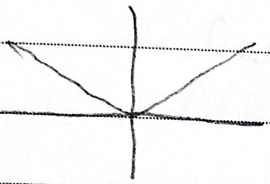
$$(F.S.T) = \int_0^{\infty} f(t)\sin(vt)\,dt$$

No: Date:

* مثال :

أوجد تحويل فورييه F.T للدالة $f(x) = e^{-|x|}$

$$F.T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} * e^{ivt} \, dt$$



$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$-|x| = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

$$e^{-|x|} = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

$$F.T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{ivt} \, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{ivt} \, dt \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1+iv)t} \, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(1-iv)t} \, dt \right]$$

$$F.T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{(1+iv)t}}{(1+iv)} \Big|_{-\infty}^{0} - e^{-(1-iv)t} \Big|_{0}^{\infty} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1+iv} + \frac{1}{1-iv} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2}{1+v^2} \right]$$

$$F.T = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{1+v^2}\right]$$

* مثال :-

أوجد تكامل فورييه (F.I) للدالة (f)

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0 & x < -\pi ,\ x > \pi \end{cases}$$

حيث أن الدالة زوجية فإن :

$$(F.I) : f(x) = \int_0^\infty A(v)\cos(xv)\,dv \quad , \quad B(v) = 0$$

$$A(v) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(t)\cos(vt)\,dt$$

$$\cos(1+v)t = \cos t\cos vt - \sin t\sin vt$$

$$\cos(1-v)t = \cos t\cos vt + \sin t\sin vt$$

$$\cos(1+v)t + \cos(1-v)t = 2\cos t\cos vt$$

$$A(v) = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi \cos(1+v)t + \cos(1-v)t\ dt$$

$$A(v) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1+v)t}{1+v} + \frac{\sin(1-v)t}{1-v}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1+v)\pi}{1+v} + \frac{\sin(1-v)\pi}{1-v}\right]$$

$$\sin(1+v)\pi = \sin(\pi)\cos(v\pi) + \underbrace{\cos\pi}_{-1} \sin v\pi$$

$$\sin(1-v)\pi = \sin(\pi)\cos(v\pi) - \cos\pi \sin v\pi$$

$$\rightarrow \sin(1+v)\pi = -\sin(v\pi)$$

$$\rightarrow \sin(1-v)\pi = \sin(v\pi)$$

$$A(v) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\sin(v\pi)}{1+v} + \frac{\sin v\pi}{1-v}\right]$$

$$= \frac{\sin(v\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{1-v} - \frac{1}{1+v}\right]$$

$$= \frac{\sin(v\pi)}{\pi}\left[\frac{1+v-1+v}{1-v^2}\right]$$

$$A(v) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{v}{1-v^2}\right)\sin(v\pi)$$

$$(F.I): f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi} \frac{v\sin(v\pi)}{1-v^2}\cos(xv)\,dv$$

$$(F.I): f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{v\sin(v\pi)}{1-v^2}\cos(xv)\,dv$$

---

* مثال :

بين أن $\int_0^\infty \frac{v\sin(v\pi)}{1-v^2}\,dv = \frac{\pi}{2}$ من السؤال السابق

بوضع $(x=0)$ فإن

$$f(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{v\sin v\pi}{1-v^2}\cos(x*0)\,dv$$

NOTEBOOK

$$f(x) = \cos x \longrightarrow f(0) = 1$$

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{v \sin(v\pi)}{1 - v^2} \, dv$$

$$\int_0^\infty \frac{v \sin(v\pi)}{1 - v^2} = \frac{\pi}{2}$$

---

* مثال :-

أوجد تكامل فورييه (F.I) للدالة f حيث

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x < 0 , x > \pi \end{cases}$$

* لاحظ ان الدالة فردية ومعرفة على نصف فترة
لو كان السؤال (F.S) فسيتم استخدام المسارين الفردي
والزوجي ولكن بما ان المطلوب (F.I) فإن
← نوجد (F.I) بمسار فردي

$$B(v) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(vt) \, dt$$

$$\cos(1+v)t = \cos t \cos vt - \sin t \sin vt$$
$$\cos(1-v)t = \cos t \cos vt + \sin t \sin vt$$
$$\cos(1+v)t - \cos(1-v)t = -2 \sin t \sin vt$$

$$B(v) = \frac{2}{\pi(-2)} \int_0^\pi \cos(1+v)t - \cos(1-v)t \, dt$$

NOTEBOOK

$$B(v) = \frac{-1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(1+v)t - \cos(1-v)t \, dt$$

$$B(v) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(1-v)t - \cos(1+v)t \, dt$$

$$B(v) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1-v)t}{1-v} - \frac{\sin(1+v)t}{1+v}\right]_0^{\pi}$$

$$B(v) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1-v)\pi}{1-v} - \frac{\sin(1+v)\pi}{1+v}\right]$$

$$B(v) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin v\pi}{1-v} + \frac{\sin v\pi}{1+v}\right]$$

$\sin(1-v)\pi = \sin\pi\cos v\pi - \cos\pi\sin v\pi$

$\sin(1+v)\pi = \sin\pi\cos v\pi + \cos\pi\sin v\pi$

$\sin(1-v)\pi = \sin(v\pi)$

$\sin(1+v)\pi = -\sin(v\pi)$

$$B(v) = \frac{\sin(v\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{1-v} + \frac{1}{1+v}\right]$$

$$B(v) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(v\pi)}{1-v^2}\right)$$

$$(F.I)\quad f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin v\pi}{1-v^2}\right) * \sin(xv)\, dv$$

$$(F.I)\quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin v\pi}{1-v^2} \sin(xv)\, dv$$ $\rightarrow$ نفس حل (F.S.I)

وهكذا بالنسبة للـ cos

---

* مثال:

أوجد الـ $f(x)$ من المعادلة التكاملية

$$\int_0^{\infty} f(x)\cos(vx)\, dx \; dx = e^{-v}$$

$x = t$

نلاحظ أن

$$\int_0^{\infty} f(t)\cos(vt)\, dt$$

No.: Date:

يمثل تحويل فورييه لدالة الجيب التمام

$$(f.C.T) = \int_0^\infty f(t) \cos(vt)\, dt$$

* المطلوب إيجاد (F.C.T)

$$(f.C.I)\ f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f.C.T \cos(xv)\, dv$$

$$(F.C.I)\ f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-v} \cos(xv)\, dv$$

$$\mathcal{L}\{\cos vt\} = \int_0^\infty e^{st} \cos vt\, dt = \frac{s}{s^2+v^2}$$

$$(f.C.I)\ f(x) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1+x^2}\right]$$

* مثال :-

أوجد $f(x)$

$$\int_0^\infty f(x) \sin(vx)\, dx = \begin{cases} 1-v & 0<v<1 \\ 0 & v>1 \end{cases}$$

هنا يمثل تحويل فورييه للدالة الجيب

$$(f.S.T) = \int_0^\infty f(t) \sin(vt)\, dt$$

$$(F.S.T) = \int_0^\infty (1-v) \sin(vt)\, dt$$

No: Date:

4/1/2020

lecture (15)

* مسائل القيمة الحدية Boundary value problems:

$u_t(x,t) = 2u_{xx}(x, t)$ ....(1)

الحل:

$u(x,t) = X(x)T(t)$ ....(2)

نعوض:

$XT' = 2X''T$

بالقسمة على $2XT$:

$$\frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = \pm\lambda^2$$

فإذا:

* $\frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = \lambda^2$ أي إذا كان الثابت (λ) موجب

. $X'' - \lambda^2 X = 0$ ....(3)

. $T' - 2\lambda^2 T = 0$ ....(4)

بحل المعادلة المساعدة من (3)

$m^2 - \lambda^2 = 0$

$(m-\lambda)(m+\lambda) = 0 \Rightarrow m = \pm\lambda$

$X = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$ حل المعادلة (3)

No: Date:

المعادلة المساعدة من (4) :-

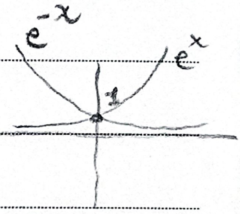
$$m^2 - 2\lambda^2 \Rightarrow m = 2\lambda^2$$

$$T = A e^{+(2\lambda^2)t} \longrightarrow$$ حل المعادلة (4)

من (2)

$$u(x,t) = XT$$
$$= e^{+(2\lambda^2)t}\left(B_1 e^{\lambda x} + B_2 e^{-\lambda x}\right)$$

* لما تكون الجذور حقيقية تظهر في صورة (exp)، وتتميز بأنها من الدوال الزائدية حتى لما الطرف الثاني متاع ال B_2 سالب بس لما يتضرب في السالب يقلب علية الموجب



* عندما يكون الثابت (λ) سالب $\frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$

- $X'' + \lambda^2 X = 0$ ...... (3)
- $T' + 2\lambda^2 T = 0$ ...... (4)

م. المساعدة من (3)

$$m^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow (m + \lambda i)(m - \lambda i) = 0$$
$$\Rightarrow m = \pm \lambda i$$
$$X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

م. المساعدة من 4

$$m = -2\lambda^2$$
$$T = e^{-(2\lambda^2)t}$$

NOTEBOOK

No: Date:

$$u(x,t) = XT$$
$$= e^{-(2\lambda^2)t}(A_1\cos\lambda x + B_1\sin\lambda x)$$

أن تكون الجذور تخالية بحيث تكون الحلول متقاربة هذا هو الحل الأنسب لأنها لما تكون متزايدة لا يمكن السيطرة عليها"

* معادلة الحرارة «Heat equ-n» :-

المثال اللازم

P.D.E : $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < L$ ....(1)

Boundary cond. BCs : $u_x(0,t) = u(L,t) = 0$, $t > 0$

initial condi. ICs : $u(x,0) = f(x)$

معادلة الحرارة لما نحطها على نمط ال ٤ ناقص تكافئ نجدها من النمط المكافئ "$B^2 - AC = 0$" $(a^2 u_{xx} + u_t = 0)$

لو حولت المعادلة $u_t + a^2 u_{xx}$ الى $Z_y + a^2 Z_{xx}$

$(D_y + a^2 D_{xx})Z = 0 \Rightarrow$ لا يوجد حل لهذه المعادلة ولكن وجد الحل الآن في هذا الموضوع

الحل :-

$$u(x,t) = X(x)T(t) \equiv XT \text{ ....(2)}$$

بالتعويض من (2) في (1)

$$XT' = a^2 X'' T$$

بالقسمة على : a^2XT

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \text{ ....(3)}$$

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0 \text{ ....(4)}$$

NOTEBOOK

No: Date:

$m^2 + \lambda^2 = 0$ المعادلة المساعدة من (3)

$\Rightarrow m = \pm \lambda i$

$\therefore X(x) = c_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$

من (2) والشروط الحدية

$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$

$\Rightarrow X(0) = 0$

$u(L,t) = X(L)T(t) = 0$

$\Rightarrow X(L) = 0$

$\therefore X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x , \quad X(0) = X(L) = 0$

$X(0) = C_1 \Rightarrow C_1 = 0$

$X(L) = C_2 \sin \lambda L = 0 , \quad C_2 \neq 0$

$\Rightarrow \sin \lambda L = 0 \Rightarrow \lambda L = n\pi$

بعين على نهاية السلك $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ ، القيم الذاتية المميزة المناظرة الدالة الذاتية «معلمه idom»

$X_n(x) = C_n \sin \lambda_n x$

المعادلة المساعدة من (4)

$m + a^2 \lambda_n^2 = 0$

$m = -a^2 \lambda_n^2$

$T_n(t) = B_n e^{-(a\lambda_n)^2 t}$

$u(x,t) = X_n T_n$

$= k_n e^{-(a\lambda)^2 t} \sin(\lambda_n x)$

NOTEBOOK

No.: Date:

$\therefore u(x,t) = \sum_n k_n \sin(\lambda_n x) e^{-(a\lambda_n)^2 t}$ ---- (5)

$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1} k_n \sin \lambda_n x$ .. (6)

وهي متسلسلة فورييه للدالة الجيب

$k_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$ ---(6)

نفترض ان *

$$\begin{aligned}
&\text{P.D.E:} \quad u_t = a^2 u_{xx} \quad , 0<x<L \longrightarrow (1) \\
&\text{BCs:} \quad u_x(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t>0 \\
&\text{ICs:} \quad u(x,0) = f(x)
\end{aligned}$$

$u(x,t) = XT \longrightarrow (2)$

$XT' = a^2 X'' T$

$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$

$X'' + \lambda^2 = 0 \Rightarrow m = \pm \lambda i : X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$ ---- (*)

$u_x(0,t) = X'(0) = 0$

$u_t(0,t) = X(L) = 0$

No: Date:

$X'(x) = -C_1 \lambda \sin \lambda x + C_2 \lambda \cos \lambda x \ , \ X'(0) = X(L) = 0$

$X'(0) = C_2 \lambda = 0$

$X(L) = C_1 \cos \lambda L = 0 \ , \ C_1 \neq 0$

$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$

$u_x(0,t) = X'(0) = 0$

$u_t(0,t) = X(L) = 0$

$\lambda L = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{\pi}{L}$

#

18/7/2019

lecture ((16))

* معادلة الموجة ex: (wave equation) (زائدي)

P.D.E: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$ ---(1)

BCs: $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $t > 0$

ICs: $u_t(x,0) = 0$, $u(x,0) = f(x)$

اعتمدنا الحل بطريقة فورييه التي تعتمد على فصل المتغيرات

$u(x,t) = X(x)T(t)$ ---(2)

$XT'' = a^2 X'' T$

بالقسمة على (a^2XT):

$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$ سالب علماً نحصل على حلول محدودة (sin, cos) التي محدودة على عكس (exp)

$X'' + \lambda^2 X = 0$ ---(3)

$T'' + a^2\lambda^2 T = 0$ ---(4)

من (2) والشروط الحدية:

$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$

$u(l,t) = X(l)T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0$

من (3) المعادلة المساعدة:

$(m+\lambda i)(m-\lambda i) = 0 \Rightarrow m = \pm\lambda i$

$\therefore X(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x$, $X(0) = X(l) = 0$

No.: Date:

$X(0) = C_1 + 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$X(L) = 0 + C_2 \sin L\lambda = 0 \Rightarrow C_2 \neq 0$

$\Rightarrow \sin L\lambda = 0 \Rightarrow L\lambda = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$

trevalsolution
حل تافه لايحقق الحل

$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ ⟸ القيم الذاتية للدوال الذاتية

$X_n(x) = C_n \sin \lambda_n x$

من (4) المعادلة المساعدة:

$m^2 + a^2\lambda^2 = 0 \rightarrow (m + a\lambda i)(m - a\lambda i) = 0$

$m = \pm a\lambda i$

$T_n(t) = k_1 \cos a\lambda_n t + k_2 \sin a\lambda_n t$

من (2) والشروط الابتدائية:

$u_t(x,t) = k_1 a\lambda_n \sin a\lambda_n t + k_2 \lambda_n \cos a\lambda_n t$

$u_t(x,0) = 0 + k_2 a\lambda_n = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

بما ان $a \neq 0$, $\lambda_n \neq 0$ لان القيم الذاتية ≠ 0 بناءا على الشروط فرضا $\Rightarrow k_2 = 0$

$\therefore T_n(t) = k_n \cos a\lambda_n t$

$U_n(x,t) = X_n T_n$

$= F_n \sin \lambda_n x \cos a\lambda_n t$

$u(x,t) = \sum_{n=1} F_n \cos a\lambda_n t \sin \lambda_n x \quad \text{---} (5)$

$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1} F_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ ⟸ وهي متسلسلة الجيب

NOTEBOOK

No: Date:

$$f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \text{---}(6)$$

* الحل من (5) و (6)

* معادلة لابلاس «ناقصي» :-

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \;, \quad 0<x<a$$
$$0<y<b \quad \cdots (1)$$

ممكن تكون ثلاث أبعاد

$$u(0,y) = u(a,y) = 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$
$$u(x,b) = g(x)$$

* نستخدم طريقة فورييه التي تقوم على فصل المتغيرات

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \equiv XY \quad \text{---}(2)$$
$$X''Y + XY'' = 0$$

بالقسمة على (XY):

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{----}(3)$$

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0 \quad \text{----}(4)$$

$$m^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\lambda i$$
$$y = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x$$
$$m^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\lambda$$
$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$$

* العلاقة بين الدوال الأسية والدوال المثلثية الزائدية:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

بوضع $(x = i\theta)$

$$\cosh(i\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$$

* العلاقة بين الدوال الأسية والمثلثية:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

بالجمع $\Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

بالطرح $\Rightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

No: Date:

* استنتاج :- اذا كانت الجذور تخيلية نضعها في صورة $\cos$, $\sin$
اما اذا كانت تخيلية ممكن وضعها في صورة الـ "Hyperbolic" الدوال الزائدية

من (3) ⇐ $m = \pm \lambda i$

$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \quad ; \quad x(0) = x(a) = 0$

$x(0) : C_1 = 0$

$x_a = C_2 \sin a\lambda = 0 \Rightarrow C_2 \neq 0$

$\Rightarrow \sin a\lambda = 0 \Rightarrow a\lambda = n\pi$

$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}$ تسمى القيم الذاتية للدوال الذاتية

$X_n = C_n \sin \lambda_n x$

من (4) :-

$m^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow m = \pm \lambda$

$Y(y) = k_1 \cosh \lambda y + k_2 \sinh \lambda y$

$u_n(x,y) = \sin \lambda_n x \, [k_1 \cosh \lambda y + k_2 \sinh \lambda y]$

$u(x,y) = \sum_{n=1} \sin \lambda_n x \, [k_1 \cosh \lambda_n y + k_2 \sinh \lambda_n y] \ldots (5)$

$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1} k_1 \sin \lambda_n x$ متسلسلة جيب

$k_1 = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \, dx \ldots (6)$

$u(x,b) = g(x) = \sum_{n=1} \sin \lambda_n x \, [k_1 \cosh \lambda b + k_2 \sinh \lambda b]$

$$k_1 \cosh \lambda b + k_2 \sinh \lambda b = \underbrace{\frac{2}{a} \int_0 g(x) \sin \lambda_n x \, dx}_{f_n}$$

NOTEBOOK

No: Date:

$$K_2 = \frac{F_n - K_1 \cosh \lambda b}{\sinh \lambda b} \quad \text{......} (7)$$

No: Date:

25/1/2020

lecture «17»

* الدوال الخاصة :-

- دالـــة جاما «Gamma fun.»

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad , \quad x>0$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} = \frac{-1}{e^t} = 1$$

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty e^{-t} \cancel{t}^{1} dt = \int_0^\infty t e^{-t} dt$$

$$= -te^{-t}\Big|_0^\infty - e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$$

1. $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x} dt = -e^{-t} t^{x}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x)$

2. $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} \quad , \quad x \neq 0 \qquad 1 < x \leq 2$

بوضع (x-1) بدلا من x في (1)

3. $\Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1)$

$$\Gamma(0.9) = \frac{\Gamma(1.9)}{0.9} \rightarrow \text{from}(2)$$

$$\Gamma(-0.9) = \frac{\Gamma(0.1)}{(-0.9)} = \frac{\Gamma(1.1)}{(-0.9)(0.1)} \quad \text{from}(2)$$

No: Date:

4. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ from 1 & 3

$= n(n-1)\Gamma(n-1)$ Keep using (3)

$= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2$

$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1)]\Gamma[n-(m-1)]$

$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(3)(2)(1)$

$= n!\ ,\ n \in N_0$

$n=0 \Rightarrow \Gamma(1) = 0! = 1$

$n=1 \Rightarrow \Gamma(2) = 1! = 1$

$n=2 \Rightarrow \Gamma(3) = 2! = 2$

$(0.1)! = \Gamma(1.1) \rightsquigarrow$ wich is existed in the schedule

$-(0.1)! = \Gamma(0.9) = \frac{\Gamma(1.9)}{0.9}$

$(2n)! = \Gamma(2n+1)$

5. $\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos^{2x-1}\theta \ \sin^{2y-1}\theta] d\theta$

بوضع $x = \frac{1}{2}$ ، $y = \frac{1}{2}$ فإن

$\frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}{\Gamma(1)} = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = 2[\theta]_0^{\pi/2} = \pi$

$\therefore \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

6. $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$, $0<n<1$

بوضع $(n=\frac{1}{2})$:

$\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi$, $\therefore \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

NOTEBOOK

No: Date:

this is >2 so using (3) and keep going using we get

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}$$

نستنتج إن دمنى إستخدمنا العلاقة (3) ثلاث مرات

$$\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right) = \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\left(\frac{2n-5}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left[(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots\sqrt{\pi}\right]\frac{1}{2^n}$$

$$\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(n+1/2)}{n-1/2} = \frac{2\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(2n-1)}$$

$$= 2\left[(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots\sqrt{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left[(2n-3)(2n-5)\ldots\sqrt{\pi}\right]$$

* مثال:

أوجد تكامل

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n-1}\theta = \frac{2^{n-1}\,\Gamma(n)}{(2n-1)(2n-3)\cdots 7}$$

من (5)

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta\,\sin^{2y-1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$$

No.: Date:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2y-1}\theta \, d = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n)}{2\Gamma(\frac{1}{2}+n)}$$

$2x-1=0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

السؤال

No: Date:

18/12/2020

lecture ((18))

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \quad , \quad x>0$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} \qquad 1 \leq x \leq 2$$

$$\Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad , \quad n \in N_0$$

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \,\sin^{2y-1}\theta \, d\theta$$

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)} \quad , \quad 0<n<1$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

* مثال:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos\theta}\, d\theta = \frac{(2\pi)^{3/2}}{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}$$

من العلاقة

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \,\sin^{2y-1}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$$

$$\begin{cases} 2y - 1 = 0 \longrightarrow y = \frac{1}{2} \\ 2x - 1 = \frac{y}{2} \longrightarrow x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

[نفس العدد موجود
الـ (sin) في المعادلة]

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{1/2}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{5}{4})}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{3}{4})}{2\Gamma(\frac{5}{4})}$$

$$\Gamma(\tfrac{5}{4}) = \tfrac{1}{4}\Gamma(\tfrac{1}{4})$$
$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} * \Gamma(\frac{3}{4})}{2 * \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})} = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})}$$

بضرب البسط والمقام في $\Gamma(\frac{1}{4})$ *

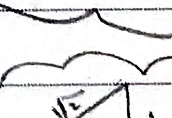
$$\int_0^{\pi} \cos^{1/2}\theta \, d\theta = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(1-\frac{1}{4})}{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{1/2}\theta \, d\theta = \frac{2\sqrt{\pi} * \frac{\pi}{\sin(\frac{1}{4}\pi)}}{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}$$

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)}$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi} * \sqrt{2}\,\pi}{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}$$



$$\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \sin(45)$$
$$\sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sqrt{2} = \frac{1}{\sin 45}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{1/2}\theta \, d\theta = \frac{(2\pi)^{3/2}}{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}$$

NOTEBOOK

* مثال:

بين أن

$$\Gamma(\tfrac{1}{4})\Gamma(-\tfrac{1}{4}) = -4\sqrt{2}\,\pi$$

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)} \qquad 0<n<1$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \longrightarrow \Gamma(\tfrac{1}{4}) = \frac{\Gamma(3/4)}{-\frac{1}{4}}$$

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

$$= \Gamma(\tfrac{1}{4}) * \frac{\Gamma(3/4)}{(-\frac{1}{4})}$$

$$= -4\Gamma(\tfrac{1}{4})\Gamma(1-\tfrac{1}{4})$$

$$= -4\,\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{4})}$$

$$= -4\sqrt{2}\,\pi$$

---

* مثال:-

بين أن

$$\Gamma(\tfrac{5}{3})\Gamma(-\tfrac{5}{3}) = \frac{2}{5}\sqrt{3}\,\pi$$

$$\Gamma(5/3)\,\frac{\Gamma(-2/3)}{(-\frac{5}{3})} = \frac{\Gamma(5/3)\Gamma(1/3)}{(-\frac{5}{3})(-\frac{2}{3})}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}{(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})} = \frac{3}{5}\,\Gamma(\tfrac{2}{3})\Gamma(\tfrac{1}{3})$$

NOTEBOOK

No.: Date:

$$\frac{\Gamma(\frac{5}{3})\,\Gamma(\frac{-2}{3})}{(-5/3)} = \frac{\Gamma(\frac{5}{3})\,\Gamma(\frac{1}{3})}{(\frac{-5}{3})(\frac{-2}{3})}$$

$$\frac{(2/3)\,\Gamma(\frac{2}{3})\,\Gamma(\frac{1}{3})}{(-\frac{5}{3})(-\frac{2}{3})}$$

$$\frac{-3\,\Gamma(1-\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{1}{3})}{5}$$

$$= \frac{3}{5}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3/5\,\pi}{\sin(n\pi)} = \frac{3\pi}{5\sin(\frac{\pi}{3})}$$

$$= \frac{3}{5}\,\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\,\pi$$

* مثال :

بين أن

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$\sqrt{a^2-x^2}$: $x = a\sin\theta$

$\sqrt{a^2+x^2}$: $x = a\tan\theta$

$\sqrt{x^2-a^2}$: $x = a\sec\theta$

حدود التكامل

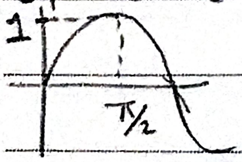
$x = \sin^{2/3}\theta$

$x^{3/2} = \sin\theta$

$\theta = \sin^{-1}(x^{3/2})$

$\theta_0 = \sin^{-1}(0) = 0$

$\theta_1 = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$



$x^{3/2} = \sin\theta$

$\boxed{x^3 = \sin^2\theta}$

$x = \sin^{2/3}\theta$

*

$1 - x^3 = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

$\sqrt[3]{1-x^3} = \cos^{2/3}\theta$

$$dx = \frac{2}{3}\sin^{-1/3}\theta\,\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,\sin^{-1/3}\theta\,d\theta}{\cos^{2/3}\theta}$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^{1/3}\theta \, \sin^{-1/3}\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \, \sin^{2y-1}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{1/3}\theta \, \sin^{-1/3}\theta \, d\theta = \frac{2}{3}\left[\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(1)}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{3})}\right]$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$2x-1 = \frac{1}{3}$

$2x = \frac{4}{3}$

$x = \frac{2}{3}$

$2y-1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

* مثال

$$\int_0^1 x^2 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 dx = \left(\frac{1}{3}\right)^4 (3!)$$

$$\begin{cases} \ln \frac{1}{x} = u \\ \frac{1}{x} = e^u \\ x = e^{-u} = \frac{1}{e^u} \\ dx = -e^{-u}\, du = \frac{-1}{e^u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = e^x \Longleftrightarrow x = \ln y \\ y = e^{\ln y} \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 dx$$

$\boxed{\begin{matrix} x-1=3 \\ x=4 \end{matrix}}$ $\quad t = 3u \quad u = \frac{t}{3}$

$$= -\int_\infty^0 e^{-2u} u^3 e^{-u}\, du = \int_0^\infty e^{-3u} u^3\, du$$

NOTEBOOK

No: Date:

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^4 \int_0^\infty e^{-t} t^3 \, dt = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Gamma(4)$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3!$$

* دالــــة بيــتا «Beta function» :-

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, dt, \quad x>0, \; y>0$$

$t = \cos^2\theta$
$\sqrt{t} = \cos\theta$
$\theta = \cos^{-1}\sqrt{t}$
$\theta_0 = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$
$\theta_1 = \cos^{-1}(1) = 0$

$$t = \cos^2\theta$$

$$dt = -2\cos\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$\beta(x,y) = -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^{2x-2}\theta \sin^{2y-2}\theta \cos\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$\beta(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

* مـــثـــال :-

أوجد ناتج التكامل

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$$

assume $\left\{ \begin{array}{l} x^4 = t \\ x = t^{1/4} \\ dx = \frac{1}{4} t^{\frac{1}{4}-1} \end{array} \right\}$

NOTEBOOK

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{1-t}}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{4}-1}}{(1-\cancel{2}t)^{1/2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 t^{\frac{1}{4}-1}(1-t)^{-1/2}\,dt$$

$$\begin{Bmatrix} x-1 = \frac{1}{4}-1 \\ x = \frac{1}{4} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} y-1 = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\beta(x,y) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

$$\beta(x,y) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{(\sqrt{\pi})\,[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(1-\frac{1}{4})}$$

$$= \frac{1}{4}\beta(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

$$\beta(x+1,y) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)} = \frac{x\,\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\,\Gamma(x+y)}$$

No: Date:

1/2/2020

lecture ((19))

* معادلة بيسل التفاضلية ((Bessel D.E)) :

$$x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0 \quad \dots (1)$$

$x_0 = 0$ نقطة انفرادية نظامية فإن الحل :

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+r} \quad , C_0 \neq 0$$

$$(r^2-n^2)C_0 = 0 \Rightarrow r^2-n^2 = 0 \Rightarrow r = \pm n$$

$$y = J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

حيث $J_n(x)$ تمثل دالة بيسل ذات الدليل n

فإن ((n = 0)) :-

$$J_0(x) = J_n(x) = J_{-n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{(2)^2(4)^2(6)^2} + \dots$$

أي يوجد للمعادلة (1) حل واحد.

وإذا $n \in N$ فإن

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

NOTEBOOK

No:

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

* المجموع الأول لمّا $(k=n-1)$ فإن

$$\frac{1}{\Gamma(-n+k+1)} = \frac{1}{\Gamma(0)} = 0$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

$$\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} \Rightarrow \frac{1}{\Gamma(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

* نوضع $(k = n+q)$ في المجموع الثاني ينتج

$$n+q = n \Rightarrow q = 0$$

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+q}}{(n+q)!\,\Gamma(q+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2q+n}$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q!\,\Gamma(n+q+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2q+n}$$

$$= (-1)^n J_n(x)$$

الحل العام للمعادلة (1) لمّا $(n \in N_0)$:-

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x), \quad Y_n(x) = J_n(x) \int \frac{dx}{x J_n^2(x)}$$

$$y'' + P(x) y' + R(x) y = 0$$

لتكن y_1 حل للمعادلة فإن

$$y_2 = y_1 z, \quad z = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$

اذا $(n\in N_0)$ فان :-

$$J_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n \Rightarrow J_n(0)=0$$

$$J_{-n}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \Rightarrow J_{-n}(0) \text{ غير معرف}$$

$\left(\frac{2}{x}\right)^n$

أي أن الدالتين $J_n(x)$ ، $J_{-n}(x)$ مستقلتين خطيا

والحل العام

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)$$

* تفاضل وتكامل دوال بيسيل :-

$$[x^n J_n(x)]' = x^n J_{n-1}(x) \Rightarrow \int x^n J_{n-1}(x) = x^n J_n(x)$$

$$[x^{-n} J_n(x)]' = -x^{-n} J_{n+1}(x) \Rightarrow \int x^{-n} J_{n+1}(x) = -x^{-n} J_n(x)$$

$$\int J_0(x)\,dx = \int\left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2^2)(4^2)} \cdots\right]dx$$

$$\int J_1(x)\,dx = -J_0(x) + C$$

$$\int x J_0(x)\,dx = x J_1(x) + C$$

$$\int x J_1(x)\,dx = -x J_0(x) + \int J_0(x)\,dx + C$$

$[x^{-n} J_n(x)]' = -x^{-n} J_{n+1}(x)$

$n=0$

$[J_0(x)]' = -J_1(x)$

$[x^n J_n(x)]' = x^n J_{n-1}(x)$

$n=1$

$[x J_1(x)]' = x J_0(x)$

NOTEBOOK

No: Date:

$u = x \qquad dv = xJ_0(x)\,dx$

$du = dx \qquad v = xJ_1(x)$

$$\int x^2 J_0(x)\,dx = x^2 J_1(x) - \int x J_1(x)\,dx$$

$$= x^2 J_1(x) - [-xJ_0(x) + \int J_0(x)\,dx$$

* مثال:-

أوجد الحل للمعادلة

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - n^2)y = 0 \longrightarrow (1)$$

المعادلة ليست على صورة معادلة بسل ولهذا نحاول وضعها في صورة المعادلة

$$t = \lambda x \quad \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \lambda$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \lambda \frac{dy}{dt} = \lambda y^{\cdot}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}\right)$$

!!!?

$$= \frac{d}{dx}\left(\lambda \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2}{dx}\left(\lambda \frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2}{dx}\left(\lambda \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt\right.$$

$$* \quad = \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\quad)\frac{dt}{dx}$$

$$y'' = \lambda^2 y^{\cdot\cdot}$$

من (1)

$$\frac{t^2}{\lambda^2}(\lambda^2 y^{\cdot\cdot}) + \frac{t}{\lambda}(\lambda y^{\cdot}) + (t^2 - n^2)y = 0$$

$$t^2 y^{\cdot\cdot} + ty^{\cdot} + (t^2 - n^2)y = 0 \longrightarrow (2)$$

NOTEBOOK

$\therefore y(t) = c_1 J_n(t) + c_2 Y_n(t)$, $y_n(t) = J_n(t) \int \frac{dt}{t J_n^2(t)}$

$y(x) = c_1 J_n(\lambda x) + c_2 Y_n(\lambda x)$, $Y_n(\lambda x) = J_n(\lambda x) \int \frac{dx}{x J_n^2(\lambda x)}$

* التعامدية لدوال بيسيل :-

المعادلة التفاضلية : $x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - n^2) y = 0$

لها الحل : $y(x) = J_n(\lambda x)$

بالقسمة على x :-

$$x y'' + y' + \left(\lambda^2 x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0$$

$$[x y']' + \left(\lambda^2 x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0$$

وهي مماثلة لمعادلة شتيرم ليوفيل التفاضلية المعرفة على $0 < x < q$ مع الشرط الحدي

$$J_n(\lambda q) = 0$$

لتكن (λ_j) جذور المعادلة

$$J_n(\lambda q) = 0$$

λ_j القيم الذاتية للدوال الذاتية

$$y_j(x) = c_j J_n(\lambda_j x) \quad , \quad 0 < x < q \quad , \quad j = 1, 2, \dots$$

وهي متعامدة بالنسبة إلى دالة الوزن x . أي أن

No: Date:

$$\int_0^a x J_n(\lambda_j x) J_n(\lambda_i x)\,dx = 0 \quad , \quad i \neq j$$

بذلك يمكن كتابة الدالة f على هيئة متسلسلة من دوال بيسل

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_n(\lambda_j x)$$

$$A_j = \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(\lambda_i a)} \int_0^a x f(x) J_n(\lambda_i x)\,dx.$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_n(\lambda_j x)$$

$$A_j = \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(\lambda_j a)} \int_0^a x f(x) J_n(\lambda_j x)\,dx$$

Hw * بين أن

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-n\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+n\right) = \frac{\pi}{\cos \alpha\pi}$$

NOTEBOOK

4/2/2020

Lecture ((20))

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - n^2)y = 0 \quad , \quad t = \lambda x$$

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0$$

$$y(t) = C_1 J_n(t) + C_2 Y_n(t) \; ; \; Y_n(t) = J_n(t)\int \frac{dt}{t J_n^2(t)}$$

$$y(x) = C_1 J_n(\lambda x) + C_2 Y_n(\lambda x) \; ; \; Y_n(\lambda x) = J_n(\lambda x)\int \frac{dx}{x J_n^2(\lambda x)}$$

$$xy'' + y' + \left(\lambda^2 x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0$$

$$\boxed{[xy']' + \left[\lambda^2 x - \frac{n^2}{x}\right]y = 0}$$

معرفة على الفترة $(0 < q < x)$
والشرط الحدي :
$J_n(\lambda q = 0)$

لتكن (λ_j) جذور المعادلة ، أي أن (λ_j) القيم الذاتية للدوال الذاتية

$$y_j = c_j J_n(\lambda_j x) \quad , \quad 0 < x < q$$

$$\int_0^q x J_n(\lambda_i x) J_n(\lambda_j x)\, dx = 0 \quad , \quad i \neq j$$

$$f(x) = \sum_{j=1} A_j J_n(\lambda_j x)$$

$$A_j = \frac{2}{q^2 J_{n+1}^2(\lambda_j q)} \int_0^q x f(x) J_n(\lambda_j x)\, dx$$

No: Date:

* مثال :-

لتكن λ_j جذور للمعادلة $J_2(ax)=0$

أكتب الدالة f على هيئة متسلسلة من دوال بيسل

$f(x) = x^2 , \quad 0 < x < a , \quad j = 1, 2, \ldots$

Sol:-

$n = 1, q = a$

$$f(x) = \sum_{j=1} A_j J_2(\lambda_j x)$$

$$A_j = \frac{2}{a^2 J_3^2(\lambda_j a)} \int_0^a x^3 J_2(\lambda_j x)\, dx$$

$\lambda_j x = t$
$dx = \frac{1}{\lambda_j} dt$

$$\int_0^a x^3 J_2(\lambda x)\, dx = \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^4 \int_0^{a\lambda_j} t^3 J_2(t)\, dt$$

$[t^n J_n(t)]' = t^n J_{n-1}(t)$

$[t^3 J_3(t)]' = t^3 J_2(t)$

$$= \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^4 \left[t^3 J_3(t) \right]_0^{a\lambda_j}$$

$$= \frac{1}{\lambda_j} \left[a^3 J_3(a\lambda_j) \right]$$

$$A_j = \frac{2a^3 J_3(a\lambda_j)}{a^2 \lambda_j J_3^2(a\lambda_j)}$$

$$f(x) = x^2 = \sum \frac{2a J_2(\lambda_j x)}{\lambda_j J_3(a\lambda_j)}$$

* مسائل القيمة الحدية :

دالة الحرارة في سلك $\Leftarrow$ $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < L$

(1) $\Leftarrow$ $u_t = a^2 (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r)$, $0 < r < 3$

دالة الحرارة في قرص دائري

$u(3, t) = 0$, $t > 0$

$u(r, 0) = f(r)$

$u(r,t) = R(r) T(t)$ .... (2)

$R T' = a^2 (R'' T + \frac{1}{r} R' T)$

بالقسمة على $(a^2 R T)$:

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = -\lambda^2$$

$r R'' + R' + r \lambda^2 R = 0$ .... (3)

$T' + a^2 \lambda^2 T = 0$ .... (4)

من (3) :

* $[r R']' + r \lambda^2 R = 0$ $\Leftarrow$ نفسها معادلة بيسل لكن $(n=0)$

لم تفاضل والتي !!

وهي معادلة شتيرم ليوفيل التفاضلية لما $(n=0)$

من (2) والشرط الحدي :

$u(3,t) = R(3) T(t) = 0 \Rightarrow R(3) = 0$

$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)$, $Y_0(\lambda r) = J_0(\lambda r) \int_0^3 \frac{dr}{r J_n^2(\lambda r)}$

$R(3) = C_1 J_0(3\lambda) = 0$, $C_2 = 0$, $C_1 \neq 0$

لكن λ_j جذور المعادلة $J_0(3\lambda) = 0$

أي أن λ_j القيم الذاتية للدوال الذاتية

$R_j(r) = C_j J_0(\lambda r)$, $0 < r < 3$, $J = 1, 2, \ldots\ldots$

No: Date:

من (4)

$$m + a^2\lambda^2 = 0$$

$$m = -a^2\lambda^2$$

$$T_j(t) = k_j e^{-(a\lambda_j)^2 t}$$

$$u(r,t) = R_j T_j$$
$$= \sum_{j=1} A_j e^{-(a\lambda_j)^2 t} J_0(\lambda_j r)$$

$$u(r,0) = f(r) = \sum_{j=1} A_j J_0(\lambda_j r)$$

$$A_j = \frac{2}{9 J_1^2(3\lambda_j)} \int_0^3 r f(r) J_0(\lambda_j r)\, dr \quad \ldots (6)$$

- $u_{tt} = a^2 (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r) \quad 0 < r < b \quad \ldots (1)$
- $u(b,t) = 0 \ , \ t > 0$
- $u(r,0) = f(r), \quad u_t(r,0) = g(r)$

$$u(r,t) = R(r)T(t) \quad \ldots (2)$$

$$RT'' = a^2 (R''T + \frac{1}{r} R'T)$$

بالقسمة على (a^2RT) :

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} = -\lambda^2$$

$$rR'' + R' + r\lambda^2 R = 0 \quad \ldots (3)$$

$$T'' + a^2\lambda^2 T = 0 \quad \ldots (4)$$

No.: Date:

من (3) :-

$$[rR']' + r\lambda^2 R = 0 \quad , n = 0$$

من (2) والشرط الحدي :-

$$u(b,t) = R(b)T(t) = 0 \Rightarrow R(b) = 0$$

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r) \; ; \; Y_0(\lambda r) = J_0(\lambda r)\int_0^b \frac{dr}{r J_0^2(\lambda r)}$$

لتكن (λ_j) جذور للمعادلة $J_0(\lambda r) = 0$

$$R_j = C_j J_0(\lambda_j r) , 0 < r < b \quad , j = 1, 2, \ldots$$

من (4) :- $m^2 + a^2\lambda^2 = 0$

$$m = \pm a\lambda i$$

$$T_j(t) = M_j \cos a\lambda_j t + N_j \sin a\lambda_j t$$

$$u(r,t) = \sum J_0(\lambda_j r)\left[k_j \cos a\lambda_j t + L_j \sin a\lambda_j t\right] \quad (5)$$

$$u(r,0) = f(r) = \sum_{j=1} k_j J_0(\lambda_j r)$$

$$k_j = \frac{2}{b^2 J_1^2(b\lambda_j)} \int_0^b \underbrace{r}_{\text{دالة الوزن}} f(r) J_0(\lambda_j r)\, dr \quad (6)$$

$$u_t(r,t) = \sum J_0(\lambda_j r)\left[(a\lambda_j)\{k_j(-\sin a\lambda_j t) + L_j \cos a\lambda_j t\}\right]$$

$$u_t(r,0) \overset{= g(r)}{=} \sum_{j=1} L_j J_0(\lambda_j r)$$

NOTEBOOK

No: Date:

$$L_j = \frac{2}{b^2 J_o(\lambda_j b)} \int_0^b r\, g(r) J_o(\lambda_j r)\, dr.$$

* مثال:- أوجد الحل للمعادلة

$$x^2y'' + xy' + 4\left(x^4 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

Sol:-

$$x^2 = t^2 \Rightarrow t^2y'' + ty' + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \rightarrow *$$

$$y = C_1 J_{1/2}(t) + C_2 J_{-1/2}(t) \qquad , n = \frac{1}{2}$$

$$J_{1/2}(t) = \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\frac{3}{2})}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}\left(\frac{t}{2}\right)^{1/2} - \frac{1}{\Gamma(5/2)}\left(\frac{t}{2}\right)^{5/2} + \frac{1}{2\Gamma(7/2)}\left(\frac{t}{2}\right)^{9/2} + \cdots$$

$$J_{1/2}(t) = \frac{1}{\underbrace{\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})}_{\sqrt{\pi}}}\left(\frac{t}{2}\right)^{1/2} - \frac{1}{(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})(\Gamma(\frac{1}{2}))}\left(\frac{t}{2}\right)^{5/2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{t}{2}\right)^{1/2} - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{t}{2}\right)^{5/2} + \frac{1}{2(\frac{5}{2})(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}\left(\frac{t}{2}\right)^{9/2} \cdots$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{t}{2}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{2}{15}\left(\frac{t}{2}\right)^4 \cdots\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{t}{2}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{1}{3!}t^2 + \frac{1}{5!}t^4 + \cdots\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{t}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{t}\right)\left[t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \cdots\right]$$

NOTEBOOK

No: Date:

$$J_{1/2}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{t^2}\right)^{1/2} \underbrace{\sum_{n=0} \frac{(-1)^n \, t^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin(t)}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2t}} \sin t$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t$$

#

No: Date:

8/2/2020

lecture ((21))

* معادلة ليجندر التفاضلية: ((legendre D.E)) :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad , n \in N_0$$

حيث أن $x=0$ نقطة عادية فإن

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2} y = 0$$

$1-x^2 = 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) = 0$ ⇐ الصفر نقطة عادية

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

حيث

$$y_1(x) = 1 - n(n+1)\frac{x^2}{2!} + n(n+1)(n-2)(n+3)\frac{x^4}{4!} \ldots$$

$$y_2(x) = x - (n-1)(n+2)\frac{x^3}{3!} + (n-1)(n+2)(n-3)(n+4)\frac{x^5}{5!} \ldots$$

$n=0$: $(1-x^2)y'' - 2xy' = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = 1 & \text{حل منتهي} \\ y_2(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \ldots & \leftarrow \text{متسلسلة} \end{cases}$

$n=1$: $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = 1 - x^2 + \ldots & \text{متسلسلة} \\ y_2(x) = x & \leftarrow \text{حدود} \end{cases}$

No:　　Date:

$n=2: \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = 1 - 3x^2 & \text{محدود} \\ y_2(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \dots & \text{متسلسلة} \end{cases}$

$n=3: \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = 1 - 6x^2 + \dots & \text{متسلسلة} \\ y_2(x) = x - \frac{5}{3}x^3 & \text{محدود} \end{cases}$

- نجد أن معادلة ليجندر التفاضلية لها حلول ذات حدود منتهية يرمز لها بالرمز ($P_n(x)$) وتعرف بحدوديات ليجندر ذات الدليل $(n \in N_0)$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{M} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

$P_0(x) = 1 \;, \; P_1(x) = x \;, \; P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

* لاحظ أنه :

- إذا (x) عدد زوجي أو صفر :

الحل المحدود يكون في صورة $y_1(x)$ ، $M = \frac{1}{2}(n)$

و $P_n(x)$ تكون دالة زوجية ، والحد الأخير للدالة $P_n(x)$ يكون عدد ثابت .

- إذا (n) عدد فردي :

الحل المحدود يكون في صورة $y_2(x)$ ، $M = \frac{1}{2}(n-1)$

و $P_n(x)$ تكون دالة فردية ، و الحد الأخير للدالة $P_n(x)$ يكون عدد ثابت مضروب في (x).

NOTEBOOK

* مثال :

أوجد المشتقة الأولى لدالة ليجندر عند الصفر

$P'_{2n+1}(0)$?

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (4n+2-2k)!}{2^{2n+1} k! (2n+1-k)! (2n+1-2k)!} x^{2n+1-2k}$$

حيث أن الدليل فردي فإن :

$$M = \frac{1}{2}(2n+1-1) = n$$

وأن الحد الأخير لما $k=n$ يكون عدد ثابت مضروب في " x "

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{(-1)^k (4n+2-2k)!}{2^{2n+1} k! (2n+1-k)! (2n+1-2k)!} \right) x^{2n+1-2k} \right.$$

لما $k=n$

$$\boxed{+ \frac{(-1)^n (2n+2)!}{2^{2n+1} n! (n+1)! (1)!} x^1}$$

$$P'_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\quad \right) x^{2n-2k} + \frac{(-1)^n (2n+2)!}{2^{2n+1} n! (n+1)! (1)!} \right.$$

$$P'_{2n+1}(0) = \frac{(-1)^n (2n+2)!}{2^{2n+1} n! (n+1)! (1)!}$$

---

* مثال :

أوجد $P'_{2n}(0)$

$$P_{2n}(x) = \sum \frac{(-1)^k (4n-2k)!}{2^{2n} k! (2n-k)! (2n-2k)!} x^{2n-2k}$$

حيث أن الدليل زوجي فإن $M = \frac{1}{2}(2n) = n$

والحد الأخير لما $k = n$

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{(n-1)} \left[\frac{(-1)^k (4n-2k)!}{2^{2n} k! (2n-k)! (2n-2k)!} x^{2n-2k} \right.$$

$$+ \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

* من العلاقة:

$$\sum_{n=0} t^n P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$$

بتربيع الطرفين والتكامل على الفترة $-1 < x < 1$

$$\sum_{n=0} t^{2n} \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1-2tx+t^2} dx$$

$1-2tx+t^2 = u$

$dx = \frac{-1}{2t} du$

$$= \frac{-1}{2t} \int \frac{du}{u} = \frac{-1}{2t} \ln u$$

$$= \frac{-1}{2t} \left[\ln(1-2tx+t^2) \right]_{-1}^{1}$$

$$\sum_{n=0} t^{2n} \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{-1}{2t} \left[\ln(1-2t+t^2) - \ln(1+2t+t^2) \right]$$

$$= \frac{-1}{2t} \left[\ln(1-t)^2 - \ln(1+t)^2 \right]$$

NOTEBOOK

$= \frac{1}{t}\left[\ln(1+t) - \ln(1-t)\right]$

$= \frac{1}{t}\left[\sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} - \sum_{n=1} (-1)^{2n+1} \frac{t^n}{n}\right]$

$= \frac{1}{t}\left[\left(t - \cancel{\frac{t^2}{2}} + \frac{t^3}{3} - \cancel{\frac{t^4}{4}} \cdots\right) - \left(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \cdots\right)\right]$

$= \frac{1}{t}\left[2t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 \cdots\right]$

$= 2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{5}t^4 + \cdots$

$= \sum_{n=0} t^{2n}\left(\frac{2}{2n+1}\right)$

$\therefore \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}$ * $\int_{-1}^{1} [P_5(x)]^2 = \frac{2}{11}$

H.W :

① $\int_0^1 J_1(x)\,dx = 1 - J_0(1)$

② $\int x J_0(x)\,dx = b_1 J_1(b)$

③ $J_0'(x) = -J_1(x)$

No: Date:

11/2/2020

lecture (22)

معادلة ليجندر $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \ , \ n \in N_0$

$$P_n(x) = \sum \left(\frac{(-1)^k \ (2n-2k)!}{2^n k! \ (n-k)! \ (n-2k)!} \right) x^{n-2k}$$

$P_0(x) = 1$ $\qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_1(x) = x$ $\qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

* اذا (n) فردي تكون الدالة فردية ، اذا (n) زوجي تكون الدالة زوجية.

(زوجي) $M = \frac{1}{2} n$ $\quad , \quad M = \frac{1}{2}(n-1)$ (فردي)

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}$$

* التعامدية :-

$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$

$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] + n(n+1)y = 0$ ...... (1)

حيث أن $P_n(x)$ حلاً للمعادلة (1)

$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)] + n[n+1]P_n(x) = 0$ ...... (2)

بضرب (2) في $P_m(x)$ والتكامل على الفترة $-1 < x < 1$

NOTEBOOK

No: Date:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0 \quad (3)$$

$u = P_m(x) \qquad dv = d\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]$

$du = P_m'(x)\,dx \qquad v = \left[(1-x^2)P_n'(x)\right]$

$$\therefore (1-x^2)P_n'(x)P_m(x)\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}(x^2-1)P_m'(x)P_n'(x)\,dx$$

$$+\, n(n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0 \quad \text{---} (4)$$

بوضع ((m)) مكان ((n)) والعكس فإن ((4)) تصبح :-

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)P_n'(x)P_m'(x)\,dx + m(m+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \quad (5)$$

بطرح (5) من (4) فإن :-

$n^2 + n - m^2 - m$

$(n-m) + (n^2-m^2)$

$(n-m)(1+n+m)$

$$(n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0.$$

- إذا $(m=n)$ فإن :-

$$(n-m)(n+m+1) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\left[P_n(x)\right]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

- وإذا $(n \neq m)$ فإن :-

$$(n-m)(n+m+1) \neq 0$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0$$

NOTEBOOK

• معناه يعني أن دوال ليجندر متعامدة بالنسبة إلى دالة الوزن
$\sigma(x) = 1$

وبذلك يمكن كتابة الدالة f على هيئة متسلسلة
من دوال ليجندر.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) \quad \ldots\ldots (6)$$

- بضرب (6) في $P_m(x)$ والتكامل على الفترة $-1 < x < 1$

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx = A_n \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx$$

إذا $m = n$ فإن

$$A_n \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1}$$

$$\therefore A_n = \frac{1}{2}(2n+1) \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx \quad \ldots\ldots (7)$$

$$f(x) = \sum_{n=0} A_n P_n(x)$$

$$A_n = \frac{1}{2}(2n+1) \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx.$$

$$A_n = (2n+1) \int_{0}^{1} f(x) P_n(x)\, dx.$$

* مثال:
أكتب الدالة f على هيئة متسلسلة من دوال ليجندر
حيث $f(x) = x \quad , \quad -1 < x < 1$

NOTEBOOK

حيث أن الدالة f فردية فإن $f(x)P_n(x)$ يكون زوجيا
لما n عدد فردي فإن

$$f(x) = \sum_{k=0} A_{2k+1} P_{2k+1}(x) = A_1 P_1 + A_3 P_3$$

$$A_{2k+1} = (4k+3) \int_0^1 x P_{2k+1}(x)\, dx.$$

$k=0$: $A_1 = 3\int_0^1 x P_1(x)\, dx$

$$= 3\int_0^1 x^2 dx = x^3\Big|_0^1 = 1$$

$k=1$: $A_3 = 7\int_0^1 x P_3(x)\, dx$

$$= \frac{7}{2}\int_0^1 x(5x^3 - 3x)\, dx.$$

$$= \frac{7}{2}\int_0^1 (5x^4 - 3x^2)\, dx = \frac{7}{2}\left[x^5 - x^3\right]_0^1 = 0$$

---

* مثال:
أكتب الدالة f على هيئة متسلسلة من دوال ليجندر، حيث

$$f(x) = x^2 \quad , \quad -1 < x < 1$$

حيث أن «f» زوجية فإن $(f(x)P_n(x))$ يكون زوجيا
عندما «n» عدد زوجي

$$f(x) = \sum_{k=0} A_{2k} P_{2k}(x) = A_0 P_0(x) + A_2 P_2(x)$$

$$A_{2k} = (4k+1) \int_0^1 x^2 P_{2k}(x)\, dx$$

$$k=0 : A_0 = \int_0^1 x^2 P_0(x)\, dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$k=1 : A_2 = 5\int_0^1 x^2 P_2(x)\, dx = \frac{5}{2}\int_0^1 x^2 (3x^2-1)\, dx$$

$$= \frac{5}{2}\left[\frac{3x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{4}{15}\right) = \frac{2}{3}$$

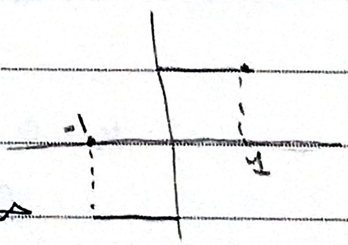
$$\therefore f(x) = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left[3x^2 - 1\right] = \frac{1}{3} + x^2 - \frac{1}{3} = x^2$$

* مثال:

أكتب على صيغة متسلسلة من دوال ليجندر للدالة f حيث

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$



حيث أن الدالة فردية فإن $f(x)P_n(x)$ يكون زوجيا لما تكون n عدد فردي

$$f(x) = \sum_{k=0} A_{2k+1} + P_{2k+1} = A_1 P_1 + A_3 P_3 + \cdots$$

$$A_{2k+1} = (4k+3)\int_0^1 P_{2k+1}(x)\,dx$$

$$k=0 : \quad A_1 = 3\int_0^1 P_1(x)\,dx = 3\int_0^1 x\,dx = \frac{3}{2}$$

$$k=1 : \quad A_3 = 7\int_0^1 P_3(x)\,dx = \frac{7}{2}\int_0^1 (5x^3-3x)\,dx = \frac{-7}{8}$$

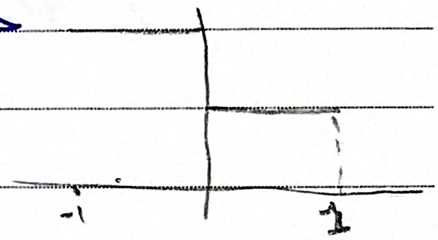
$$\therefore f(x) = \frac{3}{2}P_1(x) - \frac{7}{8}P_3(x)$$

* مثال:-

اكتب على هيئة متسلسلة من دوال ليجندر للدالة f

حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2 , & -1<x<0 \\ 1 , & 0<x<1 \end{cases}$$



$$f(x) = \sum_{n=0} A_n P_n(x)$$

$$A_n = \frac{1}{2}(2n+1)\left[2\int_{-1}^0 P_n(x)\,dx + \int_0^1 P_n(x)\,dx\right]$$

$n=0$

$$A_n = \frac{1}{2}\left[2\int_{-1}^0 P_0(x)\,dx + \int_0^1 P_0(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\int_{-1}^0 dx + \int_0^1 dx\right] = \frac{3}{2}$$

$=$