

Linguagens Formais e Autômatos (CC5220/CCM420)

Aula 08 - Gramática Livre do Contexto

Prof. Luciano Rossi

Ciência da Computação
Centro Universitário FEI

2º Semestre de 2025

Linguagens Formais e Autômatos

O que foi visto até agora...

- Autômatos Finitos
 - ▶ Operações Regulares
- Não-determinismo
 - ▶ Equivalência entre AFD e AFN
 - ▶ Fecho sob operações regulares
- Expressões Regulares
 - ▶ Equivalência com autômatos finitos

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto

Desafio

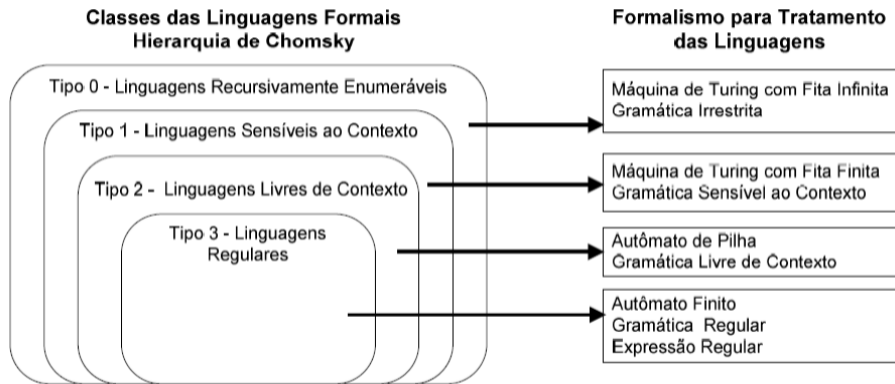
- Você consegue projetar um autômato que reconheça a linguagem:

$$\{0^n 1^n | n \geq 0\}$$

?

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto



Fonte: MATSUNO (2006)

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto

- Os autômatos finitos e as expressões regulares não são capazes de descrever todos os tipos de linguagens;
- A linguagem $\{0^n 1^n | n \geq 0\}$ é um exemplo;
- As gramáticas livres do contexto são mais poderosas para a descrições de linguagens;
- Descrevem características recursivas;

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto

- Inicialmente utilizadas para o estudo de **linguagens humanas**;
- Muito utilizada para a especificação e **compilação** de linguagens de programação;
- As linguagens associadas às gramáticas livres de contexto são denominadas de linguagens livres do contexto;
- As linguagens livres do contexto incluem todas as linguagens regulares.

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

$$\begin{array}{l} A \rightarrow 0A1 \\ G_1 : \quad A \rightarrow B \\ \quad \quad B \rightarrow \# \end{array}$$

- Regras de substituição (produções)
- Cada regra aparece como uma linha na gramática
- A e B são as variáveis de G_1 e A é a variável inicial
- 0 , 1 e $\#$ são terminais;
- A gramática descreve uma linguagem gerando as cadeias dessa linguagem:
 1. Escreva a variável inicial;
 2. Encontre uma variável que esteja escrita e uma regra que comece com essa variável;
 3. Repita o passo 2 até que não reste nenhuma variável.

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

$$\begin{aligned} & A \rightarrow 0A1 \\ G_1 : & \quad A \rightarrow B \\ & \quad B \rightarrow \# \end{aligned}$$

- Por exemplo, a gramática G_1 gera a cadeia 000#111;
- A sequência de substituições para obter a cadeia é denominada derivação;
- Uma **derivação** da cadeia 000#111 na gramática G_1 é:

$$A \Leftrightarrow 0A1 \Leftrightarrow 00A11 \Leftrightarrow 000A111 \Leftrightarrow 000B111 \Leftrightarrow 000\#111$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

- O conjunto de todas as cadeias geradas desta maneira constitui a **linguagem** da gramática;
- Escrevemos $L(G_1)$ para a linguagem da gramática G_1 ;
- Alguma experimentação com G_1 nos mostra que $L(G_1) = \{0^n \# 1^n \mid n \geq 0\}$;
- Qualquer linguagem que possa ser **gerada** por uma gramática livre de contexto é chamada de **linguagem livre de contexto** (LLC);
- Por conveniência, abreviamos várias regras com a mesma variável do lado esquerdo:
- $A \rightarrow 0A1$ e $A \rightarrow B$ podem ser escritas como $A \rightarrow 0A1 \mid B$.

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Definição formal de gramática livre do contexto

Definição

Uma gramática livre do contexto é um 4-upla (V, Σ, R, S) , onde:

1. V é um conjunto finito denominado variáveis;
2. Σ é um conjunto finito, distinto de V , denominado terminais;
3. R é um conjunto finito de regras, com cada regra sendo uma variável e uma cadeia de variáveis e terminais;
4. $S \in V$ é a variável inicial.

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplos de gramática livre do contexto

- Considere a gramática $G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, R, S)$;
- O conjunto de regras, R , é $S \rightarrow aSb | SS | \epsilon$;
- Essa gramática gera cadeias tais como $abab$, $aaabbb$ e $aababb$;
- Se considerarmos $a = ($ e $b =)$ é fácil identificar que a linguagem da gramática é o conjunto de cadeias de parênteses apropriadamente aninhados;
- Exemplos:
 - ▶ $()()((()))$
 - ▶ $((((()))))$
 - ▶ $((()())())$

Linguagens Formais e Autômatos

Projetando gramáticas livre do contexto (GLC)

- As GLCs são mais difíceis de construir que os AFs;
- Muitas LLCs são a união de LLCs mais simples;
- Exemplo: para obter a gramática para a linguagem $\{0^n 1^n | n \geq 0\} \cup \{1^n 0^n | n \geq 0\}$, primeiro construa a gramática

$$S_1 \rightarrow 0S_11 | \epsilon$$

para a linguagem $\{0^n 1^n | n \geq 0\}$ e a gramática

$$S_2 \rightarrow 1S_20 | \epsilon$$

para a linguagem $\{1^n 0^n | n \geq 0\}$ e então adicione a regra $S \rightarrow S_1 | S_2$.

Linguagens Formais e Autômatos

Exercícios

1. Considere a seguinte GLC:

$$E \rightarrow E + T \mid T$$

$$T \rightarrow T \times F \mid F$$

$$F \rightarrow (E) \mid a$$

Dê árvores sintáticas e derivações para cada cadeia abaixo:

a. a

b. $a + a$

c. $a + a + a$

d. $((a))$

2. Dê gramáticas livre do contexto que gerem as seguintes linguagens.

a. $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contém pelo menos três 1s}\}$

b. $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ começa e termina com o mesmo símbolo}\}$

c. $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{o comprimento de } w \text{ é ímpar}\}$

d. $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{o comprimento de } w \text{ é ímpar e o símbolo do meio é } 0\}$

e. $\{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R \text{ ou seja, } w \text{ é um palíndromo}\}$

f. $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ tenha mais as que bs}\}$

Linguagens Formais e Autômatos (CC5220/CCM420)

Aula 08 - Gramática Livre do Contexto

Prof. Luciano Rossi

Ciência da Computação
Centro Universitário FEI

2º Semestre de 2025