习题四

4-1 一质量为 m 的球在地面上下跳动，其运动是否为简谐运动？为什么？
答：在球与地面碰撞的短暂过程中，对地面给球的力，暂时不讨论。球在上升或下降过程中，因只受重力作用，重力的大小为 mg，方向竖直向下，重力和方向都不随位移而变化，既不是弹性力也不是准弹性力，所以球的跳动不是简谐运动。

4-2 下面的说法是否正确：
（１）所有周期性运动都是简谐运动
（２）所有简谐运动都是周期性运动
（３）简谐运动的能量与振幅的平方成正比
（４）简谐运动的周期与振幅成正比
（５）简谐运动的速度方向与位移方向始终一致
（6）简谐运动的速度方向与加速度方向始终一致
（7）简谐运动的加速度方向与位移方向始终一致
（8）简谐运动的速度为零时，加速度也等于零
（9）简谐运动的速度为零时，位移也为零
（10）简谐运动的位移为零时，加速度也等于零
答：（２）、（３）（10）对，其余错。

4-3 有一质点做简谐运动，试分析它在下列位置时的位移、速度和加速度的大小和方向：
(1) 平衡位置，向正方向移动；
(2) 平衡位置，向负方向运动；
(3) 正方向的端点；
(4) 负方向的端点。
解：（1） $s=0, v=A\omega, a=0$
（2） $s=0, v=-A\omega, a=0$
（3） $s=A, v=0, a=-A\omega^2$
（4） $s=-A, v=0, a=A\omega^2$

4-4 设一质点的位移 $s(t)=-3.0\cos(\pi t-\pi/4)$，试画出该简谐振动的位移、速度和加速度随时间变化的曲线，并求出它们的频率、振幅和初相位。
解：因为简谐振动方程为： $s=A\cos(\omega t+\varphi_0)$

$$s(t)=-3.0\cos(\pi t-\pi/4)=3.0\cos(\pi t+3\pi/4)$$

所以位移的特征量分别为：$\omega=\pi$，$A=3.0$，$\varphi_0=3\pi/4$
由位移方程可得速度和加速度的方程：

$$v(t)=-3.0\times\pi\sin(\pi t+3\pi/4)=3.0\times\pi\cos(\pi t+5\pi/4)$$

$$a(t) = -3.0\times\pi^2\cos(\pi t + 3\pi/4) = 3.0\times\pi^2\cos(\pi t + 7\pi/4)$$

它们的频率和位移相同，振幅和初相位分别为：

速度：A＝3.0π，φ_0＝5π/4

加速度：A＝3.0π^2，φ_0＝7π/4

图略。

4-5 一个谐振子在 t=0 时位于离平衡位置 6 cm 处，速度为 0，振动的周期是 2 s,求简谐运动的位移及速度表达式。

解：已知：$t=0, s=\pm 6cm, v=0, T=2s$

$\therefore \quad A = 6cm$

由 $s = A\cos(\omega t+\varphi) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) \Rightarrow \pm 6 = 6\cos\left(\frac{2\pi}{2}\bullet 0+\varphi\right) = 6\cos(\varphi)$

$$v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi) = -A\frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) \Rightarrow 0 = -6\frac{2\pi}{2}\sin(\varphi)$$

$\Rightarrow \varphi = 0, \pi; \omega = \pi$

$\Rightarrow s = 6\cos(\pi t)cm, \qquad 6\cos(\pi t+\pi)cm;$

$v = -6\pi\sin(\pi t)\,{}^{cm}\!/_{s}, \quad -6\pi\sin(\pi t+\pi)\,{}^{cm}\!/_{s}$

4-6 一简谐运动的频率为 15Hz，振幅为 0.04m，在 t=0 时，初位移为 0.04m，求简谐运动方程以及速度、加速度表达式。

解：由简谐运动中物体的初相位、初始位移和速度之间的关系：

$$A = \sqrt{s_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = s_0$$

得：$v_0 = 0$

另：$\omega = 2\pi f = 2\pi\times 15 = 30\pi(rad/s)$

由 $\tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega s_0} = 0$，可知，$\varphi_0 = 0, \pi$

又因为 $s_0 = 0.04m > 0$

所以：$\varphi_0 = 0$

所以简谐运动方程为：$s = 0.04\cos(30\pi t)m$

速度方程为：
$$\begin{aligned} v &= -\omega A\sin(\omega t+\varphi_0) \\ &= -30\pi\times 0.04\sin(30\pi t) \\ &= -1.2\pi\sin(30\pi t)m/s \end{aligned}$$

$$a=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

加速度方程为：$=-(30\pi)^2\times 0.04\cos(30\pi t)$

$$=-36\pi^2\cos(30\pi t)m/s^2$$

4-7 一个 0.5 kg 的物体做周期为 0.5 s 的简谐运动，它的能量为 5 J，求：振动的振幅、速度最大值、加速度最大值。

解：已知：$m=0.5kg, T=0.5s, E_{总}=5J$

$$\therefore\quad E_{总}=E_{km}=\frac{1}{2}mv_m^2\Rightarrow v_m=\sqrt{2E_{总}/m}=\sqrt{2\times 5/0.5}\approx 4.47\left(m/s\right)$$

$$\because\quad v_m=A\omega=A\frac{2\pi}{T}$$

$$\therefore\quad A=\frac{v_m\bullet T}{2\pi}=\frac{4.47\times 0.5}{2\pi}\approx 0.36(m)$$

$$a_m=A\omega^2=0.36\times\left(2\pi/T\right)^2\approx 56.8\left(m/s^2\right)$$

4-8 在简谐运动中，当位移为振幅的一半时，总能量中有多少为动能，多少为势能？

解：当 $s=(1/2)A$ 时，

$$E_{总}=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2$$

$$E_p=\frac{1}{2}ks^2=\frac{1}{8}kA^2=\frac{1}{4}E_{总}$$

$$E_k=E_{总}-E_p=E_{总}-\frac{1}{4}E_{总}=\frac{3}{4}E_{总}$$

4-9 某质点参与 $s_1(t)=10\cos(\pi t-\pi/2)\mathrm{cm}$ 及 $s_2(t)=20\cos(\pi t-\pi/3)\mathrm{cm}$ 两个同方向的谐振动，求合振动的振幅和初相位。

解：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})}$$

$$=\sqrt{0.1^2+0.2^2+2\times 0.1\times 0.2\cos(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})}$$

$$=0.29(m)$$

$$\tan\varphi_0=\frac{A_1\sin\varphi_{10}+A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10}+A_2\cos\varphi_{20}}$$

$$=\frac{0.1\sin(-\pi/2)+0.2\sin(-\pi/3)}{0.1\cos(-\pi/2)+0.2\cos(-\pi/3)}$$

$$=-2.7$$

$$\varphi_0=\tan^{-1}(-2.7)$$

4-10　如果在一介质中有一波源做谐振动而产生简谐波，振动的频率与波的频率相同吗？振动速度和波的速度相同吗？波动方程中的坐标原点是否必须要设在波源的位置？

答：振动的频率与波的频率相同。振动速度和波的速度不一样。波动方程中的坐标原点不一定要设在波源的位置。

4-11　设波动方程 $s=0.02\cos(\pi(4x-100t))\mathrm{m}$，求波的振幅、波长、波速和频率。

解：波动方程标准形式为：$s=A\cos\omega(t-\frac{x}{c})$

把波动方程改成标准形式：

$$s=0.02\cos(\pi(4x-100t))$$

$$=0.02\cos(100\pi(t-\frac{x}{100/4})$$

由上可知：A=0.02m，c=25m/s，f=50Hz，$\lambda=c/f$=25/50=0.5(m)

4-12 波源 O 的振动方程为 $s(t)=0.06\cos(\frac{\pi}{9}t)\mathrm{cm}$，以波速 c=2 m/s 的速度无衰减地沿 OX 轴正方向传播，求

- x=5 m 处的振动方程；
- x=5 m 处质点与波源处质点振动的相位差。

解：由题可知，波动方程为：

$$s=0.06\times10^{-2}\cos(\frac{\pi}{9}(t-\frac{x}{2}))$$

$$=6\times10^{-4}\cos(\frac{\pi}{9}t-\frac{\pi}{18}x)(m)$$

所以 x=5m 处质点的振动方程为：

$$s=6\times10^{-4}\cos(\frac{\pi}{9}t-\frac{5\pi}{18})(m)$$

该质点和波源的振动相位差为：

$$\Delta\varphi=-\frac{5\pi}{18}$$

4-13 P 和 Q 是两个同方向、同频率、同相、同振幅的波源所在地。设它们在媒质中产生的波的波长为λ，PQ 之间的距离为 1.5λ，R 是 PQ 连线上 Q 点外侧任意一点，求：

- P、Q 两点发出的波到达 R 时的相差；
- R 点的振幅。

解：(1)**设：**$RQ = x$,**则：**$RP = 1.5\lambda + x$

波源Q**产生的波在**R**点的振动为**$s_1 = A\sin\left(\omega t + \varphi - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

波源产生的波在R**点的振动为**$s_2 = A\sin\left(\omega t + \varphi - \frac{2\pi(1.5\lambda + x)}{\lambda}\right)$

$$\therefore \Delta\varphi = \left[\left(\omega t + \varphi - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) - \left(\omega t + \varphi - \frac{2\pi(1.5\lambda + x)}{\lambda}\right)\right] = \frac{2\pi \bullet 1.5\lambda}{\lambda} = 3\pi$$

$(2)\because P$、Q**两波源是同方向、频率 初相、振幅**

且它们产生的波在R**点的相差为**3π

$\therefore$ R**点的振幅为**0

4-14 有两个同方向、同频率的波源在同一弹性介质中做简谐振动，波源 1 的振动方程为：$s_1 = 0.002\cos(2\pi t)\text{m}$，波源 2 的振动方程为：$s_2 = 0.002\cos(2\pi t + \pi)\text{m}$。两波源产生的波的波速为 0.2m/s。求距离两波源分别为 0.4m，0.5m 的介质中一点 *P* 的振动方程。

解：波源 1 介质中的波动方程为：$s_1 = 0.002\cos(2\pi(t - \frac{x}{0.2}))\text{m}$

则波源 1 产生的波在 *P* 点引起的振动为：
$$\begin{aligned} s_1 &= 0.002\cos(2\pi(t - \frac{0.4}{0.2})) \\ &= 0.002\cos(2\pi t - 4\pi) \end{aligned}$$

波源 2 介质中的波动方程为：$s_2 = 0.002\cos(2\pi(t - \frac{x}{0.2}) + \pi)\text{m}$

则波源 2 产生的波在 *P* 点引起的振动为：
$$\begin{aligned} s_2 &= 0.002\cos(2\pi(t - \frac{0.5}{0.2}) + \pi) \\ &= 0.002\cos(2\pi t - 4\pi) \end{aligned}$$

由于波源 1 波源 2 产生的波在 *P* 点引起的振动完全相同，所以合振动的振幅为：$A = A_1 + A_2 = 0.004\text{m}$。合振动的相位就是原振动的相位，所以初相位为－4π。

所以 *P* 点的振动方程为：$s_p = 0.004\cos(2\pi t - 4\pi)$

4-15 用多普勒效应测量心脏运动时，以 6 MHz 的超声波垂直入射心脏壁,测出回波与发出的起始波的频率差为 600 Hz。求此时心脏壁的运动速度。(波在软组织中的速度为 1500 m/s)。

解：已知：$f_1 = 6\times10^6 Hz, \Delta f = 600Hz, c = 1500 {m}/{s}, \alpha = 0$

$$\therefore v = \frac{c\Delta f}{2 f_1 \cos\alpha} = \frac{1500\times600}{2\times6\times10^6\times1} = 7.5\times10^{-2}\left({m}/{s}\right)$$

4-16 一列火车从站台驶过，站台上的旅客感觉火车驶近时声音频率是驶去的声音频率

10/9 倍，求火车的速度。空气中的声速为 340m/s。

解：设火车的速度为 u，火车汽笛的频率为 f，火车驶近时旅客感觉到的频率为 f'，驶去时旅客感觉到的声音频率为 f''。

则 $f'=(10/9)f''$

由多普勒效应：$f'=\frac{c}{c-u}f$ $\quad f''=\frac{c}{c+u}f$

所以，$\frac{f'}{f''}=\frac{c+u}{c-u}=\frac{10}{9}$

所以，$u=\frac{1}{19}c=\frac{1}{19}\times 340=18(m/s)$

4-17 同一媒质中，两声波的声强级相差 30 dB，则它们的声强之比为多少？

解：因为：$L_1=10\lg\frac{I_1}{I_0},L_2=10\lg\frac{I_2}{I_0}$，$L_1-L_2=30dB$

所以：$10\lg\frac{I_1}{I_0}-10\lg\frac{I_2}{I_0}=10\lg\frac{I_1}{I_0}\times\frac{I_0}{I_2}=10\lg\frac{I_1}{I_2}=30$

$\frac{I_1}{I_2}=10^3$

4-18 一台机器产生的噪声的声强级为 30 dB，求 10 台机器同时工作时的噪声声强级为多少？

解：因为：$L=10\lg\frac{I}{I_0}=30dB$

所以：$L'=10\lg\frac{10I}{I_0}=10\lg 10+10\lg\frac{I}{I_0}=10+30=40(dB)$