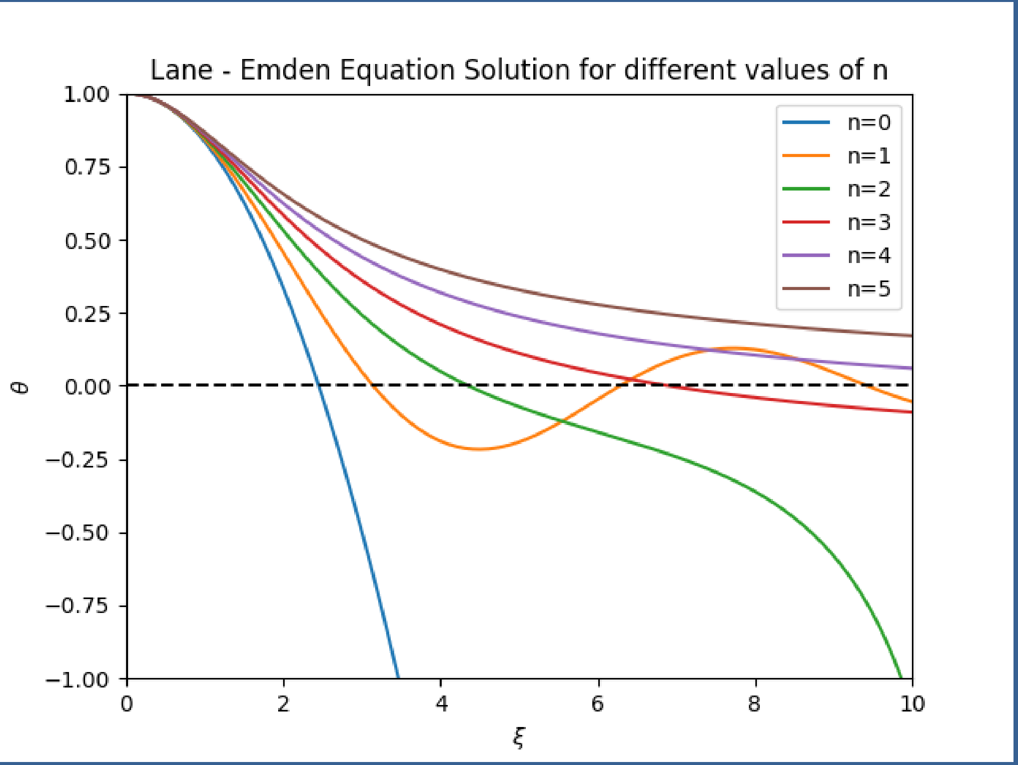
Κβαντική Πληροφορία και Επεξεργασία ΥΦΥ209

Μιχάλης Νικηταράς
ΑΕΜ 4408

Επίλυση εξίσωσης Lane - Emden

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}+\theta^{1/(\gamma-1)}=0.$$

Αρχικά, λύνεται η εξίσωση Lane Emden αριθμητικά. Πρόκειται για εξίσωση δεύτερης τάξης, την οποία ανάγουμε σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων πρώτης τάξης



Επίλυση εξίσωσης Lane – Emden (solve_ivp)

```python
def deqs(r,y,g):  #Define DEQS

    return [y[1]/r**2,-r**2*y[0]**(1/(g-1))]

def stop(r,y,g): return y[0] #Define Integration Stop

stop.terminal = True

tmin=1e-4 #Lower time time span
tmax=20 #Upper time span
y0=np.array([1,0]) #Initial Conditions
```

```python
sol = solve_ivp(deqs,[tmin,tmax],y0,method='RK45',args=(g,),atol=1e-8,rtol=1e-8,events=stop)
```

Αρχικοποίηση πινάκων και λιστών

```
g_mat=np.linspace(1.25,1.7,100) #Gamma matrix
S=[] #Stores configurational entropy values for each gamma value
S1=[] #Stores Sa^3 values for each gamma value and 1.00π/R
S2=[] #Stores Sa^3 values for each gamma value and 0.95π/R
S3=[] #Stores Sa^3 values for each gamma value and 1.05π/R
M=[] #Stores mass values for each gamma value
g1_mat=np.array([1.2,1.4,1.7]) #Gamma values for which we plot the first figure
```

Υπολογισμός h(k), h(kmin) και f(|k|)

$$h(\alpha k) = \left| \int_0^{\xi_R} \theta^{1/(\gamma-1)}(\xi) \exp(i\alpha k \cdot \xi) \xi^2 d\xi \right|^2 .$$

Αφού λυθεί η εξίσωση Lane Emden, μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά το παραπάνω ολοκλήρωμα με τη μέθοδο Simpson. Ως ξR ορίζεται η τιμή του ξ για την οποία θ(ξR)=0.

$$\tilde{f}(k) = \frac{h(\alpha k)}{h\left(\frac{\alpha\pi}{R}\right)} = \frac{h(\alpha k)}{h\left(\frac{\pi}{\xi_R}\right)}$$

Έχοντας υπολογίσει τις τιμές της συνάρτησης h(αk) για κάθε τιμή του k εντός διαστήματος που μας ενδιαφέρει [kmin=π/ξR,20*kmin] , υπολογίζονται οι τιμές της συνάρτησης f(k) για κάθε τιμή του k εντός του παραπάνω διαστήματος.

Υπολογισμός Configurational Entropy S και Μάζας M

$$S = -4\pi \int_{k_{\min}}^{\infty} \frac{h(\alpha k)}{C(\gamma)} \log\left(\frac{h(\alpha k)}{C(\gamma)}\right) k^2 dk$$
$$= -4\pi\alpha^{-3} \int_{\kappa_{\min}}^{\infty} \frac{h(\kappa)}{C(\gamma)} \log\left(\frac{h(\kappa)}{C(\gamma)}\right) \kappa^2 d\kappa$$

Έχοντας υπολογίσει τις τιμές τις συνάρτησης f, υπολογίζεται η πληροφοριακή εντροπία. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται αριθμητικά (Simpson)

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr$$
$$= 4\pi\rho_0\alpha^3 \int_0^{\xi_R} \theta^{1/(\gamma-1)}(\xi)\xi^2 d\xi$$

Επιπλέον, υπάρχει δυνατότητα να υπολογιστεί η μάζα για κάθε τιμή του γ, αριθμητικά (Simpson).

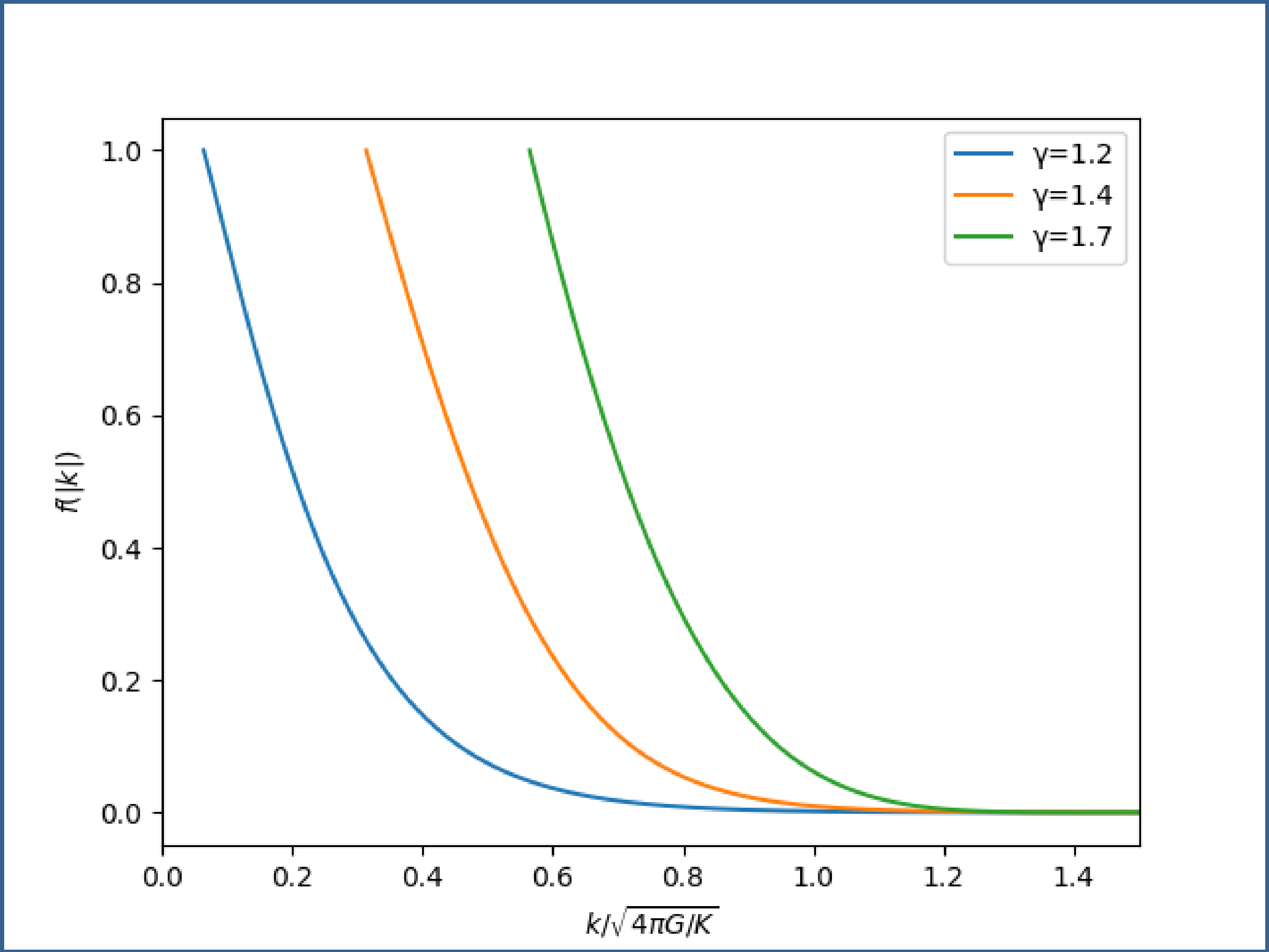
Υπολογισμός h(k) για κάθε γ εντός του πίνακα g_mat

```
for g in g_mat:
    sol = solve_ivp(deqs,[tmin,tmax],y0,method='RK45',args=(g,),atol=1e-12,rtol=1e-12,events=stop)  #
    hk_mat = np.zeros(10000)
    kmin = (np.pi/sol.t[-1]) #Define kmin for each gamma
    k = np.linspace(kmin,20*kmin,10000)
    hkmin = (simpson(sol.y[0]**(1/(g-1))*np.sin(kmin*sol.t)*sol.t,sol.t,dx=0.001)*(1/kmin))**2 #find

    for i1,k1 in enumerate(k):
        hk_mat[i1] = (simpson(sol.y[0]**(1/(g-1))*np.sin(k1*sol.t)*sol.t,sol.t,dx=0.001)*(1/k1))**2 #

    #Repeat same process for 0.95π/R and 1.05π/R for figure 3
    hk_mat1 = np.zeros(10000)
    kmin1=(np.pi/(0.95*sol.t[-1]))
    k11=np.linspace(kmin1,20*kmin1,10000)
    hkmin1 = (simpson(sol.y[0]**(1/(g-1))*np.sin(kmin1*sol.t)*sol.t,sol.t,dx=0.001)*(1/kmin1))**2

    for i2,k2 in enumerate(k11):
        hk_mat1[i2] = (simpson(sol.y[0]**(1/(g-1))*np.sin(k2*sol.t)*sol.t,sol.t,dx=0.001)*(1/k2))**2

    hk_mat2 = np.zeros(10000)
    kmin2=(np.pi/(1.05*sol.t[-1]))
    k22=np.linspace(kmin2,20*kmin2,10000)
    hkmin2= (simpson(sol.y[0]**(1/(g-1))*np.sin(kmin2*sol.t)*sol.t,sol.t,dx=0.001)*(1/kmin2))**2

    for i3,k3 in enumerate(k22):
        hk_mat2[i3] = (simpson(sol.y[0]**(1/(g-1))*np.sin(k3*sol.t)*sol.t,sol.t,dx=0.001)*(1/k3))**2
```

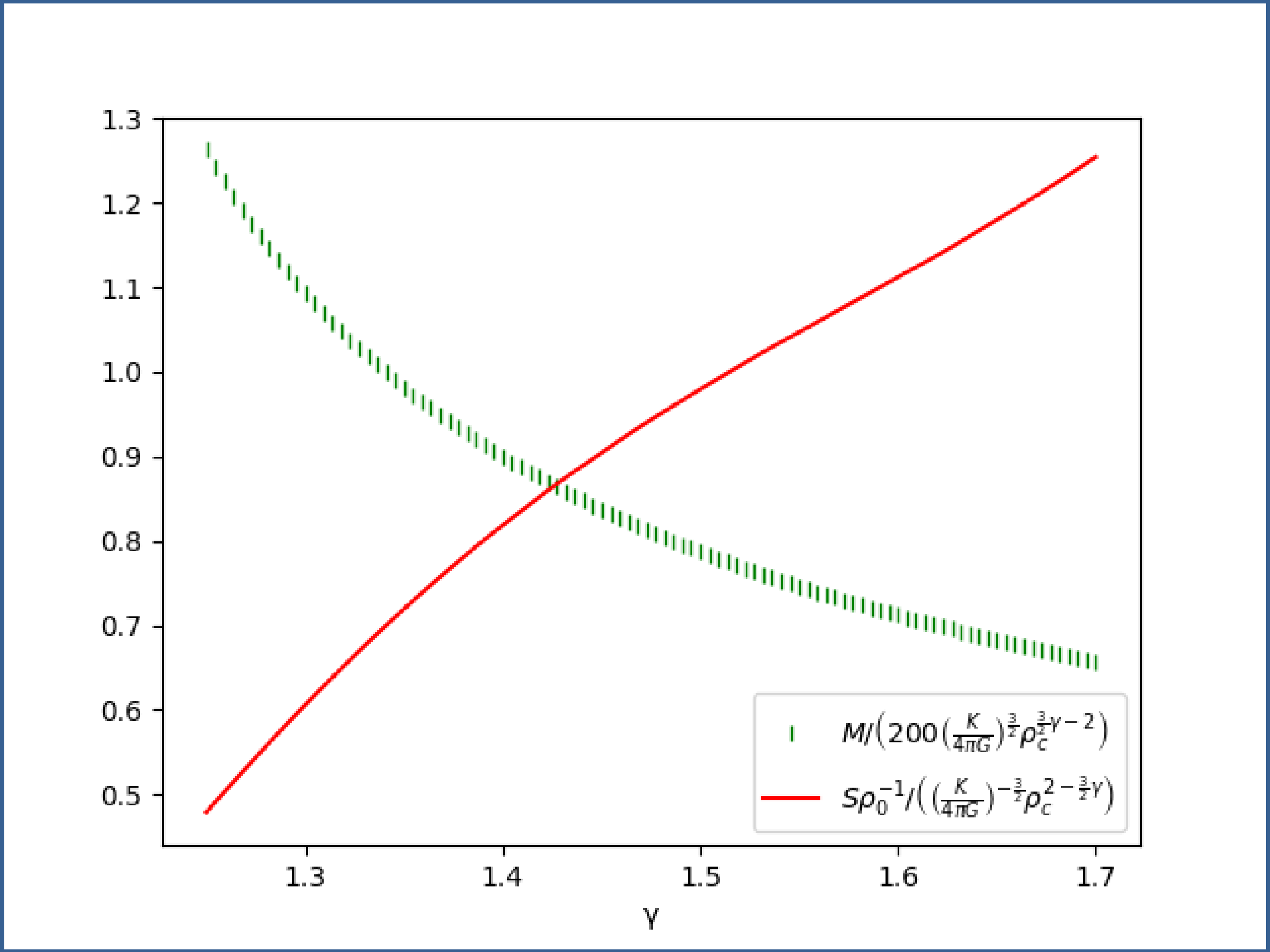
Εφαρμογή αριθμητικής μεθόδου Simpson για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων

```
f = hk_mat/hkmin
f1 =hk_mat1/hkmin1
f2 =hk_mat2/hkmin2
S.append(-4*np.pi*((g/(g-1)))**(-3/2)*simpson(f*np.log(f)*k**2,k,dx=0.001))
S1.append(-4*np.pi*simpson(f*np.log(f)*k**2,k,dx=0.001))
S2.append(-4*np.pi*simpson(f1*np.log(f1)*k11**2,k11,dx=0.001))
S3.append(-4*np.pi*simpson(f2*np.log(f2)*k22**2,k22,dx=0.001))
M.append(((4*np.pi)*((g/(g-1))**((3/2)))*simpson((sol.y[0]**(1/(g-1)))*sol.t**2,sol.t,dx=0.001))/200)
```

Σχήμα 1: f(|k|) – $k/\sqrt{4\pi G/K}$



Σχήμα 2: Μάζα και Configurational Entropy συναρτήσει του γ



Σχήμα 2: Configurational Entropy (Sa^3) συναρτήσει του γ