Ιόνιο Πανεπιστήμιο – Τμήμα Πληροφορικής
Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών
2021-22

Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς

(αριθμητικές πράξεις)

http://mixstef.github.io/courses/csintro/

Μ.Στεφανιδάκης

Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς

• Δυαδικοί Αριθμοί

- Ο υπολογιστής μπορεί να εκτελέσει
  - Λογικές πράξεις
  - Αριθμητικές πράξεις
- Οι πράξεις εκτελούνται
  - Σε ομάδες bits (bytes ή πολλαπλάσιά τους)

Το Byte ως δυαδικός αριθμός

• Δυαδικοί αριθμοί

128	64	32	16	8	4	2	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
bit 7	bit 6	bit 5	bit 4	bit 3	bit 2	bit 1	bit 0

το περισσότερο σημαντικό bit

το λιγότερο σημαντικό bit

1	1	1	1	0	0	1	1
1x128	1x64	1x32	1x16	0x8	0x4	1x2	1x1

128 + 64 + 32 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1 =

243 (δεκαδικό)

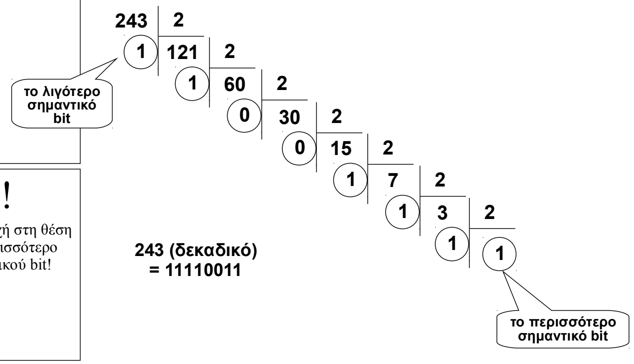
- Μετατροπή από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα

!

Εάν ο αριθμός διαθέτει περισσότερα bits, χρησιμοποιούμε μεγαλύτερες δυνάμεις του 2

Μετατροπή δεκαδικού σε δυαδικό

• Δυαδικοί αριθμοί



!

Προσοχή στη θέση του περισσότερο σημαντικού bit!

Δεκαεξαδικό Σύστημα

- Δυαδικοί αριθμοί

- 16 ψηφία
  - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
  - Αντιστοιχία με τους δεκαδικούς 0 έως 15
- Σε δυνάμεις του 16
  - 16^n ...16^4 16^3 16^2 16^1 16^0
  - Π.χ. 16F(hex) = $1x16^2 + 6x16^1 + 15x16^0$
  - = 256 + 96 + 15 = 367 (δεκαδικό)
- Χρήσιμο μόνο ως «συντομογραφία» δυαδικών αριθμών

Δεκαεξαδικό Σύστημα

- Δυαδικοί αριθμοί

- Κάθε 4 δυαδικά ψηφία αντιστοιχούν σε ένα δεκαεξαδικό ψηφίο

0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A
0011	3	1011	B
0100	4	1100	C
0101	5	1101	D
0110	6	1110	E
0111	7	1111	F

Παράδειγμα στο δεκαεξαδικό σύστημα

- Δυαδικοί αριθμοί

- Παράδειγμα: 1100100110010100

1100 1001 1001 0100

C 9 9 4 = C994(hex)

- Παράδειγμα: 10000101011110

0010 0001 0101 1110

2 1 5 E = 215E (hex)

- Συμπλήρωση με 0 στα αριστερά
- Δεν αλλάζει τον αριθμό, όπως ακριβώς και στο δεκαδικό σύστημα

Δεκαεξαδικό Σύστημα

- Δυαδικοί αριθμοί

- Κάθε 4 δυαδικά ψηφία αντιστοιχούν σε ένα δεκαεξαδικό ψηφίο

0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A
0011	3	1011	B
0100	4	1100	C
0101	5	1101	D
0110	6	1110	E
0111	7	1111	F

Φυσικοί αριθμοί (χωρίς πρόσημο)

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί

Με κίτρινο φαίνεται ο ελάχιστος αριθμός bits που απαιτείται

0000	**0**
0001	**1**
0010	**2**
0011	**3**
0100	**4**
0101	**5**
0110	**6**
0111	**7**
1000	**8**
1001	**9**
…..	**…**

- Με *n* bits περιγράφονται
  - Οι φυσικοί αριθμοί από *0* έως και 2^n-1

Χρήση των φυσικών αριθμών

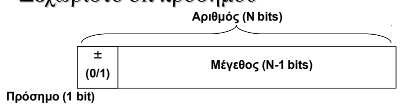
- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί

- Για αναπαράσταση
  - Διαφορετικών «πραγμάτων»
  - Συνήθως χωρίς αριθμητική έννοια
- Απαρίθμηση
  - Παρέχοντας μοναδικούς αναγνωριστικούς αριθμούς
  - Παραδείγματα
    - Οι ξεχωριστές διευθύνσεις μνήμης
    - Οι χαρακτήρες σε ένα αλφάβητο
- Ξανά: με *n* bits απαριθμούνται έως και 2^n *διαφορετικά «πράγματα»*

Ακέραιοι αριθμοί (με πρόσημο - signed)

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι

- Πώς θα αναπαρασταθούν οι αρνητικοί;
  - Για να γίνονται εύκολα οι πράξεις
- Όχι καλή ιδέα:
  - Ξεχωριστό bit πρόσημου



  - Διάστημα τιμών για αριθμούς με *n* bits

$-(2^{n-1}-1)$ *έως* $+(2^{n-1}-1)$ (για n=8, –127 ... +127)

- ένα χρήσιμο bit λιγότερο
- δυσκολία στις πράξεις
- 2 αναπαραστάσεις του 0;

Ακέραιοι αριθμοί (με πρόσημο - signed)

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι

- Επίσης όχι καλή ιδέα:
  - Συμπλήρωμα ως προς 1
    - Αντιστροφή όλων των bits του αριθμού
    - Πιο σημαντικό bit: 0 για θετικούς, 1 για αρνητικούς
  - Διάστημα τιμών για αριθμούς με *n* bits

$-(2^{n-1}-1)$ *έως* $+(2^{n-1}-1)$ (γιατί;)

  - Τα ίδια προβλήματα με την χρήση ξεχωριστού bit πρόσημου

Ακέραιοι αριθμοί (με πρόσημο - signed)

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι

- Καλή ιδέα!
  - Οι αρνητικοί αριθμοί είναι οι «συμπληρωμένοι ως προς 2» θετικοί
- Συμπλήρωμα ως προς 2
  - Τι σημαίνει «συμπλήρωμα ως προς 2»;
  - Πώς υπολογίζεται;

Συμπλήρωμα ως προς 2

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι

- Ίσο με το «συμπλήρωμα ως προς 1» + 1
- Εμπειρικός κανόνας:
  - Αντιστροφή όλων των bits εκτός από τα δεξιότερα συνεχόμενα 0 και το πρώτο 1 αριστερά από αυτά
- Συμπλήρωμα ως προς 2: παραδείγματα

  001011100 $\Rightarrow$ 110100100

  011111111 $\Rightarrow$ 100000001
- Προσοχή στο 0000...00 και στο 1000...00

Ακέραιοι σε συμπλήρωμα ως προς 2

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι

- Διάστημα τιμών για αριθμούς με *n* bits

  $-(2^{n-1})$ *έως* $+(2^{n-1}-1)$ (για n=8, –128 ... +127)
  - Μόνο το $+(2^{n-1})$ δεν μπορεί να αναπαρασταθεί
- Ευκολία στις πράξεις
  - αφαίρεση = πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 2
  - Μία και μοναδική αναπαράσταση του 0
- Πιο σημαντικό bit: 0 για θετικούς, 1 για αρνητικούς
  - Δεν είναι όμως bit προσήμου!

Αριθμητικές πράξεις

- Αριθμητικές πράξεις

- Οι βασικές πράξεις
  - Πρόσθεση
  - Αφαίρεση
- Άλλες πράξεις
  - Πολλαπλασιασμός
  - Διαίρεση
  - Επίσης:
    - Τετραγωνική ρίζα, τριγωνομετρικές συναρτήσεις, εκθετικά, λογάριθμοι κλπ..
    - Υλοποίηση σε υλικό με διάφορες τεχνικές
      - Π.χ με πολυώνυμα

Προσθέτοντας 2 bits

• Αριθμητικές πράξεις

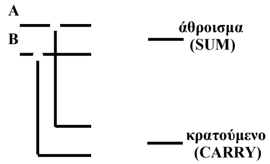
bits	άθροισμα	κρατούμενο
0 + 0	0	0
0 + 1	1	0
1 + 0	1	0
1 + 1	0	1

Ημιαθροιστής (half-adder)

• Αριθμητικές πράξεις

;

Αν απαιτείται πρόσθεση αριθμών με περισσότερα bits;



A	B	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς
(μη προσημασμένους)

Κρατούμενο		**1**	**1**	**1**				
A' Αριθμός (119)	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
B' Αριθμός (88)	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
Άθροισμα (207)	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

1. Αριθμοί με ίδιο μήκος (ίσος αριθμός bits)
2. Αρχίζοντας από το λιγότερο σημαντικό bit (το δεξιότερο)
3. Προσθέτουμε ζεύγη bits και μεταφέρουμε το κρατούμενο (αν υπάρχει) προς τα αριστερά
   • Το προσθέτουμε στο επόμενο ζεύγος bits

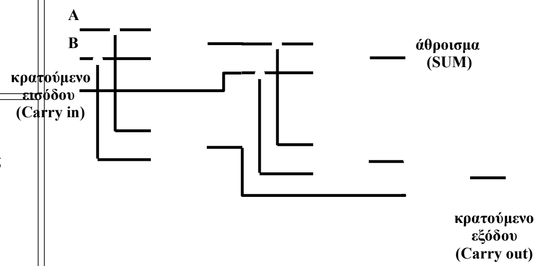
Πλήρης αθροιστής (full-adder)

• Αριθμητικές πράξεις

;

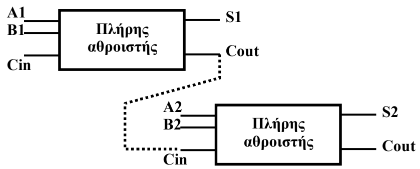
Ποιος πίνακας αλήθειας υλοποιείται;

• Μία από τις πιθανές υλοποιήσεις
  ▪ με δύο ημιαθροιστές



Πρόσθεση αριθμών με πλήρεις αθροιστές

- Αριθμητικές πράξεις



- Πολλαπλά τμήματα πλήρη αθροιστή
  - Όμως: πόσο γρήγορα διαδίδεται το κρατούμενο; (ripple carry)
  - Τεχνικές πρόβλεψης κρατουμένου (carry look-ahead)

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς

(μη προσημασμένους)

- Υπερχείλιση
  - Στον υπολογιστή το πλήθος των bits ανά αριθμό είναι προκαθορισμένο
  - Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης θα πρέπει να χωρά στα διαθέσιμα bits ενός καταχωρητή
  - Μη προσημασμένοι αριθμοί:
    - αριθμός με N bits ⇒ πεδίο τιμών [0 ... 2^N - 1]
    - π.χ. για αριθμούς με 8 bits, από 0 έως 255

Κρατούμενο		**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**		
Α' Αριθμός (180)		**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
Β' Αριθμός (78)		**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
Άθροισμα (258)	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

ύπαρξη τελικού κρατουμένου = υπερχείλιση

διαθέσιμος χώρος

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς

(προσημασμένους)

- Προσημασμένοι ακέραιοι
  - Συμπλήρωμα ως προς 2
    - Το περισσότερο σημαντικό bit υποδηλώνει το πρόσημο
    - 0=θετικός, 1=αρνητικός
  - αριθμός με N bits ⇒ πεδίο τιμών [-2^{N-1} ...0... $+2^{N-1}$ - 1]
    - π.χ. για αριθμούς με 8 bits, από -128 έως +127
- Πρόσθεση
  - Όπως σε μη προσημασμένους
  - Τελικό κρατούμενο αγνοείται
    - Πώς γίνεται τώρα ο έλεγχος υπερχείλισης;
  - Αφαίρεση = πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 2 του αφαιρετέου
    - A – B = A + (-B)
    - χωρίς πρόσθετα κυκλώματα για την αφαίρεση!

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς

(προσημασμένους)

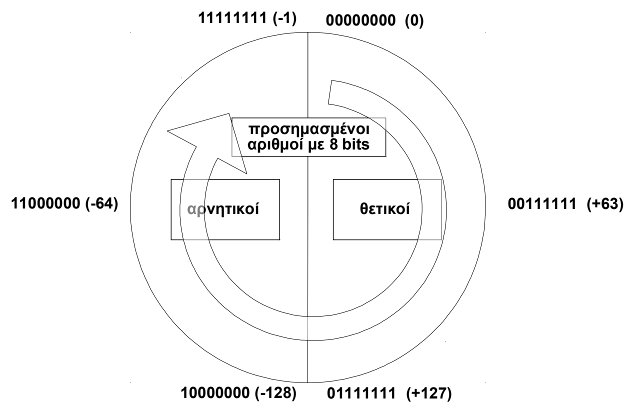
Κρατούμενο				**1**				
Α' Αριθμός (+17)	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
Β' Αριθμός (+22)	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
Άθροισμα (+39)	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς
(προσημασμένους)

Κρατούμενο	~~1~~	**1**	**1**	**1**	**1**			
Α' Αριθμός (+24)	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
Β' Αριθμός (-17)	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
Άθροισμα (+7)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**

- το κρατούμενο αγνοείται

Υπερχείλιση σε προσημασμένους αριθμούς



Υπερχείλιση σε προσημασμένους αριθμούς

Κρατούμενο		**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
Α' Αριθμός (+127)	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
Β' Αριθμός (+3)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
Άθροισμα (-126;)	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

- Το άθροισμα αριθμών με ίδιο πρόσημο θα πρέπει να έχει επίσης το ίδιο πρόσημο
  - στην αντίθετη περίπτωση: υπερχείλιση

Υπερχείλιση σε προσημασμένους αριθμούς

Κρατούμενο	~~1~~						**1**	
Α' Αριθμός (-126)	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
Β' Αριθμός (-5)	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
Άθροισμα (+124;)	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**

- Το άθροισμα αριθμών με ίδιο πρόσημο θα πρέπει να έχει επίσης το ίδιο πρόσημο
  - στην αντίθετη περίπτωση: υπερχείλιση

Κλασματικοί αριθμοί

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι
- Κλασματικοί

- Θεωρητικά
  - Θα μπορούσαμε να επεξεργαζόμαστε ξεχωριστά το ακέραιο και το κλασματικό μέρος
- Αλλά
  - Αδυναμία αναπαράστασης πολύ μεγάλων και πολύ μικρών αριθμών
- Η λύση
  - Αριθμοί κινητής υποδιαστολής (floating point)
  - Εύκολη αναπαράσταση τόσο του 1.000.000.000.000 όσο και του 0,0000000000000001

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι
- Κλασματικοί

- 3 μέρη
  - Πρόσημο (Π) (1 bit)
    - 0 = + 1 = -
  - Εκθέτης (Ε) (8 ή 11 bits)
    - Η βάση είναι το 2 (εννοείται)
    - Θετικοί και αρνητικοί εκθέτες με πλεόνασμα 127 ή 1023 (π.χ. αντί -55, Ε= -55+127 = 72!)
  - Σημαινόμενο τμήμα (Σ) (23 ή 52 bits)
    - Κανονικοποίηση: μορφή 1,xxxxxxxxxxxxx…
    - Το '1,' εννοείται και δεν αποθηκεύεται
- Τελικός αριθμός: $-1^{\Pi} \times 1.\Sigma \times 2^{E-127}$ (ή 2^{E-1023})
  - Ειδικοί αριθμοί: 0, ∞, NaN (Not a Number)

Πράξεις με αριθμούς κινητής υποδιαστολής

- Αριθμητικές πράξεις

- Σύνθετη διαδικασία
- Η γενική μορφή της πρόσθεσης:
  1. Σύγκριση προσήμων
     - αν είναι ίδια ⇒ πρόσθεση
     - αλλιώς ⇒ αφαίρεση
  2. Εξίσωση εκθετών
     - μετακίνηση υποδιαστολής
  3. Πρόσθεση ή αφαίρεση σημαινόμενων τμημάτων
     - ακέραιο και κλασματικό μέρος
  4. Κανονικοποίηση αποτελέσματος
  5. Έλεγχος για υπερχείλιση

Πράξεις με αριθμούς κινητής υποδιαστολής

132

Α' αριθμός: 0 10000100 10110000000000000000000

+ $2^{132-127}$ x 1,1011 ($+2^5$ x 1,1011)

130

Β' αριθμός: 0 10000010 01100000000000000000000

+ $2^{130-127}$ x 1,011 ($+2^3$ x 1,011)

Α	**$+2^5$**	**x**	**1,10110**
+ Β	**$+2^5$**	**x**	**0,01011**
=	**$+2^5$**	**x**	**10,00001**
κανονικοποίηση	**$+2^6$**	**x**	**1,000001**

αποτέλεσμα: 0 10000101 00000100000000000000000

133