Formulário de séries

1. (Critério do termo geral, da condição necessária ou da divergência)

   Se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ ou $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$, então a série $\sum a_n$ diverge.

2. (Critério da razão) Seja $\sum a_n$ série de termos positivos e seja $L = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

   (i) Se $L < 1$, então a série $\sum a_n$ converge.
   (ii) Se $L > 1$, então a série $\sum a_n$ diverge.
   (iii) Se $L = 1$, o critério nada informa.

3. (Critério da raiz) Seja $\sum a_n$ série de termos positivos e seja $L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$

   (i) Se $L < 1$, então a série $\sum a_n$ converge.
   (ii) Se $L > 1$, então a série $\sum a_n$ diverge.
   (iii) Se $L = 1$, o critério nada informa.

4. (Critério da comparação) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Se existir n_0 natural tal que $a_n \leq b_n$, para todo $n \geq n_0$. Então: .

   (i) Se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ também converge.
   (ii) Se $\sum a_n$ diverge, então $\sum b_n$ também diverge.

5. (Forma limite do critério da comparação) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos e seja $L = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

   (i) Se $0 < L < +\infty$, então ambas as séries convergem ou ambas divergem.
   (ii) Se $L = 0$ e $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ também converge.
   (iii) Se $L = +\infty$ e $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ também diverge.

6. (Critério da integral) Seja $\sum a_n$ série de termos positivos. Seja f função tal que:

   (a) existe natural n_0 tal que $f(n) = a_n$, para todo $n \geq n_0$ e
   (b) f é contínua, positiva e decrescente em $[n_0, +\infty[$

   Então $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ converge.

   Obs. $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{n_0}^{b} f(x)dx$

7. Critério de Raabe Seja $\sum a_n$ série de termos positivos e seja $L = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.

   (a) Se $L > 1$, então $\sum a_n$ converge.
   (b) Se $L < 1$, então $\sum a_n$ diverge.
   (c) Se $L = 1$, o critério nada revela.

8. (Critério de Leibniz) Seja $\sum a_n$ uma série alternada. Se:

   (a) $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ (ou $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$) e

   (b) a sequência $\{|a_n|\}$ é decrescente a partir de algum índice n_0 (isto é, existe natural n_0 tal que $|a_{n+1}| \leq |a_n|$, $\forall n \geq n_0$).

   Então, a série alternada $\sum a_n$ converge.

9. (Convergência condicional e absoluta) Seja $\sum a_n$ uma série de termos quaisquer, isto é, a série pode ter termos positivos e negativos.

   (a) (Critério da razão para séries quaisquer) Seja $L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

      (i) Se $L < 1$, a série $\sum a_n$ converge absolutamente.

      (ii) Se $L > 1$, então a série $\sum a_n$ diverge.

      (iii) Se $L = 1$, o critério nada informa.

   (b) (Critério da raiz para séries quaisquer) Seja $L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

      (i) Se $L < 1$, então a série $\sum a_n$ converge absolutamente.

      (ii) Se $L > 1$, então a série $\sum a_n$ diverge.

      (iii) Se $L = 1$, o critério nada informa.

10. (Série de Taylor de f em torno e x_0)

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots = \sum_{0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

11. (Série de Fourier de f) $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{1}^{+\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,\ n \geq 1$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx,\ n \geq 1$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx = 0, \forall n \geq 1$

$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\,dx = 0, \forall n \geq 1$

$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx = 0, \forall n \geq 1$

$\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}, \forall n \geq 1$

$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n, \forall n \geq 1$

$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\operatorname{sen}(nx)\,dx = 0, \forall n \geq 1$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi, \forall n \geq 1$

$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx)\,dx = \pi, \forall n \geq 1$

$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx = 0, n \neq m$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = 0, n \neq m$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx = 0, n \geq 1$ ou $m \geq 1$