

Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς (αριθμητικές πράξεις)

<http://mixstef.github.io/courses/csintro/>



Μ.Στεφανιδάκης

Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς

• Δυαδικοί
Αριθμοί

- Ο υπολογιστής μπορεί να εκτελέσει
 - Λογικές πράξεις
 - Αριθμητικές πράξεις
- Οι πράξεις εκτελούνται
 - Σε ομάδες bits (bytes ή πολλαπλάσιά τους)

Το Byte ως δυαδικός αριθμός

• Δυαδικοί
αριθμοί

128	64	32	16	8	4	2	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
bit 7	bit 6	bit 5	bit 4	bit 3	bit 2	bit 1	bit 0

το περισσότερο
σημαντικό bit

!

Εάν ο αριθμός
διαθέτει
περισσότερα bits,
χρησιμοποιούμε
μεγαλύτερες
δυνάμεις του 2

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 \times 128 & 1 \times 64 & 1 \times 32 & 1 \times 16 & 0 \times 8 & 0 \times 4 & 1 \times 2 & 1 \times 1 \\ 128 & + & 64 & + & 32 & + & 0 & + & 0 & + & 2 & + & 1 & = \\ & & & & & & & & & & & & & 243 \text{ (δεκαδικό)} \end{array}$$

- Μετατροπή από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα

το λιγότερο
σημαντικό bit

Μετατροπή δεκαδικού σε δυαδικό

• Δυαδικοί
αριθμοί

το λιγότερο
σημαντικό bit

!

Προσοχή στη θέση
του περισσότερο
σημαντικού bit!

243 (δεκαδικό)
= 11110011

το περισσότερο
σημαντικό bit

Δεκαεξαδικό Σύστημα

• Δυαδικοί αριθμοί

- 16 ψηφία
 - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
 - Αντιστοιχία με τους δεκαδικούς 0 έως 15
- Σε δυνάμεις του 16
 - $16^n \dots 16^4 \ 16^3 \ 16^2 \ 16^1 \ 16^0$
 - Π.χ. $16F(\text{hex}) = 1 \times 16^2 + 6 \times 16^1 + 15 \times 16^0$
 - $= 256 + 96 + 15 = 367$ (δεκαδικό)
- Χρήσιμο μόνο ως “συντομογραφία” δυαδικών αριθμών

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

5

Δεκαεξαδικό Σύστημα

• Δυαδικοί αριθμοί

- Κάθε 4 δυαδικά ψηφία αντιστοιχούν σε ένα δεκαεξαδικό!

0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A
0011	3	1011	B
0100	4	1100	C
0101	5	1101	D
0110	6	1110	E
0111	7	1111	F

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

6

Παράδειγμα στο δεκαεξαδικό σύστημα

• Δυαδικοί αριθμοί

▪ Παράδειγμα: 1100100110010100
1100 1001 1001 0100
C 9 9 4 = C994(hex)

▪ Παράδειγμα: 10000101011110
0010 0001 0101 1110
2 1 5 E = 215E(hex)

- Συμπλήρωση με 0 στα αριστερά
- Δεν αλλάζει τον αριθμό, όπως ακριβώς και στο δεκαδικό σύστημα

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

7

Φυσικοί αριθμοί (χωρίς πρόσημο)

• Δυαδικοί αριθμοί
• Φυσικοί αριθμοί

- Άμεση αντιστοιχία

0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
.....	...

- Με n bits περιγράφονται
 - Οι φυσικοί αριθμοί από 0 έως και $2^n - 1$

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

8

Ποια η χρήση των “φυσικών αριθμών”;

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί

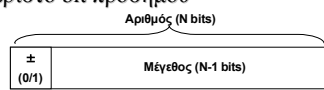
- Για αναπαράσταση
 - Διαφορετικών “πραγμάτων”
 - Συνήθως χωρίς αριθμητική έννοια
 - Αν και η ταξινόμηση είναι bonus!
 - Απαρίθμηση!
 - Παρέχοντας μοναδικούς αναγνωριστικούς αριθμούς
 - Παραδείγματα
 - Οι ξεχωριστές διευθύνσεις μνήμης
 - Οι χαρακτήρες σε ένα αλφάβητο
- Ξανά: με n bits απαριθμούνται
 - έως και 2^n διαφορετικά “πράγματα”

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

9

Ακέραιοι αριθμοί (με πρόσημο)

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι

- Πώς θα αναπαρασταθούν οι αρνητικοί;
 - Για να γίνονται εύκολα οι πράξεις!
 - Όχι καλή ιδέα:
 - Ξεχωριστό bit πρόσημου
- 
- Διάστημα τιμών για αριθμούς με n bits
 $-(2^{n-1}-1)$ έως $+(2^{n-1}-1)$ (για $n=8$, $-127 \dots +127$)
 - ένα χρήσιμο bit λιγότερο
 - δυσκολία στις πράξεις
 - 2 αναπαραστάσεις του 0;

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

10

Ακέραιοι αριθμοί (προσημασμένοι - signed)

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι

- Επίσης όχι καλή ιδέα:
 - Συμπλήρωμα ως προς 1
 - αντιστροφή όλων των bits του αριθμού
 - Πιο σημαντικό bit: 0 για θετικούς, 1 για αρνητικούς
 - Διάστημα τιμών για αριθμούς με n bits
 $-(2^{n-1}-1)$ έως $+(2^{n-1}-1)$ (γιατί;)
 - Τα ίδια προβλήματα με την χρήση ξεχωριστού bit πρόσημου!
- Καλή ιδέα!
 - Συμπλήρωμα ως προς 2
 - Πώς υπολογίζεται;

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

11

Συμπλήρωμα ως προς 2

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι

- Ίσο με το “συμπλήρωμα ως προς 1” + 1
 - εμπειρικός κανόνας
 - “αντιστροφή όλων των bits εκτός από τα δεξιάτερα συνεχόμενα 0 και το πρώτο 1 αριστερά από αυτά”
 - Προσοχή στο 0 (και το 10000....0)
- Συμπλήρωμα ως προς 2: παραδείγματα
- 001011100 \Rightarrow 110100100
- 01111111 \Rightarrow 100000001
- Προσοχή:
- 000000000 \Rightarrow 000000000

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

12

Ακέραιοι σε συμπλήρωμα ως προς 2

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι

- Διάστημα τιμών για αριθμούς με n bits
 $-(2^{n-1})$ έως $+(2^{n-1}-1)$ (για $n=8$, $-128 \dots +127$)
 - Μόνο το $+(2^{n-1})$ δεν μπορεί να αναπαρασταθεί
- Ευκολία στις πράξεις
 - αφαίρεση = πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 2
 - Μία και μοναδική αναπαράσταση του 0
- Πιο σημαντικό bit: 0 για θετικούς, 1 για αρνητικούς
 - Δεν είναι όμως bit προσήμου!!!

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

13

Κλασματικοί αριθμοί

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι
- Κλασματικοί

- Θεωρητικά:
 - Θα μπορούσαμε να επεξεργαζόμαστε ξεχωριστά το ακέραιο και το κλασματικό μέρος
- Αλλά:
 - Δυσκολία στις πράξεις – απώλεια ακρίβειας κατά τις διαιρέσεις
 - Αδυναμία αναπαράστασης πολύ μεγάλων και πολύ μικρών αριθμών
- Η λύση:
 - Αριθμοί κινητής υποδιαστολής (floating point)
 - Εύκολη αναπαράσταση τόσο του 1.000.000.000.000 όσο και του 0,0000000000000001

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

14

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι
- Κλασματικοί

- 3 μέρη
 - Πρόσημο (Π) (1 bit)
 - 0 = + 1 = -
 - Εκθέτης (Ε) (8 ή 11 bits)
 - Η βάση είναι το 2 (εννοείται)
 - Θετικοί και αρνητικοί εκθέτες με πλεόνασμα 127 ή 1023 (π.χ. αντί -55, $E = -55 + 127 = 72$!)
 - Σημανόμενο τμήμα (Σ) (23 ή 52 bits)
 - Κανονικοποίηση: μορφή 1,xxxxxxxxxxxxx...
 - Το ‘1,’ εννοείται και δεν αποθηκεύεται
- Τελικός αριθμός: $-1^Π \times 1.Σ \times 2^{E-127}$ (ή 2^{E-1023})
 - Ειδικοί αριθμοί: 0, ∞, NaN (Not a Number)

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

15

Αριθμητικές πράξεις

- Αριθμητικές πράξεις

- Οι βασικές πράξεις
 - Πρόσθεση
 - Αφαίρεση
- Άλλες πράξεις
 - Πολλαπλασιασμός
 - Διαίρεση
 - Επίσης:
 - Τετραγωνική ρίζα, τριγωνομετρικές συναρτήσεις, εκθετικά, λογάριθμοι κλπ..
 - Υλοποίηση σε υλικό με διάφορες τεχνικές
 - Π.χ με πολυώνυμα

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

16

Προσθέτοντας 2 bits		
• Αριθμητικές πράξεις		
bits	άθροισμα	κρατούμενο
0 + 0	0	0
0 + 1	1	0
1 + 0	1	0
1 + 1	0	1

Ημιαθροιστής (half-adder)

- Αριθμητικές πράξεις

A	B	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

;

Αν απαιτείται πρόσθεση αριθμών με περισσότερα bits,

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς (μη προσημασμένους)									
Κρατούμενο									
A' Αριθμός (119)	0	1	1	1	0	1	1	1	
B' Αριθμός (88)	0	1	0	1	1	0	0	0	
Αθροισμα (207)	1	1	0	0	1	1	1	1	

Πλήρης αθροιστής (full-adder)

• Αριθμητικές πράξεις

;

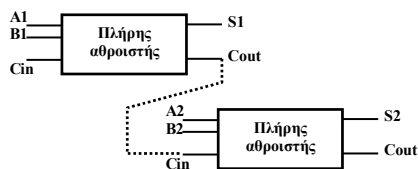
Ποιος πίνακας αλήθειας υλοποιείται;

Μπορεί η πόλη OR να αντικατασταθεί από XOR;

- Μία από τις πιθανές υλοποιήσεις
 - με δύο ημιαθροιστές

Πρόσθεση αριθμών με πλήρεις αθροιστές

- Αριθμητικές πράξεις



- Πολλαπλά τμήματα πλήρη αθροιστή
 - Όμως: πόσο γρήγορα διαδίδεται το κρατούμενο; (ripple carry)
 - Τεχνικές πρόβλεψης κρατουμένου (carry look-ahead)

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς (μη προσημασμένους)

- Υπερχείλιση
 - Στον υπολογιστή το πλήθος των bits ανά αριθμό είναι προκαθορισμένο
 - Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης θα πρέπει να χωρά στα διαθέσιμα bits ενός καταχωρητή
 - Μη προσημασμένοι αριθμοί:
 - αριθμός με N bits \Rightarrow πεδίο τιμών $[0 \dots 2^N - 1]$
 - π.χ. για αριθμούς με 8 bits, από 0 έως 255

Κρατούμενο	1	1	1	1	1	1	
A' Αριθμός (180)	1	0	1	1	0	1	0
B' Αριθμός (78)	0	1	0	0	1	1	0
Άθροισμα (258)	1	0	0	0	0	0	1

↑ διαθέσιμος χώρος

↑ υπαρκτή τελικού κρατουμένου = υπερχείλιση

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς (προσημασμένους)

- Προσημασμένοι ακέραιοι
 - Συμπλήρωμα ως προς 2
 - Το περισσότερο σημαντικό bit υποδηλώνει το πρόσημο
 - 0=θετικός, 1=αρνητικός
 - αριθμός με N bits \Rightarrow πεδίο τιμών $[-2^{N-1} \dots 0 \dots +2^{N-1} - 1]$
 - π.χ. για αριθμούς με 8 bits, από -128 έως +127
- Πρόσθεση
 - Όπως σε μη προσημασμένους
 - Τελικό κρατούμενο αγνοείται
 - Πώς γίνεται τώρα ο έλεγχος υπερχείλισης;
 - Αφαίρεση = πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 2 του αφαιρετέου
 - $A - B = A + (-B)$
 - χωρίς πρόσθετα κυκλώματα για την αφαίρεση!

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς (προσημασμένους)

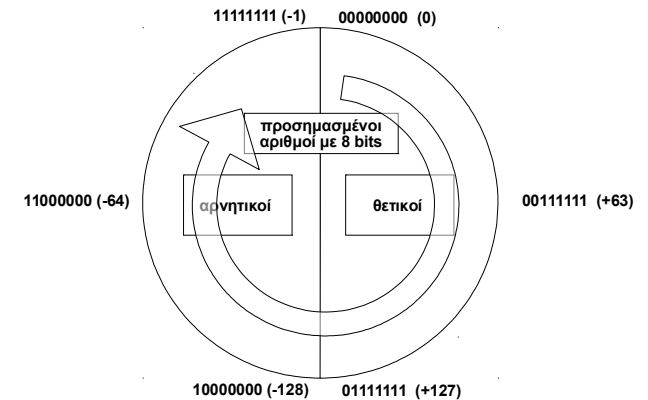
Κρατούμενο				1			
A' Αριθμός (+17)	0	0	0	1	0	0	1
B' Αριθμός (+22)	0	0	0	1	0	1	0
Άθροισμα (+39)	0	0	1	0	0	1	1

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς (προσημασμένους)

Κρατούμενο									
A' Αριθμός (+24)	1	0	0	0	1	1	0	0	0
B' Αριθμός (-17)		1	1	1	0	1	1	1	1
Άθροισμα (+7)		0	0	0	0	0	1	1	1

- το κρατούμενο αγνοείται

Υπερχείλιση σε προσημασμένους αριθμούς



Υπερχείλιση σε προσημασμένους αριθμούς

Κρατούμενο									
A' Αριθμός (+127)	0	1	1	1	1	1	1	1	1
B' Αριθμός (+3)	0	0	0	0	0	0	1	1	
Άθροισμα (-126;)	1	0	0	0	0	0	1	0	

- Το άθροισμα αριθμών με ίδιο πρόσημο θα πρέπει να έχει επίσης το ίδιο πρόσημο!
 - στην αντίθετη περίπτωση: υπερχείλιση

Υπερχείλιση σε προσημασμένους αριθμούς

Κρατούμενο									
A' Αριθμός (-126)	1	0	0	0	0	0	1	0	
B' Αριθμός (-5)	1	1	1	1	1	0	1	0	
Άθροισμα (+124;)	0	1	1	1	1	1	0	0	

- Το άθροισμα αριθμών με ίδιο πρόσημο θα πρέπει να έχει επίσης το ίδιο πρόσημο!
 - στην αντίθετη περίπτωση: υπερχείλιση
 - πώς θα ήταν ένα κύκλωμα με πύλες για ανίχνευση υπερχείλισης;

Πράξεις με αριθμούς κινητής υποδιαστολής

• Αριθμητικές πράξεις

- Σύνθετη διαδικασία
- Η γενική μορφή της πρόσθεσης:
 1. Σύγκριση προσήμων
 - αν είναι ίδια \Rightarrow πρόσθεση
 - αλλιώς \Rightarrow αφαίρεση
 2. Εξίσωση εκθετών
 - μετακίνηση υποδιαστολής
 3. Πρόσθεση ή αφαίρεση σημεινόμενων τμημάτων
 - ακέραιο και κλασματικό μέρος
 4. Κανονικοποίηση αποτελέσματος
 5. Έλεγχος για υπερχείλιση

Πράξεις με αριθμούς κινητής υποδιαστολής

A' αριθμός: 0 ¹³²10000100 1011000000000000000000
 $+ 2^{132-127} \times 1,1011 \quad (+2^5 \times 1,1011)$

B' αριθμός: 0 ¹³⁰10000010 0110000000000000000000
 $+ 2^{130-127} \times 1,011 \quad (+2^3 \times 1,011)$

A	+2⁵	x	1,10110
+ B	+2⁵	x	0,01011
=	+2⁵	x	10,00001
κανονικοποίηση	+2⁶	x	1,000001

αποτέλεσμα: 0 10000101 0000010000000000000000