対称性の一般化と現象論への応用

三輪栞太郎

2026 年 1 月 2 日

概要

非可逆対称性としての solitonic symmetry の，アクシオン電磁気学をはじめとした現象論への応用を目指します.

目次

1 ゲージ場の配位空間その 1

ここではゲージ場の量子化の初等的な側面を扱います．主な参考文献は [1–3] です．

1.1 ゲージ不変性のある系

任意の時空間の関数を含む場・変換に対して不変な理論をゲージ不変性のある理論，あるいはゲージ理論と呼びますが，物理での典型的な例として，以下，$SU(N)$ ゲージ理論を考えます．ゲージ場の量子化の基本的なことを押さえるにはこれで十分です．構成要素の定義を後にまわすと，

定義 1.1. $SU(N)$ **ゲージ理論**
以下の Lagrangian $\mathcal{L}$ によって記述される理論を $SU(N)$ ゲージ理論と呼ぶ．物質場 φ，$SU(N)$ ゲージ場 A^a_μ を用いて，

$$\mathcal{L}(A,\varphi) \coloneqq -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{\mathrm{matter}}(\varphi, D_\mu\varphi) \tag{1.1}$$

$$F^a_{\mu\nu} \coloneqq \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{1.2}$$

$$D_\mu\varphi \coloneqq (\partial_\mu - igT^a A^a_\mu)\varphi \tag{1.3}$$

g は理論のパラメータ，f_{abc} は $SU(N)$ の構造定数，T^a を φ の属する表現における $\mathfrak{su}(N)$ の生成子の表現行列とする．また $\mathcal{L}_{\mathrm{matter}}(\varphi, D_\mu\varphi)$ は後で定義されるゲージ変換について不変な φ の Lagrangian である．

の通りです．この定義の補足もかねていくつか定義します．

定義 1.2. **物質場**
$\mathfrak{su}(N)$ の生成子を t^a で書く．$SU(N)$ の有限次元の表現行列 T^a に対し，$SU(N) \ni U = e^{ig\theta^a t^a}$ が $\varphi \mapsto e^{ig\theta^a T^a}\varphi$ と作用するような場 φ を物質場と定義する．

定義 1.3. $SU(N)$ **ゲージ場**
時空間に依存する $SU(N)$ の元 $U(x) = e^{ig\theta^a(x)t^a}$ に対し，$A^a_\mu \mapsto A'^a_\mu, s.t.\ A'^a_\mu t^a = UA^a_\mu t^a U^\dagger + \frac{i}{g}U\partial_\mu U^\dagger$ として作用するような場として $SU(N)$ ゲージ場 A^a_μ を定義する．$A_\mu \coloneqq A^a_\mu t^a$，$A'_\mu \coloneqq A'^a_\mu t^a$ としたとき，変換則は $A_\mu \mapsto A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}U\partial_\mu U^\dagger$ である．

定義 1.4. $SU(N)$ **ゲージ理論におけるゲージ変換**
物質場 φ，ゲージ場 A_μ への $SU(N)$ の作用について，作用する元を共通の時空間に依存する $U(x)$ に取り，両者を共に変換することを $SU(N)$ ゲージ理論におけるゲージ変換と呼ぶ．$U(x) = e^{ig\theta^a t^a}$ で θ^a が微小の場合，それぞれの変化分 $\delta\varphi, \delta A_\mu$ は以下の通りである．

$$\delta\varphi = ig\theta^a T^a \varphi \tag{1.4}$$

$$\delta A^a_\mu = \partial_\mu\theta^a + g f^{abc} A^b_\mu \theta^c = D_\mu\theta^a \tag{1.5}$$

以上が本章での考察対象ですが，(1.1) におけるゲージ場のエネルギーが有限となるためには，無限遠で電場

や磁場が 0 になっている必要があります．そのために，ゲージ場については 1 つ条件を課しておきます．

定義 1.5. pure gauge
$U(x) \in SU(N)$ を用いて

$$A_\mu(x) \to \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x), \quad (|x^\mu x_\mu| \to \infty) \tag{1.6}$$

を満たすようなゲージ場を，漸近的に pure gauge となるゲージ場と呼ぶ．

以下ではこの条件を満たすゲージ場のみを考察対象とし，経路積分における足しあげにおいてもこれを満たす配位のみを足しあげます．

最後に，簡単な事実として以下を述べておきます．

命題 1.6. $SU(N)$ ゲージ理論のゲージ不変性
$SU(N)$ ゲージ理論はゲージ変換に対して不変である．

Proof.

$$\mathcal{L}(A,\varphi) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{\mathrm{matter}}(\varphi, D_\mu\varphi) \tag{1.7}$$

であるが，定義より $\mathcal{L}_{\mathrm{matter}}$ はゲージ不変なので，第 1 項の不変性のみ示せばよい．$F_{\mu\nu} := F^a_{\mu\nu}t^a$ とすると

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \qquad (1.8)\\ &\mapsto \partial_\mu(UA_\nu U^\dagger + \frac{i}{g}U\partial_\nu U^\dagger) - \partial_\nu(UA_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}U\partial_\mu U^\dagger) - ig[UA_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}U\partial_\mu U^\dagger, UA_\nu U^\dagger + \frac{i}{g}U\partial_\nu U^\dagger] \qquad (1.9)\\ &= UF_{\mu\nu}U^\dagger \qquad (1.10)\end{aligned}$$

であることと，$\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu}\mathrm{tr}(t^a\tau^b) \propto F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$ であることから直ちに従う． □

以下のテーマはここで導入した理論を量子化することとなります．典型的には

$$Z := \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\, e^{i\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}(A^a_\mu,\varphi)} \tag{1.11}$$

のような計算をしたいわけですが，これが上手くいかないことは簡単に予測できます．というのも，(A^a_μ, φ) の配位を 1 つ決めると $U \in SU(N)$ によってゲージ変換した配位 (A^U_μ, φ^U) も経路積分の積分範囲に含まれ，この変換に対し被積分関数は不変なことから，Z は $\int \mathcal{D}U = \int \prod_x \mathrm{d}U(x)$ なる無限大を含むことが示唆されます．つまりゲージ理論では単純な経路積分は ill-defined になると考えられ，これを well-defined にし，上手く計算する手法を編み出す必要があります．次節以降このやり方を与えたいと思います．

1.2 ゴースト場と BRST 変換

非常に天下り的な方法を取るため一旦話が飛びますが，最後にはちゃんと戻ってきます．まず以下の通り BRST 変換とゴースト場 $c^a(x)$，反ゴースト場 $\bar{c}^a(x)$，Nakanishi-Lautrup 場 $B^a(x)$ を以下の通り導入します．

定義 1.7. (反) ゴースト場，ゴースト数

$SU(N)$ が随伴表現で作用する Grassmann 奇の実スカラー場 $c^a(x), \bar{c}^a(x)$ であって，特に後述の BRST 変換と結び付いたものをそれぞれゴースト場，反ゴースト場と呼ぶ．これらを含む単項式について，c^a の次数から $\bar{c}^a$ の次数を引いたものをその関数のゴースト数と定義する．$C \coloneqq c^a t^a$，$\bar{C} \coloneqq \bar{c}^a t^a$ としておく．

定義 1.8. Nakanishi-Lautrup 場

$SU(N)$ が随伴表現で作用する Grassmann 偶の実スカラー場 $B^a(x)$ であって，特に後述の BRST 変換と結び付いたものを Nakanishi-Lautrup (NL) 場と呼ぶ．$B \coloneqq B^a t^a$ としておく．

定義 1.9. BRST 変換

1. 物質場 φ とゲージ場 A_μ^a の BRST 変換を，ゲージ変換のパラメータを Grassmann 数 λ とゴースト場 $c^a(x)$ の積に置きかえたもの

$$\varphi \mapsto \varphi + \delta_B \varphi \coloneqq \varphi + ig\lambda c^a T^a \varphi \tag{1.12}$$

$$A_\mu^a \mapsto A_\mu^a + \delta_B A_\mu^a \coloneqq A_\mu^a + \lambda(\partial_\mu c^a + g f_{abc} A_\mu^b c^c) = A_\mu^a + \lambda D_\mu c^a \tag{1.13}$$

   として定義する．$\delta_B = \lambda \boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}$ なる $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}$ を用いて $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}\varphi = igc^a T^a \varphi, \boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} A_\mu = \partial_\mu C + ig[C, A_\mu]$ とも書ける．

2. A_μ^a, φ の上で $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}^2 = 0$ となるように c^a の BRST 変換を定義する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}\varphi) &= \boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(igc^a T^a \varphi) &(1.14)\\ &= ig\{(\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} c^a) T^a \varphi - c^a T^a (igc^b T^b \varphi)\} &(1.15)\\ &= ig\{(\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} c^a) T^a \varphi + \frac{1}{2} g f_{abc} c^a c^b T^c \varphi)\} &(1.16)\end{aligned}$$

   より $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} c^a \coloneqq -\frac{1}{2} g f_{abc} c^b c^c$ が得られ，$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} C = -\frac{1}{2} g f_{abc} c^a c^b t^c = igC^2$ となる．このとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} A_\mu) &= \boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(\partial_\mu C + ig[C, A_\mu]) &(1.17)\\ &= ig(\partial_\mu C)C + igC(\partial_\mu C) + ig[igC^2, A_\mu] - ig\{C, \partial_\mu C + ig[C, A_\mu]\} &(1.18)\\ &= ig[igC^2, A_\mu] - ig\{C, ig[C, A_\mu]\} &(1.19)\\ &= 0 &(1.20)\\ \boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} C) &= \boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(igC^2) = ig(C^3 - C^3) = 0 &(1.21)\end{aligned}$$

   も同時に成り立つ．

3. ゴースト場 c^a 1 個 1 個に対応して反ゴースト場 $\bar{c}^a$ を導入し，その BRST 変換を Nakanishi-Lautrup 場を用いて

$$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} \bar{c}^a \coloneqq iB^a$$

   とする．$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}^2 \bar{c}^a = 0$ を要請して $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} B^a \coloneqq 0$ とし，$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}^2 B^a = 0$ は自明に成り立つ．

このとき，BRST 変換を用いて Lagrangian $\mathcal{L}(A, \varphi)$ の特殊な拡張を考えます．

定義 1.10. $SU(N)$ ゲージ理論の BRST Lagrangian
$\mathcal{L}(A,\varphi)$ を $SU(N)$ ゲージ理論の Lagrangian，$F^a(A,\varphi,c,\bar{c},B)$ を

1. ゴースト数が 0
2. $\mathcal{L}(A,\varphi)-i\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\bar{c}^aF^a)$ にゲージ不変性がない

を満たす任意の関数とするとき，$\tilde{\mathcal{L}}(A,\varphi,c,\bar{c},B)\coloneqq\mathcal{L}(A,\varphi)-i\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\bar{c}^aF^a)$ を $\mathcal{L}$ の BRST Lagrangian と定義する．$\mathcal{L}_{GF+FP}\coloneqq-i\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\bar{c}^aF^a)=B^aF^a-i\bar{c}^a\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}F^a$ であるが，第 1 項をゲージ固定項 $\mathcal{L}_{GF}$，第 2 項を Faddeev-Popov 項 $\mathcal{L}_{FP}$ と呼ぶ.

ほとんど自明な事実として以下が従います.

命題 1.11. BRST Lagrangian の BRST 不変性
$\tilde{\mathcal{L}}$ は BRST 変換によって不変である.

Proof.
$\tilde{\mathcal{L}}=\mathcal{L}-i\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\bar{c}^aF^a)$ であるが，$\mathcal{L}$ に対して，BRST 変換はゲージ変換でパラメータを λc としたものなので，ゲージ不変性より BRST 不変性が言える．第 2 項については BRST 変換で $-i\lambda\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}\{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\bar{c}^aF^a)\}$ だけ変化し，$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}^2=0$ よりこれは 0 になる. □

BRST 変換を制御するのは定数 λ なので，これは大域的な変換に対する不変性です．つまり $\tilde{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{L}$ がゲージ不変性を失い，代わりにある大域的な対称性を得るように構成したものだと言えます．$\tilde{\mathcal{L}}$ にはゲージ不変性がないため，前節の最後で述べた種類の発散が出ないことも重要です.

さらに，Lagrangian だけでなく物理的状態の BRST 不変性についても述べておきます．陽な表式は次節で示しますが，BRST 変換の生成子を Q_B としたとき，物理的な状態を以下で定義します.

定義 1.12. 物理的状態
理論のヒルベルト空間の状態空間の元 $|\psi\rangle$ で，$Q_B|\psi\rangle=0$ を満たすものを物理的状態と定義する.

つまり今後は，$Q_B|\psi\rangle=0$ となるような BRST 不変な状態のみを考察対象とするということです．なぜこのような条件を課すかというと，状態ベクトルのノルムを正に限るためなのですが，説明は一旦省きます．さらに後でわかる通り Q_B は Hermite かつ $Q_B^2=0$ を満たすので，$|\psi\rangle=Q_B|\chi\rangle$ となる $|\psi\rangle$ は遷移振幅に寄与せず無視できます．よって物理的状態の定義を改めて，

定義 1.13. 物理的状態
理論の状態空間の元で $Q_B|\psi\rangle=0$ を満たし，かつ $|\psi\rangle=Q_B|\chi\rangle$ と書けないものを物理的状態と定義する.

と取っても差し支えありません．このような条件を満たす元を BRST コホモロジーの元とも言います.

本節の最後に，$\tilde{\mathcal{L}}$ に関する極めて重要な事実を示して終わろうと思います.

命題 1.14. F **の選択の任意性**
BRST 不変な関数 $\Omega(A,\varphi,c,\bar{c},B)$ に対して,

$$\langle\Omega\rangle := \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\,\Omega\, e^{i\int \mathrm{d}^4x\tilde{\mathcal{L}}} \tag{1.22}$$

は F^a の選択に依らない.

Proof.

$$\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\Omega e^{i\int \mathrm{d}^4x\{\mathcal{L}-i\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\bar{c}^aF^a)\}} \tag{1.23}$$

において，微小なパラメータ ϵ を用いて $F^a \mapsto F^a + \epsilon\delta F^a$ を考える．このとき $\langle\Omega\rangle$ の変化分は,

$$\delta\langle\Omega\rangle \simeq -i\epsilon\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\Omega\, e^{i\int \mathrm{d}^4x\tilde{\mathcal{L}}}\int \mathrm{d}^4x\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\bar{c}^a\delta F^a) \tag{1.24}$$

となるが,

$$\omega := \Omega e^{i\int \mathrm{d}^4x\tilde{\mathcal{L}}}\int \mathrm{d}^4x\bar{c}^a\delta F^a \tag{1.25}$$

とすると，Ω, $\tilde{\mathcal{L}}$ の BRST 不変性から $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}\omega = \Omega e^{i\int \mathrm{d}^4x\tilde{\mathcal{L}}}\int \mathrm{d}^4x\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\bar{c}^a\delta F^a)$ が成り立つ．ゆえに

$$\delta\langle\Omega\rangle = -i\epsilon\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}\omega \tag{1.26}$$

である．ここで，プライム記号を用いて BRST 変換を表すとすると,

$$\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}\omega = \int \mathcal{D}A'\mathcal{D}\varphi'\mathcal{D}c'\mathcal{D}\bar{c}'\mathcal{D}B'\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}\omega' \tag{1.27}$$

$$= \int \mathcal{D}A'\mathcal{D}\varphi'\mathcal{D}c'\mathcal{D}\bar{c}'\mathcal{D}B'\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\omega+\lambda\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}\omega) \tag{1.28}$$

が成り立ち，Jacobian が自明，つまりアノマリーがないことを仮定すれば

$$\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\,\omega = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\,\omega + \lambda\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}\omega \tag{1.29}$$

が任意の λ で成り立ち，そのまま $\delta\langle\Omega\rangle = 0$ となる. □

例えば BRST 不変な状態間の遷移振幅の計算では $\Omega = \Psi_{\mathrm{F}}^*\Psi_{\mathrm{I}}$ が BRST 不変なので，F をどう取ってもよいことになります．次節以降では，期待値を取る関数が BRST 不変であるときには $F^a = \partial^\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2}B^a$ を用いることにします．α をゲージパラメータと呼びます．このとき，$\mathcal{L}_{GF} = B^a\partial^\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2}B^aB^a$, $\mathcal{L}_{FP} = -i\bar{c}^a\partial^\mu D_\mu c^a$ が成り立ちます.

1.3 変換の生成子と状態への作用

本節ではまず，BRST 変換をゲージ変換の生成子，つまり場 ϕ について $\delta\phi = i[\lambda Q_B,\phi]$, $\delta\phi = i[G(\theta),\phi]$ となる，汎関数微分可能な Q_B, $G(\theta)$ を構成したいと思います．$\tilde{\mathcal{L}}$ を演算子形式で量子化することが前提にな

るので，まず正準交換関係を求めます．そのためにそれぞれの一般化運動量を求めましょう．前節で示した $\tilde{\mathcal{L}}$ を全微分項だけ変更した

$$\tilde{\mathcal{L}}(A,\varphi,c,\bar{c},B) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{\mathrm{matter}}(A,\varphi) + B^a\partial^\mu A^a_\mu + \frac{1}{2}\alpha B^a B^a - i\partial^\mu \bar{c}^a D_\mu c^a \tag{1.30}$$

考えると，

$$\pi^{a\mu} \coloneqq \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{A}^a_\mu} = F^{a\mu 0} + \delta^{\mu 0}B^a, \quad \pi_\varphi \coloneqq \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\varphi}} \tag{1.31}$$

$$\pi^a_c \coloneqq \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{c}^a} = -i\dot{\bar{c}}^a, \quad \pi^a_{\bar{c}} \coloneqq \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\bar{c}}^a} = i(\dot{c}^a + gf^{abc}A^b_0 c^c), \quad \pi^a_B \coloneqq \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{B}^a} = 0 \tag{1.32}$$

が得られます．$\pi^a_B = 0$ となってしまいますが，B^a は A^a_0 に共役な運動量として定まっているので，またそれに共役な運動量を考えることはしないという方針で進めます．得られる正準（反）交換関係は

$$[A^a_j(t,\boldsymbol{x}), \pi^{bk}(t,\boldsymbol{y})] = i\delta^{ab}\delta^k_j\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{1.33}$$

$$[A^a_0(t,\boldsymbol{x}), B^b(t,\boldsymbol{y})] = i\delta^{ab}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{1.34}$$

$$[\varphi(t,\boldsymbol{x}), \pi_\varphi(t,\boldsymbol{y})\} = i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{1.35}$$

$$\{c^b(t,\boldsymbol{x}), \pi^a_c(t,\boldsymbol{y})\} = \{\bar{c}^b(t,\boldsymbol{x}), \pi^a_{\bar{c}}(t,\boldsymbol{y})\} = i\delta^{ab}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{1.36}$$

となります．

ここで，BRST 変換は大域的な変換なので，Q_B は Noether の定理から簡単に求まります．BRST 変換に関する保存カレント $J^{(B)}_\mu$ は，物質場のカレント $ij^a_\mu \coloneqq \{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{matter}}/\partial(\partial^\mu\varphi)\}T^a\varphi$ を用いて

$$\begin{aligned}\lambda J^{(B)}_\mu &= \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial^\mu A^{a\nu})}\lambda D^\nu c^a + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial^\mu\varphi)}ig\lambda c^a T^a\varphi + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial^\mu c^a)}(-\frac{1}{2}\lambda g f_{abc}c^b c^c) + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial^\mu\bar{c}^a)}i\lambda B^a \\ &= -F^a_{\mu\nu}\lambda(D^\nu c)^a - j^a_\mu g\lambda c^a + \frac{1}{2}ig\lambda(\partial_\mu\bar{c})^a f_{abc}c^b c^c - \lambda(D_\mu c)^a B^a\end{aligned} \tag{1.37}$$

となるので Noether charge Q_B は

$$\begin{aligned}Q_B &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\{-F^a_{0\nu}(D^\nu c)^a - gj^a_0 c^a + \frac{1}{2}ig(\partial_0\bar{c})^a f_{abc}c^b c^c - (D_0 c)^a B^a\} \\ &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{\pi^{ai}(D_i c)^a + B^a(D_0 c)^a + ig\pi_\varphi c^a T^a\varphi - \frac{1}{2}g\pi^a_c f_{abc}c^b c^c + i\pi^a_{\bar{c}}B^a\right\}\end{aligned} \tag{1.38}$$

と得られます．明らかに，これは Hermite で $Q^\dagger_B = Q_B$，$Q^2_B = 0$ が成り立つのもわかります．次にゲージ変換については，システマチックに生成子を求める方法も少しややこしいので，天下り的に $G(\theta)$ を与えて生成子であることを確かめることにします．

$$G(\theta) \coloneqq \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\{\pi^{ai}(D_i\theta)^a + B^a(D_0\theta)^a + ig\pi_\varphi\theta^a T^a\varphi - gf_{abc}\theta^a(\pi^b_c c^c + \pi^b_{\bar{c}}\bar{c}^c)\} \tag{1.39}$$

と定義すれば，これは θ の無限遠での振る舞いに依らず汎関数微分可能となり，正準交換関係を利用して

$$i[G(\theta), A^a_j] = (D_j\theta)^a, \quad i[G(\theta), A^a_0] = (D_0\theta)^a, \quad i[G(\theta), \varphi] = ig\theta^a T^a\varphi \tag{1.40}$$

$$i[G(\theta), c^a] = gf_{abc}\theta^b c^c, \quad i[G(\theta), \bar{c}^a] = gf_{abc}\theta^b\bar{c}^c \tag{1.41}$$

を得られます．以上より Q_B と $G(\theta)$ の表式が得られました．

ここで補題として，Q_B と $G(\theta)$ の関係を以下のように示しておきます．

補題 1.15. **Q_B と $G(\theta)$ の関係**
$SU(N)$ ゲージ理論の BRST Lagrangian による理論において，

$$G(\theta) = -i\left\{Q_B, \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\theta^a(x)\pi_{\bar{c}}^a(x)\right\} + \oint \mathrm{d}S_i\pi^{ai}\theta^a + [B^a\theta^a]_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} - gf_{abc}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\theta^a\pi_c^b\bar{c}^c \tag{1.42}$$

Proof. 無限遠では各々の場が 0 となるので，

$$Q_B = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{\pi^{ai}(D_ic)^a + B^a(D_0c)^a + ig\pi_\varphi c^aT^a\varphi - \frac{1}{2}g\pi_c^af_{abc}c^bc^c + i\pi_{\bar{c}}^aB^a\right\} \tag{1.43}$$

$$= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{-(D_i\pi^i)^ac^a - (D_0B)^ac^a + ig\pi_\varphi c^aT^a\varphi - \frac{1}{2}g\pi_c^af_{abc}c^bc^c + i\pi_{\bar{c}}^aB^a\right\} \tag{1.44}$$

が成り立つ．よって無限遠で $c \to 0$ と限らないことに注意すると，

$$\left\{Q_B, \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\theta^a\pi_{\bar{c}}^a(x)\right\} = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{-i(D_i\pi^i)^a\theta^a - i(D_0B)^a\theta^a - ig\pi_\varphi T^a\theta\varphi - igf_{abc}\theta^a\pi_c^bc^c\right\} \tag{1.45}$$

$$= iG(\theta) - i\oint \mathrm{d}S_i\pi^{ai}\theta^a - i[B^a\theta^a]_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} + igf_{abc}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\theta^a\pi_c^b\bar{c}^c \tag{1.46}$$

となり，示された． □

最後にここで得られた $Q_B, G(\theta)$ の状態への作用を考えていきます．次節で $\tilde{\mathcal{L}}$ の経路積分量子化を扱うので，経路積分において境界条件を定める

$$\Psi_{\mathrm{I,F}}[A, \varphi, c, \bar{c}, B] \coloneqq \langle t_{\mathrm{I,F}} = \mp\infty; A, \varphi, c, \bar{c}, B|\Psi_{\mathrm{I,F}}\rangle \tag{1.47}$$

に対してのみ考えることにします．なお，前節で述べた通り，$\Psi_{\mathrm{I,F}}$ は BRST コホモロジーの元としておきます．よって $\Psi_{\mathrm{I,F}}$ は Q_B の作用で不変です．次に $G(\theta)$ の作用ですが，式 (1.47) の第 1 項からは

$$\left\{Q_B, \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\theta^a\pi_{\bar{c}}^a\right\}|\Psi_{\mathrm{I,F}}\rangle = Q_B\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\theta^a\pi_{\bar{c}}^a|\Psi_{\mathrm{I,F}}\rangle \tag{1.48}$$

しか出てこず，もとの $|\Psi_{\mathrm{I,F}}\rangle$ と遷移振幅のレベルで等価な状態しか作りません．よって $|\Psi_{\mathrm{I,F}}\rangle$ が $G(\theta)$ の非自明な作用を受けるとすれば第 2 項以降が関係します．ここで $\Psi_{\mathrm{I,F}}[A, \varphi, c, \bar{c}, B]$ の構造を改めて考えてみるのですが，始状態・終状態においては通常，$c, \bar{c}, B$ のない状態を取る以上，これらの場にとっての境界条件は真空，つまりナイーブに考えると Lagrangian の $i\epsilon$ 項として処理できると思えます．よって $\Psi_{\mathrm{I,F}}[A, \varphi, c, \bar{c}, B]$ は今後 $\Psi_{\mathrm{I,F}}[A, \varphi]$ と書くことにし，$i\epsilon$ 項のゲージ不変性も仮定します．ゴーストにのみ作用する式 (1.47) の第 4 項はゴーストの項のゲージ変換を引き起こしますが，仮定よりこれは自明な変換となります．最後に残るのは θ^a が境界条件で 0 か否かで決まる第 2 項と第 3 項だけです．よって以下が成り立ちます．

命題 1.16. **始状態・終状態のゲージ変換性**
BRST Lagrangian による理論において，境界に現れる状態に対する $G(\theta)$ の作用は，$\theta^a(x) \to 0$，$(|x^\mu x_\mu| \to \infty)$ のとき自明，$\theta^a(x) \to \theta_\infty^a(x) \neq 0$，$(|x^\mu x_\mu| \to \infty)$ のとき非自明となる．

ここで以下の記法を導入します．

定義 1.17. small ゲージ変換
$\theta^a \to 0,\ (|x^\mu x_\mu| \to \infty)$ となるゲージ変換を small ゲージ変換と呼び，small ゲージ変換全体の集合を $\mathcal{G}_* := \{U(x) \in SU(N); U \to 1,\ (|x^\mu x_\mu| \to \infty)\}$ と書く．

$\theta^a(x) \to \theta^a_\infty(x) \neq 0$ なる変換をこれと比較して large ゲージ変換と呼ぶこともあるのですが，実はこれと異なるものを large ゲージ変換と呼ぶこともあり，ややこしいのでここではこの言葉を定義しないことにします．$\mathcal{G}_*$ は次節で A^a_μ の経路積分を考える際にも極めて重要となります．

1.4 ゲージ理論の経路積分量子化

本節でようやく，ゲージ理論を経路積分量子化します．$\tilde{\mathcal{L}}$ による理論の量子化が，もとの $\mathcal{L}$ の量子化と等価であることを示してゴールです．数学的にはよくない書き方ですが，以下を示していきます．

命題 1.18. ゲージ理論の経路積分量子化
$(SU(N))$ ゲージ理論の Lagrangian $\mathcal{L}$ とその BRST Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ について，

$$\left(\int_{\mathcal{G}_*} \mathcal{D}U\right) \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\Psi^*_{\mathrm{F}}[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]e^{i\int \mathrm{d}^4x\tilde{\mathcal{L}}} = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\Psi^*_{\mathrm{F}}[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]e^{i\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}} \tag{1.49}$$

が成り立つ．

両辺，数学的には ill-defined ですが，物理的な意味は明快です．$\mathcal{L}$ を用いてナイーブに計算した遷移振幅は，ゲージ不変性による無限大の係数 $\int_{\mathcal{G}_*} \mathcal{D}U$ を除いて $\tilde{\mathcal{L}}$ による計算に等しいということです．つまり $\tilde{\mathcal{L}}$ の量子化は，$\mathcal{L}$ の well-defined な量子化を与えます．以下ではこれを示しますが，左辺の被積分関数は BRST 不変なので，$\tilde{\mathcal{L}}$ における F^a の選択が自由です．よって証明においては 1.2 節で与えたものを用います．

まず補題として以下を示します．Gribov 問題については証明の中で説明します．

補題 1.19. Faddeev-Popov 行列式
Gribov 問題を無視したとき，任意の関数 $f^a(x)$ について，以下が成り立つ．

$$\mathrm{Det}(\partial^\mu D_\mu)\delta(\partial^\mu A^a_\mu - f^a) = \delta(\partial^\mu A^a_\mu - f^a)\left[\int_{\mathcal{G}_*} \mathcal{D}U\delta(\partial^\mu A^{U,a}_\mu - f^a)\right]^{-1} \tag{1.50}$$

Proof.

右辺を変形して左辺となることを示す．右辺について，$\partial^\mu A^a_\mu = f^a$ において $\int_{\mathcal{G}_*} \delta(\partial^\mu A^{U,a}_\mu - f^a)$ を評価すればよいわけだが，ナイーブには $U = 1$ の近傍で計算すればよいと予想される．なぜなら，$A^a_\mu = f^a_\mu$ なる A^a_μ に対して

$$\partial^\mu A^{U,a}_\mu - f^a = 0, \quad U \in \mathcal{G}_* \tag{1.51}$$

なる方程式の解は $U = 1$ に限られるようだからである．U に関する微分方程式とみたときに，$U \in \mathcal{G}_*$ より無限遠の境界条件が自然に課されていることも重要である．実際，ゲージ場の量子化においては方程式 (1.51) の解が $U = 1$ のみと仮定して進めることが多く，この仮定がないと式 (1.49) も導けないのだが，期待とは裏腹に (1.51) には離散的に複数の解が存在しうることが知られている．この問題を Gribov 問題という．しかし

ながら，摂動論の範囲や弱結合の範囲ではこの問題は効いてこないと考えられている．それは以下の理由による．今，ざっくりとした議論で $U \simeq 1$ と仮定すると (1.51) は

$$\partial^\mu D_\mu \theta^a = \partial^\mu(\partial_\mu \theta^a + g f^{abc} A_\mu^b \theta^c) = 0 \tag{1.52}$$

となる．ここで $gf^{abc}A_\mu^b\theta^c$ の寄与が小さければこれは単なる Laplace 方程式であり，境界条件のもとで解は $\theta^a = 0$ に定まる．また $\theta^a \neq 0$ なる解は，強結合や非摂動的な状況でのみ効くようである．前おきが長くなったが，今の場合仮定より Gribov 問題を無視することになっているので，(1.51) の解は $U = 1$ のみとする．これは弱結合，摂動的な場合には正しく，そうでない場合にも building block として有用な仮定として受け入れる．その場合，前述の通り (1.50) の右辺は $U = 1$ 近傍でのみ評価してよく，

$$(\partial^\mu A_\mu^a - f^a)\left[\int_{\mathcal{G}_*} \mathcal{D}U \delta(\partial^\mu A_\mu^{U,a} - f^a)\right]^{-1} = \delta(\partial^\mu A_\mu^a - f^a)\left[\int_{\mathcal{G}_*} \mathcal{D}U \delta(\partial^\mu D_\mu \theta^a)\right]^{-1} \tag{1.53}$$

$$= \mathrm{Det}(\partial^\mu D_\mu)\delta(\partial^\mu A_\mu^a - f^a) \tag{1.54}$$

を得る．　□

これを Faddeev-Popov (FP) 行列式と呼び，$\Delta[A] \coloneqq \int_{\mathcal{G}_*} \mathcal{D}U\delta(\partial^\mu A_\mu^{U,a} - f^a)$ と書くことにします．$\Delta[A]$ がゲージ不変なのはほとんど自明です．

さて，以上の補題のもとで命題 1.18 を示します．

Proof.

(1.49) の左辺を変形して右辺を導きます．

$$\left(\int_{\mathcal{G}_*} \mathcal{D}U\right) \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B \Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi] e^{i\int \mathrm{d}^4x \tilde{\mathcal{L}}(A,\varphi,c,\bar{c},B)} \tag{1.55}$$

$$= \left(\int_{\mathcal{G}_*} \mathcal{D}U\right) \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B \Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi] e^{i\int d^4x \mathcal{L}(A,\varphi) + i\int d^4x (\frac{1}{2}\alpha B^a B^a + B^a \partial^\mu A_\mu^a) - \int d^4x \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu c^a} \tag{1.56}$$

$$= \left(\int_{\mathcal{G}_*} \mathcal{D}U\right) \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi \Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi] \mathrm{Det}(\partial^\mu D_\mu)\, e^{i\int d^4x \mathcal{L}(A,\varphi) - i\int d^4x \frac{(\partial^\mu A_\mu^a)^2}{2\alpha}} \tag{1.57}$$

$$= \left(\int_{\mathcal{G}_*} \mathcal{D}U\right) \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}f \Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi] \mathrm{Det}(\partial^\mu D_\mu)\delta(\partial^\mu A_\mu^a - f^a) e^{i\int d^4x \mathcal{L}(A,\varphi) - i\int d^4x \frac{(f^a)^2}{2\alpha}} \tag{1.58}$$

$$= \left(\int_{\mathcal{G}_*} \mathcal{D}U\right) \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}f \Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi] \delta(\partial^\mu A_\mu^a - f^a)\left[\int_{\mathcal{G}_*} \mathcal{D}U' \delta(\partial^\mu A_\mu^{U',a} - f^a)\right]^{-1} e^{i\int d^4x \mathcal{L}(A,\varphi) - i\int d^4x \frac{(f^a)^2}{2\alpha}} \tag{1.59}$$

$$= \left(\int_{\mathcal{G}_*} \mathcal{D}U\right) \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}f \Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi] \delta(\partial^\mu A_\mu^{U,a} - f^a)\left[\int_{\mathcal{G}_*} \mathcal{D}U' \delta(\partial^\mu A_\mu^{U',a} - f^a)\right]^{-1} e^{i\int d^4x \mathcal{L}(A,\varphi) - i\int d^4x \frac{(f^a)^2}{2\alpha}} \tag{1.60}$$

$$= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}f \Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi] e^{i\int d^4x \mathcal{L}(A,\varphi) - i\int d^4x \frac{(f^a)^2}{2\alpha}} \tag{1.61}$$

$$= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi \Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi] e^{i\int d^4x \mathcal{L}(A,\varphi)} \tag{1.62}$$

導出においては有限の定数倍は無視した．　□

以上をもってゲージ理論の量子化は，$\tilde{\mathcal{L}}$ を構成することで成されるとわかりました．最後に (1.49) より，

$$\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]e^{i\int \mathrm{d}^4x\tilde{\mathcal{L}}} = \left(\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U\right)^{-1}\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]e^{i\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}} \tag{1.63}$$

$$= \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*}\mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]e^{i\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}} \tag{1.64}$$

を得ます．つまりゲージ理論の well-defined な量子化は，漸近的に pure gauge となるゲージ場全体 $\mathcal{A}$ に，$\mathcal{G}_*$ の元についてのゲージ変換による同値類を入れた空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ 上の経路積分を考えることに対応します．ちなみにゲージ変換全部を用いて同値類を入れるとなぜいけないかというと，前節で述べた通り $\mathcal{G}_*$ に含まれないゲージ変換に対しては，$\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]$ が変化しうるからです．そういう意味で，被積分関数の全てを不変に保つ $\mathcal{G}_*$ の元は真の冗長性を表していて，$\mathcal{G}_*$ に含まれないゲージ変換については，$\mathcal{L}$ のみ不変に保つという意味で通常の対称性と同様の性質をもちます．このような，無限遠でのゲージ変換に対する対称性は漸近 (的) 対称性と呼ばれ，閉じ込めとの関連も示唆されています [4].

1.5* ゲージ理論の摂動計算

ゴーストを用いた理論を用いて，Feynman ダイアグラムを用いた $(SU(N))$ ゲージ理論の摂動計算について述べます.

2　ゲージ場の配位空間その 2

ここでは，ゲージ理論に現れるゲージ場と物質場についてその数学的な扱いを述べます．Lorentz 変換，スピノールに関連する数学はそれ単体で面倒なので，本章では内部対称性にのみ焦点を当てます．本章のほとんどが数学，特に微分幾何学の内容で，大部分を [5] に従います．各節のタイトルについても，そのほとんどが扱う数学的なトピックに対応しています．物理の内容としては導入を 2.1 節，数学的事実を踏まえた定式化のまとめを 2.9 節に示すので，数学に詳しい方はこの部分だけ読むこともできます．

2.1　局所的な変換をどう扱うか

前章で述べた通り，ゲージ理論における物質場とゲージ場は物理的には，時空間の座標に依存する Lie 群 G の元 $U(x)$ と G の表現 ρ を用いて

$$\varphi(x) \mapsto \rho(U(x))\varphi(x) \tag{2.1}$$

$$A_\mu(x) \mapsto U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + U\partial_\mu U^{-1} \tag{2.2}$$

と変換するものとして定義されます．これを数学的に定式化したいわけですが，どのように方針を定めればよいでしょうか．ここで，同じく局所的な変換に対する不変性をもつ理論である一般相対論とのアナロジーが有用です．一般相対論では一般座標変換

$$x \mapsto x' \tag{2.3}$$

なる局所的な変換を考えますが，座標変換に対してある点 $p \in M$ における共変ベクトルの成分 $v^\mu(p)$ は

$$v^\mu(p) \mapsto \left.\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right|_p v^\nu(p) \tag{2.4}$$

と変換します．数学的にこれは，ある点 p を含む異なるパッチの取り換えに対応し，これは素朴な座標変換の描像とも一致します．ゲージ理論においても $p \in M$ における物質場 $\varphi(p)$ は

$$\varphi(p) \mapsto \rho(U(p))\varphi(p) \tag{2.5}$$

と変換しますが，これも一般相対論と同様に p を含む異なるパッチの取り換えとみなせないでしょうか？このアイデアがゲージ理論の数学的定式化のスタートになります．まとめておくと，

仮定 2.1. ゲージ理論の定式化
ゲージ理論は，ゲージ変換がある点における局所座標の取り換えに付随する変換とみなせるような形で定式化できる．

次節以降，本格的にゲージ理論を定式化するための数学的な内容に踏み込んでいきます．

2.2　接空間と余接空間の復習

多様体とその (余) 接空間の定義や，自然基底による局所表示については既知とします．ここではまず次節以降で多く用いる，写像の微分と引き戻しを定義することから始めます．

定義 2.2. 写像の微分
2 つの多様体 M, N とそれらの間の C^∞ 写像 $F : M \to N$ を与える．点 p における F の微分 T_pF を以下で定義する．

$$T_pF : T_pM \to T_{F(p)}N,\ v \mapsto (f \mapsto v(f \circ F)) \tag{2.6}$$

ここで，計算上も重要な事実として以下が成り立ちます．

命題 2.3. 写像の微分の関手性
多様体 M, N, P とそれらの間の C^∞ 写像 $F : M \to N,\ G : N \to P$ を与える．このとき任意の $p \in M$ に対し以下が成り立つ．

1. $T_p(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T_pM}$
2. $T_p(G \circ F)(\cdot) = T_{F(p)}G(T_pF(\cdot))$

Proof.
[5] に譲る． □

このことから，基点付き多様体の圏からベクトル空間の圏への $(M, p) \mapsto T_pM,\ F \mapsto T_pF$ なる対応が共変関手となることがわかりました．次に，写像の引き戻しを以下で定義します．

定義 2.4. 写像の引き戻し
多様体 M, N とそれらの間の写像 $F : M \to N$ を与える．点 p における F の引き戻し T_p^*F を以下で定義する．

$$T_p^*F : \bigwedge^k T_{F(p)}^*N \to \bigwedge^k T_p^*M, \quad \omega \mapsto ((v_1, \cdots, v_k) \mapsto \omega(T_pF(v_1), \cdots, T_pF(v_k))) \tag{2.7}$$

微分が共変関手であったことを思い出すと，基点付き多様体の圏からベクトル空間の圏への $(M, p) \mapsto T_p^*M,\ F \mapsto T_p^*F$ なる対応が反変関手となることはすぐにわかります．具体的には以下が成り立ちます．

命題 2.5. 写像の引き戻しの関手性
多様体 M, N, P とそれらの間の C^∞ 写像 $F : M \to N, G : N \to P$ を与える．このとき任意の $p \in M$ に対し以下が成り立つ．

1. $T_p^*(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\bigwedge^k T_p^*M}$
2. $T_p^*(F \circ G)(\cdot) = T_p^*G(T_{F(p)}^*G(\cdot))$

Proof.
引き戻しの定義より明らか． □

なお写像の微分と引き戻しは，それぞれ F_*，F^* と略記されることもあるので注意して下さい．
次に，ベクトル場および微分形式について簡単に確認します．

定義 2.6. ベクトル場
C^∞ 多様体 M を与える．M の各点 p に対して接ベクトル $X_p \in T_pM$ を対応させ，X_p が p に関して C^∞ 級に動くもののことを，M 上の C^∞ ベクトル場 X と呼ぶ[a]．C^∞ 級に動くとは，点 p を含むチャートにおける X の局所表示

$$X_p = X^\mu(p) \frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_p \in T_pM \tag{2.8}$$

において，各係数 $X^\mu(p)$ が C^∞ 関数になっていることを言う．

[a] M 上のベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ と書く．

先ほど導入した C^∞ 写像 $F: M \to N$ の微分は，F が微分同相である場合にはベクトル場にも作用でき，以下のように定義されます．

$$F_*: \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N),\ F_*X(q) \coloneqq T_{F^{-1}(q)}F(X_{F^{-1}(q)})(q) \tag{2.9}$$

さらに，ベクトル場に対して定義される非常に重要な道具として以下を定義します．

定義 2.7. 積分曲線
C^∞ 多様体 M，1 次元の C^∞ 多様体 J を与える．M 上のベクトル場 X の積分曲線とは，C^∞ 曲線つまり C^∞ 写像 $\gamma: J \to M$ であって，任意の時刻 $t \in J$ において

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \tag{2.10}$$

を充たすもののことを言う．

微分形式についても少し見ます．

定義 2.8. 微分形式
M を C^∞ 多様体とする．M の $p \in M$ に対して $\omega_p \in \bigwedge^k(T_p^*M)$ を対応させ，ω_p が p に関して C^∞ 級に動くもののことを k-形式 ω と呼ぶ[a]，C^∞ 級に動くとは，点 p を含むチャートにおける ω の局所表示

$$\omega_p = \omega_{i_1 \cdots i_k}(p)(dx^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k})_p \tag{2.11}$$

において，各係数 $\omega_{i_1 \cdots i_k}(p)$ が C^∞ 関数であることを言う．

[a] M 上の k 形式全体の集合を $\Omega^k(M)$ と書く．

また C^∞ 写像 $F: M \to N$ の引き戻しは常に微分形式にも作用でき，以下のように定義されます．

$$F^*: \Omega^k(N) \to \Omega^k(M),\ F^*\omega(p)(v_1, \cdots, v_k) \coloneqq \omega(F_*(v_1), \cdots, F_*(v_k)) \tag{2.12}$$

2.3 主束と同伴ベクトル束

本節ではゲージ理論の数学的定式化に不可欠な，主束と同伴ベクトル束について導入します．まずその基礎として多様体への Lie 群の作用を定義します．

定義 2.9. Lie 群の作用

群準同型 $\rho_{\mathrm{L}} : G \to \mathrm{Diff}M$ であって写像

$$\blacktriangleright : G \times M \to M, \quad (g, x) \mapsto \rho_{\mathrm{L}}(g)(x) \tag{2.13}$$

が C^∞ 写像となるようなもののことを，Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への左作用と呼ぶ．$g \blacktriangleright x \coloneqq \rho(g, x)$ と略記する．

群準同型 $\rho_{\mathrm{R}} : G^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Diff}M$ であって写像

$$\blacktriangleleft : M \times G \to M, \quad (x, g) \mapsto \rho_{\mathrm{R}}(g)(x) \tag{2.14}$$

が C^∞ 写像となるようなもののことを，Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用と呼ぶ．$x \blacktriangleleft g \coloneqq \rho_{\mathrm{R}}(x, g)$ と略記する．

$\forall x \in X, \forall g \in G \setminus \{1_G\}$，$g \blacktriangleright x \neq x$ ($x \blacktriangleleft g \neq x$) を充たすとき，Lie 群の左 (右) 作用が自由であると言う．また，$\rho_{\mathrm{L(R)}} : G^{(\mathrm{op})} \to \mathrm{Diff}M$ が単射であるとき，Lie 群の左 (右) 作用が効果的であると言う．

これを用いて，以下のように構造群 G を持つファイバー束が定義されます．

定義 2.10. 構造群 G を持つ C^∞ ファイバー束

C^∞ 多様体 E, B, F と C^∞ の全射 $\pi : E \to B$ の組 (E, π, B, F) が構造群 G を持つファイバー束であることを，ある開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ と微分同相の組 $\{\chi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F\}_{\alpha \in \Lambda}$ が存在して以下を満たすことを言う．

1. 任意の α に対して以下の図式が可換．

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\chi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_\alpha \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
& U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

2. 変換関数と呼ばれる C^∞ 写像の族 $\{t_{\alpha\beta} : B \to G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ と，G の F への効果的な左作用が存在して，任意の α, β と $(p, f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対して以下を満たす．

$$\chi_\alpha^{-1}(p, f) = \chi_\beta^{-1}(p, t_{\alpha\beta}(p) \blacktriangleright f) \tag{2.15}$$

ここで，2 つのファイバーが微分同相で繋がれ，微分幾何的に区別できない状況について整理しておきます．以下のように束写像を定義します．

定義 2.11. 束写像

ファイバー F と構造群 G を共有する二つのファイバー束 $\xi_i = (E_i, \pi_i, B_i, F)$ を与える．ξ_1 から ξ_2 への束写像とは，二つの C^∞ 写像 $f: B_1 \to B_2, \tilde{f}: E_1 \to E_2$ の組であって図

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

を可換にし，かつ底空間 B_1 の各点 b において，点 b のファイバー $\pi_1^{-1}(\{b\}) \subset E_1$ への $\tilde{f}$ の制限

$$\tilde{f}|_{\pi_1^{-1}(\{b\})} : \pi_1^{-1}(\{b\}) \to \pi_2^{-1}(\{f(b)\}) \subset E_2 \tag{2.16}$$

が微分同相写像になっているもののことを言う．

ファイバー束 ξ_1 と ξ_2 が同型であるとは，$B_1 = B_2 = B$ であってかつ $f: B \to B$ が恒等写像となるような束写像 $\tilde{f}: E_1 \to E_2$ が存在することを言う．記号としては $\xi_1 \simeq \xi_2$ と書く．

以下では数学的，物理的いずれの文脈においても，同型なファイバー束は等価なものと思って進めます．

そして極めて重要な事実として，ファイバー束の構成においては前述の変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ こそが重要であるとわかります．

定理 2.12. ファイバー束の構成

C^∞ 多様体 B, F，Lie 群 G，G の F への左作用 $\blacktriangleright: G \times F \to G$，$B$ の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，任意の $b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ に対してコサイクル条件

$$t_{\alpha\beta}(b)t_{\beta\gamma}(b) = t_{\alpha\gamma}(b) \tag{2.17}$$

を充たす C^∞ 関数の族 $\{t_{\alpha\beta}: U_\beta \cap U_\alpha \to G\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ を与える．このとき, 構造群 G と変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ を持つファイバー束 $\xi = (E, \pi, B, F)$ が存在する．

さらに変換関数として，与えた $\{t_{\alpha\beta}: U_\beta \cap U_\alpha \to G\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ を取れるファイバー束は同型を除いて一意である．

Proof.

[5, 6] に譲る． □

物理においても重要な概念として切断を導入し，その後具体例に移っていきましょう．

定義 2.13. C^∞(局所) 切断
ファイバー束 $\xi = (E, \pi, B, F)$ において，C^∞ 写像 $s : B \to E$ であって $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$ となるもののことを C^∞ 切断と言う．ξ の切断全体の集合を $\Gamma(E)$ と書く．
C^∞ 写像 $s_\alpha : B \to \pi^{-1}(U_\alpha) \subset E$ であって $\pi \circ s_\alpha = \mathrm{id}_B$ となるもののことを，(U_α 上の)C^∞ 局所切断と言う．これ全体の集合は，$\Gamma(E|_{U_\alpha})$ などと書く．

ファイバー束において，F の構造を限定した具体例を見ていきます．まず，F がベクトル空間に取られている場合です．

定義 2.14. ベクトル束
ファイバーを n 次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V とし，構造群を $GL(n, \mathbb{K})$ とするようなファイバー束を階数 n のベクトル束と呼ぶ．$V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ と書く．

2 つのベクトル束の間には，直和とテンソル積が定義されます．

定義 2.15. ベクトル束の直和
底空間 M 上の 2 つのベクトル束 $E_1 \xrightarrow{\pi_1} M,\ E_2 \xrightarrow{\pi_2} M$ を与える．このとき，E_1 と E_2 の直和 $E_1 \oplus E_2$ を以下の通り定義する．

1. 全空間について，以下の $E_1 \oplus E_2$ で定める．

$$E_1 \oplus E_2 \coloneqq \bigsqcup_{p \in M} (\pi_1^{-1}(p) \oplus \pi_2^{-1}(p)) \tag{2.18}$$

2. 射影について，以下の π で定める．

$$\pi : E_1 \oplus E_2 \to M,\ (p, v) \mapsto p,\ \text{where } v \in \pi_1^{-1}(p) \oplus \pi_2^{-1}(p) \tag{2.19}$$

$E_1 \oplus E_2$ は階数 $\mathrm{rank} E_1 + \mathrm{rank} E_2$ のベクトル束となる．

定義 2.16. ベクトル束のテンソル積
底空間 M 上の 2 つのベクトル束 $E_1 \xrightarrow{\pi_1} M,\ E_2 \xrightarrow{\pi_2} M$ を与える．このとき，E_1 と E_2 のテンソル積 $E_1 \otimes E_2$ を以下の通り定義する．

1. 全空間について，以下の $E_1 \otimes E_2$ で定める．

$$E_1 \oplus E_2 \coloneqq \bigsqcup_{p \in M} (\pi_1^{-1}(p) \otimes \pi_2^{-1}(p)) \tag{2.20}$$

2. 射影について，以下の π で定める．

$$\pi : E_1 \oplus E_2 \to M,\ (p, v) \mapsto p,\ \text{where } v \in \pi_1^{-1}(p) \otimes \pi_2^{-1}(p) \tag{2.21}$$

$E_1 \otimes E_2$ は階数 $(\mathrm{rank} E_1)(\mathrm{rank} E_2)$ のベクトル束となる．

また，直和とテンソル積における変換関数は以下のように取れます．

命題 2.17. 直和とテンソル積における変換関数
$V_1 \hookrightarrow E_1 \xrightarrow{\pi_1} M$, $V_2 \hookrightarrow E_2 \xrightarrow{\pi_1} M$ の共通の開被覆 $\{U_\alpha \subset M\}_{\alpha\in\Lambda}$ における変換関数を $t^{(1)}_{\beta\alpha}$, $t^{(2)}_{\beta\alpha}$ とするとき，上記の定義による束 $E_1 \oplus E_2$ (または $E_1 \otimes E_2$) の変換関数は， $t^{(1)}_{\beta\alpha} \oplus t^{(2)}_{\beta\alpha}$ (または $t^{(1)}_{\beta\alpha} \otimes t^{(2)}_{\beta\alpha}$) に取れる．

Proof.
$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ における局所自明化を $\chi^{(1)}_\alpha$, $\chi^{(2)}_\alpha$ とする．
まず直和の方を示す．$\pi(u) = p$ なる任意の $u \in E_1 \oplus E_2$ は，$u = (p, v_1 \oplus v_2)$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ と一意に書ける．$p \in U_\alpha \cap U_\beta$ とし，

$$\chi_\alpha(u) \coloneqq (p, \chi^{(1)}_\alpha((p, v_1)) \oplus \chi^{(2)}_\alpha((p, v_2))) \tag{2.22}$$

と定める．するとこれが $E_1 \oplus E_2$ の局所自明化を与えることは容易にわかり，チャートの取り換えによって

$$\begin{aligned} \chi_\beta(u) &= (p, t^{(1)}_{\beta\alpha}(p) v_1 \oplus t^{(2)}_{\beta\alpha}(p) v_2) && (2.23) \\ &= (p, (t^{(1)}_{\beta\alpha} \oplus t^{(2)}_{\beta\alpha})(p)(v_1 \oplus v_2)) && (2.24) \end{aligned}$$

となる．つまり変換関数が直和行列として与えられることがわかり，テンソル積についても同様である． □

ファイバー束の別の例として，ファイバーが G 自身である主束が定義されます．

定義 2.18. 主束
構造群を G に持つファイバー束 $\xi = (P, \pi, M, G)$ が主束であるとは，G の G 自身への左作用が自然な左作用 $(g \blacktriangleright x \coloneqq gx)$ であることを言う．

そして以下では，主束が与えられた時に，変換関数をそれと全く同じに取れるファイバー束が構成できるという話に進みます．これを同伴ファイバー束と呼びます．その準備として，主束の全空間に対しては構造群の自然な右作用を定義できることを示します．

命題 2.19. 主束の全空間への右作用
$\xi = (P, \pi, M, G)$ を主束とする．このとき，

$$\blacktriangleleft : P \times G \to P, \quad (u, g) \mapsto \chi_\alpha^{-1}(\pi(u), \mathrm{proj}_2(\chi_\alpha(u))g), \text{where } \pi(u) \in U_\alpha \tag{2.25}$$

は自由な右作用となる[a]．またその軌道空間 P/G は M になる．

[a] これを G の P への自然な右作用と呼ぶ．

Proof.
[5] に譲る． □

本章では直接用いませんが，以下の命題も重要です．

定理 2.20. 商空間による主束
コンパクト Hausdorff 空間 P と，P に自由に作用しているコンパクト Lie 群 G を与える．この時，軌道空間への商写像

$$\pi : P \to P/G \tag{2.26}$$

は主束である．

Proof.
[5] に譲る． □

さて命題 2.19 による右作用を用いて，同伴ファイバー束は以下のように構成できます．

命題 2.21. Borel 構成
$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とし，Lie 群 G の C^∞ 多様体 F への左作用 $\blacktriangleright : G \times F \to F$ を与える．G の P への自然な右作用を $\blacktriangleleft : P \times G \to P$ と書く．

1. 積多様体 $P \times F$ への G の新しい右作用 $\blacktriangleleft : (P \times F) \times G \to P \times F$ を
$$(u, f) \blacktriangleleft g \coloneqq (u \blacktriangleleft g, g^{-1} \blacktriangleright f) \tag{2.27}$$
と定義し，この右作用による $P \times F$ の軌道空間を $P \times_G F := (P \times F)/G$ と書く．
2. 商写像 $\varpi : P \times F \to P \times_G F, (u, f) \mapsto (u, f) \blacktriangleleft G$ による $(u, f) \in P \times F$ の像を $u \times_G f \in P \times_G F$ と書く．このとき写像
$$q : P \times_G F \to M, \quad u \times_G f \mapsto \pi(u) \tag{2.28}$$
が well-defined になる．

このとき，$F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ は構造群 G をもち，変換関数が $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ のそれと同じであるようなファイバー束である．

Proof.
概略だけ示すことにし，詳細は [5] に譲る．まず $P \times_G F$ の局所切断として，標準的局所切断 $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ と呼ばれる以下のものを取る．

$$S_\alpha : M \to \pi^{-1}(U_\alpha), \ p \mapsto \chi_\alpha^{-1}(p, 1_G) \tag{2.29}$$

ここで $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ に対して C^∞ 写像の族 $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ を

$$\psi_\alpha : q^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F, \ S_\alpha(p) \times_G f \mapsto (p, f) \tag{2.30}$$

と定義するとこれは局所自明化の条件を満たし，このとき変換関数は $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in \Lambda}$ となることが示せる． □

ここで F をベクトル空間 V に取ることで構成されるのが同伴ベクトル束です．

定義 2.22. 同伴ベクトル束
主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$，$n$ 次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V を与える．Lie 群 G の V への左作用を，G の n 次元表現 ρ を用いて $g \blacktriangleright v := \rho(g)v$ として与える．このとき命題 2.21 の Borel 構成によって得られる同伴ファイバー束を

$$F \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M \tag{2.31}$$

と書き，同伴ベクトル束と呼ぶ．

ここまでで，ゲージ理論の数学的定式化の土台となる主束と同伴ベクトル束が導入できました．最後に，同伴ベクトル束と物理的な場を繋ぐような事実を確認して終わろうと思います．

命題 2.23. 貼り合わせによる大域的切断の構成
同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$，その式 (2.30) による局所自明化 $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ を与える．このとき，以下の事実が成り立つ．

1. 関数の族 $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to V\}_{\alpha\in\Lambda}$ が $\forall\alpha,\beta \in \Lambda$ について

$$\varphi_\beta = \rho(t_{\beta\alpha}(p))\varphi_\alpha, \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \tag{2.32}$$

   を満たすならば，$\varphi_\alpha = \mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \phi$ を満たす $\phi \in \Gamma(M; P \times_\rho V)$ が存在する．
2. 任意の大域的切断 $\phi \in \Gamma(P \times_\rho V)$ に対して，関数の族 $\{\varphi_\alpha := \mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \phi : U_\alpha \to V\}_{\alpha\in\Lambda}$ は $\forall\alpha,\beta \in \Lambda$ について

$$\varphi_\beta = \rho(t_{\beta\alpha}(p))\varphi_\alpha, \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \tag{2.33}$$

   を満たす．

Proof.
1 について，標準的局所切断 S_α を用いて

$$\phi(p) := S_\alpha(p) \times_\rho \varphi(p) \tag{2.34}$$

と構成すれば，これは well-defined で条件を満たす．
2 について，$\{\psi_\alpha\}_\alpha$ が変換関数を $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ とする局所自明化であることから，明らかに成り立つ． □

ここでの $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ の変換則は，ゲージ理論における物質場の変換則そのものです．後で改めてまとめますが，ここまでで物質場の数学的定式化の基礎が整いました．

2.4 切断としてのベクトル場と微分形式

ここでは後の内容の準備として，前節で導入したファイバー束やその切断の言葉を用いてベクトル場と微分形式について整理し直してみます．ベクトル束値微分形式についてもここで導入します．
まずベクトル場ですが，以下の通り接束を導入します．

定義 2.24. 接束
n 次元の C^∞ 多様体 M を与える．

$$TM \coloneqq \bigsqcup_{p\in M} T_pM \tag{2.35}$$

としたとき，$\pi(T_pM)=p$ なる π によるベクトル束 $\mathbb{R}^n \hookrightarrow TM \xrightarrow{\pi} M$ を M の接束と呼ぶ.

ここで切断 $\Gamma(TM)$ を考えると，この元 s は

$$s : M \to TM,\ p \mapsto (p,v), \text{where } v \in T_pM \tag{2.36}$$

なる写像ですが，第 2 成分に注目すればこれはベクトル場 $\mathfrak{X}(M)$ による対応と全く同じです．したがって $\mathfrak{X}(M)$ を $\Gamma(TM)$ と同一視する，または $\mathfrak{X}(M)$ の定義を $\Gamma(TM)$ そのものとすることが一般的です．本稿でも両者の違いは特に気にしないことにします.

次に微分形式ですが，以下の通り k 次外積束を定義します.

定義 2.25. k 次外積束
n 次元の C^∞ 多様体 M を与える．

$$\bigwedge^k T^*M \coloneqq \bigsqcup_{p\in M} \bigwedge^k T_p^*M \tag{2.37}$$

としたとき，$\pi(T*_p M)=p$ なる π によるベクトル束 $\mathbb{R}^{nk} \hookrightarrow \bigwedge^k T^*M \xrightarrow{\pi} M$ を M の k 次外積束と呼ぶ.

ベクトル場の場合と全く同様，$\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ の元 s は

$$s : M \to \bigwedge^k T^*M,\ p \mapsto (p,\omega), \text{where } \omega \in \bigwedge^k T_p^*M \tag{2.38}$$

なる写像で，第 2 成分に注目することで $\Omega^k(M)$ と $\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ を同一視できます．またこれもベクトル場の場合と同様に，$\Omega^k(M)$ の定義を $\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ そのものとすることも一般的です.

最後に，切断の言葉を用いることでベクトル束値微分形式を定義します.

定義 2.26. E 値 k-形式
任意のベクトル束 $E \xrightarrow{\pi_E} M$ を与えたとき，M 上の E 値 k-形式 $\Omega^k(M;E)$ を

$$\Omega^k(M;E) \coloneqq \Gamma(\bigwedge^k T^*M \otimes E) \tag{2.39}$$

と定義する．なお,

$$\bigwedge^k T^*M \otimes E \coloneqq \bigsqcup_{p\in M} \bigwedge^k T_p^*M \otimes \pi_E^{-1}(p) \tag{2.40}$$

である．なお，$E = M \times V$ の場合は $\Omega^k(M;E)$ を $\Omega^k(M;V)$ とも書く.

また定義から明らかに，$\Omega^0(M;E)=\Gamma(E)$ であることもよく用いる.

2.5 Lie 群の指数写像と基本ベクトル場

本節以降，ゲージ場の数学的定式化を目指します．ゲージ場は主束の接続形式と呼ばれる量と密接に関係するのですが，接続形式の定義のためには基本ベクトル場が，基本ベクトル場の定義には指数写像が必要なので，まず指数写像の定義を目指します．

指数写像は G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ から G への写像なのですが，この写像を構成するために，$\mathfrak{g}$ から G 上の曲線のうち特別なクラスへの 1 対 1 対応を作ります．さらにこの対応をどう作るかというと，ここで現れる曲線と G 上のベクトル場のうち特別なクラスとの 1 対 1 対応を示し，特別なベクトル場と $\mathfrak{g}$ の間に 1 対 1 対応があることを示すという流れになります．と言うことでまず，特別な条件を満たす G 上のベクトル場として，左不変ベクトル場を定義します．

$$L_g : G \to G,\ h \mapsto gh \tag{2.41}$$
$$R_g : G \to G,\ h \mapsto hg \tag{2.42}$$

として G の左移動，右移動を定義し，

定義 2.27. 左不変ベクトル場
$\mathbb{R}$-ベクトル空間

$$\mathfrak{X}_L(G) := \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid \forall g, h \in G,\ T_h L_g(X_h) = X_{gh}\} \tag{2.43}$$

の元のことを，Lie 群 G の左不変ベクトル場と言う．

とします．そして左不変ベクトル場は，完備であるという重要な性質を持ちます．完備性の定義とともに示すと以下の通りです．

定義 2.28. 完備なベクトル場
Lie 群 $\mathbb{R}$ の M への作用を大域的フローと呼び，$\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ と書く．また，大域的フロー θ に対して

$$\theta_t : M \to M,\ \theta_t(p) := \theta(t, p) \tag{2.44}$$
$$\theta^{(p)} : \mathbb{R} \to M,\ \theta^{(p)}(t) := \theta(t, p) \tag{2.45}$$

と書く．$V \in \mathfrak{X}(M)$ が完備なベクトル場であるとは，ある大域的フローが存在して，任意の $p \in M$ に対して

$$V(p) = \dot{\theta^{(p)}}(0) \tag{2.46}$$

となることを言う．このとき θ を V が生成する (大域的) フローと呼ぶ．また $\theta^{(p)} : \mathbb{R} \to M$ は V の，$\theta^{(p)}(0) = p$ を満たす唯一の積分曲線になる[a]．

[a] 証明は [5] に譲る．

定理 2.29. Lie 群の左不変ベクトル場は完備
Lie 群 G を与える．このとき $\forall X^L \in \mathfrak{X}_L(G)$ は完備である．

つまり左不変ベクトル場においては，G 上全ての点についてそれを初期条件とする積分曲線を構成でき，さらに初期条件対して積分曲線は一意だと言うことです．よって初期条件をあらかじめ固定しておくことで，左不変ベクトル場と G 上の曲線について 1 対 1 対応を作れると考えられます．これについて見ておきます．

定義 2.30. 1 パラメータ部分群
Lie 群の準同型写像 $\mathbb{R} \to G$ のことを Lie 群 G の 1 パラメータ部分群 と呼ぶ．

命題 2.31. 1 パラメータ部分群の特徴付け
Lie 群 G を与える．

1. G の任意の 1 パラメータ部分群 $\gamma : \mathbb{R} \to G$ に対して，γ を初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす極大積分曲線として持つ左不変ベクトル場 $X^L \in \mathfrak{X}_L(G)$ が一意的に存在する．
2. $\forall X^L \in \mathfrak{X}_L(G)$ に対して，初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす唯一の X の極大積分曲線 $\gamma : \mathbb{R} \to G$ は G の 1 パラメータ部分群である．

Proof.
[5] に譲る． □

つまり G の左不変ベクトル場と 1 パラメータ部分群の間に 1 対 1 対応があると言うことです．さて最後に，左不変ベクトル場と Lie 代数の間に対応をつけることで G の Lie 代数から 1 パラメータ部分群への対応を作ります．

命題 2.32. 左不変ベクトル場と Lie 代数の同型
G を Lie 群とする．このとき評価写像

$$\mathrm{ev}_{1_G} : \mathfrak{X}_L(G) \to \mathfrak{g}, \quad X^L \mapsto X^L_{1_G} \tag{2.47}$$

はベクトル空間の同型写像である．$X \in \mathfrak{g}$ に対応する $\mathfrak{X}(G)$ の元を X^L と書く．[a]

[a] 代数的な Lie 代数としての同型でもある．

Proof.
[5] に譲る． □

ここまでの内容を総合すると，$\mathfrak{g} \to G$ の対応である指数写像を構成できます．

定義 2.33. 指数写像
Lie 群 G を与える．$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする．G の指数写像を

$$\exp : \mathfrak{g} \to G, \quad X \mapsto \gamma_X(1) \tag{2.48}$$

と定義する．ただし，$\gamma_X : \mathbb{R} \to G$ は $X^L \in \mathfrak{X}_L(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である．

最後に，ゲージ場や接続形式の定義に不可欠な基本ベクトル場を定義します．

定義 2.34. 基本ベクトル場
Lie 群 G が C^∞ 多様体 M に右から作用しているとする．この右作用を $\blacktriangleleft\colon M\times G\to M$ と書く．$\forall X\in\mathfrak{g}$ に対して，基本ベクトル場 $X^\#\in\mathfrak{X}(M)$ を次のように定める：

$$X^\#_x := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} x\blacktriangleleft\exp(tX)\in T_xM \tag{2.49}$$

写像

$$\blacktriangleleft^\#\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(M),\quad X\mapsto X^\# \tag{2.50}$$

のことを右作用 $\blacktriangleleft$ の無限小生成子と呼ぶ.

2.6 主束の接続

接続形式の定義のために，Lie 群の表現やその微分について少し述べておきます.

定義 2.35. 微分表現
V を $\mathbb{K}$-ベクトル空間とする．Lie 群 G の表現 $\rho: G\to GL(V)$ の，$1_G\in G$ における微分 $T_{1_G}\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ のことを ρ の微分表現と呼ぶ．ρ_* とも書く.

重要な例として随伴表現を構成します．まず

$$F_g: G\to G,\ h\mapsto ghg^{-1} \tag{2.51}$$

を定義します．この単位元における微分

$$T_{1_G}F_g:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g} \tag{2.52}$$

は $GL(\mathfrak{g})$ の元となり,

$$\mathrm{Ad}: G\to GL(\mathfrak{g}),\ g\mapsto\mathrm{Ad}(g)\coloneqq T_{1_G}F_g \tag{2.53}$$

は G の表現となります．そしてこの微分表現を $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ と書きます.

補足ですが，$\mathfrak{gl}(V)$ は V に作用することができます．V の基底 $\{e_\mu\}_\mu$ を 1 つ選んだとき，$GL(V)$ の局所座標を $x\mapsto\langle e_\mu, xe_\nu\rangle \eqqcolon x^\mu_\nu$ として取れます．この局所座標に伴う自然基底で，$\mathfrak{gl}(V)$ の任意の元 X は $X=X^\mu_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu_\nu}$ とかけます．このとき V の任意の元 $v=v^\mu e_\mu$ への X の作用を,

$$Xv\coloneqq X^\mu_\nu v^\nu e_\mu \tag{2.54}$$

としておきます．X^μ_ν や v^ν のような成分表示は共通の V の基底 $\{e_\mu\}_\mu$ のもとで定め，このとき Xv は基底の取り方に依りません．また，全く同様の構成で $\mathfrak{gl}(V)$ の $GL(V)$ への作用や，$GL(V)$ の $\mathfrak{gl}(V)$ への作用も考えることにします．$y\in GL(V)$ に対して

$$Xy\coloneqq X^\mu_\sigma y^\sigma_\nu e_\mu\otimes(e_\nu)^* \tag{2.55}$$

$$yX\coloneqq y^\mu_\sigma X^\sigma_\nu e_\mu\otimes(e_\nu)^* \tag{2.56}$$

$$\tag{2.57}$$

です．

ここで，主束の接続を以下で定義します．

定義 2.36. 主束の接続 (Ehresmann 接続)
$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．ここでは自然な右作用 ◀ を用いて $\forall g \in G$ に対して $R_g : P \to P,\ u \mapsto u ◀ g$ と定義する．次の条件を満たす分布 $\{H_u \subset T_u P\}_{u \in P}$ を P 上の接続と呼ぶ．

1. $\forall u \in P$ に対して
$$T_u P = \ker(T_u \pi) \oplus H_u \tag{2.58}$$
が成り立つ．
2. $\forall u \in P,\ \forall g \in G$ に対して
$$T_u R_g(H_u) = H_{R_g(u)} \tag{2.59}$$
が成り立つ．

定義 2.37. 主束の接続形式
$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．ここでは自然な右作用 ◀ を用いて $\forall g \in G$ に対して $R_g : P \to P,\ u \mapsto u ◀ g$ と定義する．次の条件を満たす $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を接続形式と呼ぶ．

1. $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して
$$\omega(X^{\#}) = X \tag{2.60}$$
が成り立つ．
2. $\forall g \in G$ に対して
$$(R_g)^* \omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega) \tag{2.61}$$
が成り立つ．

接続の方は幾何学的な解釈が容易です．全空間 P の接空間 $T_u P$ を射影の方向とそれに垂直な，イメージ的には底空間に「水平」な方向に分解し，水平方向の空間を集めたものが接続であるといえます．また以下の事実から，前節で定義した基本ベクトル場も，$T_u P$ の分解と言う観点から解釈できるとわかります．

命題 2.38. 基本ベクトル場と垂直部分空間
$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．Lie 群 G の全空間 P への自然な右作用 ◀: $P \times G \to P$ の無限小生成子 $◀^{\#}$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P),\ X \mapsto X^{\#}$ について，
$$\forall u \in P, \quad \ker(T_u \pi) = \{X^{\#}_u \in T_u P \mid X \in \mathfrak{g}\} \tag{2.62}$$
が成り立つ．

Proof.

[5] に譲る. □

接続形式については直接の解釈が難しいですが，以下のように接続との 1 対 1 対応を作ることができます.

定理 2.39. 接続と接続形式の関係
$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする.

1. $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が接続形式ならば，分布
$$\{\ker \omega_u \subset T_u P\}_{u \in P} \tag{2.63}$$
は P 上の接続である.
2. 1 は P 上の接続形式全体の集合から P 上の接続全体の集合への 1 対 1 対応を与える.

Proof.
[5] に譲る. □

つまり接続形式を与えることは，$T_u P$ に水平の基準を与えることと等価です.

2.7 同伴ベクトル束上の共変微分

前節で導入した主束 P の接続形式を用いて，同伴ベクトル $P \times_G V$ 上に接続と共変微分を定義します. これを観察することで，数学における接続形式と物理におけるゲージ場の繋がりが見えてきます. 一般に，ベクトル束上の接続と共変微分は以下のように定義されます.

定義 2.40. ベクトル束上の接続と共変微分
$V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ をベクトル束とする. $\mathbb{K}$-線型写像
$$\nabla^E : \Gamma(E) \to \Omega^1(M; E) \tag{2.64}$$
であって，$\forall f \in C^\infty(M), \forall s \in \Gamma(E)$ に対して Leibniz 則
$$\nabla^E(fs) = df \otimes s + f\nabla^E s \tag{2.65}$$
を充たすものをベクトル束 E 上の接続と呼ぶ.
$X \in \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ に対して定まる $\mathbb{K}$-線型写像
$$\nabla^E_X : \Gamma(E) \to \Gamma(E), \quad s \mapsto (\nabla^E s)(X) \tag{2.66}$$
のことを X に沿った共変微分と呼ぶ.

最終的にベクトル束上の接続を主束の接続形式から構成できると言う話に行くのですが，これを導く際には，まず tensorial form と呼ばれる特別な条件を満たす $\Omega^k(P; V)$ の元に対して共変微分の対応物を定義し，これを元にするのがわかりやすいです. tensorial form の導入から始めます.

定義 2.41. tensorial form
主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$，有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V，Lie 群 G の有限次元表現 $\rho : G \to GL(V)$ を与える．ここでは自然な右作用 $\blacktriangleleft$ を用いて $\forall g \in G$ に対して $R_g : P \to P,\ u \mapsto u \blacktriangleleft g$ と定義する．全空間 P 上の V-値 k 形式 $\psi \in \Omega^k(P; V)$ が ρ 型の tensorial k-form であるとは，以下の条件を満たすことを言う．

1. $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して
$$i_{X^\#}(\psi) = 0 \tag{2.67}$$
が成り立つ．これを ψ が水平であるという．
2. $\forall g \in G$ に対して
$$(R_g)^* \psi = \rho(g^{-1})(\psi) \tag{2.68}$$
が成り立つ．これを ψ が ρ 型の右同変であると言う．

ρ 型の tensorial k-form 全体の集合を $\Omega^k_\rho(P; V) \subset \Omega^k(P; V)$ と書く．

命題 2.42. tensorial form と同伴ベクトル束上の微分形式
主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$，有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V，Lie 群 G の有限次元表現 $\rho : G \to GL(V)$
主束 P の同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$ を与える．このとき，
$$\Omega^k(M; P \times_\rho V) \cong \Omega^k_\rho(P; V) \tag{2.69}$$
である．同型写像を $\sharp : \Omega^k(M; P \times_\rho V) \to \Omega^k_\rho(P; V)$ と書く．

Proof.
$\sharp$ の構成含め [5] に譲る． □

この同型を用いると，以下のように，ベクトル束上の接続を主束の接続形式から構成できます．

定理 2.43. 同伴ベクトル束上の接続

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$，接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$，有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V と Lie 群 G の $\dim V$ 次元表現 $\rho : G \to GL(V)$，同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$ を与える．$\rho_* := T_{1_G}\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ を ρ の微分表現とする．このとき，次が成り立つ．

1. [a]

$$(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge)\Omega^k_\rho(P;V) \subset \Omega^{k+1}_\rho(P;V) \tag{2.70}$$

2.

$$\nabla^{P\times_\rho V} := \sharp^{-1} \circ (\mathrm{d} + \rho_*(\omega)) \circ \sharp : \Gamma(P \times_\rho V) \to \Omega^1(M; P \times_\rho V) \tag{2.71}$$

は同伴ベクトル束 $P \times_\rho V$ 上の接続である．

3. 2 で与えられた接続と式 (2.30) の局所自明化 $\psi_\alpha : P \times_\rho V|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times V$ に対して，標準的局所切断 S_α を用いて，$\forall \phi \in \Gamma(P \times_\rho V)$ について

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \nabla^{P\times_\rho V}\phi &= (\mathrm{d} + \rho_*(S^*_\alpha\omega))(\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \phi) &(2.72)\\ &=: (\mathrm{d} + \rho_*(S^*_\alpha\omega))\varphi_\alpha &(2.73)\end{aligned}$$

と書ける．

[a] $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g}), \tilde{s} \in \Omega^k(P;V)$ に対して $\rho_*(\omega)\wedge\tilde{s} \in \Omega^{k+1}(P;V)$ は, 式 (2.54) で定めた作用に基づき, $\forall X_1, \cdots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(P)$ に対して

$$(\rho_*(\omega) \wedge \tilde{s})(X_1, \cdots, X_{k+1}) := \frac{1}{1!k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \mathrm{sgn}\,\sigma \underbrace{\rho_*(\omega(X_{\sigma(1)}))}_{\in \mathfrak{gl}(V)} \underbrace{(\tilde{s}(X_{\sigma(2)}, \cdots, X_{\sigma(k+1)}))}_{\in V}$$

と定義したものである．

Proof.

[5] に譲る． □

ここで，式 (2.72) で与えられる同伴ベクトル束上の接続の局所表示についてパッチの取り替えによる変換則を計算してみます．その準備として，Maurer-Cartan 形式を以下で定義します．

定義 2.44. Maurer-Cartan 形式

$$\theta_g := T_g(L_{g^{-1}}) : T_gG \to \mathfrak{g} \tag{2.74}$$

によって定義される G 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\theta \in \Omega^1(G;\mathfrak{g})$ のことを，Lie 群 G の Maurer-Cartan 形式と呼ぶ．

これを用いて，式 (2.72) の変換則を計算していきます．まず $\phi \in \Gamma(M)$，$X \in \Gamma(TM)$ を用いた $\nabla^{P\times_\rho V}_X\phi$ が $\Gamma(E)$ の元であることより，その局所表示

$$(\nabla^{P\times_\rho V}_X\phi)_\alpha := \mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \nabla^{P\times_\rho V}_X\phi \tag{2.75}$$

の変換則は命題 2.23 に従います．よって

$$(\nabla^{P\times_\rho V}_X \phi)_\beta = \rho(t_{\beta\alpha})(\nabla^{P\times_\rho V}_X \phi)_\alpha \tag{2.76}$$

となり，左辺に定理 2.43 を用いると，

$$\begin{aligned}(\nabla^{P\times_\rho V}_X \phi)_\beta &= (\mathrm{d} + \rho_*(S_\beta^*\omega))(\varphi_\beta)(X) &(2.77)\\ &= \mathrm{d}(\rho(t_{\beta\alpha})\varphi_\alpha)(X) + \rho_*(S_\beta^*\omega)(\rho(t_{\beta\alpha})\varphi_\alpha)(X) &(2.78)\\ &= \mathrm{d}(\rho(t_{\beta\alpha}))\varphi_\alpha(X) + \rho(t_{\beta\alpha})\mathrm{d}\varphi_\alpha(X) + \rho_*(S_\beta^*\omega)(\rho(t_{\beta\alpha})\varphi_\alpha)(X) &(2.79)\end{aligned}$$

一方右辺を展開すると，

$$\rho(t_{\beta\alpha})(\nabla^{P\times_\rho V}_X \phi)_\alpha = \rho(t_{\beta\alpha})\left(\mathrm{d}\varphi_\alpha(X) + \rho_*(S_\alpha^*\omega)\varphi_\alpha(X)\right) \tag{2.80}$$

以上より

$$\mathrm{d}(\rho(t_{\beta\alpha}))\varphi_\alpha(X) + \rho(t_{\beta\alpha})\mathrm{d}\varphi_\alpha(X) + \rho_*(S_\beta^*\omega)(\rho(t_{\beta\alpha})\varphi_\alpha)(X) = \rho(t_{\beta\alpha})\mathrm{d}\varphi_\alpha(X) + \rho(t_{\beta\alpha})\rho_*(S_\alpha^*\omega)\varphi_\alpha(X) \tag{2.81}$$

ゆえに変換則として

$$\rho_*(S_\beta^*\omega) = \rho(t_{\beta\alpha})\rho_*(S_\alpha^*\omega)\rho(t_{\beta\alpha})^{-1} - (\mathrm{d}\rho(t_{\beta\alpha}))\rho(t_{\beta\alpha})^{-1} \tag{2.82}$$

が得られます．さらにこの右辺は

$$\rho(t_{\beta\alpha})\rho_*(S_\alpha^*\omega)\rho(t_{\beta\alpha})^{-1} - (\mathrm{d}\rho(t_{\beta\alpha}))\rho(t_{\beta\alpha})^{-1} = \rho_*\{\mathrm{Ad}(t_{\beta\alpha})S_\alpha^*\omega + ((t_{\beta\alpha}^{-1})^*\theta)\} \tag{2.83}$$

と書き換えられ[*1]，

$$S_\beta^*\omega = \mathrm{Ad}(t_{\beta\alpha})S_\alpha^*\omega + ((t_{\beta\alpha}^{-1})^*\theta) \tag{2.84}$$

なる変換則が示唆されます．実際に以下が成り立ちます．

定理 2.45. 貼り合わせによる接続形式の構成

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と，その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，局所自明化 $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ を与える．局所切断の族 $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を定義する．$\theta \in \Omega^1(G;\mathfrak{g})$ を Maurer-Cartan 形式とする．このとき，以下の事実が成り立つ．

1. $\mathfrak{g}$ 値 1-形式の族 $\{A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha;\mathfrak{g})\}_{\alpha\in\Lambda}$ が $\forall\alpha,\beta\in\Lambda$ について

$$A_\beta(p) = \mathrm{Ad}(t_{\beta\alpha})(p)A_\alpha(p) + ((t_{\beta\alpha}^{-1})^*\theta)(p), \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \tag{2.85}$$

   を充たすならば，$\forall\alpha\in\Lambda$ に対して $A_\alpha = s_\alpha^*\omega$ を充たす接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$ が存在する．
2. 任意の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$ に対して，$\mathfrak{g}$ 値 1-形式の族 $\{A_\alpha \coloneqq s_\alpha^*\omega \in \Omega^1(U_\alpha;\mathfrak{g})\}_{\alpha\in\Lambda}$ は $\forall\alpha,\beta\in\Lambda$ について

$$A_\beta(p) = \mathrm{Ad}(t_{\beta\alpha}(p))A_\alpha(p) + ((t_{\beta\alpha}^{-1})^*\theta)(p), \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \tag{2.86}$$

   を充たす．

[*1] 式 (2.54)〜(2.56) を参照し，丁寧に計算すれば示せます．

2.8 主束の自己同型写像

前節までで基本的な事柄は済んだのですが，最終的な定式化のために最後に少し準備をします．ここでは主束における自己同型写像と呼ばれる写像が，同伴ベクトル束の切断や接続形式に作用して，前節まででみたチャートの取り換えと全く同じ変換性を引き起こすことを見ます．本節では，G の P への自然な右作用を $R_g(u) = u \blacktriangleleft g$ と書きます．

まず，主束における自己同型写像を以下で定義します．

定義 2.46. 主束の自己同型写像
主束 $P \xrightarrow{\pi} M$ の自己同型写像とは，束同型写像 $\tilde{f} : P \to P$ であって，さらに G-同変性

$$\tilde{f}(u \blacktriangleleft g) = \tilde{f}(u) \blacktriangleleft g, \quad \forall u \in P, \forall g \in G \tag{2.87}$$

をみたすものを言う[a]．これら全体のなす群を $\mathrm{Aut}(P)$ と書く．

[a] これを数学の文脈ではゲージ変換と呼ぶことがあります．

この写像の，同伴ベクトル束の切断への作用は以下の通りです．

命題 2.47. 切断への作用と局所表示の変換則
同伴ベクトル束 $P \times_\rho V$ の切断 $\phi \in \Gamma(P \times_\rho V)$ に対する $\tilde{f} \in \mathrm{Aut}(P)$ の作用を

$$\tilde{f} : \phi \mapsto \tilde{f} \cdot \phi, s.t.\ \phi(p) = u \times_G v \Rightarrow \tilde{f} \cdot \phi(p) = \tilde{f}(u) \times_G v \tag{2.88}$$

で定義する．このとき，局所表示 $\varphi_\alpha = \mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \phi$ の変換は，ある G 値関数 $g_\alpha : U_\alpha \to G$ を用いて以下で与えられる．

$$\varphi_\alpha(p) \mapsto \varphi'_\alpha(p) = \rho(g_\alpha(p))\varphi_\alpha(p) \tag{2.89}$$

Proof.
$\tilde{f}$ は底空間の恒等写像を覆う G-等変写像であるため，各 $u \in P$ に対して $\tilde{f}(u) = u \blacktriangleleft \gamma(u)$ を満たす写像 $\gamma : P \to G$ が一意に定まる．ここで $g_\alpha(p) \coloneqq \gamma(S_\alpha(p))$ と置く．各点 $p \in U_\alpha$ における切断 $\phi(p)$ は，標準的局所切断 S_α を用いて $S_\alpha(p) \times_G \varphi_\alpha(p)$ と表せる．作用の定義および同伴束の同値関係を用いると，

$$
\begin{aligned}
(\tilde{f} \cdot \phi)(p) &= \tilde{f}(S_\alpha(p)) \times_G \varphi_\alpha(p) && (2.90)\\
&= (S_\alpha(p) \blacktriangleleft g_\alpha(p)) \times_G \varphi_\alpha(p) && (2.91)\\
&= S_\alpha(p) \times_G \rho(g_\alpha(p))\varphi_\alpha(p) && (2.92)
\end{aligned}
$$

となる．これを $\phi'(p) = S_\alpha(p) \times_G \varphi'_\alpha(p)$ と比較することで，$\varphi'_\alpha(p) = \rho(g_\alpha(p))\varphi_\alpha(p)$ を得る． □

同伴ベクトル束の切断については，局所表示だけ見たときに，命題 2.23 におけるパッチの取り換え $\varphi_\beta = \rho(t_{\beta\alpha})\varphi_\alpha$ と区別ができないような，$\Gamma(P \times_\rho V)$ そのものに作用する変換が存在すると言うことです．

次に，接続形式への作用は以下のようになります．

命題 2.48. 接続形式の局所表示の変換則

接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$ に対する $\tilde{f} \in \mathrm{Aut}(P)$ の作用を，引き戻し $\tilde{f}^*\omega$ によって定義する．このとき，局所表示 $A_\alpha = S_\alpha^*\omega$ は以下のように変換される．

$$A_\alpha(p) \mapsto A'_\alpha(p) = \mathrm{Ad}(g_\alpha(p)^{-1})A_\alpha(p) + (g_\alpha^*\theta)(p) \tag{2.93}$$

ここで θ は G 上の Maurer-Cartan 形式である．

Proof.

変換後の局所形式は $A'_\alpha = S_\alpha^*(\tilde{f}^*\omega) = (\tilde{f}\circ S_\alpha)^*\omega$ である．任意の $X \in T_pM$ に対し，$A'_\alpha(X) = \omega(T_p(\tilde{f}\circ S_\alpha)(X))$ を計算する．ここでは自然な右作用 $\blacktriangleleft\colon P\times G \to P$ を用いて，

$$R_g : P \to P,\ R_g(u) = u \blacktriangleleft g \tag{2.94}$$
$$R^{(u)} : G \to P.\ R^{(u)}(g) = u \blacktriangleleft g \tag{2.95}$$

としておく．

命題 2.47 の証明で用いた g_α を用いて，写像 $H : U_\alpha \to P\times G$ を $H(p) = (S_\alpha(p), g_\alpha(p))$ と定める．$(\tilde{f}\circ S_\alpha) = \blacktriangleleft \circ H$ と分解すると，命題 2.3 を用いて

$$T_p(\tilde{f}\circ S_\alpha)(X) = (T_{H(p)} \blacktriangleleft)(T_pH(X)) \tag{2.96}$$
$$= (T_{(S_\alpha(p),g_\alpha(p))} \blacktriangleleft)(T_pS_\alpha(X), T_pg_\alpha(X)) \tag{2.97}$$

が得られる．ここで，任意の $g\in G, u\in P$ に対して積多様体の接空間の性質から，右作用の微分は

$$(T_{(u,g)} \blacktriangleleft)(v,w) = (T_uR_g)(v) + (T_gR^{(u)})(w), \text{where } v\in T_uP,\ w\in T_gG \tag{2.98}$$

と分解できるので[*2]，

$$T_p(\tilde{f}\circ S_\alpha)(X) = (T_{S_\alpha(p)}R_{g_\alpha(p)})(T_pS_\alpha(X)) + (T_{g_\alpha(p)}R^{(S_\alpha(p))})(T_pg_\alpha(X)) \tag{2.99}$$

となる．ω の線形性と定義の一部 $\omega((R_g)_*v) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega(v)$ より，右辺第 1 項は

$$\omega\left((T_{S_\alpha(p)}R_{g_\alpha(p)})(T_pS_\alpha(X))\right) = \mathrm{Ad}(g_\alpha(p)^{-1})A_\alpha(X) \tag{2.100}$$

となる．第 2 項について，右作用の性質 $R^{(u)}\circ L_g = R^{(u\blacktriangleleft g)}$ の単位元における微分 $(T_gR^{(u)})\circ(T_{1_G}L_g) = T_{1_G}R^{(u\blacktriangleleft g)}$ を用いる．$w \coloneqq T_pg_\alpha(X) \in T_{g_\alpha(p)}G$ とし，$Y \coloneqq (T_gL_{g^{-1}})(w) = \theta(w) \in \mathfrak{g}$ とおけば

$$(T_{g_\alpha(p)}R^{(S_\alpha(p))})(w) = (T_{1_G}R^{(S_\alpha(p)\blacktriangleleft g_\alpha(p))})(Y) = Y^{\#}_{\tilde{f}(S_\alpha(p))} \tag{2.101}$$

が得られる[*3]．接続形式の定義の一部 $\omega(Y^{\#}) = Y$ より

$$\omega\left((T_{g_\alpha(p)}R^{(S_\alpha(p))})(T_pg_\alpha(X))\right) = \theta(T_pg_\alpha(X)) = (g_\alpha^*\theta)(X) \tag{2.102}$$

となる．これらを合わせて $A'_\alpha(X) = \mathrm{Ad}(g_\alpha(p)^{-1})A_\alpha(X) + (g_\alpha^*\theta)(X)$ を得る． $\square$

[*2] より一般の場合の主張と証明は [5] に譲る．

[*3] 2 つ目の等式では基本ベクトル場の性質，$\forall X\in\mathfrak{g}$ に対して

$$T_{1_G}R^{(u)}(X) = X^\sharp_x$$

を用いた．詳細な主張と証明は [5] に譲る．

接続形式については，局所表示だけ見たときに，命題 2.45 におけるパッチの取り換え $\varphi_\beta = \rho(t_{\beta\alpha})\varphi_\alpha$ と区別ができないような，接続形式全体の集合そのものに作用する変換が存在すると言うことです．

また細かい話ですが，単一の $\tilde{f}$ を同伴ベクトル束の切断と接続形式に作用させ $g_\alpha = t_{\beta\alpha}$ と取った場合，前者はパッチの取り替えにおける変換則と一致しますが，後者は一致しません．$t_{\beta\alpha} \mapsto t_{\alpha\beta}^{-1}$ としたものが出てきてしまいます．よってパッチの取り替えによる変換を忠実に再現しようと思ったら，ベクトル束の切断には $g_\alpha = t_{\beta\alpha}$ と，接続形式には $g_\alpha = t_{\beta\alpha}^{-1}$ と作用するような $\tilde{f}$ をそれぞれ別に選んで作用させる必要があるということです．本稿独自の言葉の使い方として，ゲージ変換を以下で定義します．

定義 2.49. ゲージ変換
主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の接続形式 ω，同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_r hoV \xrightarrow{q} M$ の切断 ϕ のそれぞれについて，局所表示においてパッチの取り替えによる変換と同じ変換を導く主束の同型写像を選び，作用させることをゲージ変換と呼ぶ．一方に作用させる主束の同型写像を決めたとき，もう一方に作用させるべき主束の同型写像は一意に決まるため，ゲージ変換全体の集合は $\mathrm{Aut}(P)$ となる．また，無限遠で恒等変換となるようなゲージ変換全体の集合を，$\mathrm{Aut}_*(P)$ と書く．

2.9 定式化のまとめとゲージ理論の配位空間再考

これまでの内容を踏まえてゲージ理論の数学的定式化をまとめます．原則をおさらいしておくと，仮定 2.1 に示した通り，パッチの取り替えに伴う変換が物理におけるゲージ変換と一致するような形で，物理における概念の数学的対応物を見つけていきます．

まず物質場とゲージ場について，数学的には以下で定式化します．

定義 2.50. 物質場
主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$，同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$ を与える．このとき，$P \times_\rho V$ の切断 ϕ_P の局所表示の**組**，つまり局所自明化 ψ_α を用いて

$$\{\varphi_{P\alpha} \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \phi_P\}_{\alpha \in \Lambda} \tag{2.103}$$

を主束 P 上の物質場と定義する．

定義 2.51. ゲージ場
主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を与える．このとき，P の接続形式 ω_P の局所表示の**組**，つまり標準的局所切断 S_α を用いて

$$\{A_{P\alpha} \coloneqq (S_\alpha)^* \omega_P\}_{\alpha \in \Lambda} \tag{2.104}$$

を主束 P 上のゲージ場と定義する．

ここで，ゲージ理論の作用や古典的な可観測量は，単一の主束 P 上で定義された物質場やゲージ場の，「関数」とすれば良いとわかります．つまり物理の文脈で $F(A, \varphi)$ のように書くとき，A や φ は時空 M の各パッチ U_α ごとに $(A_{P\alpha}, \varphi_{P\alpha})$ が当てられたものだと解釈します．(物理の意味で) ゲージ不変な関数であれば，オーバーラップ上でも well-defined になります．またこの well-defined 性を仮定するとき，自動的に前節で定義し

たゲージ変換に対する不変性が生じます．

次に配位空間についてです．まず上の定義と命題 (2.23)，(2.45) から，主束 P 上の物質場およびゲージ場を 1 つ与えることは，同伴ベクトル束の切断 ϕ_P および接続形式 ω_P を 1 つ与えることに等価です．よって直前に定義した意味での物質場やゲージ場の関数を ϕ_P や ω_P の関数と見ることにすると，先ほど述べた通りこれは前節で定義したゲージ変換に対して不変であり，関数の引数により直接変換が定義される形になって見通しが良いです．さて，経路積分はこれら ϕ_P や ω_P を可能な全ての範囲で動かすこととして定義されます．またその足し上げにおいては可能な P 自体も足し上げる必要があります．束同型な主束については同一視することにしているので，非束同型な主束について足しあげます．以下のようにゲージ理論の経路積分を定式化します．

定義 2.52. ゲージ理論の配位空間と経路積分

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$，同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$ を与える．$P \xrightarrow{\pi} M$ の接続全体を $\Gamma(P \times_\rho V)$，P 上の接続形式全体の集合を $\mathcal{A}(P)$，$\mathcal{A}(P)$ に対して $\mathrm{Aut}_*(P)$ で移り合うものに同値関係を入れた集合を $\mathcal{A}(P)/\mathcal{G}_*P$ と書くことにすると，ゲージ理論の経路積分は以下のように定式化される．

$$\int \mathcal{D}\varphi \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*} \mathcal{D}A := \sum_{\mathrm{distinct}P} \int_{\Gamma(P\times_\rho V)} \mathcal{D}\phi_P \int_{\mathcal{A}(P)/\mathcal{G}_*(P)} \mathcal{D}\omega_P \tag{2.105}$$

$\mathrm{distinct}P$ は非束同型な P を示している．

最後に 1 つだけ補足して終わりにします．それは Lorentz 対称性や，ゲージ化されていない内部対称性の作用はどのように定式化されるのかという点です．前者については別の章でスピノールの数学とともに扱うことにして，ここでは後者について簡単に述べます．物質場は $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$ の切断として定式化されましたが，これにさらに G_{glo} が線形に作用しようと思ったら，主束 $G_{\mathrm{glo}} \hookrightarrow P' \xrightarrow{\pi'} M$ の同伴ベクトル束 $V' \hookrightarrow P' \times_{\rho'} V' \xrightarrow{q'} M$ を元の同伴ベクトル束にテンソル積すれば良いとナイーブには考えられます．このとき変換関数は $\rho(t_{\alpha\beta}) \otimes \rho'(t'_{\alpha\beta})$ のように書けますが，$\rho'(t'_{\alpha\beta})$ が非自明な値を取ると G_{glo} がゲージ化されてしまいます．よって $G_{\mathrm{glo}} \hookrightarrow P' \xrightarrow{\pi'} M$ は変換関数が自明となる $G_{\mathrm{glo}} \hookrightarrow G \times M \xrightarrow{\pi'} M$ にとる必要があります．このとき同伴ベクトル束は $V' \hookrightarrow M \times V' \xrightarrow{q'} M$ となります．まとめると以下の通りです．

注 2.53. 大域的内部対称性の扱い

G_{glo} で表される大域的内部対称性の作用を受ける物質場は，同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$ と，主束 $G_{\mathrm{glo}} \hookrightarrow G \times M \xrightarrow{\pi'} M$ の同伴ベクトル束 $V' \hookrightarrow M \times V' \xrightarrow{q'} M$ のテンソル積束 $P \times_\rho V \otimes M \times V'$ の切断，またはその局所表示の組として扱えば良い．

またこの場合，G_{glo} の作用はパッチの取り替えではなく，それとは独立した，M の各点によらない $M \times V'$ の自己同型写像として定式化されます．

3 brane field theory による higher-form symmetry の導入

ここでは higher-form symmetry という，通常の対称性を拡張した対称性について導入します．特に，brane field theory という通常の場の理論のストレートな拡張を経て導入することにします．まず通常の対称性である 0-form symmetry について復習し，その後パラレルな形で p-form symmetry についてみます．最後に簡単な例をひとつ見ます．直接の参考文献というわけではないですが，higher-form symmetry の文献としては [7–10] を参照しました．

3.1 0-form symmetry

通常の，つまり 0 次元物体から定まる局所場に作用する対称性のことを 0-form symmetry と言います．なぜ 0-form なのかはおいおいわかります．局所場 $\phi(x)$ を用意して，これが作用 $S[\phi]$ で表される理論に従うとした時，$S[\phi]$ が 0-form symmetry を持つとは何か考えましょう．

ひとまず，対称性が Lie 群 G によって特徴づけられることにします．G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の generator を t^a と書き，G の元を一般に $g = e^{i\theta_a(x)t^a}$ と書くことにしましょう．この時，Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form symmetry を持つことを以下のように定義します．global な場合と local な場合を明示的に分けて書くと，

定義 3.1. Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form global symmetry を持つ
Lie 群 G の元 $g = e^{i\theta_a(x)t^a}$ が何らかの表現 D に従って場 $\phi(x)$ に作用し，$\phi(x) \mapsto D(g)\phi(x)$ のように変換するとする．[a]．この時任意の，$\mathrm{d}\theta(x) = 0$ なる g の場への作用に対して作用 $S[\phi]$ が不変であるとき，Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form global symmetry を持つと定義する．

[a] 場ごとに表現が決まると言うよりかは，表現を決めることによって場を定義する．数学で表現といったら線形な作用である必要があるが，物理ではしばしば非線形な作用のことも非線形”表現”と呼ぶ．例えば Nambu-Goldstone 場は破れた対称性の非線形表現として現れる [1]．

定義 3.2. Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form gauge symmetry を持つ
Lie 群 G の元 $g = e^{i\theta_a(x)t^a}$ が何らかの表現 D に従って場 $\phi(x)$ に作用し，$\phi(x) \mapsto D(g)\phi(x)$ のように変換するとする．この時任意の，($\mathrm{d}\theta(x) = 0$ とは限らない)g の場への作用に対して作用 $S[\phi]$ が不変であるとき，Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form gauge symmetry を持つと定義する．

となります．

特に Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form global symmetry を持つ場合について，重要な定理として Noether の定理が言えます．

定理 3.3. Noether の定理
Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form global symmetry を持つとする．この時，on shell で $\mathrm{d} * J_1^a(x) = 0$ なる 1-form current が存在する．

定理の証明自体は有名なので省きます[*4]．もうひとつ，あとで使う補題をひとつ導入しておきます．

[*4] いつもの Noether current $J^{a\mu}(x)$ に対して，$J_1^a(x) \coloneqq J^{a\mu}(x)\mathrm{d}x$ と定義すれば良いです．

補題 3.4.
Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form global symmetry を持ち，gauge symmetry は持たないとする．ここで，原点近くの $g = e^{i\epsilon_a(x)t^a}(\mathrm{d}\epsilon(x) \neq 0)$ によって場が $\phi(x) \mapsto \phi'(x) \coloneqq \phi(x) + \epsilon_a(x)\delta^a\phi(x)$ のように変換するとする．この時作用の微小な変分は

$$\delta S[\phi] = \int \mathrm{d}\epsilon(x) \wedge *J_1^a(x) \tag{3.1}$$

で与えられる．

ラフな証明は以下の通りです．

Proof.
$\mathrm{d}\epsilon(x) = 0$ で $S[\phi]$ は不変なので，$\epsilon_a(x)$ の 1 次で $\delta S[\phi]$ に寄与するのは，$\mathrm{d}\epsilon(x)$ に比例する部分だけである．ここで $\mathrm{d}\epsilon(x) \neq 0$ なる変換に対する作用の変分を，$\delta S[\phi] \eqqcolon \int \mathrm{d}\epsilon(x) \wedge *J_1^a(x)$ として逆に $J_1^a(x)$ を定義する．あとは on shell においてこれが保存すれば良い．

$$\delta S[\phi] \eqqcolon \mathrm{d}\epsilon(x) \wedge *J_1^a(x) \tag{3.2}$$
$$= -\int \epsilon_a(x) \wedge \mathrm{d} * J_1^a(x) \tag{3.3}$$

であるが，on shell では場の任意の変分に対して作用の変分が 0 になるのでこれを ϵ に比例するように取ってよく，この時 $\delta S[\phi] = 0$ となって $\mathrm{d} * J_1^a(x) = 0$ が出る． □

global symmetry に関して Ward identity も示しておくと，以下の通りです．

定理 3.5. Ward identity
$S[\phi]$ が $\phi(x) \mapsto \epsilon_a(x)\delta^a\phi(x)(\mathrm{d}\epsilon_a(x) = 0)$ に対して不変であるとき，

$$\langle \mathrm{d} * J_1^a(x)\phi(y)\rangle = -i\delta_d(x)\langle\delta^a\phi(y)\rangle \tag{3.4}$$

が成り立つ．ここで $\delta_d(x)$ は delta function d-form である．

Proof.
$\phi(x)$ の期待値を考え，経路積分の変数変換として $\phi(x) \mapsto \phi'(x) \coloneqq \phi(x) + \epsilon_a(x)\delta^a\phi(x)(\mathrm{d}\epsilon_a \neq 0)$ を考える．

$$\langle\phi(x)\rangle = \int \mathcal{D}\phi\phi(x)e^{iS[\phi]} \tag{3.5}$$
$$= \int \mathcal{D}\phi'(\phi(x) + \epsilon_a(x)\delta^a\phi(x))e^{iS[\phi']} \tag{3.6}$$

となるが，ここではナイーブに経路積分測度は不変であるとし，補題 3.4 を用いて $S[\phi']$ を書き換える．

$$\langle\phi(x)\rangle = \int \mathcal{D}\phi(\phi(x)+\epsilon_a(x)\delta^a\phi(x))e^{iS[\phi]+i\delta S[\phi]} \tag{3.7}$$
$$\simeq \int \mathcal{D}\phi(\phi(x)+\epsilon_a(x)\delta^a\phi(x))(1+i\delta S[\phi])e^{iS[\phi]} \tag{3.8}$$
$$\simeq \int \mathcal{D}\phi(\phi(x)+\epsilon_a(x)\delta^a\phi(x)+i\phi(x)\delta S[\phi])e^{iS[\phi]} \tag{3.9}$$
$$= \int \mathcal{D}\phi(\phi(x)+\epsilon_a(x)\delta^a\phi(x)+i\phi(x)\int \mathrm{d}\epsilon(y)\wedge *J_1^a(y))e^{iS[\phi]} \tag{3.10}$$
$$= \langle\phi(x)\rangle + \epsilon_a(x)\langle\delta^a\phi(x)\rangle - i\langle\phi(x)\int \epsilon(y)\wedge \mathrm{d}*J_1^a(y)\rangle \tag{3.11}$$
$$= \langle\phi(x)\rangle + \langle\delta^a\phi(x)\rangle\int \epsilon_a(y)\wedge\delta_d(x) - i\langle\phi(x)\int \epsilon(y)\wedge \mathrm{d}*J_1^a(y)\rangle \tag{3.12}$$

したがって

$$\langle \mathrm{d}*J_1^a(x)\phi(y)\rangle = -i\delta_d(x)\langle\delta^a\phi(y)\rangle \tag{3.13}$$

□

そしてこれを用いると，topological operator というある意味 topological な性質を持った operator を作ることができます．

$$U^a(\Sigma_{d-1}) \coloneqq e^{i\int_{\Sigma_{d-1}} *J_1^a} \tag{3.14}$$

と定義すれば期待値のレベルで，d 次元の多様体境界付き多様体 D_d に対して

$$\langle U^a(\Sigma_{d-1}+\partial D_d)\rangle = \langle e^{i\int_{\Sigma_{d-1}+\partial D_d} *J_1^a}\rangle \tag{3.15}$$
$$= \langle e^{i\int_{\Sigma_{d-1}} *J_1^a + \int_{D_d} d*J_1^a}\rangle \tag{3.16}$$
$$= \langle U^a(\Sigma_{d-1})\rangle \tag{3.17}$$

が成り立ちます．最後の行では，定理 3.5 で $\phi(x)=1$ と取ったときの表式を用いました．参照する多様体を境界付き多様体分だけずらしても期待値が変わらないという意味で，$U^a(\Sigma_{d-1})$ は topological と言えます．この場合の解釈は簡単で，current を (d-1) 次元の面上で積分することである種の保存量を作っており，Σ_{d-1} を time slice に取れば通常の Noether charge の保存に対応するわけです．

ここまでで，0 次元の点に値をとる場とその対称性について確認しました．この対称性の概念を，p 次元物体 (brane) 上の場の理論に対して拡張したのが p-form symmetry です．

3.2 p-form symmetry

まず，p 次元物体に値をとる場をいかにして定式化するかです．時空に埋め込まれた 1 次元物体を考えるとわかりやすいですが，reparametlization の冗長性を除けばこれは $[0,1)$ から時空への関数と思えます．reparametlization の冗長性については一旦保留して，ここではシンプルに汎函数として brane field を定義します [11]．

定義 3.6. p-dim. brane field
時空を $\mathcal{M}_d$ とする．$\mathcal{C}_p : [0,1)^p \to \mathcal{M}_d$[a]の汎函数のことを，$\psi[\mathcal{C}_p]$ と書いて，p-dim. brane field と呼ぶ.

[a] 正確にいうと，0 次元の場合の場が時空点そのものの関数ではなく，時空に対して 1 つ局所座標を取ったときの座標値の関数であったのと同様に，$\mathcal{C}_p : [0,1)^p \to U_d \cong \mathbb{R}^d$ を考えていて，作用には U_d の取り替えに関する対称性も課される．

特に $p=1$ の場合，string field と呼ぶのが一般的です．また，前節まで考察してきたのは 0-dim. brane field と言えます.

さて，p-dim. brane field を用意できたので，これに対して 0-form の場合と全くパラレルに対称性を議論していきます．0-form の場合に Lie 群 G の元を指定するのに用いたパラメータ $\epsilon_a(x)$ は単に時空座標の関数でしたが，これを 0-form とみなします．この部分を p-form に拡張することで，p-form symmetry が得られます．p-dim. brane field　$\psi[\mathcal{C}_p]$ を用意して，これが作用 $S[\psi]$ で表される理論に従うとした時，$S[\psi]$ が p-form symmetry を持つとは何か考えましょう.

ここでもひとまず，対称性が Lie 群 G によって特徴づけられることにします．G の generator を t^a と書き，G の元を一般に $g = e^{i\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)t^a}$ と書くことにします．この時，Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form symmetry を持つことを以下のように定義しょう．global な場合と local な場合を明示的に分けて書きます.

定義 3.7. Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\psi]$ が p-form global symmetry を持つ
Lie 群 G の元 $g = e^{i\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)t^a}$ が何らかの表現 D に従って場 $\psi[\mathcal{C}_p]$ に作用し，$\psi[\mathcal{C}_p] \mapsto D(g)\psi[\mathcal{C}_p]$ のように変換するとする．この時任意の，$\mathrm{d}\lambda(x) = 0$ なる g の場への作用に対して作用 $S[\psi]$ が不変であるとき，Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\psi]$ が p-form global symmetry を持つと定義する.

定義 3.8. Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\psi]$ が p-form gauge symmetry を持つ
Lie 群 G の元 $g = e^{i\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)t^a}$ が何らかの表現 D に従って場 $\psi[\mathcal{C}_p]$ に作用し，$\psi[\mathcal{C}_p] \mapsto D(g)\psi[\mathcal{C}_p]$ のように変換するとする．この時任意の，($\mathrm{d}\theta(x) = 0$ とは限らない)g の場への作用に対して作用 $S[\psi]$ が不変であるとき，Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\psi]$ が p-form gauge symmetry を持つと定義する.

特に Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form global symmetry を持つ場合について，重要な定理として Noether の定理が言えます.

定理 3.9. Noether の定理
Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\psi]$ が p-form global symmetry を持つとする．この時，on shell で $\mathrm{d} * J^a_{p+1}(x) = 0$ なる (p+1)-form current が存在する.

ここでも証明は省きます．ここでももうひとつ，あとで使う補題を導入しておきます.

補題 3.10.
Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\psi]$ が p-form global symmetry を持ち，gauge symmetry は持たないとする．ここで，原点近くの $g = e^{i\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)t^a}(\mathrm{d}\lambda(x) \neq 0)$ によって場が $\psi[\mathcal{C}_p] \mapsto \psi'[\mathcal{C}_p] \coloneqq \psi[\mathcal{C}_p] + \int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p]$ のように変換するとする．この時作用の微小な変分は

$$\delta S[\psi] = \int \mathrm{d}\epsilon(x) \wedge *J_1^a(x) \tag{3.18}$$

で与えられる．

ラフに証明を示しておくと，以下の通りです．

Proof.
$\mathrm{d}\lambda(x) = 0$ で $S[\psi]$ は不変なので，$\lambda_{p,a}(x)$ の 1 次で $\delta S[\psi]$ に寄与するのは，$\mathrm{d}\lambda(x)$ に比例する部分だけである．ここで $\mathrm{d}\lambda(x) \neq 0$ なる変換に対する作用の変分を，$\delta S[\psi] \eqqcolon \int \mathrm{d}\lambda(x) \wedge *J_{p+1}^a(x)$ として逆に $J_{p+1}^a(x)$ を定義する．あとは on shell においてこれが保存すれば良い．

$$\delta S[\psi] \eqqcolon \int \mathrm{d}\lambda(x) \wedge *J_{p+1}^a(x) \tag{3.19}$$

$$= -\int \lambda_a(x) \wedge \mathrm{d} * J_{p+1}^a(x) \tag{3.20}$$

であるが，on shell では場の任意の変分に対して作用の変分が 0 になるのでこれを λ に比例するように取ってよく，この時 $\delta S[\psi] = 0$ となって $\mathrm{d} * J_{p+a}^a(x) = 0$ が出る． □

global symmetry に関して，ここでも Ward identity を示しておきます．

定理 3.11. Ward identity
$S[\psi]$ が $\psi[\mathcal{C}_p] \mapsto \epsilon_a(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p](\mathrm{d}\lambda_{p,a}(x) = 0)$ に対して不変であるとき，

$$\langle \mathrm{d} * J_{p+1}^a(x)\psi[\mathcal{C}_p]\rangle = -i\delta_{d-p}(x \in \mathcal{C}_p)\langle\delta^a\psi[\mathcal{C}_p]\rangle \tag{3.21}$$

が成り立つ．ここで $\delta_{d-p}(x \in \mathcal{C}_p)$ は delta function (d-p)-form である．

Proof.
$\psi[\mathcal{C}_p]$ の期待値を考え，経路積分の変数変換として $\psi(x) \mapsto \psi'[\mathcal{C}_p] \coloneqq \psi[\mathcal{C}_p] + \int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p](\mathrm{d}\lambda_{p,a} \neq 0)$ を考える．

$$\langle\psi[\mathcal{C}_p]\rangle = \int \mathcal{D}\psi\psi[\mathcal{C}_p]e^{iS[\psi]} \tag{3.22}$$

$$= \int \mathcal{D}\psi'(\psi[\mathcal{C}_p] + \int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p])e^{iS[\psi']} \tag{3.23}$$

となるが，ここではナイーブに経路積分測度は不変であるとし，補題 3.10 を用いて $S[\phi']$ を書き換える．

$$\begin{aligned}
\langle\psi[\mathcal{C}_p]\rangle &= \int \mathcal{D}\psi(\psi[\mathcal{C}_p] + \int_{\mathcal{C}_p} \lambda_{p,a}(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p])e^{iS[\psi]+i\delta S[\psi]} && (3.24)\\
&\simeq \int \mathcal{D}\psi(\psi[\mathcal{C}_p] + \int_{\mathcal{C}_p} \lambda_{p,a}(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p])(1+i\delta S[\psi])e^{iS[\psi]} && (3.25)\\
&\simeq \int \mathcal{D}\psi(\psi[\mathcal{C}_p] + \int_{\mathcal{C}_p} \lambda_{p,a}(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p] + i\psi[\mathcal{C}_p]\delta S[\psi])e^{iS[\psi]} && (3.26)\\
&= \int \mathcal{D}\psi(\psi[\mathcal{C}_p] + \int_{\mathcal{C}_p} \lambda_{p,a}(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p] + i\psi[\mathcal{C}_p]\int \mathrm{d}\lambda_{p,a}(y)\wedge *J^a_{p+a}(y))e^{iS[\psi]} && (3.27)\\
&= \langle\psi[\mathcal{C}_p]\rangle + \int_{\mathcal{C}_p} \lambda_{p,a}(x)\langle\delta^a\psi[\mathcal{C}_p]\rangle - i\langle\psi[\mathcal{C}_p]\int \lambda_{p,a}(y)\wedge \mathrm{d}*J^a_{p+1}(y)\rangle && (3.28)\\
&= \langle\psi[\mathcal{C}_p]\rangle + \langle\delta^a\psi[\mathcal{C}_p]\rangle)\int \lambda_{p,a}(y)\wedge\delta_{d-p}(x\in\mathcal{C}_p) - i\langle\psi[\mathcal{C}_p]\int \lambda_{p,a}(y)\wedge \mathrm{d}*J^a_{p+1}(y)\rangle && (3.29)
\end{aligned}$$

したがって

$$\langle \mathrm{d}*J^a_{p+1}(x)\psi[\mathcal{C}_p]\rangle = -i\delta_{d-p}(x\in\mathcal{C}_p)\langle\delta^a\psi[\mathcal{C}_p]\rangle \tag{3.30}$$

□

そしてこれを用いると, ここでも topological operator というある意味 topological な性質を持った operator を作ることができます.

$$U^a(\Sigma_{d-p-1}) := e^{i\int_{\Sigma_{d-p-1}} *J^a_{p+1}} \tag{3.31}$$

と定義すれば期待値のレベルで，(d-p) 次元の多様体境界付き多様体 D_{d-p} に対して

$$\begin{aligned}
\langle U^a(\Sigma_{d-p-1}+\partial D_{d-p})\rangle &= \langle e^{i\int_{\Sigma_{d-p-1}+\partial D_{d-p}} *J^a_{p+1}}\rangle && (3.32)\\
&= \langle e^{i\int_{\Sigma_{d-p-1}} *J^a_{p+1}+\int_{D_{d-p}} d*J^a_{p+1}}\rangle && (3.33)\\
&= \langle U^a(\Sigma_{d-p-1})\rangle && (3.34)
\end{aligned}$$

が成り立ちます．最後の行では，定理 3.11 で $\psi[\mathcal{C}_p]=1$ と取ったときの表式を用いました．参照する多様体を境界付き多様体分だけずらしても期待値が変わらないという意味で，$U^a(\Sigma_{d-p-1})$ は topological といえます．topological operator を構成できることは higher-form symmetry において重要であるが，特に連続的な対称性の場合は先に理論の対称性があって，そこから現れてくるものであることを述べておきます．

ここで定理 3.11 の特別な場合として，$\psi[\mathcal{C}_p]$ が g の作用で線形に変換する場合を考えます．$p\geq 1$ では対称性は可換なものに限られることが知られているので，1 次元の表現しかあり得ません．この場合，

$$\delta\psi[\mathcal{C}_p] = q\psi[\mathcal{C}_p] \tag{3.35}$$

のようになる．これを定理 3.11 に代入すれば，

$$\langle \mathrm{d}*J^a_{p+1}(x)\psi[\mathcal{C}_p]\rangle = -iq\delta_{d-p}(x\in\mathcal{C}_p)\langle\psi[\mathcal{C}_p]\rangle \tag{3.36}$$

が得られます．q は群の表現をラベルしていて，charge と呼ばれ，例えば群が $U(1)$ の場合は $\mathbb{Z}$ に値を取ります．$\psi[\mathcal{C}_p]$ は (p+1)-form current の作用で charge を吐き出し，charged operator とも呼ばれます．さらにこの仮定のもとで，topological operator $U^a(\Sigma_{d-p-1})$ と charged operator $\psi[\mathcal{C}_p]$ の期待値を一緒に取ることを

考えてみましょう．ここでは，Σ_{d-p-1} がある (d-p) 次元の境界付き多様体 D'_{d-p} の境界として与えられているとします．このとき，

$$
\begin{aligned}
\langle U^a(\Sigma_{d-p-1})\psi[\mathcal{C}_p]\rangle &= \langle e^{i\int_{\Sigma_{d-p-1}} *J^a_{p+1}}\psi[\mathcal{C}_p]\rangle && (3.37)\\
&= \langle e^{i\int_{\partial D'_{d-p}} *J^a_{p+1}}\psi[\mathcal{C}_p]\rangle && (3.38)\\
&= \langle e^{i\int_{D'_{d-p}} \mathrm{d}*J^a_{p+1}}\psi[\mathcal{C}_p]\rangle && (3.39)\\
&= e^{i\int_{D'_{d-p}} \delta_{d-p}(x\in\mathcal{C}_p)}\langle\psi[\mathcal{C}_p]\rangle && (3.40)\\
&= e^{iq\mathrm{Link}(D'_{d-p},\mathcal{C}_p)}\langle\psi[\mathcal{C}_p]\rangle && (3.41)
\end{aligned}
$$

が得られます．計算には定理 3.11 の変形を用いました．

$\mathrm{Link}(D'_{d-p},\mathcal{C}_p) \coloneqq \int_{D'_{d-p}}\delta_{d-p}(x\in\mathcal{C}_p)$ として定義していて，これは topological operator と charged operator がどのくらい絡み合っているかを表す数字といえます．

3.3 例: $U(1)$ Maxwell 理論

例を見る前にひとつ補足しておきます．本稿では p-form symmetry についてはじめから brane field の理論を考えて，0-form の理論と全くパラレルになるような説明をしましたが，一般的には上記から少し外れたものについても p-form symmetry と呼びます．具体的には以下の通りです．

注 3.12. 一般的な p-form symmetry の定義

- p-form によって群元が定まるような群 G が作用する局所場の理論において，G の作用による作用の不変性から (p+1)-form current が存在する場合
- さらに広げて，(d-p-1) 次元多様体を参照して定まるような topological operator が構成できる場合

についても，理論に p-form symmetry があると言うことにする．

特に後者を含めることで，離散的な対称性についても higher-form symmetry の言葉で扱えるようになって便利です．この節では 1-form symmetry の例を見ますが，これはこの注で言う 1 つ目の状況に対応します．

具体例としてよく知る $U(1)$ Maxwell 理論を考えますが，場を表現によって定義することにこだわれば，$U(1)$ gauge 場が以下のように定義されます．Γ_1 を 1 次元多様体として

定義 3.13. $U(1)$ gauge 場
$e^{i\int_{\Gamma_1}\lambda_1(x)} \in U(1)$ が $a_1(x) \mapsto a_1(x) + \lambda_1$ として作用する時，ここでは 1-form $a_1(x)$ を $U(1)$ gauge 場として定義する．

とします．ここで，以下が成り立つことを示します．

命題 3.14. $U(1)$ **Maxwell 理論の global 1-form symmetry**

$$S[a_1] \coloneqq \int_{\mathcal{M}_4} f_2 \wedge * f_2, \quad f_2 \coloneqq \mathrm{d}a_1 \tag{3.42}$$

としたとき，$\mathrm{d}\lambda_1 = 0$ となる $g \in U(1)$ に対して，($H^1_{dR}(\mathcal{M}_4) = 0$ であれば[a])$S[a_1]$ が不変である．

[a] H^1_{dR} は 1 次の de Rham cohomology

Proof.

Poincaré の補題より $\mathrm{d}\lambda_1 = 0$ ならば $\lambda_1 = \mathrm{d}\lambda'_0$ とできて，$S[a_1]$ の $U(1)$ gauge 対称性から $S[a_1]$ の 1-form symmetry が言える． □

したがって，よく知る $U(1)$ Maxwell 理論が 1-form symmetry を持っていることが明らかになりました．

参考文献

[1] 汰一郎九後. ゲージ場の量子論. 新物理学シリーズ / 山内恭彦監修, No. 23-24. 培風館, 1989.

[2] 汰一郎九後. ゲージ場の理論と経路積分, 2000. https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~taichiro.kugo/M1lecture/ゲージ場の理論と経路積分 20210828.pdf.

[3] V. Parameswaran Nair, 泰裕阿部, 暁磯. 現代的な視点からの場の量子論. Springer university textbooks. シュプリンガー・ジャパン, 2009.

[4] Keito Shimizu and Sotaro Sugishita. Asymptotic symmetry and confinement in three-dimensional qed, 2025.

[5] 俊至高間. 微分幾何学ノート, 2023. https://t2sp.github.io/notes/geometry_main.pdf.

[6] NORMAN STEENROD. The Topology of Fibre Bundles. (PMS-14). Princeton University Press, 1951.

[7] Davide Gaiotto, Anton Kapustin, Nathan Seiberg, and Brian Willett. Generalized Global Symmetries. JHEP, Vol. 02, p. 172, 2015.

[8] Pedro R. S. Gomes. An introduction to higher-form symmetries. SciPost Phys. Lect. Notes, Vol. 74, p. 1, 2023.

[9] Lakshya Bhardwaj, Lea E. Bottini, Ludovic Fraser-Taliente, Liam Gladden, Dewi S. W. Gould, Arthur Platschorre, and Hannah Tillim. Lectures on generalized symmetries. Phys. Rept., Vol. 1051, pp. 1–87, 2024.

[10] T. Daniel Brennan and Sungwoo Hong. Introduction to Generalized Global Symmetries in QFT and Particle Physics. 6 2023.

[11] Nabil Iqbal and John McGreevy. Mean string field theory: Landau-Ginzburg theory for 1-form symmetries. SciPost Phys., Vol. 13, p. 114, 2022.