対称性の一般化と現象論への応用

三輪栞太郎

2025 年 12 月 16 日

概要

非可逆対称性としての solitonic symmetry の，アクシオン電磁気学をはじめとした現象論への応用を目指します.

目次

1 ゲージ場の配位空間その 1

ここではゲージ場の量子化の初等的な側面を扱います．主な参考文献は [1–3] です.

1.1 ゲージ不変性のある系

任意の時空間の関数を含む場・変換に対して不変な理論をゲージ不変性のある理論，あるいはゲージ理論と呼びますが，物理での典型的な例として，以下，$SU(N)$ ゲージ理論を考えます．ゲージ場の量子化の基本的なことを押さえるにはこれで十分です．構成要素の定義を後にまわすと.

定義 1.1. $SU(N)$ **ゲージ理論**
以下の Lagrangian $\mathcal{L}$ によって記述される理論を $SU(N)$ ゲージ理論と呼ぶ．物質場 φ，$SU(N)$ ゲージ場 A^a_μ を用いて，

$$\mathcal{L}(A,\varphi) \coloneqq -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{\mathrm{matter}}(\varphi, D_\mu\varphi) \tag{1.1}$$

$$F^a_{\mu\nu} \coloneqq \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{1.2}$$

$$D_\mu\varphi \coloneqq (\partial_\mu - igT^a A^a_\mu)\varphi \tag{1.3}$$

g は理論のパラメータ，f_{abc} は $SU(N)$ の構造定数，T^a を φ の属する表現における $\mathfrak{su}(N)$ の生成子の表現行列とする．また $\mathcal{L}_{\mathrm{matter}}(\varphi, D_\mu\varphi)$ は後で定義されるゲージ変換について不変な φ の Lagrangian である．

この定義の補足もかねていくつか定義します．

定義 1.2. 物質場
$\mathfrak{su}(N)$ の生成子を t^a で書く．$SU(N)$ の有限次元の表現行列 T^a に対し，$SU(N) \ni U = e^{ig\theta^a t^a}$ が $\varphi \mapsto e^{ig\theta^a T^a}\varphi$ と作用するような場 φ を物質場と定義する．

定義 1.3. $SU(N)$ **ゲージ場**
時空間に依存する $SU(N)$ の元 $U(x) = e^{ig\theta^a(x)t^a}$ に対し，$A^a_\mu \mapsto A'^a_\mu, s.t.\ A'^a_\mu t^a = UA^a_\mu t^a U^\dagger + \frac{i}{g}U\partial_\mu U^\dagger$ として作用するような場として $SU(N)$ ゲージ場 A^a_μ を定義する．$A_\mu \coloneqq A^a_\mu t^a$，$A'_\mu \coloneqq A'^a_\mu t^a$ としたとき，変換則は $A_\mu \mapsto A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}U\partial_\mu U^\dagger$ である．

定義 1.4. $SU(N)$ **ゲージ理論におけるゲージ変換**
物質場 φ，ゲージ場 A_μ への $SU(N)$ の作用について，作用する元を共通の時空間に依存する $U(x)$ に取り，両者を共に変換することを $SU(N)$ ゲージ理論におけるゲージ変換と呼ぶ．$U(x) = e^{ig\theta^a t^a}$ で θ^a が微小の場合，それぞれの変化分 $\delta\varphi, \delta A_\mu$ は以下の通りである．

$$\delta\varphi = ig\theta^a T^a \varphi \tag{1.4}$$

$$\delta A^a_\mu = \partial_\mu\theta^a + gf^{abc}A^b_\mu\theta^c = D_\mu\theta^a \tag{1.5}$$

以上をもって，本章での考察対象が定義されました．
最後に，簡単な事実として以下を述べておきます．

命題 1.5. $SU(N)$ **ゲージ理論のゲージ不変性**
$SU(N)$ ゲージ理論はゲージ変換に対して不変である．

Proof.

$$\mathcal{L}(A,\varphi) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{\mathrm{matter}}(\varphi, D_\mu\varphi) \tag{1.6}$$

であるが，定義より $\mathcal{L}_{\mathrm{matter}}$ はゲージ不変なので，第 1 項の不変性のみ示せばよい．$F_{\mu\nu} \coloneqq F^a_{\mu\nu} t^a$ とすると

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (1.7) \\ &\mapsto \partial_\mu (U A_\nu U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_\nu U^\dagger) - \partial_\nu (U A_\mu U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger) - ig[U A_\mu U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger, U A_\nu U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_\nu U^\dagger] \quad (1.8) \\ &= U F_{\mu\nu} U^\dagger \quad (1.9) \end{aligned}$$

であることと，$\mathrm{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = F^a_{\mu\nu} F^{b\mu\nu} \mathrm{tr}(t^a \tau^b) = N F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$ であることから直ちに従う． □

以下のテーマはここで導入した理論を量子化することとなります．典型的には

$$Z \coloneqq \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\varphi \, e^{i \int \mathrm{d}^4 x \mathcal{L}(A^a_\mu, \varphi)} \quad (1.10)$$

のような計算をしたいわけですが，これが上手くいかないことは簡単に予測できます．というのも，(A^a_μ, φ) の配位を 1 つ決めると $U \in SU(N)$ によってゲージ変換した配位 (A^U_μ, φ) も経路積分の積分範囲に含まれ，この変換に対し被積分関数は不変なことから，Z は $\int \mathcal{D}U = \int \prod_x \mathrm{d}U(x)$ なる無限大を含むことが示唆されます．つまりゲージ理論では単純な経路積分は ill-defined になると考えられ，これを well-defined にし，上手く計算する手法を編み出す必要があります．次節以降このやり方を与えたいと思います．

1.2 ゴースト場と BRST 変換

非常に天下り的な方法を取るため一旦話が飛びますが，最後にはちゃんと戻ってきます．まず以下の通り BRST 変換とゴースト場 $c^a(x)$，反ゴースト場 $\bar{c}^a(x)$，Nakanishi-Lautrup 場 $B^a(x)$ を以下の通り導入します．

定義 1.6. (反) ゴースト場，ゴースト数
$SU(N)$ が随伴表現で作用する Grassmann 奇の実スカラー場 $c^a(x), \bar{c}^a(x)$ であって，特に後述の BRST 変換と結び付いたものをそれぞれゴースト場，反ゴースト場と呼ぶ．これらを含む単項式について，c^a の次数から $\bar{c}^a$ の次数を引いたものをその関数のゴースト数と定義する．$C \coloneqq c^a t^a$，$\bar{C} \coloneqq \bar{c}^a t^a$ としておく．

定義 1.7. Nakanishi-Lautrup 場
$SU(N)$ が随伴表現で作用する Grassmann 偶の実スカラー場 $B^a(x)$ であって，特に後述の BRST 変換と結び付いたものを Nakanishi-Lautrup (NL) 場と呼ぶ．$B \coloneqq B^a t^a$ としておく．

定義 1.8. BRST 変換

1. 物質場 φ とゲージ場 A^a_μ の BRST 変換を，ゲージ変換のパラメータを Grassmann 数 λ とゴースト場 $c^a(x)$ の積に置きかえたもの

$$\varphi \mapsto \varphi + \delta_B\varphi \coloneqq \varphi + ig\lambda c^a T^a \varphi \tag{1.11}$$

$$A^a_\mu \mapsto A^a_\mu + \delta_B A^a_\mu \coloneqq A^a_\mu + \lambda(\partial_\mu c^a + g f_{abc} A^b_\mu c^c) = A^a_\mu + \lambda D_\mu c^a \tag{1.12}$$

として定義する．$\delta_B = \lambda \boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}$ なる $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}$ を用いて $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}\varphi = igc^a T^a\varphi, \boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} A_\mu = \partial_\mu C + ig[C, A_\mu]$ とも書ける．

2. A^a_μ, φ の上で $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}^2 = 0$ となるように c^a の BRST 変換を定義する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}\varphi) &= \boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(igc^a T^a\varphi) &(1.13)\\ &= ig\{(\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} c^a)T^a\varphi - c^a T^a(igc^b T^b\varphi)\} &(1.14)\\ &= ig\{(\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} c^a)T^a\varphi + \frac{1}{2} g f_{abc} c^a c^b T^c\varphi)\} &(1.15)\end{aligned}$$

より $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} c^a \coloneqq -\frac{1}{2} g f_{abc} c^b c^c$ が得られ，$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} C = -\frac{1}{2} g f_{abc} c^a c^b t^c = igC^2$ となる．このとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} A_\mu) &= \boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(\partial_\mu C + ig[C, A_\mu]) &(1.16)\\ &= ig(\partial_\mu C)C + igC(\partial_\mu C) + ig[igC^2, A_\mu] - ig\{C, \partial_\mu C + ig[C, A_\mu]\} &(1.17)\\ &= ig[igC^2, A_\mu] - ig\{C, ig[C, A_\mu]\} &(1.18)\\ &= 0 &(1.19)\\ \boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} C) &= \boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(igC^2) = ig(C^3 - C^3) = 0 &(1.20)\end{aligned}$$

も同時に成り立つ．

3. ゴースト場 c^a 1 個 1 個に対応して反ゴースト場 $\bar{c}^a$ を導入し，その BRST 変換を Nakanishi-Lautrup 場を用いて

$$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}\bar{c}^a \coloneqq iB^a$$

とする．$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}^2\bar{c}^a = 0$ を要請して $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} B^a \coloneqq 0$ とし，$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}^2 B^a = 0$ は自明に成り立つ．

このとき，BRST 変換を用いて Lagrangian $\mathcal{L}(A, \varphi)$ の特殊な拡張を考えます．

定義 1.9. $SU(N)$ ゲージ理論の BRST Lagrangian
$\mathcal{L}(A, \varphi)$ を $SU(N)$ ゲージ理論の Lagrangian，$F^a(A, \varphi, c, \bar{c}, B)$ を

1. ゴースト数が 0
2. $\mathcal{L}(A, \varphi) - i\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(\bar{c}^a F^a)$ にゲージ不変性がない

を満たす任意の関数とするとき，$\tilde{\mathcal{L}}(A, \varphi, c, \bar{c}, B) \coloneqq \mathcal{L}(A, \varphi) - i\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(\bar{c}^a F^a)$ を $\mathcal{L}$ の BRST Lagrangian と定義する．$\mathcal{L}_{GF+FP} \coloneqq -i\boldsymbol{\delta}_\mathbf{B}(\bar{c}^a F^a) = B^a F^a - i\bar{c}^a \boldsymbol{\delta}_\mathbf{B} F^a$ であるが，第 1 項をゲージ固定項 $\mathcal{L}_{GF}$，第 2 項を Faddeev-Popov 項 $\mathcal{L}_{FP}$ と呼ぶ．

ほとんど自明な事実として以下が従います．

命題 1.10. BRST Lagrangian の BRST 不変性
$\tilde{\mathcal{L}}$ は BRST 変換によって不変である.

Proof.
$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - i\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\bar{c}^a F^a)$ であるが，$\mathcal{L}$ に対して，BRST 変換はゲージ変換でパラメータを λc としたものなので，ゲージ不変性より BRST 不変性が言える．第 2 項については BRST 変換で $-i\lambda\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}\{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\bar{c}^a F^a)\}$ だけ変化し，$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}^2 = 0$ よりこれは 0 になる. □

BRST 変換を制御するのは定数 λ なので，これは大域的な変換に対する不変性です．つまり $\tilde{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{L}$ がゲージ不変性を失い，代わりにある大域的な対称性を得るように構成したものだと言えます．$\tilde{\mathcal{L}}$ にはゲージ不変性がないため，前節の最後で述べた種類の発散が出ないことも重要です.

さらに，Lagrangian だけでなく物理的状態の BRST 不変性についても述べておきます．陽な表式は次節で示しますが，BRST 変換の生成子を Q_B としたとき，物理的な状態を以下で定義します.

定義 1.11. 物理的状態
理論のヒルベルト空間の状態空間の元 $|\psi\rangle$ で，$Q_B|\psi\rangle = 0$ を満たすものを物理的状態と定義する.

つまり今後は，$Q_B|\psi\rangle = 0$ となるような BRST 不変な状態のみを考察対象とするということです．なぜこのような条件を課すかというと，状態ベクトルのノルムを正に限るためなのですが，説明は一旦省きます．さらに後でわかる通り Q_B は Hermite かつ $Q_B^2 = 0$ を満たすので，$|\psi\rangle = Q_B|\chi\rangle$ となる $|\psi\rangle$ は遷移振幅に寄与せず無視できます．よって物理的状態の定義を改めて,

定義 1.12. 物理的状態
理論の状態空間の元で $Q_B|\psi\rangle = 0$ を満たし，かつ $|\psi\rangle = Q_B|\chi\rangle$ と書けないものを物理的状態と定義する.

と取っても差し支えありません．このような条件を満たす元を BRST コホモロジーの元とも言います.

本節の最後に，$\tilde{\mathcal{L}}$ に関する極めて重要な事実を示して終わろうと思います.

命題 1.13. F の選択の任意性
BRST 不変な関数 $\Omega(A, \varphi, c, \bar{c}, B)$ に対して,

$$\langle\Omega\rangle := \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\,\Omega\, e^{i\int \mathrm{d}^4x\tilde{\mathcal{L}}} \tag{1.21}$$

は F^a の選択に依らない.

Proof.

$$\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\Omega e^{i\int \mathrm{d}^4x\{\mathcal{L} - i\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\bar{c}^a F^a)\}} \tag{1.22}$$

において，微小なパラメータ ϵ を用いて $F^a \mapsto F^a + \epsilon\delta F^a$ を考える．このとき $\langle\Omega\rangle$ の変化分は,

$$\delta\langle\Omega\rangle \simeq -i\epsilon\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\Omega\, e^{i\int \mathrm{d}^4x\tilde{\mathcal{L}}}\int \mathrm{d}^4x\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\bar{c}^a\delta F^a) \tag{1.23}$$

となるが，

$$\omega \coloneqq \Omega e^{i\int \mathrm{d}^4x\tilde{\mathcal{L}}}\int \mathrm{d}^4x\bar{c}^a\delta F^a \tag{1.24}$$

とすると，Ω, $\tilde{\mathcal{L}}$ の BRST 不変性から $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}\omega = \Omega e^{i\int \mathrm{d}^4x\tilde{\mathcal{L}}}\int \mathrm{d}^4x\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\bar{c}^a\delta F^a)$ が成り立つ．ゆえに

$$\delta\langle\Omega\rangle = -i\epsilon\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}\omega \tag{1.25}$$

である．ここで，プライム記号を用いて BRST 変換を表すとすると，

$$\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}\omega = \int \mathcal{D}A'\mathcal{D}\varphi'\mathcal{D}c'\mathcal{D}\bar{c}'\mathcal{D}B'\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}\omega' \tag{1.26}$$

$$= \int \mathcal{D}A'\mathcal{D}\varphi'\mathcal{D}c'\mathcal{D}\bar{c}'\mathcal{D}B'\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}(\omega + \lambda\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}\omega) \tag{1.27}$$

が成り立ち，Jacobian が自明，つまりアノマリーがないことを仮定すれば

$$\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\,\omega = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\,\omega + \lambda\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}\omega \tag{1.28}$$

が任意の λ で成り立ち，そのまま $\delta\langle\Omega\rangle = 0$ となる． □

例えば BRST 不変な状態間の遷移振幅の計算では $\Omega = \Psi_{\mathrm{F}}^*\Psi_{\mathrm{I}}$ が BRST 不変なので，F をどう取ってもよいことになります．次節以降では，期待値を取る関数が BRST 不変であるときには $F^a = \partial^\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2}B^a$ を用いることにします．α をゲージパラメータと呼びます．このとき，$\mathcal{L}_{GF} = B^a\partial^\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2}B^aB^a$，$\mathcal{L}_{FP} = -i\bar{c}^a\partial^\mu D_\mu c^a$ が成り立ちます．

1.3 変換の生成子と状態への作用

本節ではまず，BRST 変換をゲージ変換の生成子，つまり場 ϕ について $\delta\phi = i[\lambda Q_B, \phi]$, $\delta\phi = i[G(\theta), \phi]$ となる，汎関数微分可能な Q_B，$G(\theta)$ を構成したいと思います．$\tilde{\mathcal{L}}$ を演算子形式で量子化することが前提になるので，まず正準交換関係を求めます．そのためにそれぞれの一般化運動量を求めましょう．前節で示した $\tilde{\mathcal{L}}$ を全微分項だけ変更した

$$\tilde{\mathcal{L}}(A, \varphi, c, \bar{c}, B) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aF^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{\mathrm{matter}}(A, \varphi) + B^a\partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{2}\alpha B^aB^a - i\partial^\mu\bar{c}^aD_\mu c^a \tag{1.29}$$

考えると，

$$\pi^{a\mu} \coloneqq \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{A}_\mu^a} = F^{a\mu 0} + \delta^{\mu 0}B^a, \quad \pi_\varphi \coloneqq \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\varphi}} \tag{1.30}$$

$$\pi_c^a \coloneqq \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{c}^a} = -i\dot{\bar{c}}^a, \quad \pi_{\bar{c}}^a \coloneqq \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\bar{c}}^a} = i(\dot{c}^a + gf^{abc}A_0^bc^c), \quad \pi_B^a \coloneqq \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{B}^a} = 0 \tag{1.31}$$

が得られます．$\pi_B^a = 0$ となってしまいますが，B^a は A_0^a に共役な運動量として定まっているので，またそれに共役な運動量を考えることはしないという方針で進めます．得られる正準（反）交換関係は

$$[A_j^a(t,\boldsymbol{x}), \pi^{bk}(t,\boldsymbol{y})] = i\delta^{ab}\delta_j^k\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{1.32}$$

$$[A_0^a(t,\boldsymbol{x}), B^b(t,\boldsymbol{y})] = i\delta^{ab}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{1.33}$$

$$[\varphi(t,\boldsymbol{x}), \pi_\varphi(t,\boldsymbol{y})\} = i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{1.34}$$

$$\{c^b(t,\boldsymbol{x}), \pi_c^a(t,\boldsymbol{y})\} = \{\bar{c}^b(t,\boldsymbol{x}), \pi_{\bar{c}}^a(t,\boldsymbol{y})\} = i\delta^{ab}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{1.35}$$

となります．

ここで，BRST 変換は大域的な変換なので，Q_B は Noether の定理から簡単に求まります．BRST 変換に関する保存カレント $J^{(B)}_\mu$ は，物質場のカレント $ij^a_\mu \coloneqq \{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{matter}}/\partial(\partial^\mu\varphi)\}T^a\varphi$ を用いて

$$\begin{aligned}\lambda J^{(B)}_\mu &= \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial^\mu A^{a\nu})}\lambda D^\nu c^a + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial^\mu\varphi)}ig\lambda c^a T^a\varphi + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial^\mu c^a)}(-\frac{1}{2}\lambda g f_{abc}c^b c^c) + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial^\mu \bar{c}^a)}i\lambda B^a \\ &= -F^a_{\mu\nu}\lambda(D^\nu c)^a - j^a_\mu g\lambda c^a + \frac{1}{2}ig\lambda(\partial_\mu\bar{c})^a f_{abc}c^b c^c - \lambda(D_\mu c)^a B^a \end{aligned} \tag{1.36}$$

となるので Noether charge Q_B は

$$\begin{aligned}Q_B &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\{-F^a_{0\nu}(D^\nu c)^a - gj^a_0 c^a + \frac{1}{2}ig(\partial_0\bar{c})^a f_{abc}c^b c^c - (D_0 c)^a B^a\} \\ &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{\pi^{ai}(D_i c)^a + B^a(D_0 c)^a + ig\pi_\varphi c^a T^a\varphi - \frac{1}{2}g\pi^a_c f_{abc}c^b c^c + i\pi^a_{\bar{c}}B^a\right\}\end{aligned} \tag{1.37}$$

と得られます．明らかに，これは Hermite で $Q_B^\dagger = Q_B$，$Q_B^2 = 0$ が成り立つのもわかります．次にゲージ変換については，システマチックに生成子を求める方法も少しややこしいので，天下り的に $G(\theta)$ を与えて生成子であることを確かめることにします．

$$G(\theta) \coloneqq \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\{\pi^{ai}(D_i\theta)^a + B^a(D_0\theta)^a + ig\pi_\varphi\theta^a T^a\varphi - gf_{abc}\theta^a(\pi^b_c c^c + \pi^b_{\bar{c}}\bar{c}^c)\} \tag{1.38}$$

と定義すれば，これは θ の無限遠での振る舞いに依らず汎関数微分可能となり，正準交換関係を利用して

$$i[G(\theta), A^a_j] = (D_j\theta)^a, \quad i[G(\theta), A^a_0] = (D_0\theta)^a, \quad i[G(\theta), \varphi] = ig\theta^a T^a\varphi \tag{1.39}$$

$$i[G(\theta), c^a] = gf_{abc}\theta^b c^c, \quad i[G(\theta), \bar{c}^a] = gf_{abc}\theta^b\bar{c}^c \tag{1.40}$$

を得られます．以上より Q_B と $G(\theta)$ の表式が得られました．

ここで補題として，Q_B と $G(\theta)$ の関係を以下のように示しておきます．

補題 1.14. Q_B と $G(\theta)$ の関係

$SU(N)$ ゲージ理論の BRST Lagrangian による理論において，

$$G(\theta) = -i\left\{Q_B, \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\theta^a(x)\pi^a_{\bar{c}}(x)\right\} + \oint \mathrm{d}S_i\pi^{ai}\theta^a + [B^a\theta^a]^{t_{\mathrm{F}}}_{t_{\mathrm{I}}} - gf_{abc}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\theta^a\pi^b_c\bar{c}^c \tag{1.41}$$

Proof. 無限遠では各々の場が 0 となるので，

$$Q_B = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{\pi^{ai}(D_i c)^a + B^a(D_0 c)^a + ig\pi_\varphi c^a T^a\varphi - \frac{1}{2}g\pi^a_c f_{abc}c^b c^c + i\pi^a_{\bar{c}}B^a\right\} \tag{1.42}$$

$$= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{-(D_i\pi^i)^a c^a - (D_0 B)^a c^a + ig\pi_\varphi c^a T^a\varphi - \frac{1}{2}g\pi^a_c f_{abc}c^b c^c + i\pi^a_{\bar{c}}B^a\right\} \tag{1.43}$$

が成り立つ．よって無限遠で $c \to 0$ と限らないことに注意すると，

$$\left\{Q_B, \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\theta^a\pi^a_{\bar{c}}(x)\right\} = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{-i(D_i\pi^i)^a\theta^a - i(D_0 B)^a\theta^a - ig\pi_\varphi T^a\theta\varphi - igf_{abc}\theta^a\pi^b_c c^c\right\} \tag{1.44}$$

$$= iG(\theta) - i\oint \mathrm{d}S_i\pi^{ai}\theta^a - i[B^a\theta^a]^{t_{\mathrm{F}}}_{t_{\mathrm{I}}} + igf_{abc}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\theta^a\pi^b_c\bar{c}^c \tag{1.45}$$

となり，示された． □

最後にここで得られた $Q_B, G(\theta)$ の状態への作用を考えていきます．次節で $\tilde{\mathcal{L}}$ の経路積分量子化を扱うので，経路積分において境界条件を定める

$$\Psi_{\mathrm{I,F}}[A,\varphi,c,\bar{c},B] \coloneqq \langle t_{\mathrm{I,F}}; A,\varphi,c,\bar{c},B|\Psi_{\mathrm{I,F}}\rangle \tag{1.46}$$

に対してのみ考えることにします．なお，前節で述べた通り，$\Psi_{\mathrm{I,F}}$ は BRST コホモロジーの元としておきます．よって $\Psi_{\mathrm{I,F}}$ は Q_B の作用で不変です．次に $G(\theta)$ の作用ですが，式 (1.46) の第 1 項からは

$$\left\{Q_B, \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\theta^a\pi_{\bar{c}}^a\right\}|\Psi_{\mathrm{I,F}}\rangle = Q_B\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\theta^a\pi_{\bar{c}}^a|\Psi_{\mathrm{I,F}}\rangle \tag{1.47}$$

しか出てこず，もとの $|\Psi_{\mathrm{I,F}}\rangle$ と遷移振幅のレベルで等価な状態しか作りません．よって $|\Psi_{\mathrm{I,F}}\rangle$ が $G(\theta)$ の非自明な作用を受けるとすれば第 2 項以降が関係します．ここで $\Psi_{\mathrm{I,F}}[A,\varphi,c,\bar{c},B]$ の構造を改めて考えてみるのですが，始状態・終状態においては通常，$c,\bar{c},B$ のない状態を取る以上，これらの場にとっての境界条件は真空，つまりナイーブに考えると Lagrangian の $i\epsilon$ 項として処理できると思えます．よって $\Psi_{\mathrm{I,F}}[A,\varphi,c,\bar{c},B]$ は今後 $\Psi_{\mathrm{I,F}}[A,\varphi]$ と書くことにし，$i\epsilon$ 項のゲージ不変性も仮定します．ゴーストにのみ作用する式 (1.46) の第 4 項はゴーストの項のゲージ変換を引き起こしますが，仮定よりこれは自明な変換となります．最後に残るのは θ^a が境界条件で 0 か否かで決まる第 2 項と第 3 項だけです．よって以下が成り立ちます．

命題 1.15．始状態・終状態のゲージ変換性
BRST Lagrangian による理論において，境界に現れる状態に対する $G(\theta)$ の作用は，$\theta^a \to 0,\ (|x^\mu x_\mu| \to \infty)$ のとき自明，$\theta^a \to 0,\ (|x^\mu x_\mu| \to \infty)$ でないとき非自明となる．

ここで以下の記法を導入します．

定義 1.16．Small ゲージ変換
$\theta^a \to 0,\ (|x^\mu x_\mu| \to \infty)$ となるゲージ変換を small ゲージ変換と呼び，small ゲージ変換全体の集合を $\mathcal{G}_* \coloneqq \{U(x)\in SU(N); U\to 1,\ (|x^\mu x_\mu|\to\infty)\}$ と書く．

$\mathcal{G}_*$ は次節で A_μ^a の経路積分を考える際に重要となります．

1.4 ゲージ理論の経路積分量子化

本節でようやく，ゲージ理論を経路積分量子化します．$\tilde{\mathcal{L}}$ による理論の量子化が，もとの $\mathcal{L}$ の量子化と等価であることを示してゴールです．数学的にはよくない書き方ですが，以下を示していきます．

命題 1.17．ゲージ理論の経路積分量子化 ($SU(N)$) ゲージ理論の Lagrangian $\mathcal{L}$ とその BRST Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ について，

$$\left(\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U\right)\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]e^{i\int \mathrm{d}^4x\tilde{\mathcal{L}}} = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]e^{i\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}} \tag{1.48}$$

が成り立つ．

両辺，数学的には ill-defined ですが，物理的な意味は明快です．$\mathcal{L}$ を用いてナイーブに計算した遷移振幅は，ゲージ不変性による無限大の係数 $\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U$ を除いて $\tilde{\mathcal{L}}$ による計算に等しいということです．つまり $\tilde{\mathcal{L}}$ の量子

化は，$\mathcal{L}$ の well-defined な量子化を与えます．以下ではこれを示しますが，左辺の被積分関数は BRST 不変なので，$\tilde{\mathcal{L}}$ における F^a の選択が自由です．よって証明においては 1.2 節で与えたものを用います．

まず補題として以下を示します．Gribov 問題については証明の中で説明します．

補題 1.18. Faddeev-Popov 行列式

Gribov 問題を無視したとき，任意の関数 $f^a(x)$ について，以下が成り立つ．

$$\mathrm{Det}(\partial^\mu D_\mu)\delta(\partial^\mu A_\mu^a - f^a) = \delta(\partial^\mu A_\mu^a - f^a)\left[\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U\delta(\partial^\mu A_\mu^{U,a} - f^a)\right]^{-1} \tag{1.49}$$

Proof.

右辺を変形して左辺となることを示す．右辺について，$\partial^\mu A_\mu^a = f^a$ において $\int_{\mathcal{G}_*}\delta(\partial^\mu A_\mu^{U,a} - f^a)$ を評価すればよいわけだが，ナイーブには $U = 1$ の近傍で計算すればよいと予想される．なぜなら，$A_\mu^a = f_\mu^a$ なる A_μ^a に対して

$$\partial^\mu A_\mu^{U,a} - f^a = 0, \quad U \in \mathcal{G}_* \tag{1.50}$$

なる方程式の解は $U = 1$ に限られるようだからである．U に関する微分方程式とみたときに，$U \in \mathcal{G}_*$ より無限遠の境界条件が自然に課されていることも重要である．実際，ゲージ場の量子化においては方程式 (1.50) の解が $U = 1$ のみと仮定して進めることが多く，この仮定がないと式 (1.48) も導けないのだが，期待とは裏腹に (1.50) には離散的に複数の解が存在しうることが知られている．この問題を Gribov 問題という．しかしながら，摂動論の範囲や弱結合の範囲ではこの問題は効いてこないと考えられている．それは以下の理由による．今，ざっくりとした議論で $U \simeq 1$ と仮定すると (1.50) は

$$\partial^\mu D_\mu \theta^a = \partial^\mu(\partial_\mu \theta^a + g f^{abc} A_\mu^b \theta^c) = 0 \tag{1.51}$$

となる．ここで $g f^{abc} A_\mu^b \theta^c$ の寄与が小さければこれは単なる Laplace 方程式であり，境界条件のもとで解は $\theta^a = 0$ に定まる．また $\theta^a \neq 0$ なる解は，強結合や非摂動的な状況でのみ効くようである．前おきが長くなったが，今の場合仮定より Gribov 問題を無視することになっているので，(1.50) の解は $U = 1$ のみとする．これは弱結合，摂動的な場合には正しく，そうでない場合にも building block として有用な仮定として受け入れる．その場合，前述の通り (1.49) の右辺は $U = 1$ 近傍でのみ評価してよく，

$$(\partial^\mu A_\mu^a - f^a)\left[\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U\delta(\partial^\mu A_\mu^{U,a} - f^a)\right]^{-1} = \delta(\partial^\mu A_\mu^a - f^a)\left[\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U\delta(\partial^\mu D_\mu \theta^a)\right]^{-1} \tag{1.52}$$

$$= \mathrm{Det}(\partial^\mu D_\mu)\delta(\partial^\mu A_\mu^a - f^a) \tag{1.53}$$

を得る． □

これを Faddeev-Popov (FP) 行列式と呼び，$\Delta[A] \coloneqq \int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U\delta(\partial^\mu A_\mu^{U,a} - f^a)$ と書くことにします．$\Delta[A]$ がゲージ不変なのはほとんど自明です．

さて，以上の補題のもとで命題 1.17 を示します．

Proof.

(1.48) の左辺を変形して右辺を導きます．

$$\left(\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U\right)\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]e^{i\int\mathrm{d}^4x\tilde{\mathcal{L}}(A,\varphi,c,\bar{c},B)} \tag{1.54}$$

$$=\left(\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U\right)\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}B\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]e^{i\int d^4x\mathcal{L}(A,\varphi)+i\int d^4x(\frac{1}{2}\alpha B^aB^a+B^a\partial^\mu A_\mu^a)-\int d^4x\bar{c}^a\partial^\mu D_\mu c^a} \tag{1.55}$$

$$=\left(\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U\right)\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]\mathrm{Det}(\partial^\mu D_\mu)\,e^{i\int d^4x\mathcal{L}(A,\varphi)-i\int d^4x\frac{(\partial^\mu A_\mu^a)^2}{2\alpha}} \tag{1.56}$$

$$=\left(\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U\right)\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}f\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]\mathrm{Det}(\partial^\mu D_\mu)\delta(\partial^\mu A_\mu^a-f^a)e^{i\int d^4x\mathcal{L}(A,\varphi)-i\int d^4x\frac{(f^a)^2}{2\alpha}} \tag{1.57}$$

$$=\left(\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U\right)\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}f\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]\delta(\partial^\mu A_\mu^a-f^a)\left[\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U'\delta(\partial^\mu A_\mu^{U',a}-f^a)\right]^{-1}e^{i\int d^4x\mathcal{L}(A,\varphi)-i\int d^4x\frac{(f^a)^2}{2\alpha}} \tag{1.58}$$

$$=\left(\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U\right)\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}f\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]\delta(\partial^\mu A_\mu^{U,a}-f^a)\left[\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U'\delta(\partial^\mu A_\mu^{U',a}-f^a)\right]^{-1}e^{i\int d^4x\mathcal{L}(A,\varphi)-i\int d^4x\frac{(f^a)^2}{2\alpha}} \tag{1.59}$$

$$=\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}f\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]e^{i\int d^4x\mathcal{L}(A,\varphi)-i\int d^4x\frac{(f^a)^2}{2\alpha}} \tag{1.60}$$

$$=\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]e^{i\int d^4x\mathcal{L}(A,\varphi)} \tag{1.61}$$

導出においては有限の定数倍は無視した． □

以上をもってゲージ理論の量子化は，$\tilde{\mathcal{L}}$ を構成することで成されるとわかりました．最後に (1.48) より，

$$\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}Be^{i\tilde{\mathcal{L}}}=\left(\int_{\mathcal{G}_*}\mathcal{D}U\right)^{-1}\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi e^{i\int\mathrm{d}^4x\mathcal{L}} \tag{1.62}$$

$$=\int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*}\mathcal{D}A\mathcal{D}\varphi e^{i\int\mathrm{d}^4x\mathcal{L}} \tag{1.63}$$

を得ます．つまりゲージ理論の well-defined な量子化は，ゲージ場全体 $\mathcal{A}$ に，$\mathcal{G}_*$ の元についてのゲージ変換による同値類を入れた空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ を考え，$\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ 上の経路積分を考えることに対応します．ちなみにゲージ変換全部を用いて同値類を入れるとなぜいけないかというと，前節で述べた通り，$|x^\mu x_\mu|\to\infty$ で $U\to 1$ とならないゲージ変換に対しては，$\Psi_{\mathrm{F}}^*[A,\varphi]\Psi_{\mathrm{I}}[A,\varphi]$ が変化しうるからです．そういう意味で，被積分関数の全てを不変に保つ $\mathcal{G}_*$ の元は真の冗長性を表していて，$\mathcal{G}_*$ に含まれないゲージ変換については，$\mathcal{L}$ のみ不変に保つという意味で通常の対称性と同様の性質をもちます．このような，無限遠でのゲージ変換に対する対称性は漸近対称性と呼ばれ，閉じ込めとの関連も示唆されています [4].

2 higher-form symmetry

ここでは higher-form symmetry という，通常の対称性を拡張した対称性について扱います．まず通常の対称性である 0-form symmetry について復習し，その後パラレルな形で p-form symmetry についてみます．最後に簡単な例をひとつ見ます．直接の参考文献というわけではないですが，higher-form symmetry の文献としては [5–8] を参照しました．

2.1 0-form symmetry

通常の，つまり 0 次元物体から定まる局所場に作用する対称性のことを 0-form symmetry と言います．なぜ 0-form なのかはおいおいわかります．局所場 $\phi(x)$ を用意して，これが作用 $S[\phi]$ で表される理論に従うとした時，$S[\phi]$ が 0-form symmetry を持つとは何か考えましょう．

ひとまず，対称性が Lie 群 G によって特徴づけられることにします．G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の generator を t^a と書き，G の元を一般に $g = e^{i\theta_a(x)t^a}$ と書くことにしましょう．この時，Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form symmetry を持つことを以下のように定義します．global な場合と local な場合を明示的に分けて書くと，

定義 2.1. Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form global symmetry を持つ
Lie 群 G の元 $g = e^{i\theta_a(x)t^a}$ が何らかの表現 D に従って場 $\phi(x)$ に作用し，$\phi(x) \mapsto D(g)\phi(x)$ のように変換するとする．[a]．この時任意の，$\mathrm{d}\theta(x) = 0$ なる g の場への作用に対して作用 $S[\phi]$ が不変であるとき，Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form global symmetry を持つと定義する．

[a] 場ごとに表現が決まると言うよりかは，表現を決めることによって場を定義する．数学で表現といったら線形な作用である必要があるが，物理ではしばしば非線形な作用のことも非線形"表現" と呼ぶ．例えば Nambu-Goldstone 場は破れる前の対称性の非線形表現として現れる [1].

定義 2.2. Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form gauge symmetry を持つ
Lie 群 G の元 $g = e^{i\theta_a(x)t^a}$ が何らかの表現 D に従って場 $\phi(x)$ に作用し，$\phi(x) \mapsto D(g)\phi(x)$ のように変換するとする．この時任意の，($\mathrm{d}\theta(x) = 0$ とは限らない)g の場への作用に対して作用 $S[\phi]$ が不変であるとき，Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form gauge symmetry を持つと定義する．

となります．

特に Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form global symmetry を持つ場合について，重要な定理として Noether の定理が言えます．

定理 2.3. Noether の定理
Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form global symmetry を持つとする．この時，on shell で $\mathrm{d} * J_1^a(x) = 0$ なる 1-form current が存在する．

定理の証明自体は有名なので省きます[*1]．もうひとつ，あとで使う補題をひとつ導入しておきます．

補題 2.4. Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form global symmetry を持ち，gauge symmetry は持たないとする．ここで，原点近くの $g = e^{i\epsilon_a(x)t^a}(\mathrm{d}\epsilon(x) \neq 0)$ によって場が $\phi(x) \mapsto \phi'(x) := \phi(x) + \epsilon_a(x)\delta^a\phi(x)$ のように変換するとする．この時作用の微小な変分は

$$\delta S[\phi] = \int \mathrm{d}\epsilon(x) \wedge *J_1^a(x) \tag{2.1}$$

で与えられる．

[*1] いつもの Noether current $J^{a\mu}(x)$ に対して，$J_1^a(x) := J^{a\mu}(x)\mathrm{d}x$ と定義すれば良い．

ラフな証明は以下の通りです．

Proof.

$\mathrm{d}\epsilon(x)=0$ で $S[\phi]$ は不変なので，$\epsilon_a(x)$ の 1 次で $\delta S[\phi]$ に寄与するのは，$\mathrm{d}\epsilon(x)$ に比例する部分だけである．ここで $\mathrm{d}\epsilon(x)\neq 0$ なる変換に対する作用の変分を，$\delta S[\phi]=:\int \mathrm{d}\epsilon(x)\wedge *J_1^a(x)$ として逆に $J_1^a(x)$ を定義する．あとは on shell においてこれが保存すれば良い．

$$\delta S[\phi] =: \mathrm{d}\epsilon(x)\wedge *J_1^a(x) \tag{2.2}$$
$$= -\int \epsilon_a(x)\wedge \mathrm{d}*J_1^a(x) \tag{2.3}$$

であるが，on shell では場の任意の変分に対して作用の変分が 0 になるのでこれを ϵ に比例するように取ってよく，この時 $\delta S[\phi]=0$ となって $\mathrm{d}*J_1^a(x)=0$ が出る． □

global symmetry に関して Ward identity も示しておくと，以下の通りです．

定理 2.5. Ward identity $S[\phi]$ が $\phi(x)\mapsto\epsilon_a(x)\delta^a\phi(x)(\mathrm{d}\epsilon_a(x)=0)$ に対して不変であるとき，

$$\langle \mathrm{d}*J_1^a(x)\phi(y)\rangle = -i\delta_d(x)\langle\delta^a\phi(y)\rangle \tag{2.4}$$

が成り立つ．ここで $\delta_d(x)$ は delta function d-form である．

Proof.

$\phi(x)$ の期待値を考え，経路積分の変数変換として $\phi(x)\mapsto\phi'(x):=\phi(x)+\epsilon_a(x)\delta^a\phi(x)(\mathrm{d}\epsilon_a\neq 0)$ を考える．

$$\langle\phi(x)\rangle = \int \mathcal{D}\phi\phi(x)e^{iS[\phi]} \tag{2.5}$$
$$= \int \mathcal{D}\phi'(\phi(x)+\epsilon_a(x)\delta^a\phi(x))e^{iS[\phi']} \tag{2.6}$$

となるが，ここではナイーブに経路積分測度は不変であるとし，補題 2.4 を用いて $S[\phi']$ を書き換える．

$$\langle\phi(x)\rangle = \int \mathcal{D}\phi(\phi(x)+\epsilon_a(x)\delta^a\phi(x))e^{iS[\phi]+i\delta S[\phi]} \tag{2.7}$$
$$\simeq \int \mathcal{D}\phi(\phi(x)+\epsilon_a(x)\delta^a\phi(x))(1+i\delta S[\phi])e^{iS[\phi]} \tag{2.8}$$
$$\simeq \int \mathcal{D}\phi(\phi(x)+\epsilon_a(x)\delta^a\phi(x)+i\phi(x)\delta S[\phi])e^{iS[\phi]} \tag{2.9}$$
$$= \int \mathcal{D}\phi(\phi(x)+\epsilon_a(x)\delta^a\phi(x)+i\phi(x)\int \mathrm{d}\epsilon(y)\wedge *J_1^a(y))e^{iS[\phi]} \tag{2.10}$$
$$= \langle\phi(x)\rangle+\epsilon_a(x)\langle\delta^a\phi(x)\rangle - i\langle\phi(x)\int\epsilon(y)\wedge\mathrm{d}*J_1^a(y)\rangle \tag{2.11}$$
$$= \langle\phi(x)\rangle+\langle\delta^a\phi(x)\rangle\int\epsilon_a(y)\wedge\delta_d(x) - i\langle\phi(x)\int\epsilon(y)\wedge\mathrm{d}*J_1^a(y)\rangle \tag{2.12}$$

したがって

$$\langle \mathrm{d}*J_1^a(x)\phi(y)\rangle = -i\delta_d(x)\langle\delta^a\phi(y)\rangle \tag{2.13}$$

□

そしてこれを用いると，topological operator というある意味 topological な性質を持った operator を作ることができます.

$$U^a(\Sigma_{d-1}) \coloneqq e^{i\int_{\Sigma_{d-1}} *J_1^a} \tag{2.14}$$

と定義すれば期待値のレベルで，d 次元の多様体境界付き多様体 D_d に対して

$$\begin{aligned}
\langle U^a(\Sigma_{d-1}+\partial D_d)\rangle &= \langle e^{i\int_{\Sigma_{d-1}+\partial D_d} *J_1^a}\rangle &(2.15)\\
&= \langle e^{i\int_{\Sigma_{d-1}} *J_1^a + \int_{D_d} d*J_1^a}\rangle &(2.16)\\
&= \langle U^a(\Sigma_{d-1})\rangle &(2.17)
\end{aligned}$$

が成り立ちます．最後の行では，定理 2.5 で $\phi(x)=1$ と取ったときの表式を用いました．参照する多様体を境界付き多様体分だけずらしても期待値が変わらないという意味で，$U^a(\Sigma_{d-1})$ は topological と言えます．この場合の解釈は簡単で，current を (d-1) 次元の面上で積分することである種の保存量を作っており，Σ_{d-1} を time slice に取れば通常の Noether charge の保存に対応するわけです.

ここまでで，0 次元の点に値をとる場とその対称性について確認しました．この対称性の概念を，p 次元物体 (brane) 上の場の理論に対して拡張したのが p-form symmetry です.

2.2 p-form symmetry

まず，p 次元物体に値をとる場をいかにして定式化するかです．時空に埋め込まれた 1 次元物体を考えるとわかりやすいですが，reparametlization の冗長性を除けばこれは $[0,1)$ から時空への関数と思えます．reparametlization の冗長性については一旦保留して，ここではシンプルに汎函数として brane field を定義します [9].

定義 2.6. p-dim. brane field
時空を $\mathcal{M}_d$ とする．$\mathcal{C}_p:[0,1)^p \to \mathcal{M}_d$[a]の汎函数のことを，$\psi[\mathcal{C}_p]$ と書いて，p-dim. brane field と呼ぶ.

[a] 正確にいうと，0 次元の場合の場が時空点そのものの関数ではなく，時空に対して 1 つ局所座標を取ったときの座標値の関数であったのと同様に，$\mathcal{C}_p:[0,1)^p \to U_d \cong \mathbb{R}^d$ を考えていて，作用には U_d の取り替えに関する対称性も課される.

特に $p=1$ の場合，string field と呼ぶのが一般的です．また，前節まで考察してきたのは 0-dim. brane field と言えます.

さて，p-dim. brane field を用意できたので，これに対して 0-form の場合と全くパラレルに対称性を議論していきます．0-form の場合に Lie 群 G の元を指定するのに用いたパラメータ $\epsilon_a(x)$ は単に時空座標の関数でしたが，これを 0-form とみなします．この部分を p-form に拡張することで，p-form symmetry が得られます．p-dim. brane field　$\psi[\mathcal{C}_p]$ を用意して，これが作用 $S[\psi]$ で表される理論に従うとした時，$S[\psi]$ が p-form symmetry を持つとは何か考えましょう.

ここでもひとまず，対称性が Lie 群 G によって特徴づけられることにします．G の generator を t^a と書き，G の元を一般に $g=e^{i\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)t^a}$ と書くことにします．この時，Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form symmetry を持つことを以下のように定義しょう．global な場合と local な場合を明示的に分けて書きます.

定義 2.7. Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\psi]$ が p-form global symmetry を持つ
Lie 群 G の元 $g = e^{i\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)t^a}$ が何らかの表現 D に従って場 $\psi[\mathcal{C}_p]$ に作用し，$\psi[\mathcal{C}_p] \mapsto D(g)\psi[\mathcal{C}_p]$ のように変換するとする．この時任意の，$\mathrm{d}\lambda(x) = 0$ なる g の場への作用に対して作用 $S[\psi]$ が不変であるとき，Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\psi]$ が p-form global symmetry を持つと定義する．

定義 2.8. Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\psi]$ が p-form gauge symmetry を持つ
Lie 群 G の元 $g = e^{i\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)t^a}$ が何らかの表現 D に従って場 $\psi[\mathcal{C}_p]$ に作用し，$\psi[\mathcal{C}_p] \mapsto D(g)\psi[\mathcal{C}_p]$ のように変換するとする．この時任意の，($\mathrm{d}\theta(x) = 0$ とは限らない)g の場への作用に対して作用 $S[\psi]$ が不変であるとき，Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\psi]$ が p-form gauge symmetry を持つと定義する．

特に Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\phi]$ が 0-form global symmetry を持つ場合について，重要な定理として Noether の定理が言えます．

定理 2.9. Noether の定理
Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\psi]$ が p-form global symmetry を持つとする．この時，on shell で $\mathrm{d} * J^a_{p+1}(x) = 0$ なる (p+1)-form current が存在する．

ここでも証明は省きます．ここでももうひとつ，あとで使う補題を導入しておきます．

補題 2.10. Lie 群 G の作用に対して理論 $S[\psi]$ が p-form global symmetry を持ち，gauge symmetry は持たないとする．ここで，原点近くの $g = e^{i\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)t^a}$ ($\mathrm{d}\lambda(x) \neq 0$) によって場が $\psi[\mathcal{C}_p] \mapsto \psi'[\mathcal{C}_p] \coloneqq \psi[\mathcal{C}_p] + \int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p]$ のように変換するとする．この時作用の微小な変分は

$$\delta S[\psi] = \int \mathrm{d}\epsilon(x) \wedge *J^a_1(x) \tag{2.18}$$

で与えられる．

ラフに証明を示しておくと，以下の通りです．

Proof.
$\mathrm{d}\lambda(x) = 0$ で $S[\psi]$ は不変なので，$\lambda_{p,a}(x)$ の 1 次で $\delta S[\psi]$ に寄与するのは，$\mathrm{d}\lambda(x)$ に比例する部分だけである．ここで $\mathrm{d}\lambda(x) \neq 0$ なる変換に対する作用の変分を，$\delta S[\psi] =: \int \mathrm{d}\lambda(x) \wedge *J^a_{p+1}(x)$ として逆に $J^a_{p+1}(x)$ を定義する．あとは on shell においてこれが保存すれば良い．

$$\delta S[\psi] =: \int \mathrm{d}\lambda(x) \wedge *J^a_{p+1}(x) \tag{2.19}$$

$$= -\int \lambda_a(x) \wedge \mathrm{d} * J^a_{p+1}(x) \tag{2.20}$$

であるが，on shell では場の任意の変分に対して作用の変分が 0 になるのでこれを λ に比例するように取ってよく，この時 $\delta S[\psi] = 0$ となって $\mathrm{d} * J^a_{p+a}(x) = 0$ が出る． □

global symmetry に関して，ここでも Ward identity を示しておきます．

定理 2.11. Ward identity $S[\psi]$ が $\psi[\mathcal{C}_p] \mapsto \epsilon_a(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p](\mathrm{d}\lambda_{p,a}(x)=0)$ に対して不変であるとき，

$$\langle \mathrm{d} * J^a_{p+1}(x)\psi[\mathcal{C}_p]\rangle = -i\delta_{d-p}(x\in\mathcal{C}_p)\langle\delta^a\psi[\mathcal{C}_p]\rangle \tag{2.21}$$

が成り立つ．ここで $\delta_{d-p}(x\in\mathcal{C}_p)$ は delta function (d-p)-form である．

Proof.

$\psi[\mathcal{C}_p]$ の期待値を考え，経路積分の変数変換として $\psi(x)\mapsto\psi'[\mathcal{C}_p] \coloneqq \psi[\mathcal{C}_p]+\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p](\mathrm{d}\lambda_{p,a}\neq 0)$ を考える．

$$\langle\psi[\mathcal{C}_p]\rangle = \int\mathcal{D}\psi\psi[\mathcal{C}_p]e^{iS[\psi]} \tag{2.22}$$

$$= \int\mathcal{D}\psi'(\psi[\mathcal{C}_p]+\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p])e^{iS[\psi']} \tag{2.23}$$

となるが，ここではナイーブに経路積分測度は不変であるとし，補題 2.10 を用いて $S[\phi']$ を書き換える．

$$\langle\psi[\mathcal{C}_p]\rangle = \int\mathcal{D}\psi(\psi[\mathcal{C}_p]+\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p])e^{iS[\psi]+i\delta S[\psi]} \tag{2.24}$$

$$\simeq \int\mathcal{D}\psi(\psi[\mathcal{C}_p]+\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p])(1+i\delta S[\psi])e^{iS[\psi]} \tag{2.25}$$

$$\simeq \int\mathcal{D}\psi(\psi[\mathcal{C}_p]+\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p]+i\psi[\mathcal{C}_p]\delta S[\psi])e^{iS[\psi]} \tag{2.26}$$

$$= \int\mathcal{D}\psi(\psi[\mathcal{C}_p]+\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)\delta^a\psi[\mathcal{C}_p]+i\psi[\mathcal{C}_p]\int\mathrm{d}\lambda_{p,a}(y)\wedge *J^a_{p+a}(y))e^{iS[\psi]} \tag{2.27}$$

$$= \langle\psi[\mathcal{C}_p]\rangle+\int_{\mathcal{C}_p}\lambda_{p,a}(x)\langle\delta^a\psi[\mathcal{C}_p]\rangle - i\langle\psi[\mathcal{C}_p]\int\lambda_{p,a}(y)\wedge\mathrm{d}*J^a_{p+1}(y)\rangle \tag{2.28}$$

$$= \langle\psi[\mathcal{C}_p]\rangle+\langle\delta^a\psi[\mathcal{C}_p]\rangle)\int\lambda_{p,a}(y)\wedge\delta_{d-p}(x\in\mathcal{C}_p) - i\langle\psi[\mathcal{C}_p]\int\lambda_{p,a}(y)\wedge\mathrm{d}*J^a_{p+1}(y)\rangle \tag{2.29}$$

したがって

$$\langle \mathrm{d} * J^a_{p+1}(x)\psi[\mathcal{C}_p]\rangle = -i\delta_{d-p}(x\in\mathcal{C}_p)\langle\delta^a\psi[\mathcal{C}_p]\rangle \tag{2.30}$$

□

そしてこれを用いると，ここでも topological operator というある意味 topological な性質を持った operator を作ることができます．

$$U^a(\Sigma_{d-p-1}) \coloneqq e^{i\int_{\Sigma_{d-p-1}} *J^a_{p+1}} \tag{2.31}$$

と定義すれば期待値のレベルで，(d-p) 次元の多様体境界付き多様体 D_{d-p} に対して

$$\langle U^a(\Sigma_{d-p-1}+\partial D_{d-p})\rangle = \langle e^{i\int_{\Sigma_{d-p-1}+\partial D_{d-p}} *J^a_{p+1}}\rangle \tag{2.32}$$

$$= \langle e^{i\int_{\Sigma_{d-p-1}} *J^a_{p+1}+\int_{D_{d-p}} d*J^a_{p+1}}\rangle \tag{2.33}$$

$$= \langle U^a(\Sigma_{d-p-1})\rangle \tag{2.34}$$

が成り立ちます．最後の行では，定理 2.11 で $\psi[\mathcal{C}_p]=1$ と取ったときの表式を用いました．参照する多様体を境界付き多様体分だけずらしても期待値が変わらないという意味で，$U^a(\Sigma_{d-p-1})$ は topological といえま

す．topological operator を構成できることは higher-form symmetry において重要であるが，特に連続的な対称性の場合は先に理論の対称性があって，そこから現れてくるものであることを述べておきます．

ここで定理 2.11 の特別な場合として，$\psi[\mathcal{C}_p]$ が g の作用で線形に変換する場合を考えます．$p \geq 1$ では対称性は可換なものに限られることが知られているので，1 次元の表現しかあり得ません．この場合，

$$\delta\psi[\mathcal{C}_p] = q\psi[\mathcal{C}_p] \tag{2.35}$$

のようになる．これを定理 2.11 に代入すれば，

$$\langle \mathrm{d} * J^a_{p+1}(x)\psi[\mathcal{C}_p]\rangle = -iq\delta_{d-p}(x \in \mathcal{C}_p)\langle\psi[\mathcal{C}_p]\rangle \tag{2.36}$$

が得られます．q は群の表現をラベルしていて，charge と呼ばれ，例えば群が $U(1)$ の場合は $\mathbb{Z}$ に値を取ります．$\psi[\mathcal{C}_p]$ は (p+1)-form current の作用で charge を吐き出し，charged operator とも呼ばれます．さらにこの仮定のもとで，topological operator $U^a(\Sigma_{d-p-1})$ と charged operator $\psi[\mathcal{C}_p]$ の期待値を一緒に取ることを考えてみましょう．ここでは，Σ_{d-p-1} がある (d-p) 次元の境界付き多様体 D'_{d-p} の境界として与えられているとします．このとき，

$$\begin{aligned}
\langle U^a(\Sigma_{d-p-1})\psi[\mathcal{C}_p]\rangle &= \langle e^{i\int_{\Sigma_{d-p-1}} *J^a_{p+1}}\psi[\mathcal{C}_p]\rangle && (2.37)\\
&= \langle e^{i\int_{\partial D'_{d-p}} *J^a_{p+1}}\psi[\mathcal{C}_p]\rangle && (2.38)\\
&= \langle e^{i\int_{D'_{d-p}} \mathrm{d}*J^a_{p+1}}\psi[\mathcal{C}_p]\rangle && (2.39)\\
&= e^{i\int_{D'_{d-p}} \delta_{d-p}(x\in\mathcal{C}_p)}\langle\psi[\mathcal{C}_p]\rangle && (2.40)\\
&= e^{iq\mathrm{Link}(D'_{d-p},\mathcal{C}_p)}\langle\psi[\mathcal{C}_p]\rangle && (2.41)
\end{aligned}$$

が得られます．計算には定理 2.11 の変形を用いました．

$\mathrm{Link}(D'_{d-p}, \mathcal{C}_p) \coloneqq \int_{D'_{d-p}} \delta_{d-p}(x \in \mathcal{C}_p)$ として定義していて，これは topological operator と charged operator がどのくらい絡み合っているかを表す数字といえます．

2.3 例: $U(1)$ Maxwell 理論

例を見る前にひとつ補足しておきます．本稿では p-form symmetry についてはじめから brane field の理論を考えて，0-form の理論と全くパラレルになるような説明をしましたが，一般的には上記から少し外れたものについても p-form symmetry と呼びます．具体的には以下の通りです．

注 2.12. 一般的な p-form symmetry の定義

- p-form によって群元が定まるような群 G が作用する局所場の理論において，G の作用による作用の不変性から (p+1)-form current が存在する場合
- さらに広げて，(d-p-1) 次元多様体を参照して定まるような topological operator が構成できる場合

についても，理論に p-form symmetry があると言うことにする．

特に後者を含めることで，離散的な対称性についても higher-form symmetry の言葉で扱えるようになって便利です．この節では 1-form symmetry の例を見ますが，これはこの注で言う 1 つ目の状況に対応します．

具体例としてよく知る $U(1)$ Maxwell 理論を考えますが，場を表現によって定義することにこだわれば，$U(1)$ gauge 場が以下のように定義されます．Γ_1 を 1 次元多様体として

定義 2.13. $U(1)$ **gauge 場**
$e^{i\int_{\Gamma_1}\lambda_1(x)} \in U(1)$ が $a_1(x) \mapsto a_1(x) + \lambda_1$ として作用する時，ここでは 1-form $a_1(x)$ を $U(1)$ gauge 場として定義する．

とします．ここで，以下が成り立つことを示します．

命題 2.14. $U(1)$ **Maxwell 理論の global 1-form symmetry**

$$S[a_1] \coloneqq \int_{\mathcal{M}_4} f_2 \wedge *f_2, \quad f_2 \coloneqq \mathrm{d}a_1 \tag{2.42}$$

としたとき，$\mathrm{d}\lambda_1 = 0$ となる $g \in U(1)$ に対して，($H^1_{dR}(\mathcal{M}_4) = 0$ であれば[a])$S[a_1]$ が不変である．

[a] H^1_{dR} は 1 次の de Rham cohomology

Proof.
Poincaré の補題より $\mathrm{d}\lambda_1 = 0$ ならば $\lambda_1 = \mathrm{d}\lambda'_0$ とできて，$S[a_1]$ の $U(1)$ gauge 対称性から $S[a_1]$ の 1-form symmetry が言える． □

したがって，よく知る $U(1)$ Maxwell 理論が 1-form symmetry を持っていることが明らかになりました．

参考文献

[1] 汰一郎九後. ゲージ場の量子論. 新物理学シリーズ / 山内恭彦監修, No. 23-24. 培風館, 1989.

[2] 汰一郎九後. ゲージ場の理論と経路積分, 2000. `https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~taichiro.kugo/M1lecture/ゲージ場の理論と経路積分20210828.pdf`.

[3] V. Parameswaran Nair, 泰裕阿部, 暁磯. 現代的な視点からの場の量子論. Springer university textbooks. シュプリンガー・ジャパン, 2009.

[4] Keito Shimizu and Sotaro Sugishita. Asymptotic symmetry and confinement in three-dimensional qed, 2025.

[5] Davide Gaiotto, Anton Kapustin, Nathan Seiberg, and Brian Willett. Generalized Global Symmetries. JHEP, Vol. 02, p. 172, 2015.

[6] Pedro R. S. Gomes. An introduction to higher-form symmetries. SciPost Phys. Lect. Notes, Vol. 74, p. 1, 2023.

[7] Lakshya Bhardwaj, Lea E. Bottini, Ludovic Fraser-Taliente, Liam Gladden, Dewi S. W. Gould, Arthur Platschorre, and Hannah Tillim. Lectures on generalized symmetries. Phys. Rept., Vol. 1051, pp. 1–87, 2024.

[8] T. Daniel Brennan and Sungwoo Hong. Introduction to Generalized Global Symmetries in QFT and Particle Physics. 6 2023.

[9] Nabil Iqbal and John McGreevy. Mean string field theory: Landau-Ginzburg theory for 1-form symmetries. SciPost Phys., Vol. 13, p. 114, 2022.