

# Estrutura de Dados (CCA410)

## Atividade 12 – Árvore Geradora Mínima

Prof. Luciano Rossi  
Prof. Leonardo Anjoletto Ferreira  
Prof. Flavio Tonidandel  
Prof. Fabio Suim

2º Semestre de 2025

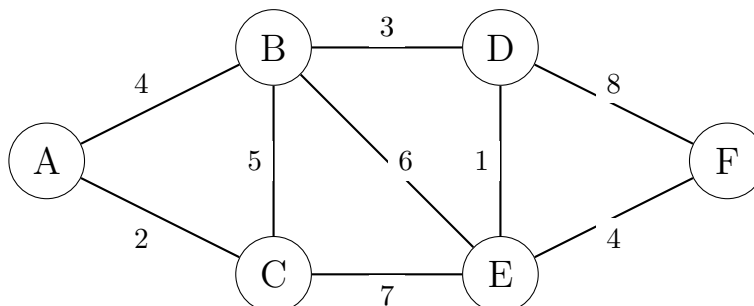
### Objetivos

Esta atividade tem como objetivo consolidar o aprendizado dos algoritmos de árvore geradora mínima (MST):

- Aplicar o algoritmo de Prim em grafos não-direcionados
- Implementar o algoritmo de Kruskal para construção de MST
- Utilizar estruturas de dados Union-Find (Disjoint Set)
- Comparar a eficiência e adequação dos algoritmos
- Resolver problemas práticos de otimização de redes

### Exercício 1 – Algoritmo de Prim

Considere o grafo não-direcionado abaixo:



#### Tarefas:

1. Execute o algoritmo de Prim iniciando no vértice A
2. Preencha a tabela de execução abaixo

- Identifique todas as arestas da árvore geradora mínima
- Calcule o peso total da MST
- Desenhe a árvore geradora mínima resultante

**Tabela de Execução:**

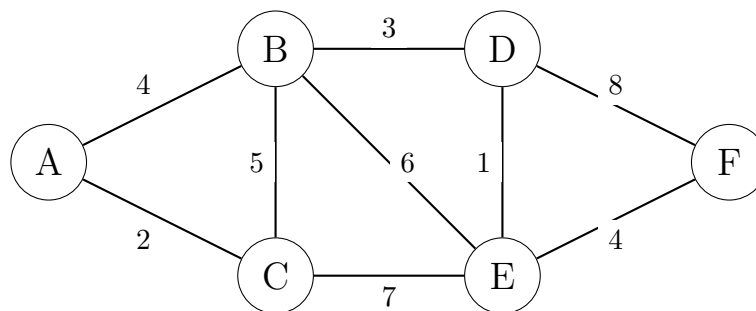
Passo	MST	Aresta	A	B	C	D	E	F
Inicial	{A}	-	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1			0					
2			0					
3			0					
4			0					
5			0					

**Arestas da MST:** .....

**Peso Total:** .....

## Exercício 2 – Algoritmo de Kruskal

Considere o mesmo grafo do Exercício 1. Agora execute o algoritmo de Kruskal:



**Tarefas:**

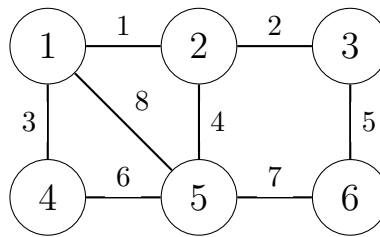
- Ordene todas as arestas por peso crescente
- Execute o algoritmo de Kruskal usando Union-Find
- Para cada aresta, indique se foi adicionada ou rejeitada (ciclo)
- Compare o resultado com o algoritmo de Prim

**Lista de Arestas Ordenadas:**

Ordem	Aresta	Peso	Adicionar?	Conjuntos
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

## Exercício 3 – Estrutura Union-Find

Considere o seguinte grafo:

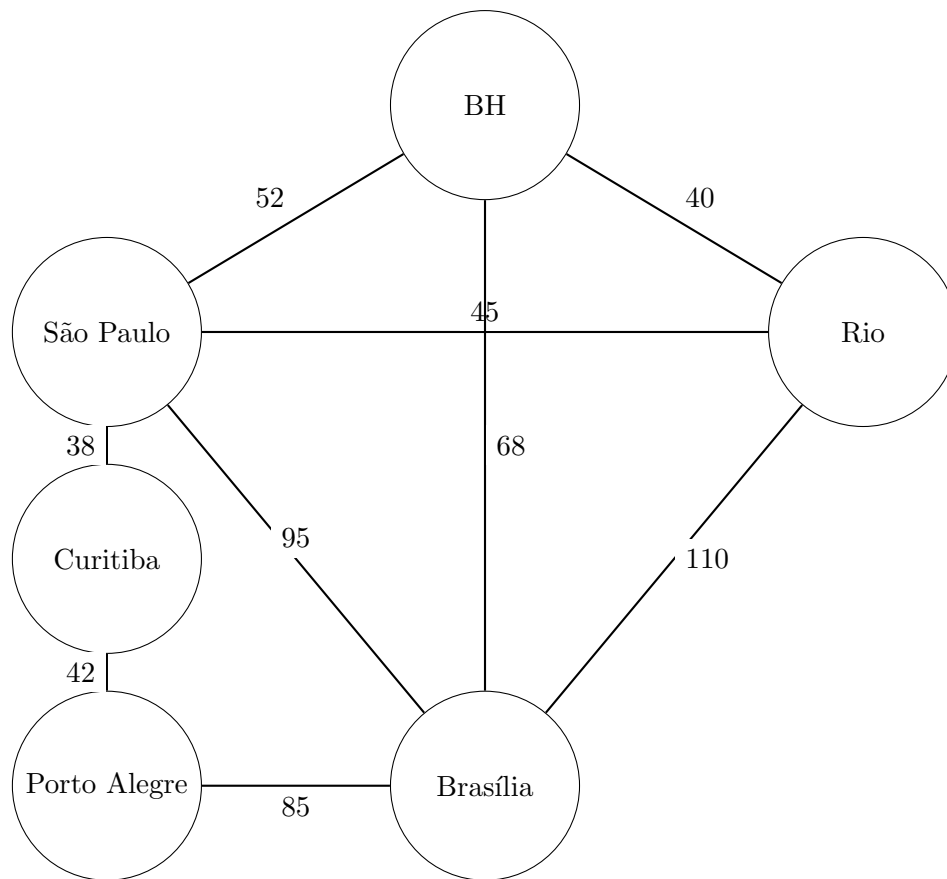


Execute o algoritmo de Kruskal usando Union-Find com compressão de caminho:

Passo	Aresta	Peso	Find(u)	Find(v)	Ciclo?	Union?	MST?
Inicial	-	-	-	-	-	-	{}
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							

## Exercício 4 – Problema Prático: Rede de Fibra Óptica

Uma empresa de telecomunicações precisa conectar 6 cidades com cabos de fibra óptica, minimizando o custo total. O grafo abaixo representa as cidades e os custos (em milhões de reais) para instalar cabos entre elas:



**Tarefas:**

1. Qual algoritmo você escolheria: Prim ou Kruskal? Justifique.
2. Execute o algoritmo escolhido
3. Determine quais conexões devem ser instaladas
4. Calcule o custo total mínimo do projeto
5. Verifique se todas as cidades ficaram conectadas

## Exercício 5 – Análise Comparativa

Complete a tabela comparativa abaixo:

Critério	Prim	Kruskal
Estratégia Principal		
Estrutura de Dados		
Complexidade (com heap/UF)		
Tipo de Grafo		
Ordenação Necessária		
Melhor para Grafos Densos		
Melhor para Grafos Esparsos		
Escolha do Vértice Inicial		

## Exercício 6 – Prova de Propriedades

Responda as seguintes questões teóricas:

1. **Unicidade da MST:** Se todas as arestas têm pesos distintos, a MST é única? Justifique.
2. **Ciclo com Aresta Máxima:** Prove ou refute: Se adicionarmos uma aresta  $(u,v)$  com peso  $w$  à MST, criamos um ciclo. A aresta de maior peso neste ciclo tem peso  $w$ .
3. **Corte Mínimo:** Explique como a propriedade do corte garante a corretude do algoritmo de Prim.
4. **Número de Arestas:** Quantas arestas possui a MST de um grafo conexo com  $n$  vértices?

## Exercício 7 – Variações e Aplicações

### Caso 1: Árvore Geradora Máxima

Como você modificaria os algoritmos de Prim e Kruskal para encontrar uma árvore geradora *máxima* (maximum spanning tree)?

### Caso 2: MST com Restrições

Suponha que você precise construir uma MST, mas a aresta  $(B,C)$  deve obrigatoriamente fazer parte da solução. Como você adaptaria o algoritmo?

### Caso 3: Floresta Geradora Mínima

Em um grafo desconexo com 3 componentes conexas, o que os algoritmos de Prim e Kruskal produzem?