

## Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς (λογικές πράξεις)

<http://mixstef.github.io/courses/csintro/>



Μ.Στεφανιδάκης

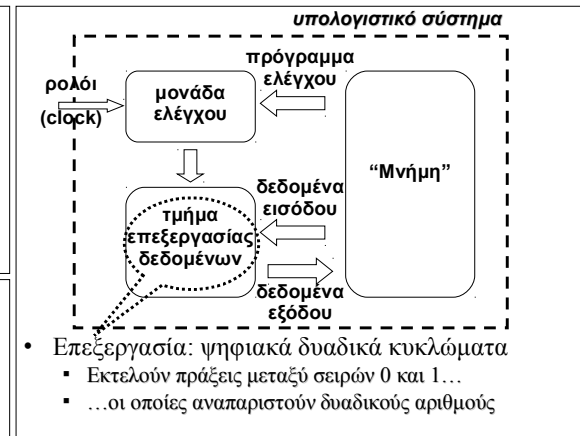
### • Εισαγωγή

- Ο υπολογιστής μπορεί να εκτελέσει
  - Λογικές πράξεις (δυαδικής λογικής)
  - Αριθμητικές πράξεις
- Οι πράξεις εκτελούνται
  - Σε ομάδες bits: «δυαδικούς αριθμούς»

## Εκτέλεση πράξεων

### • Εισαγωγή

Ποιες κατηγορίες πράξεων;



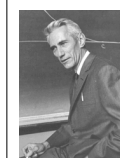
## Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς

### • Εισαγωγή

- Ο υπολογιστής μπορεί να εκτελέσει
  - Λογικές πράξεις (δυαδικής λογικής)
  - Αριθμητικές πράξεις
- Οι πράξεις εκτελούνται
  - Σε ομάδες bits: «δυαδικούς αριθμούς»

## Ψηφιακά Ηλεκτρονικά και Δυαδική Λογική

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική



C.E. Shannon

- Η δυαδική λογική ταιριάζει με την τεχνολογία του τρανζίστορ
  - 2 καταστάσεις: ON-OFF, 1-0
  - Ψηφιακά ηλεκτρονικά (2 στάθμες)
- Δυαδική άλγεβρα Boole
  - Λογική άλγεβρα
  - Συσχέτιση με διακοπτικά κυκλώματα
    - Η εργασία του Shannon (1938)

## Ποσότητες Δυαδικής Λογικής

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Στη δυαδική λογική άλγεβρα
  - Υπάρχουν 2 «ποσότητες» (σύμβολα):
    - Αληθές ή 1 ή ΝΑΙ
    - Ψευδές ή 0 ή ΟΧΙ
  - Ένα δυαδικό ψηφίο (bit) έχει τιμή 0 ή 1
- Στα ψηφιακά ηλεκτρονικά κυκλώματα:
  - 0 ή «χαμηλή τάση» ή «η μια φορά ρεύματος»
  - 1 ή «υψηλή τάση» ή «η άλλη φορά ρεύματος»
- Ανάλογα με την τεχνολογία, ένα bit αναπαρίσταται με αντίστοιχη κατάσταση σε ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα

## Bits & Bytes

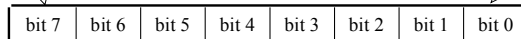
- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Bit
  - Η μικρότερη λογική ποσότητα - η μικρότερη μονάδα δεδομένων - 0 ή 1.
- Byte
  - Ομάδα 8 bits
  - Η ελάχιστη ποσότητα που μπορεί να χειριστεί ο υπολογιστής κατά την εκτέλεση μιας πράξης
  - Μια σειρά από bytes αναπαριστά έναν δυαδικό «αριθμό»
    - Αποθήκευση: σε καταχωρητές ή στη μνήμη

## Η ανατομία ενός byte

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

το περισσότερο σημαντικό bit



το λιγότερο σημαντικό bit

- Γιατί είναι αυτή η σειρά των bits;
  - Γιατί το λιγότερο σημαντικό bit είναι δεξιά και το περισσότερο σημαντικό αριστερά;
  - Θα φανεί όταν μιλήσουμε για αριθμητικές πράξεις
  - Προς το παρόν, το byte είναι απλώς μια οκτάδα bits

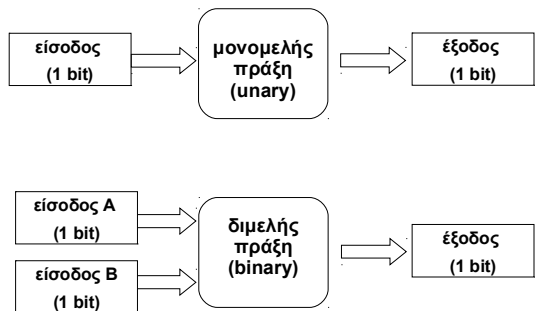
## Πράξεις Δυαδικής Λογικής

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Στη δυαδική λογική άλγεβρα
  - Καθορίζονται λογικές πράξεις μεταξύ των λογικών ποσοτήτων 0 και 1 (bits)
- Στα ψηφιακά ηλεκτρονικά κυκλώματα:
  - Κύκλωμα δέχεται ως είσοδο την ηλεκτρική αναπαράσταση των 0 και 1
  - Και παράγει στην έξοδό του την ηλεκτρική αναπαράσταση του αποτελέσματος μιας λογικής πράξης
  - Το κύκλωμα υλοποίησης της λογικής πράξης ονομάζεται πύλη (gate).

## Λογικές πράξεις με bits

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική



Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

9

## Λογικές πράξεις με bits

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Μονομελής λογική πράξη
  - NOT (αντιστροφή)
- Διμελείς λογικές πράξεις
  - AND (λογικό-ΚΑΙ)
  - OR (λογικό-Η)
  - XOR (αποκλειστικό-Η)
  - κ.λ.π.

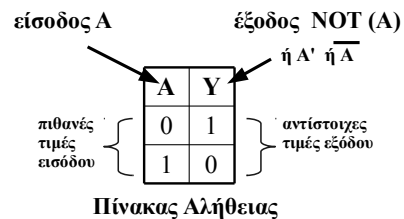
Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

10

## Βασικές Λογικές Πράξεις

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Αντιστροφή (NOT)
  - Αντιστροφή ενός bit



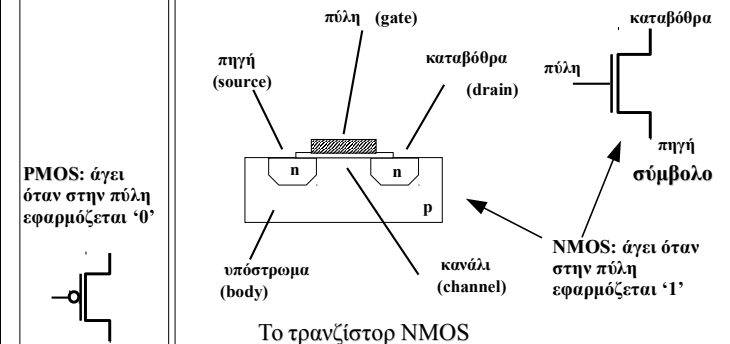
Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

11

## Πώς υλοποιείται μια πύλη NOT;

- Εισαγωγή
- Δυαδική λογική

- Από το προηγούμενο μάθημα:

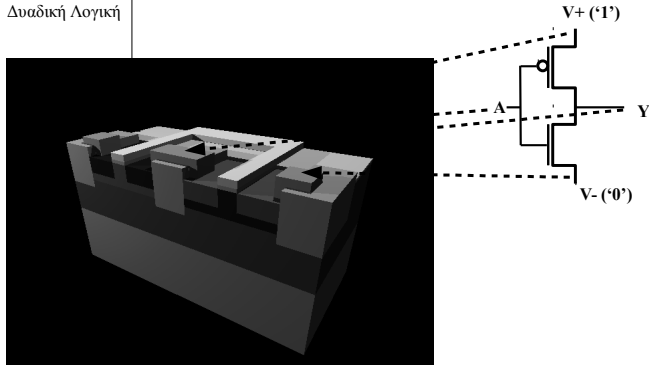


Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

12

## Από το προηγούμενο μάθημα: ποια η λειτουργία του;

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική



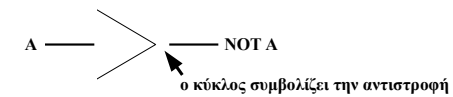
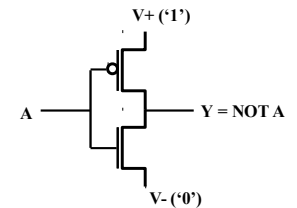
Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

13

## Η πύλη NOT (αντιστροφέας)

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

A	Y
0	1
1	0



σύμβολο πύλης NOT

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

14

## Βασικές Λογικές Πράξεις

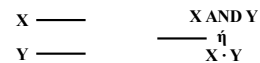
- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

### • Λογικό ΚΑΙ (AND)

- το αποτέλεσμα είναι 1, μόνο όταν και το X και το Y είναι 1
- $0 \text{ AND } X = X \text{ AND } 0 = 0$
- $1 \text{ AND } X = X \text{ AND } 1 = X$

Πίνακας Αλήθειας

X	Y	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



σύμβολο πύλης AND

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

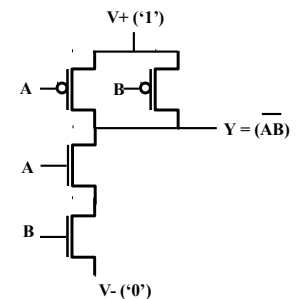
15

## Παράδειγμα υλοποίησης: η πύλη NAND

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Πίνακας Αλήθειας NAND



σύμβολο πύλης NAND

!  
NAND = NOT-AND  
  
Υλοποίηση πύλης AND: χρησιμοποιώντας μια πύλη NAND και μια πύλη NOT

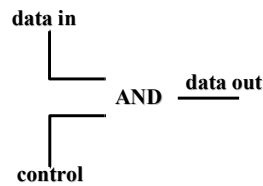


Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

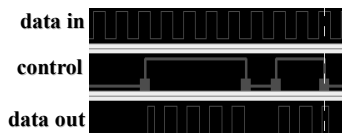
16

## Φραγή AND: για να θέσουμε σήμα στο 0

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική



control = 0: η έξοδος data\_out είναι πάντα 0  
control = 1: η έξοδος data\_out ισούται με το data\_in



$$0 \text{ AND } X = 0$$

$$1 \text{ AND } X = X$$

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

17

## Βασικές Λογικές Πράξεις

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

### Λογικό Ή (OR)

- το αποτέλεσμα είναι 1, όταν το X ή το Y ή και τα δύο είναι 1
- $1 \text{ OR } X = X \text{ OR } 1 = 1$
- $0 \text{ OR } X = X \text{ OR } 0 = X$

Πίνακας Αλήθειας

X	Y	OR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$X \text{ OR } Y = X + Y$$

σύμβολο πύλης OR

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

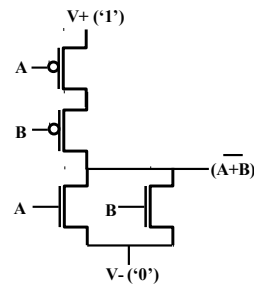
18

## Παράδειγμα υλοποίησης: η πύλη NOR

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Πίνακας Αλήθειας NOR



σύμβολο πύλης NOR

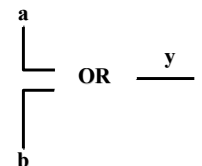
!  
NOR = NOT-OR  
Υλοποίηση πύλης OR: χρησιμοποιώντας μια πύλη NOR και μια πύλη NOT

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

19

## Συγκέντρωση σημάτων με OR

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική



$$0 \text{ OR } X = X$$

$$1 \text{ OR } X = 1$$

Προσοχή!  
Ποτέ δεν συνδέουμε εξόδους πυλών μαζί!

- Θα πρέπει ανά πάσα στιγμή όλα τα σήματα πλην ενός να είναι 0!

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

20

## Βασικές Λογικές Πράξεις

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

### • Αποκλειστικό Ή (XOR)

- το αποτέλεσμα είναι 1, όταν μόνο το X ή μόνο το Y είναι 1
- $1 \text{ XOR } X = X \text{ XOR } 1 = \text{NOT } X$
- $0 \text{ XOR } X = X \text{ XOR } 0 = X$
- $X \text{ XOR } Y = A \cdot B' + A' \cdot B$

Πίνακας Αλήθειας

X	Y	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

X ——— X XOR Y  
Y ——— ή  
X ⊕ Y

σύμβολο πύλης XOR

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

21

## Βασικές Λογικές Πράξεις

- Εισαγωγή
- Δυαδική Λογική

### • XNOR: Η συμπληρωματική συνάρτηση της XOR

- το αποτέλεσμα είναι 1, όταν τα X και Y είναι όμοια
- συνάρτηση «ισοδυναμίας»

Πίνακας Αλήθειας

X	Y	XNOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

!

Υλοποίηση πύλης XNOR: χρησιμοποιώντας συνδυασμούς άλλων πυλών  
 $X \text{ xnor } Y = XY + X'Y'$

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

22

## Λογικές πράξεις σε ομάδες bits

- Λογικές Πράξεις

### • Ο υπολογιστής μπορεί να εφαρμόσει λογικές πράξεις στα δεδομένα μας

- Δεδομένα = σειρές από 0 και 1
- Όχι όμως σε μεμονωμένα bits!!
- Αλλά: σε ομάδες των 8, 16, 32 ή 64 bits ταυτόχρονα

$A_n \dots A_1 A_0$  op (=AND, OR, XOR)

$B_n \dots B_1 B_0$

$Y_n \dots Y_1 Y_0$

$Y_i = A_i \text{ op } B_i$

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

23

## Ο τελεστής NOT σε δυαδικούς αριθμούς

- Λογικές πράξεις

1 ——— 0  
0 ——— 1  
... ——— ...  
1 ——— 0

!

Η “μέθοδος” του υλικού (hardware): πολλαπλές ίδιες μονάδες εκτελούν την ίδια λειτουργία παράλληλα

1 0 0 1 1 0 0 0 NOT  
0 1 1 0 0 1 1 1

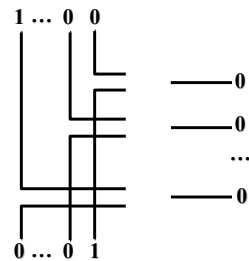
- Η έξοδος  $Y_i$  εξαρτάται μόνο από την είσοδο  $A_i$

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

24

## Ο τελεστής AND σε δυαδικούς αριθμούς

### • Λογικές πράξεις



```

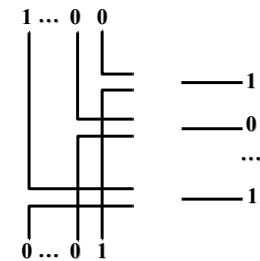
1 0 0 1 1 0 0 0 AND
0 0 1 1 0 1 0 1
-----
0 0 0 1 0 0 0 0
    
```

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

25

## Ο τελεστής OR σε δυαδικούς αριθμούς

### • Λογικές πράξεις



```

1 0 0 1 1 0 0 0 OR
0 0 1 1 0 1 0 1
-----
1 0 1 1 1 1 0 1
    
```

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

26

## Μάσκες

### • Λογικές Πράξεις

- Για να αλλάξουμε την τιμή μεμονωμένων bits μέσα σε μια ομάδα
  - Για να θέσουμε επιλεγμένα bits σε 1
  - Για να θέσουμε επιλεγμένα bits σε 0
  - Για να αντιστρέψουμε επιλεγμένα bits
  - Χωρίς να επηρεάζουμε τα υπόλοιπα!
    - αυτά διατηρούν την τιμή τους, είτε 0 είτε 1
- Μάσκα: σειρά bits, επιλεγμένη ώστε:
 

*Bits Εισόδου op Μάσκα → Νέα ομάδα bits*

  - op = AND, OR ή XOR
  - Νέα ομάδα περιέχει το επιθυμητό αποτέλεσμα

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

27

## Μάσκα AND: για να θέσουμε bits στο 0

### • Λογικές πράξεις

- Ζητούμενο: σε λέξη των 8 bits να τεθούν σε 0 τα 3 λιγότερο σημαντικά bits.

```

Λέξη:      1 0 0 1 1 0 1 0 AND
Μάσκα:      1 1 1 1 1 0 0 0
-----
Νέα:        1 0 0 1 1 0 0 0
    
```

- Η AND μάσκα περιέχει:
  - 0 στα bits που θα γίνουν 0
  - 1 στα bits που θα παραμείνουν ως έχουν

```

0 AND X = 0
1 AND X = X
    
```

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

28

## Μάσκα OR: για να θέσουμε bits στο 1

- Λογικές πράξεις

- Ζητούμενο: σε λέξη των 8 bits να τεθούν σε 1 τα bits 0,4 και 5.

Λέξη:           1 0 0 1 1 0 0 0   OR  
Μάσκα:        0 0 1 1 0 0 0 1  
Νέα:            1 0 1 1 1 0 0 1

- Η OR μάσκα περιέχει:
  - 1 στα bits που θα γίνουν 1
  - 0 στα bits που θα παραμείνουν ως έχουν

0 OR X = X  
1 OR X = 1

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

29

## Μάσκα XOR: για να αντιστρέψουμε bits

- Λογικές πράξεις

- Ζητούμενο: σε λέξη των 8 bits να αντιστραφούν τα bits 3,6 και 7.

Λέξη:           1 0 0 1 1 0 0 0   XOR  
Μάσκα:        1 1 0 0 1 0 0 0  
Νέα:            0 1 0 1 0 0 0 0

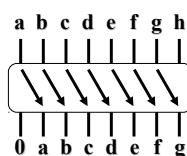
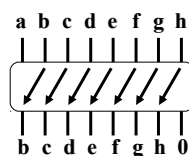
- Η XOR μάσκα περιέχει:
  - 1 στα bits που θα αντιστραφούν
  - 0 στα bits που θα παραμείνουν ως έχουν

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

30

## Ολίσθηση (Shift)

- Λογικές πράξεις
- Ολίσθηση



Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών – “Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς”

31