

Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς

(λογικές πράξεις)

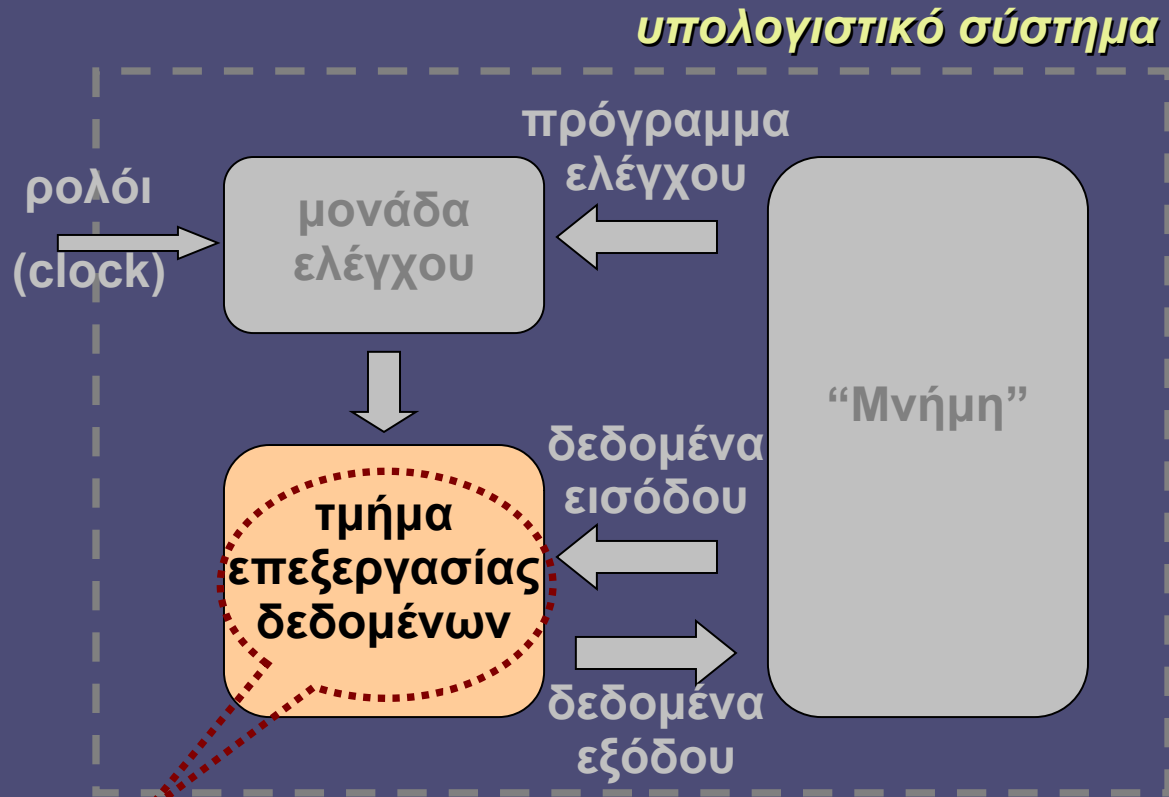
<http://mixstef.github.io/courses/csintro/>

Μ.Στεφανιδάκης



Εκτέλεση πράξεων

- Εισαγωγή



- Επεξεργασία: ψηφιακά δυαδικά κυκλώματα
 - Εκτελούν πράξεις μεταξύ σειρών 0 και 1...
 - ...οι οποίες αναπαριστούν δυαδικούς αριθμούς

Ποιες κατηγορίες πράξεων;

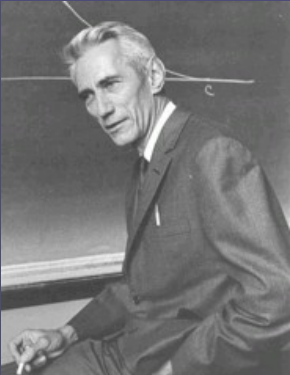
Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς

- Εισαγωγή

- Ο υπολογιστής μπορεί να εκτελέσει
 - Λογικές πράξεις (δυαδικής λογικής)
 - Αριθμητικές πράξεις
- Οι πράξεις εκτελούνται
 - Σε ομάδες bits: «δυαδικούς αριθμούς»

Ψηφιακά Ηλεκτρονικά και Δυαδική Λογική

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική



C.E.Shannon

- Η δυαδική λογική ταιριάζει με την τεχνολογία του τρανζίστορ
 - 2 καταστάσεις: ON-OFF, 1-0
 - Ψηφιακά ηλεκτρονικά (2 στάθμες)
- Δυαδική άλγεβρα Boole
 - Λογική άλγεβρα
 - Συσχέτιση με διακοπτικά κυκλώματα
 - Η εργασία του Shannon (1938)

Ποσότητες Δυαδικής Λογικής

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- **Στη δυαδική λογική άλγεβρα**
 - Υπάρχουν 2 «ποσότητες» (σύμβολα):
 - Αληθές ή 1 ή ΝΑΙ
 - Ψευδές ή 0 ή ΟΧΙ
 - Ένα **δυαδικό ψηφίο (bit)** έχει τιμή 0 ή 1
- **Στα ψηφιακά ηλεκτρονικά κυκλώματα:**
 - 0 ή «χαμηλή τάση» ή «η μια φορά ρεύματος»
 - 1 ή «υψηλή τάση» ή «η άλλη φορά ρεύματος»
 - Ανάλογα με την τεχνολογία, ένα bit αναπαρίσταται με αντίστοιχη κατάσταση σε ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα

Bits & Bytes

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- **Bit**

- Η **μικρότερη** λογική ποσότητα - η μικρότερη μονάδα δεδομένων - 0 ή 1.

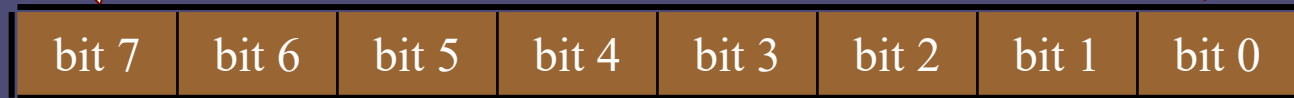
- **Byte**

- Ομάδα 8 bits
- Η **ελάχιστη** ποσότητα που μπορεί να χειριστεί ο υπολογιστής κατά την εκτέλεση μιας πράξης
- Μια σειρά από bytes αναπαριστά έναν δυαδικό «αριθμό»
 - Αποθήκευση: σε καταχωρητές ή στη μνήμη

Η ανατομία ενός byte

- Εισαγωγή
- Δυαδική λ

το περισσότερο
σημαντικό bit



το λιγότερο
σημαντικό
bit

- Γιατί είναι αυτή η σειρά των bits;
 - Γιατί το λιγότερο σημαντικό bit είναι δεξιά και το περισσότερο σημαντικό αριστερά;
 - Θα φανεί όταν μιλήσουμε για αριθμητικές πράξεις
 - Προς το παρόν, το byte είναι απλώς μια οκτάδα bits

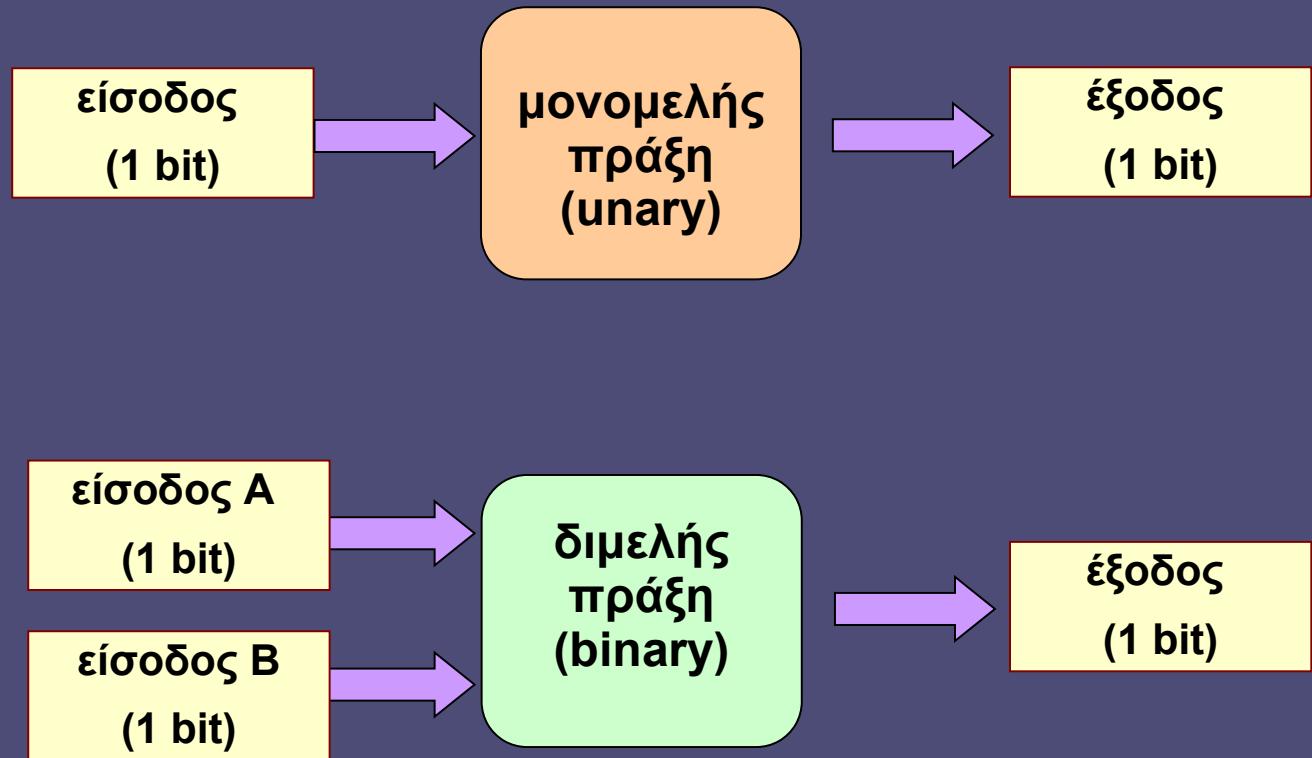
Πράξεις Δυαδικής Λογικής

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Στη δυαδική λογική άλγεβρα
 - Καθορίζονται λογικές πράξεις μεταξύ των λογικών ποσοτήτων 0 και 1 (bits)
- Στα ψηφιακά ηλεκτρονικά κυκλώματα:
 - Κύκλωμα δέχεται ως είσοδο την ηλεκτρική αναπαράσταση των 0 και 1
 - Και παράγει στην έξοδό του την ηλεκτρική αναπαράσταση του αποτελέσματος μιας λογικής πράξης
 - Το κύκλωμα υλοποίησης της λογικής πράξης ονομάζεται πύλη (gate).

Λογικές πράξεις με bits

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική



Λογικές πράξεις με bits

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Μονομελής λογική πράξη
 - NOT (αντιστροφή)
- Διμελείς λογικές πράξεις
 - AND (λογικό-ΚΑΙ)
 - OR (λογικό-Η)
 - XOR (αποκλειστικό-Η)
 - κ.λ.π.

Βασικές Λογικές Πράξεις

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Αντιστροφή (NOT)
 - Αντιστροφή ενός bit

είσοδος A

έξοδος **NOT** (A)

ή A' ή A

A	Y
0	1
1	0

πιθανές τιμές εισόδου

αντίστοιχες τιμές εξόδου

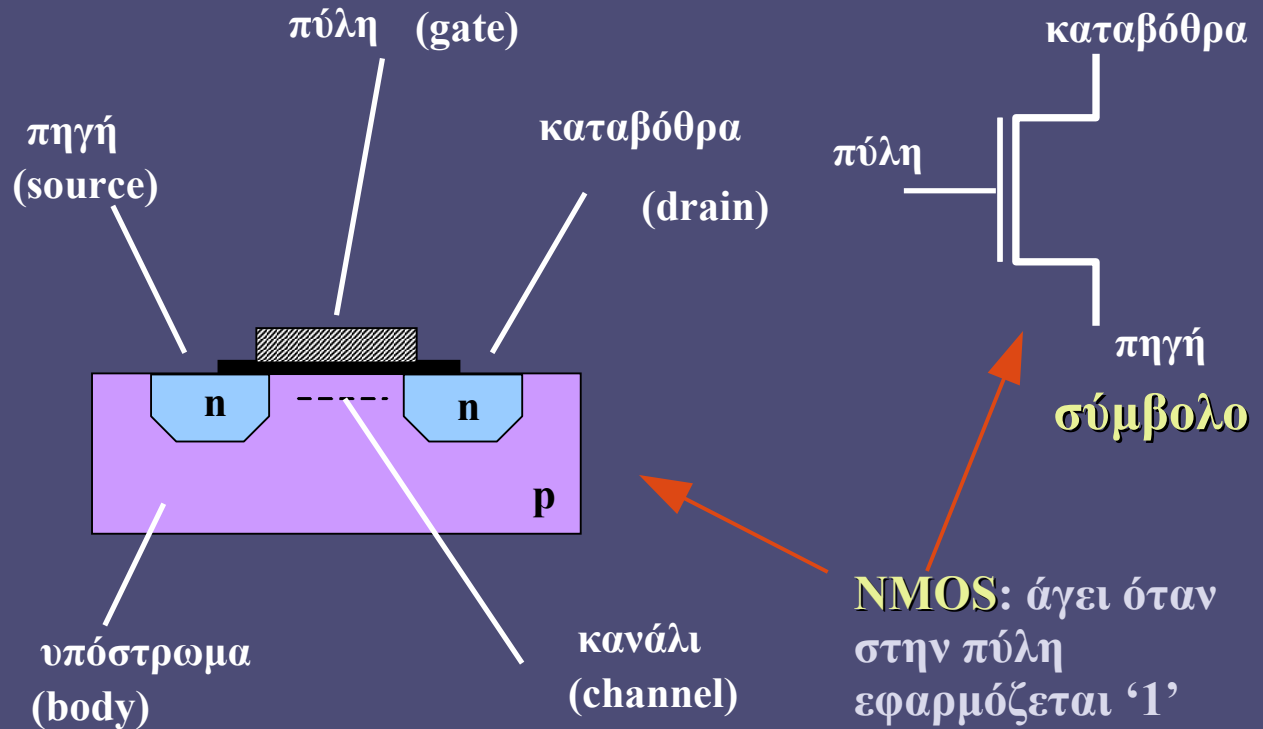
Πίνακας Αλήθειας

Πώς υλοποιείται μια πύλη NOT;

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Από το προηγούμενο μάθημα:

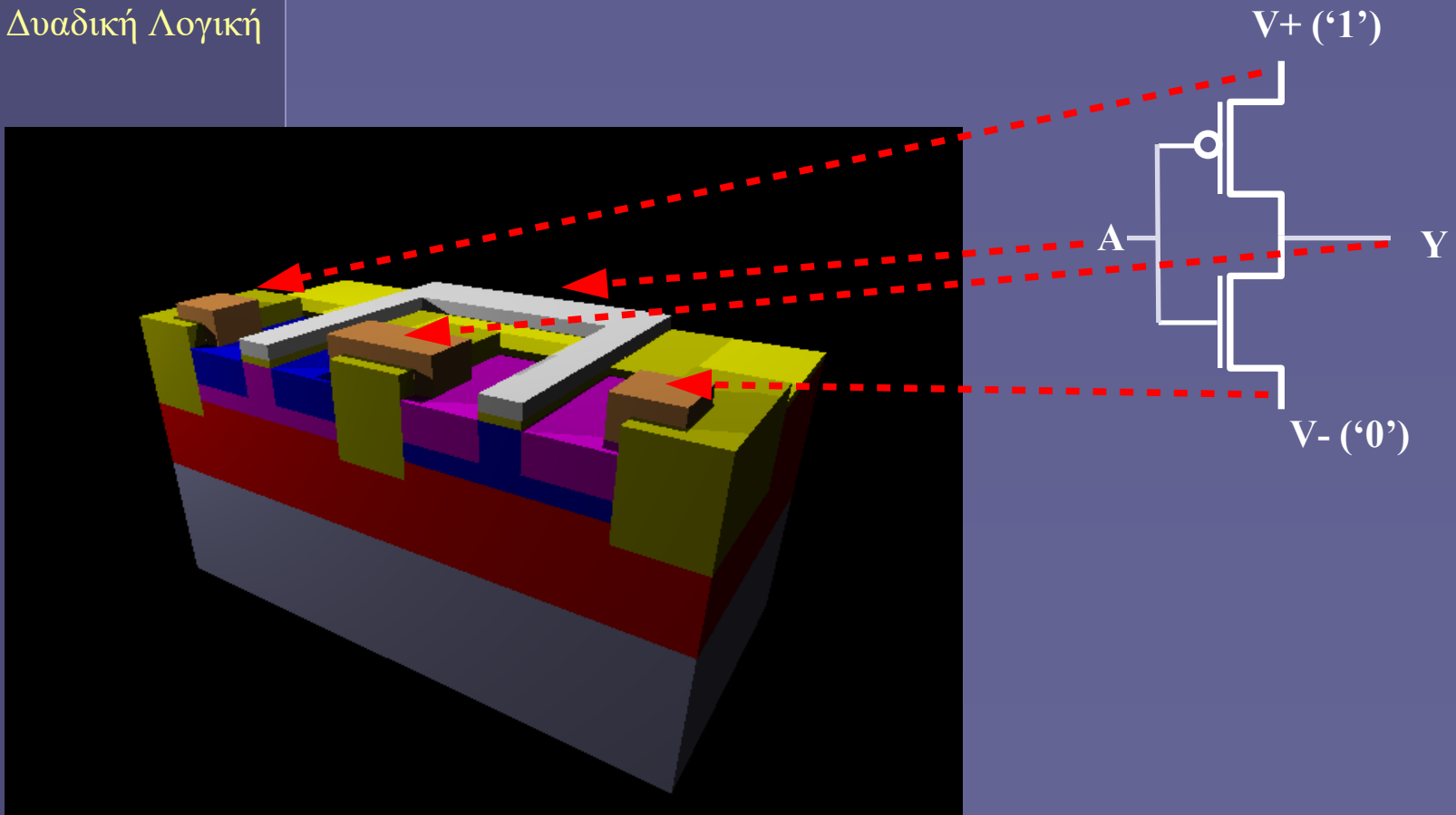
PMOS: άγει όταν στην πύλη εφαρμόζεται '0'



Το τρανζίστορ NMOS

Από το προηγούμενο μάθημα: ποια η λειτουργία του;

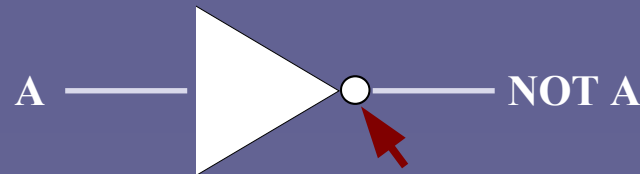
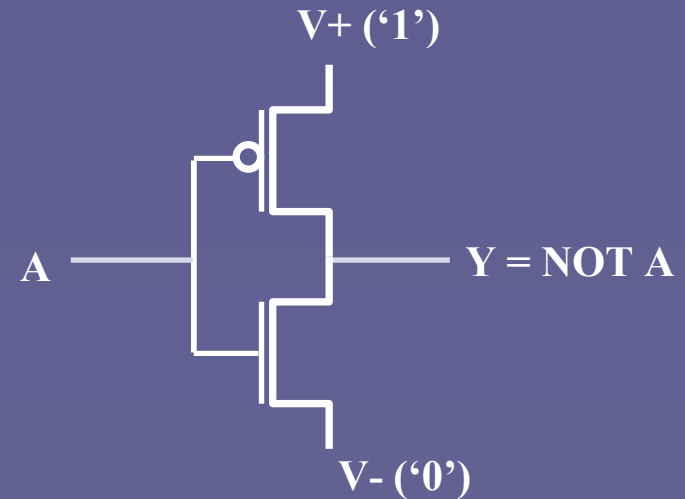
- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική



Η πύλη NOT (αντιστροφέας)

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

A	Y
0	1
1	0



ο κύκλος συμβολίζει την αντιστροφή

σύμβολο πύλης NOT

Βασικές Λογικές Πράξεις

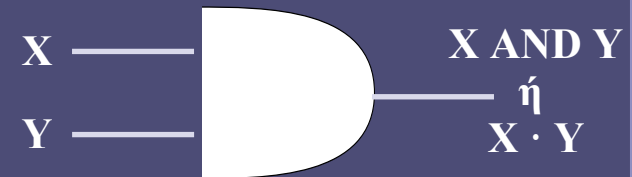
- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

- Λογικό ΚΑΙ (AND)

- το αποτέλεσμα είναι 1, μόνο όταν και το X και το Y είναι 1
- $0 \text{ AND } X = X \text{ AND } 0 = 0$
- $1 \text{ AND } X = X \text{ AND } 1 = X$

Πίνακας Αλήθειας

X	Y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



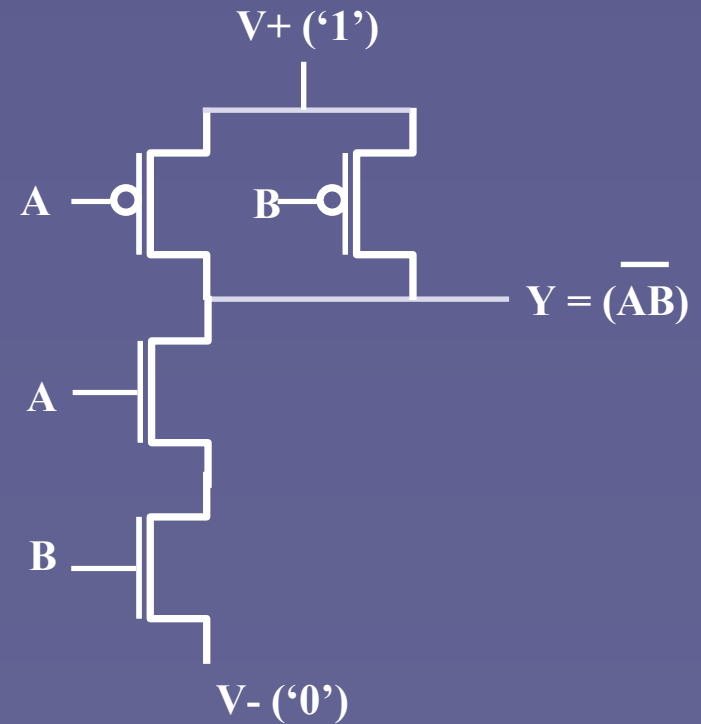
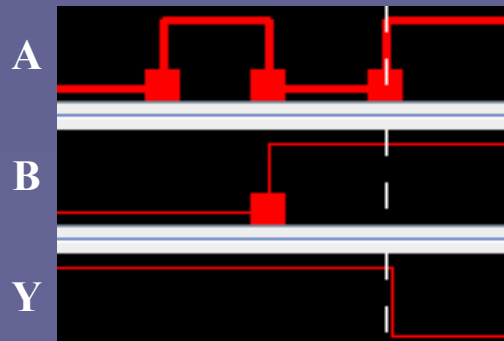
σύμβολο πύλης AND

Παράδειγμα υλοποίησης: η πύλη NAND

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Πίνακας Αλήθειας NAND



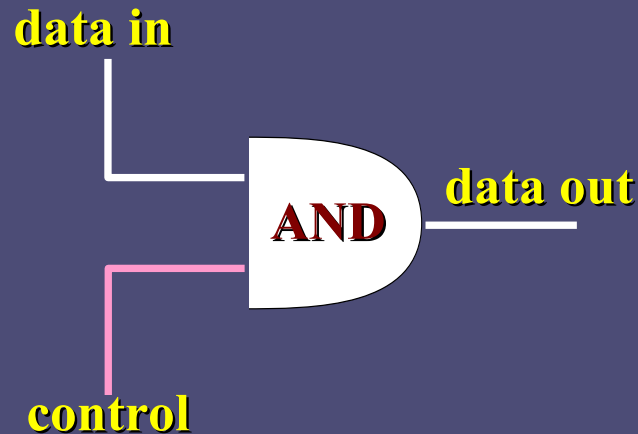
σύμβολο πύλης NAND

!
NAND = NOT-AND

Υλοποίηση πύλης AND: χρησιμοποιώντας μια πύλη NAND και μια πύλη NOT

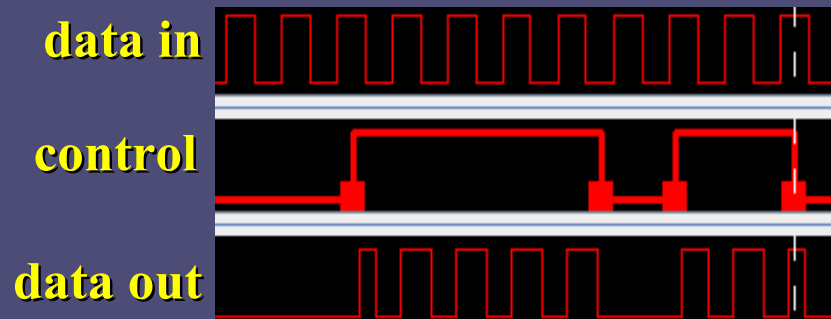
Φραγή AND: για να θέσουμε σήμα στο 0

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική



control = 0: η έξοδος data_out είναι πάντα 0

control = 1: η έξοδος data_out ισούται με το data_in



$$0 \text{ AND } X = 0$$

$$1 \text{ AND } X = X$$

Βασικές Λογικές Πράξεις

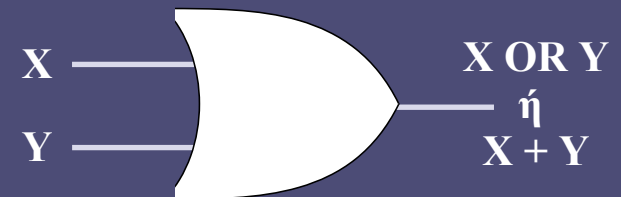
- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

- Λογικό Ή (OR)

- το αποτέλεσμα είναι 1, όταν το X ή το Y ή και τα δύο είναι 1
- $1 \text{ OR } X = X \text{ OR } 1 = 1$
- $0 \text{ OR } X = X \text{ OR } 0 = X$

Πίνακας Αλήθειας

X	Y	OR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



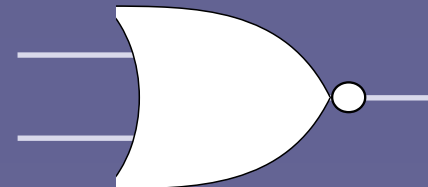
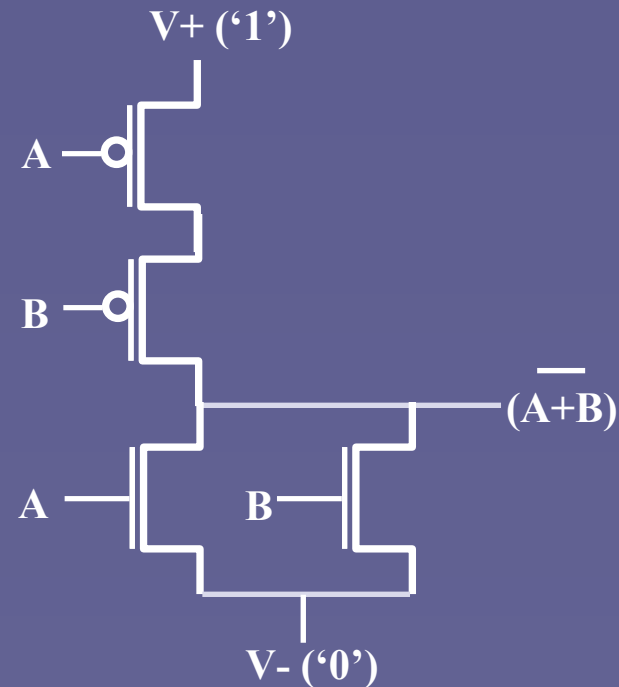
σύμβολο πύλης OR

Παράδειγμα υλοποίησης: η πύλη NOR

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Πίνακας Αλήθειας NOR



σύμβολο πύλης NOR

NOR = NOT-OR

Υλοποίηση πύλης
OR: χρησιμοποι-
ώντας μια πύλη
NOR και μια πύλη
NOT

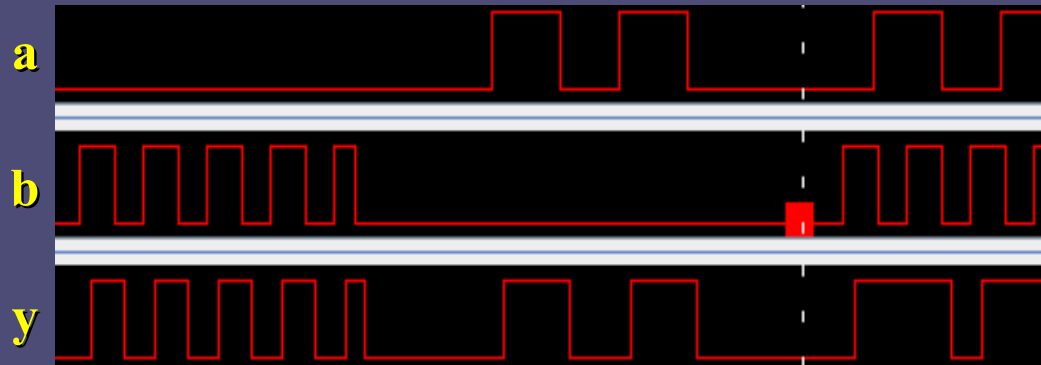
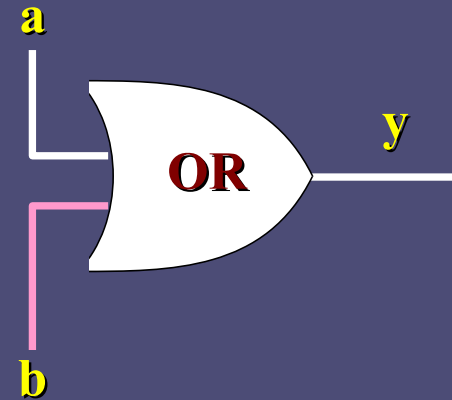
Συγκέντρωση σημάτων με OR

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

$$0 \text{ OR } X = X$$

$$1 \text{ OR } X = 1$$

Προσοχή!
Ποτέ δεν
συνδέουμε
εξόδους
πυλών μαζί!



- Θα πρέπει ανά πάσα στιγμή όλα τα σήματα πλην ενός να είναι 0!

Βασικές Λογικές Πράξεις

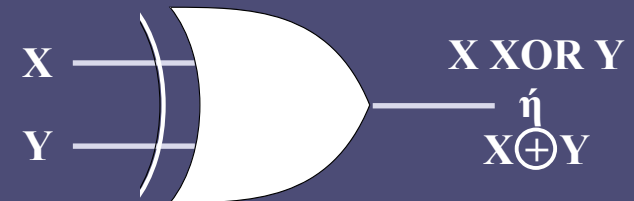
- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

- Αποκλειστικό Ή (XOR)

- το αποτέλεσμα είναι 1, όταν **μόνο το X** ή **μόνο το Y** είναι 1
- $1 \text{ XOR } X = X \text{ XOR } 1 = \text{NOT } X$
- $0 \text{ XOR } X = X \text{ XOR } 0 = X$
- $X \text{ XOR } Y = A \cdot B' + A' \cdot B$

Πίνακας Αλήθειας

X	Y	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



σύμβολο πύλης XOR

Βασικές Λογικές Πράξεις

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

- XNOR: Η συμπληρωματική συνάρτηση της XOR
 - το αποτέλεσμα είναι 1, όταν τα X και Y είναι όμοια
 - συνάρτηση «ισοδυναμίας»

Πίνακας Αλήθειας

X	Y	XNOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

!

Υλοποίηση πύλης
XNOR:

χρησιμοποιώντας
συνδυασμούς
άλλων πυλών

$$X \text{ xnor } Y = XY + X'Y'$$

Λογικές πράξεις σε ομάδες bits

- Λογικές Πράξεις

- Ο υπολογιστής μπορεί να εφαρμόσει λογικές πράξεις στα δεδομένα μας

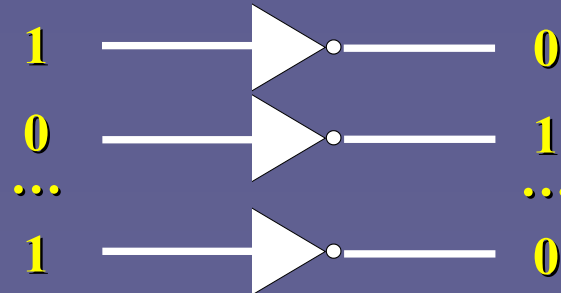
- Δεδομένα = σειρές από 0 και 1
- Όχι όμως σε μεμονωμένα bits!!
- Αλλά: σε ομάδες των 8, 16, 32 ή 64 bits ταυτόχρονα

$$\begin{array}{ccccccc} A_n & \dots & A_i & \dots & A_2 & A_1 & A_0 \\ B_n & \dots & B_i & \dots & B_2 & B_1 & B_0 \\ \hline Y_n & \dots & Y_i & \dots & Y_2 & Y_1 & Y_0 \end{array} \quad \text{op} \quad (=AND, OR, XOR)$$

$Y_i = A_i \text{ op } B_i$

Ο τελεστής NOT σε δυαδικούς αριθμούς

- Λογικές πράξεις



!

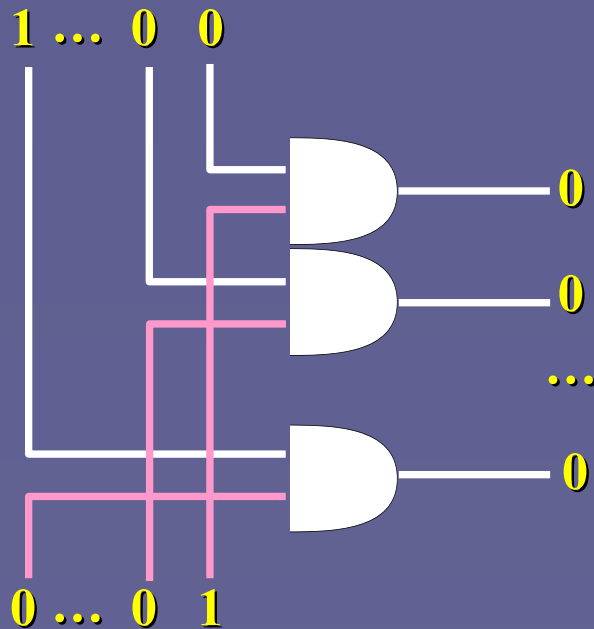
Η “μέθοδος” του υλικού (hardware): πολλαπλές ίδιες μονάδες εκτελούν την ίδια λειτουργία παράλληλα

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \end{array} \quad \text{NOT}$$

- Η έξοδος Y_i εξαρτάται μόνο από την είσοδο A_i

Ο τελεστής AND σε δυαδικούς αριθμούς

- Λογικές πράξεις



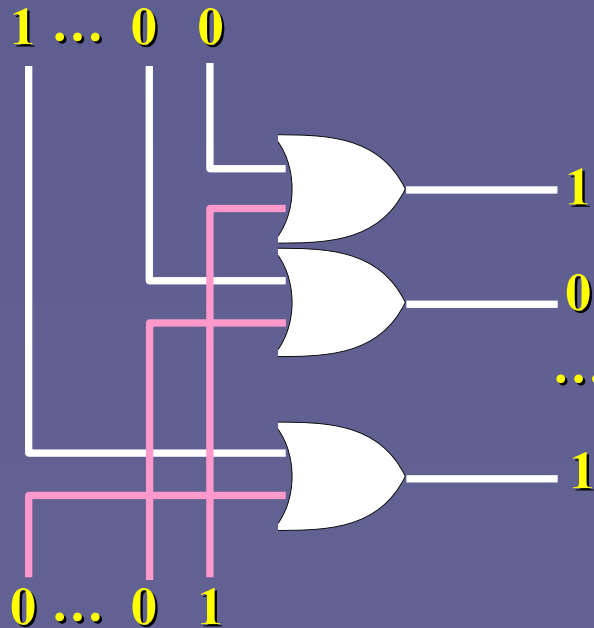
1 0 0 1 1 0 0 0 **AND**

0 0 1 1 0 1 0 1

0 0 0 1 0 0 0 0

Ο τελεστής OR σε δυαδικούς αριθμούς

- Λογικές πράξεις



1	0	0	1	1	0	0	0	OR
0	0	1	1	0	1	0	1	
<hr/>								
1	0	1	1	1	1	0	1	

Μάσκες

- Λογικές Πράξεις

- Για να αλλάξουμε την τιμή μεμονωμένων bits μέσα σε μια ομάδα
 - Για να θέσουμε επιλεγμένα bits σε 1
 - Για να θέσουμε επιλεγμένα bits σε 0
 - Για να αντιστρέψουμε επιλεγμένα bits
 - Χωρίς να επηρεάζουμε τα υπόλοιπα!
 - αυτά διατηρούν την τιμή τους, είτε 0 είτε 1
- Μάσκα: σειρά bits, επιλεγμένη ώστε:
Bits Εισόδου op Μάσκα → Νέα ομάδα bits
 - op = AND, OR ή XOR
 - Νέα ομάδα περιέχει το επιθυμητό αποτέλεσμα

Μάσκα AND: για να θέσουμε bits στο 0

- Λογικές πράξεις

- Ζητούμενο: σε λέξη των 8 bits να τεθούν σε 0 τα 3 λιγότερο σημαντικά bits.

Λέξη:	1 0 0 1 1 0 1 0	AND
Μάσκα:	<u>1 1 1 1 1 0 0 0</u>	
Νέα:	1 0 0 1 1 0 0 0	

- Η AND μάσκα περιέχει:
 - 0 στα bits που θα γίνουν 0
 - 1 στα bits που θα παραμείνουν ως έχουν

$$0 \text{ AND } X = 0$$

$$1 \text{ AND } X = X$$

Μάσκα OR: για να θέσουμε bits στο 1

- Λογικές πράξεις

- Ζητούμενο: σε λέξη των 8 bits να τεθούν σε 1 τα bits 0,4 και 5.

Λέξη: 1 0 0 1 1 0 0 0 OR

Μάσκα: 0 0 1 1 0 0 0 1

Νέα: 1 0 1 1 1 0 0 1

- Η OR μάσκα περιέχει:
 - 1 στα bits που θα γίνουν 1
 - 0 στα bits που θα παραμείνουν ως έχουν

$$0 \text{ OR } X = X$$

$$1 \text{ OR } X = 1$$

Μάσκα XOR: για να αντιστρέψουμε bits

- Λογικές πράξεις

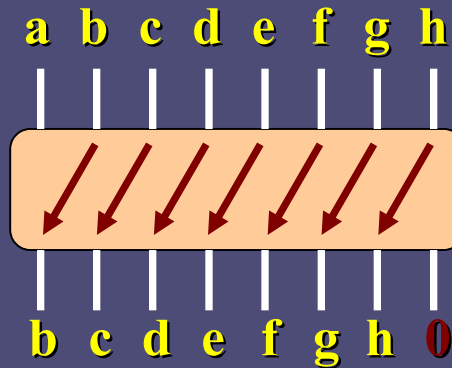
- Ζητούμενο: σε λέξη των 8 bits να αντιστραφούν τα bits 3,6 και 7.

Λέξη:	1 0 0 1 1 0 0 0	XOR
Μάσκα:	<u>1 1 0 0 1 0 0 0</u>	
Νέα:	0 1 0 1 0 0 0 0	

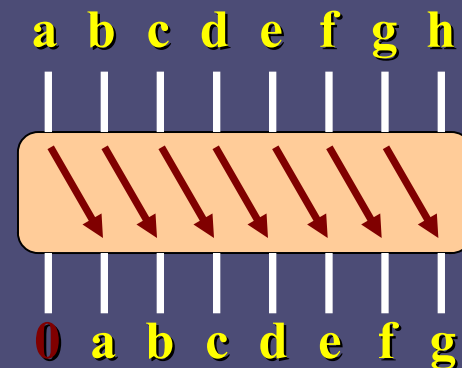
- Η XOR μάσκα περιέχει:
 - 1 στα bits που θα αντιστραφούν
 - 0 στα bits που θα παραμείνουν ως έχουν

Ολίσθηση (Shift)

- Λογικές πράξεις
- Ολίσθηση



αριστερή ολίσθηση



δεξιά ολίσθηση