

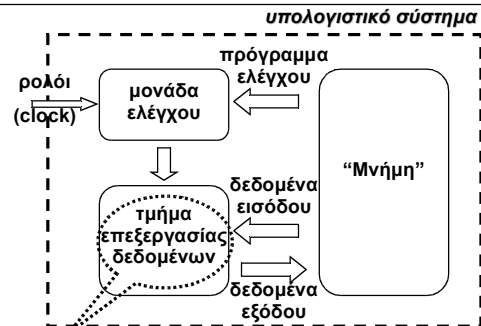
Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς (λογικές πράξεις)

<http://mixstef.github.io/courses/csintro/>



Μ.Στεφανιδάκης

• Εισαγωγή



- Επεξεργασία: ψηφιακά δυαδικά κυκλώματα
 - Εκτελούν πράξεις μεταξύ σειρών 0 και 1...
 - ...οι οποίες αναπαριστούν δυαδικούς αριθμούς

Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς

• Εισαγωγή

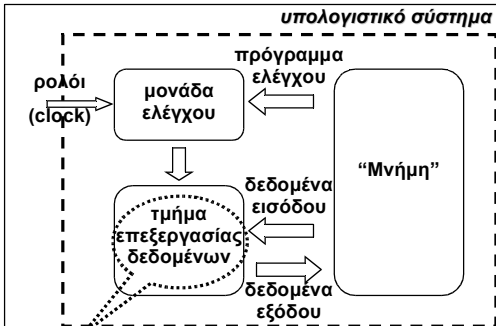
- Ο υπολογιστής μπορεί να εκτελέσει
 - Λογικές πράξεις (δυαδικής λογικής)
 - Αριθμητικές πράξεις
- Οι πράξεις εκτελούνται
 - Σε ομάδες bits: «δυαδικούς αριθμούς»

Εκτέλεση πράξεων

• Εισαγωγή

;

Ποιες κατηγορίες πράξεων;

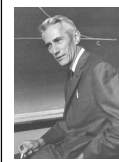


- Επεξεργασία: ψηφιακά δυαδικά κυκλώματα
 - Εκτελούν πράξεις μεταξύ σειρών 0 και 1...
 - ...οι οποίες αναπαριστούν δυαδικούς αριθμούς

Ψηφιακά Ηλεκτρονικά και Δυαδική Λογική

• Εισαγωγή
• Δυαδική λογική

- Η δυαδική λογική ταιριάζει με την τεχνολογία του τρανζίστορ
 - 2 καταστάσεις: ON-OFF, 1-0
 - Ψηφιακά ηλεκτρονικά (2 στάθμες)
- Δυαδική άλγεβρα Boole
 - Λογική άλγεβρα
 - Συσχέτιση με διακοπτικά κυκλώματα
 - Η εργασία του Shannon (1938)



C.E.Shannon

Ποσότητες Δυαδικής Λογικής

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Στη δυαδική λογική άλγεβρα
 - Υπάρχουν 2 «ποσότητες» (σύμβολα):
 - Αληθές ή 1 ή ΝΑΙ
 - Ψευδές ή 0 ή ΟΧΙ
 - Ένα δυαδικό ψηφίο (bit) έχει τιμή 0 ή 1
- Στα ψηφιακά ηλεκτρονικά κυκλώματα:
 - 0 ή «χαμηλή τάση» ή «η μια φορά ρεύματος»
 - 1 ή «υψηλή τάση» ή «η άλλη φορά ρεύματος»
- Ανάλογα με την τεχνολογία, ένα bit αναπαρίσταται με αντίστοιχη κατάσταση σε ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα

Η ανατομία ενός byte

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

το περισσότερο σημαντικό bit

bit 7 bit 6 bit 5 bit 4 bit 3 bit 2 bit 1 bit 0

το λιγότερο σημαντικό bit

- Γιατί είναι αυτή η σειρά των bits;
 - Γιατί το λιγότερο σημαντικό bit είναι δεξιά και το περισσότερο σημαντικό αριστερά;
 - Θα φανεί όταν μιλήσουμε για αριθμητικές πράξεις
 - Προς το παρόν, το byte είναι απλώς μια οκτάδα bits

Bits & Bytes

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Bit
 - Η μικρότερη λογική ποσότητα - η μικρότερη μονάδα δεδομένων - 0 ή 1.
- Byte
 - Ομάδα 8 bits
 - Η ελάχιστη ποσότητα που μπορεί να χειριστεί ο υπολογιστής κατά την εκτέλεση μιας πράξης
 - Μια σειρά από bytes αναπαριστά έναν δυαδικό «αριθμό»
 - Αποθήκευση: σε καταχωρητές ή στη μνήμη

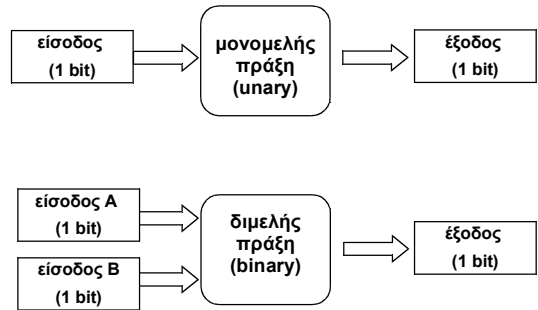
Πράξεις Δυαδικής Λογικής

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Στη δυαδική λογική άλγεβρα
 - Καθορίζονται λογικές πράξεις μεταξύ των λογικών ποσοτήτων 0 και 1 (bits)
- Στα ψηφιακά ηλεκτρονικά κυκλώματα:
 - Κύκλωμα δέχεται ως είσοδο την ηλεκτρική αναπαράσταση των 0 και 1
 - Και παράγει στην έξοδό του την ηλεκτρική αναπαράσταση του αποτελέσματος μιας λογικής πράξης
 - Το κύκλωμα υλοποίησης της λογικής πράξης ονομάζεται πύλη (gate).

Λογικές πράξεις με bits

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική



Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

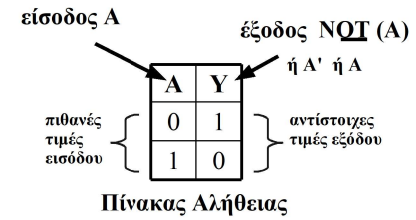
9

Βασικές Λογικές Πράξεις

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

• Αντιστροφή (NOT)

- Αντιστροφή ενός bit



Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

11

Λογικές πράξεις με bits

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Μονομελής λογική πράξη
 - NOT (αντιστροφή)
- Διμελείς λογικές πράξεις
 - AND (λογικό-ΚΑΙ)
 - OR (λογικό-Η)
 - XOR (αποκλειστικό-Η)
 - κ.λ.π.

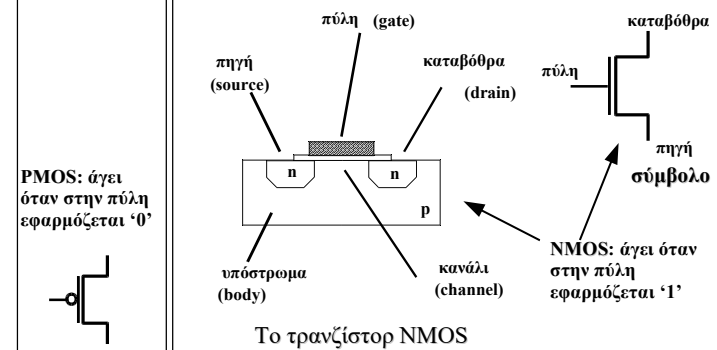
Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

10

Πώς υλοποιείται μια πύλη NOT;

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Από το προηγούμενο μάθημα:

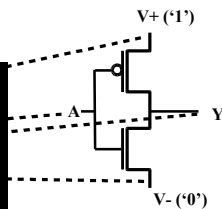
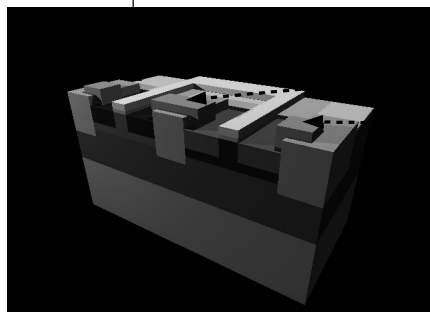


Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

12

Από το προηγούμενο μάθημα: ποια η λειτουργία του;

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική



Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

13

Βασικές Λογικές Πράξεις

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

• Λογικό ΚΑΙ (AND)

- το αποτέλεσμα είναι 1, μόνο όταν και το X και το Y είναι 1
- $0 \text{ AND } X = X \text{ AND } 0 = 0$
- $1 \text{ AND } X = X \text{ AND } 1 = X$

Πίνακας Αλήθειας

| X | Y | AND |
|---|---|-----|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |



σύμβολο πύλης AND

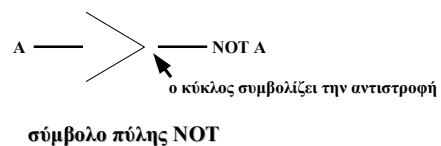
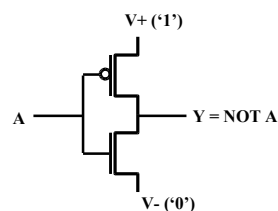
Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

15

Η πύλη NOT (αντιστροφέας)

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

| A | Y |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |



Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

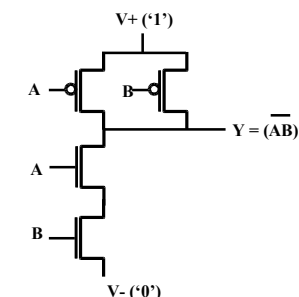
14

Παράδειγμα υλοποίησης: η πύλη NAND

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Πίνακας Αλήθειας NAND



σύμβολο πύλης NAND

!
NAND = NOT-AND

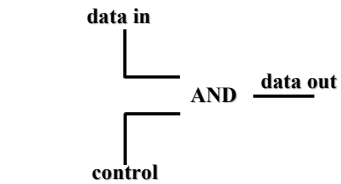
Υλοποίηση πύλης AND: χρησιμοποιώντας μια πύλη NAND και μια πύλη NOT

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

16

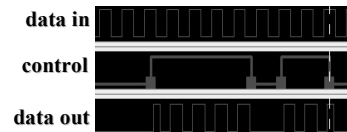
Φραγή AND: για να θέσουμε σήμα στο 0

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική



control = 0: η έξοδος data_out είναι πάντα 0
control = 1: η έξοδος data_out ισούται με το data_in

0 AND X = 0
1 AND X = X



Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

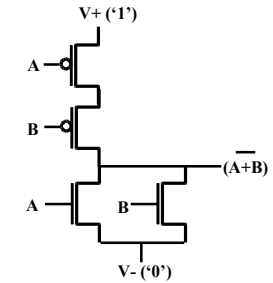
17

Παράδειγμα υλοποίησης: η πύλη NOR

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

Πίνακας Αλήθειας NOR



!
NOR = NOT-OR

Υλοποίηση πύλης
OR: χρησιμοποι-
ώντας μια πύλη
NOR και μια πύλη
NOT

σύμβολο πύλης NOR

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

19

Βασικές Λογικές Πράξεις

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

• Λογικό Ή (OR)

- το αποτέλεσμα είναι 1, όταν το X ή το Y ή και τα δύο είναι 1
- $1 \text{ OR } X = X \text{ OR } 1 = 1$
- $0 \text{ OR } X = X \text{ OR } 0 = X$

Πίνακας Αλήθειας

| X | Y | OR |
|---|---|----|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

X ———
Y ———

X OR Y
ή
X + Y

σύμβολο πύλης OR

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

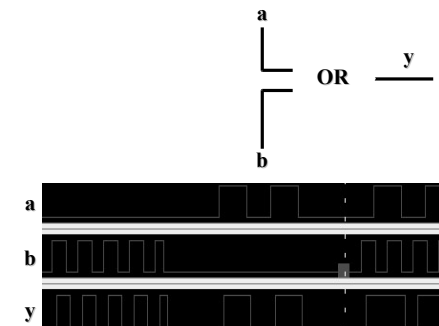
18

Συγκέντρωση σημάτων με OR

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

0 OR X = X
1 OR X = 1

Προσοχή!
Ποτέ δεν
συνδέουμε
εξόδους
πυλών μαζί!



- Θα πρέπει ανά πάσα στιγμή όλα τα σήματα πλην ενός να είναι 0!

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

20

Βασικές Λογικές Πράξεις

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

• Αποκλειστικό Ή (XOR)

- το αποτέλεσμα είναι 1, όταν μόνο το X ή μόνο το Y είναι 1
- $1 \text{ XOR } X = X \text{ XOR } 1 = \text{NOT } X$
- $0 \text{ XOR } X = X \text{ XOR } 0 = X$
- $X \text{ XOR } Y = A \cdot B' + A' \cdot B$

Πίνακας Αλήθειας

| X | Y | XOR |
|---|---|-----|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

$$\begin{array}{r} X \text{ ---} \\ Y \text{ ---} \\ \hline X \text{ XOR } Y \\ \hline X \oplus Y \end{array}$$

σύμβολο πύλης XOR

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

21

Λογικές πράξεις σε ομάδες bits

- Λογικές Πράξεις

• Ο υπολογιστής μπορεί να εφαρμόσει λογικές πράξεις στα δεδομένα μας

- Δεδομένα = σειρές από 0 και 1
- Όχι όμως σε μεμονωμένα bits!!
- Αλλά: σε ομάδες των 8, 16, 32 ή 64 bits ταυτόχρονα

$A_n \dots A_1 A_0$ op (=AND, OR, XOR)

$B_n \dots B_1 B_0$

$Y_n \dots Y_2 Y_1 Y_0$

$$Y_i = A_i \text{ op } B_i$$

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

23

Βασικές Λογικές Πράξεις

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

• XNOR: Η συμπληρωματική συνάρτηση της XOR

- το αποτέλεσμα είναι 1, όταν τα X και Y είναι όμοια
- συνάρτηση «ισοδυναμίας»

Πίνακας Αλήθειας

| X | Y | XNOR |
|---|---|------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

!

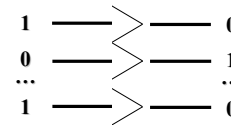
Υλοποίηση πύλης XNOR:
χρησιμοποιώντας συνδυασμούς άλλων πυλών
 $X \text{ xnor } Y = XY + X'Y'$

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

22

Ο τελεστής NOT σε δυαδικούς αριθμούς

- Λογικές πράξεις



$\begin{array}{r} 10011000 \\ \text{NOT} \\ \hline 01100111 \end{array}$

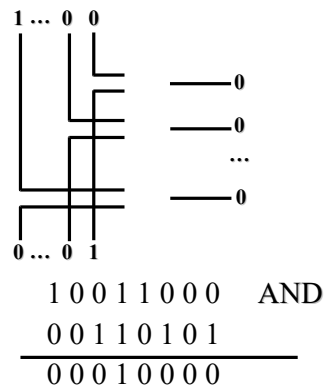
- Η έξοδος Y_i εξαρτάται μόνο από την είσοδο A_i

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

24

Ο τελεστής AND σε δυαδικούς αριθμούς

• Λογικές πράξεις



Μάσκες

• Λογικές Πράξεις

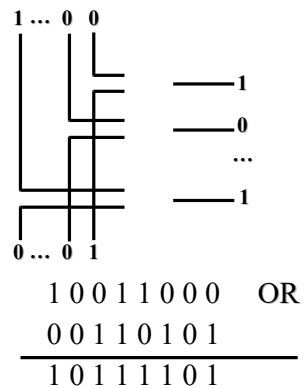
- Για να αλλάξουμε την τιμή μεμονωμένων bits μέσα σε μια ομάδα
 - Για να θέσουμε επιλεγμένα bits σε 1
 - Για να θέσουμε επιλεγμένα bits σε 0
 - Για να αντιστρέψουμε επιλεγμένα bits
 - Χωρίς να επηρεάζουμε τα υπόλοιπα!
 - αυτά διατηρούν την τιμή τους, είτε 0 είτε 1
- Μάσκα: σειρά bits, επιλεγμένη ώστε:

Bits Εισόδου op Μάσκα → Νέα ομάδα bits

 - op = AND, OR ή XOR
 - Νέα ομάδα περιέχει το επιθυμητό αποτέλεσμα

Ο τελεστής OR σε δυαδικούς αριθμούς

• Λογικές πράξεις



Μάσκα AND: για να θέσουμε bits στο 0

• Λογικές πράξεις

- Ζητούμενο: σε λέξη των 8 bits να τεθούν σε 0 τα 3 λιγότερο σημαντικά bits.

Λέξη: 1 0 0 1 1 0 1 0 AND
Μάσκα: 1 1 1 1 1 0 0 0

Νέα: 1 0 0 1 1 0 0 0

- Η AND μάσκα περιέχει:
 - 0 στα bits που θα γίνουν 0
 - 1 στα bits που θα παραμείνουν ως έχουν

0 AND X = 0
1 AND X = X

Μάσκα OR: για να θέσουμε bits στο 1

• Λογικές πράξεις

- Ζητούμενο: σε λέξη των 8 bits να τεθούν σε 1 τα bits 0,4 και 5.

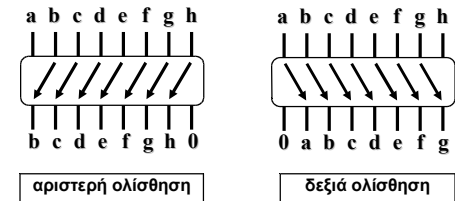
Λέξη: 1 0 0 1 1 0 0 0 OR
Μάσκα: 0 0 1 1 0 0 0 1
Νέα: 1 0 1 1 1 0 0 1

- Η OR μάσκα περιέχει:
 - 1 στα bits που θα γίνουν 1
 - 0 στα bits που θα παραμείνουν ως έχουν

0 OR X = X
1 OR X = 1

Ολίσθηση (Shift)

• Λογικές πράξεις • Ολίσθηση



Μάσκα XOR: για να αντιστρέψουμε bits

• Λογικές πράξεις

- Ζητούμενο: σε λέξη των 8 bits να αντιστραφούν τα bits 3,6 και 7.

Λέξη: 1 0 0 1 1 0 0 0 XOR
Μάσκα: 1 1 0 0 1 0 0 0
Νέα: 0 1 0 1 0 0 0 0

- Η XOR μάσκα περιέχει:
 - 1 στα bits που θα αντιστραφούν
 - 0 στα bits που θα παραμείνουν ως έχουν