

## Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς (αριθμητικές πράξεις)

<http://mixstef.github.io/courses/csintro/>



Μ.Στεφανιδάκης

## Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς

• Δυαδικοί  
Αριθμοί

- Ο υπολογιστής μπορεί να εκτελέσει
  - Λογικές πράξεις
  - Αριθμητικές πράξεις
- Οι πράξεις εκτελούνται
  - Σε ομάδες bits (bytes ή πολλαπλάσιά τους)

## Το Byte ως δυαδικός αριθμός

• Δυαδικοί  
αριθμοί

128	64	32	16	8	4	2	1
$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
bit 7	bit 6	bit 5	bit 4	bit 3	bit 2	bit 1	bit 0

το περισσότερο  
σημαντικό bit

το λιγότερο  
σημαντικό  
bit

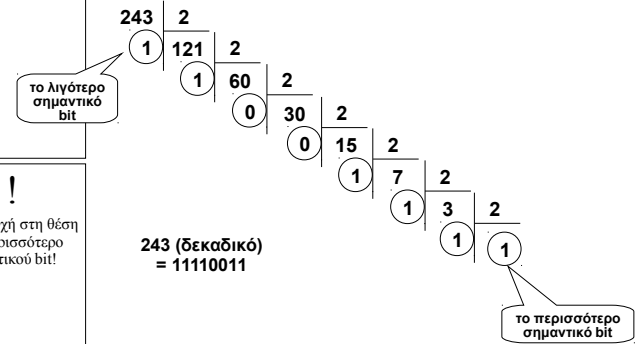
1 1 1 1 0 0 1 1  
1x128 1x64 1x32 1x16 0x8 0x4 1x2 1x1  
 $128 + 64 + 32 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1 =$   
**243 (δεκαδικό)**

- Μετατροπή από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα

!  
Εάν ο αριθμός διαθέτει περισσότερα bits, χρησιμοποιούμε μεγαλύτερες δυνάμεις του 2

## Μετατροπή δεκαδικού σε δυαδικό

• Δυαδικοί  
αριθμοί



## Δεκαεξαδικό Σύστημα

• Δυαδικοί αριθμοί

- **16 ψηφία**
  - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
  - Αντιστοιχία με τους δεκαδικούς 0 έως 15
- **Σε δυνάμεις του 16**
  - $16^n \dots 16^4 \ 16^3 \ 16^2 \ 16^1 \ 16^0$
  - Π.χ.  $16F(\text{hex}) = 1 \times 16^2 + 6 \times 16^1 + 15 \times 16^0$
  - $= 256 + 96 + 15 = 367$  (δεκαδικό)
- Χρήσιμο μόνο ως «συντομογραφία» δυαδικών αριθμών

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

5

## Δεκαεξαδικό Σύστημα

• Δυαδικοί αριθμοί

- Κάθε 4 δυαδικά ψηφία αντιστοιχούν σε ένα δεκαεξαδικό ψηφίο

0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A
0011	3	1011	B
0100	4	1100	C
0101	5	1101	D
0110	6	1110	E
0111	7	1111	F

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

6

## Παράδειγμα στο δεκαεξαδικό σύστημα

• Δυαδικοί αριθμοί

- **Παράδειγμα:** 1100100110010100  
1100 1001 1001 0100  
C 9 9 4 = C994(hex)
- **Παράδειγμα:** 10000101011110  
0010 0001 0101 1110  
2 1 5 E = 215E (hex)
  - Συμπλήρωση με 0 στα αριστερά
  - Δεν αλλάζει τον αριθμό, όπως ακριβώς και στο δεκαδικό σύστημα

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

7

## Δεκαεξαδικό Σύστημα

• Δυαδικοί αριθμοί

- Κάθε 4 δυαδικά ψηφία αντιστοιχούν σε ένα δεκαεξαδικό ψηφίο

0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A
0011	3	1011	B
0100	4	1100	C
0101	5	1101	D
0110	6	1110	E
0111	7	1111	F

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

8

## Φυσικοί αριθμοί (χωρίς πρόσημο)

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί

Με κίτρινο φαίνεται ο ελάχιστος αριθμός bits που απαιτείται

0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
.....	...

- Με  $n$  bits περιγράφονται
  - Οι φυσικοί αριθμοί από 0 έως και  $2^n - 1$

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

9

## Χρήση των φυσικών αριθμών

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί

- Για αναπαράσταση
  - Διαφορετικών «πραγμάτων»
  - Συνήθως χωρίς αριθμητική έννοια
- Απαρίθμηση
  - Παρέχοντας μοναδικούς αναγνωριστικούς αριθμούς
  - Παραδείγματα
    - Οι ξεχωριστές διευθύνσεις μνήμης
    - Οι χαρακτήρες σε ένα αλφάβητο
- Ξανά: με  $n$  bits απαριθμούνται έως και  $2^n$  διαφορετικά «πράγματα»

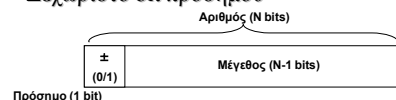
Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

10

## Ακέραιοι αριθμοί (με πρόσημο - signed)

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι

- Πώς θα αναπαρασταθούν οι αρνητικοί;
  - Για να γίνονται εύκολα οι πράξεις
- Όχι καλή ιδέα:
  - Ξεχωριστό bit πρόσημου



- Διάστημα τιμών για αριθμούς με  $n$  bits  
 $-(2^{n-1}-1)$  έως  $+(2^{n-1}-1)$  (για  $n=8$ ,  $-127 \dots +127$ )
  - ένα χρήσιμο bit λιγότερο
  - δυσκολία στις πράξεις
  - 2 αναπαραστάσεις του 0;

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

11

## Ακέραιοι αριθμοί (με πρόσημο - signed)

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι

- Επίσης όχι καλή ιδέα:
  - Συμπλήρωμα ως προς 1
    - Αντιστροφή όλων των bits του αριθμού
  - Πιο σημαντικό bit: 0 για θετικούς, 1 για αρνητικούς
- Διάστημα τιμών για αριθμούς με  $n$  bits  
 $-(2^{n-1}-1)$  έως  $+(2^{n-1}-1)$  (γιατί;)
  - Τα ίδια προβλήματα με την χρήση ξεχωριστού bit πρόσημου

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

12

## Ακέραιοι αριθμοί (με πρόσημο - signed)

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι

- Καλή ιδέα!
  - Οι αρνητικοί αριθμοί είναι οι «συμπληρωμένοι ως προς 2» θετικοί
- Συμπλήρωμα ως προς 2
  - Τι σημαίνει «συμπλήρωμα ως προς 2»;
  - Πώς υπολογίζεται;

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

13

## Συμπλήρωμα ως προς 2

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι

- Έσο με το «συμπλήρωμα ως προς 1» + 1
- Εμπειρικός κανόνας:
  - Αντιστροφή όλων των bits εκτός από τα δεξιότερα συνεχόμενα 0 και το πρώτο 1 αριστερά από αυτά
- Συμπλήρωμα ως προς 2: παραδείγματα  
 $001011100 \Rightarrow 110100100$   
 $011111111 \Rightarrow 100000001$
- Προσοχή στο 0000...00 και στο 1000...00

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

14

## Ακέραιοι σε συμπλήρωμα ως προς 2

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι

- Διάστημα τιμών για αριθμούς με  $n$  bits  
 $-(2^{n-1})$  έως  $+(2^{n-1}-1)$  (για  $n=8$ ,  $-128 \dots +127$ )
  - Μόνο το  $+(2^{n-1})$  δεν μπορεί να αναπαρασταθεί
- Ευκολία στις πράξεις
  - αφαίρεση = πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 2
  - Μία και μοναδική αναπαράσταση του 0
- Πιο σημαντικό bit: 0 για θετικούς, 1 για αρνητικούς
  - Δεν είναι όμως bit προσήμου!

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

15

## Αριθμητικές πράξεις

- Αριθμητικές πράξεις

- Οι βασικές πράξεις
  - Πρόσθεση
  - Αφαίρεση
- Άλλες πράξεις
  - Πολλαπλασιασμός
  - Διαιρέση
  - Επίσης:
    - Τετραγωνική ρίζα, τριγωνομετρικές συναρτήσεις, εκθετικά, λογάριθμοι κλπ..
    - Υλοποίηση σε υλικό με διάφορες τεχνικές
      - Π.χ με πολυώνυμα

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

16

## Προσθέτοντας 2 bits

- Αριθμητικές πράξεις

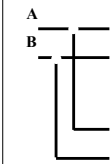
bits	άθροισμα	κρατούμενο
0 + 0	0	0
0 + 1	1	0
1 + 0	1	0
1 + 1	0	1

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

17

## Ημιαθροιστής (half-adder)

- Αριθμητικές πράξεις



— άθροισμα (SUM)

— κρατούμενο (CARRY)

A	B	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

;

Αν απαιτείται πρόσθεση αριθμών με περισσότερα bits;

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

18

## Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς (μη προσημασμένους)

Κρατούμενο									
				1	1	1			
<b>A' Αριθμός (119)</b>	0	1	1	1	0	1	1	1	
<b>B' Αριθμός ( 88)</b>	0	1	0	1	1	0	0	0	
<b>Άθροισμα (207)</b>	1	1	0	0	1	1	1	1	

1. Αριθμοί με ίδιο μήκος (ίσος αριθμός bits)
2. Αρχίζοντας από το λιγότερο σημαντικό bit (το δεξιότερο)
3. Προσθέτουμε ζεύγη bits και μεταφέρουμε το κρατούμενο (αν υπάρχει) προς τα αριστερά
  - Το προσθέτουμε στο επόμενο ζεύγος bits

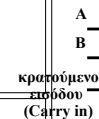
Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

19

## Πλήρης αθροιστής (full-adder)

- Αριθμητικές πράξεις

- Μία από τις πιθανές υλοποιήσεις
  - με δύο ημιαθροιστές



— άθροισμα (SUM)

— κρατούμενο εξόδου (Carry out)

;

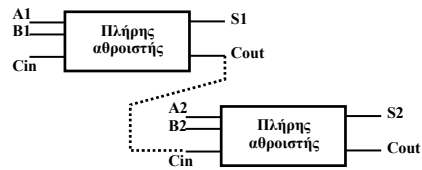
Ποιος πίνακας αλήθειας υλοποιείται;

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

20

## Πρόσθεση αριθμών με πλήρεις αθροιστές

- Αριθμητικές πράξεις



- Πολλαπλά τμήματα πλήρη αθροιστή
  - Όμως: πόσο γρήγορα διαδίδεται το κρατούμενο; (ripple carry)
  - Τεχνικές πρόβλεψης κρατουμένου (carry look-ahead)

## Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς (μη προσημασμένους)

- Υπερχείλιση
  - Στον υπολογιστή το πλήθος των bits ανά αριθμό είναι προκαθορισμένο
  - Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης θα πρέπει να χωρά στα διαθέσιμα bits ενός καταχωρητή
  - Μη προσημασμένοι αριθμοί:
    - αριθμός με N bits  $\Rightarrow$  πεδίο τιμών  $[0 \dots 2^N - 1]$
    - π.χ. για αριθμούς με 8 bits, από 0 έως 255

Κρατούμενο	1	1	1	1	1	1	
A' Αριθμός (180)	1	0	1	1	0	1	0
B' Αριθμός ( 78)	0	1	0	0	1	1	0
Αθροισμα (258)	1	0	0	0	0	0	1

ύπαρξη τελικού κρατουμένου = υπερχείλιση

διαθέσιμος χώρος

## Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς (προσημασμένους)

- Προσημασμένοι ακέραιοι
  - Συμπλήρωμα ως προς 2
    - Το περισσότερο σημαντικό bit υποδηλώνει το πρόσημο
    - 0=θετικός, 1=αρνητικός
  - αριθμός με N bits  $\Rightarrow$  πεδίο τιμών  $[-2^{N-1} \dots +2^{N-1} - 1]$ 
    - π.χ. για αριθμούς με 8 bits, από -128 έως +127
- Πρόσθεση
  - Όπως σε μη προσημασμένους
  - Τελικό κρατούμενο αγνοείται
    - Πώς γίνεται τώρα ο έλεγχος υπερχείλισης;
  - Αφαίρεση = πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 2 του αφαιρετέου
    - $A - B = A + (-B)$
    - χωρίς πρόσθετα κυκλώματα για την αφαίρεση!

## Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς (προσημασμένους)

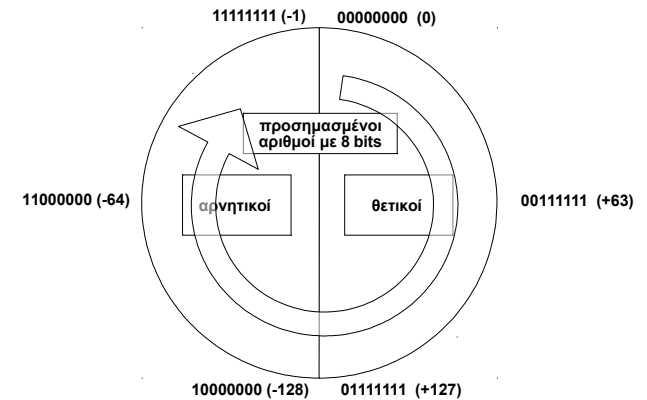
Κρατούμενο				1			
A' Αριθμός (+17)	0	0	0	1	0	0	1
B' Αριθμός (+22)	0	0	0	1	0	1	0
Αθροισμα (+39)	0	0	1	0	0	1	1

## Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς (προσημασμένους)

Κρατούμενο									
A' Αριθμός (+24)	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>1</del>	0	0	0	0
B' Αριθμός (-17)	1	1	1	0	1	1	1	1	
Άθροισμα (+7)	0	0	0	0	0	1	1	1	

- το κρατούμενο αγνοείται

## Υπερχείλιση σε προσημασμένους αριθμούς



## Υπερχείλιση σε προσημασμένους αριθμούς

Κρατούμενο									
A' Αριθμός (+127)	0	1	1	1	1	1	1	1	1
B' Αριθμός (+3)	0	0	0	0	0	0	1	1	
Άθροισμα (-126;)	1	0	0	0	0	0	1	0	

- Το άθροισμα αριθμών με ίδιο πρόσημο θα πρέπει να έχει επίσης το ίδιο πρόσημο
  - στην αντίθετη περίπτωση: υπερχείλιση

## Υπερχείλιση σε προσημασμένους αριθμούς

Κρατούμενο									
A' Αριθμός (-126)	1	0	0	0	0	0	1	0	
B' Αριθμός (-5)	1	1	1	1	1	0	1	0	
Άθροισμα (+124;)	0	1	1	1	1	1	0	0	

- Το άθροισμα αριθμών με ίδιο πρόσημο θα πρέπει να έχει επίσης το ίδιο πρόσημο
  - στην αντίθετη περίπτωση: υπερχείλιση

## Κλασματικοί αριθμοί

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι
- Κλασματικοί

- **Θεωρητικά**
  - Θα μπορούσαμε να επεξεργαζόμαστε ξεχωριστά το ακέραιο και το κλασματικό μέρος
- **Αλλά**
  - Αδυναμία αναπαράστασης πολύ μεγάλων και πολύ μικρών αριθμών
- **Η λύση**
  - Αριθμοί κινητής υποδιαστολής (floating point)
  - Εύκολη αναπαράσταση τόσο του 1.000.000.000.000 όσο και του 0,0000000000000001

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

29

## Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

- Δυαδικοί αριθμοί
- Φυσικοί αριθμοί
- Ακέραιοι
- Κλασματικοί

- **3 μέρη**
  - Πρόσημο (Π) (1 bit)
    - 0 = + 1 = -
  - Εκθέτης (Ε) (8 ή 11 bits)
    - Η βάση είναι το 2 (εννοείται)
    - Θετικοί και αρνητικοί εκθέτες με πλεόνασμα 127 ή 1023 (π.χ. αντί -55,  $E = -55 + 127 = 72$  )
  - Σημανόμενο τμήμα (Σ) (23 ή 52 bits)
    - Κανονικοποίηση: μορφή 1,xxxxxxxxxxxxx...
    - Το ‘1,’ εννοείται και δεν αποθηκεύεται
- **Τελικός αριθμός:**  $-1^{\Pi} \times 1.\Sigma \times 2^{E-127}$  (ή  $2^{E-1023}$ )
  - Ειδικοί αριθμοί: 0,  $\infty$ , NaN (Not a Number)

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

30

## Πράξεις με αριθμούς κινητής υποδιαστολής

- Αριθμητικές πράξεις

- **Σύνθετη διαδικασία**
- **Η γενική μορφή της πρόσθεσης:**
  1. Σύγκριση προσήμων
    - αν είναι ίδια  $\Rightarrow$  πρόσθεση
    - αλλιώς  $\Rightarrow$  αφαίρεση
  2. Εξίσωση εκθετών
    - μετακίνηση υποδιαστολής
  3. Πρόσθεση ή αφαίρεση σημαινόμενων τμημάτων
    - ακέραιο και κλασματικό μέρος
  4. Κανονικοποίηση αποτελέσματος
  5. Έλεγχος για υπερχείλιση

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

31

## Πράξεις με αριθμούς κινητής υποδιαστολής

**A' αριθμός:** 0 <sup>132</sup>10000100 101100000000000000000000  
+  $2^{132-127} \times 1,1011$  ( $+2^5 \times 1,1011$ )

**B' αριθμός:** 0 <sup>130</sup>10000010 011000000000000000000000  
+  $2^{130-127} \times 1,011$  ( $+2^3 \times 1,011$ )

A	$+2^5$	x	1,10110
+ B	$+2^5$	x	0,01011
=	$+2^5$	x	10,00001
κανονικοποίηση	$+2^6$	x	1,000001

**αποτέλεσμα:** 0 10000101 000001000000000000000000

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

32