EQUAÇÕES DIFERENCIAIS - MAC 14

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES HOMOGÊNEAS DE ORDEM N COM COEFICIENTES CONSTANTES

Bibliografia básica:

Zill, D. G.; Cullen, M. R. Equações diferenciais. 3. Ed – V1. São Paulo - Pearson/Makron Books, 2008.

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de ordem n

Definição: Entende-se por uma Equação Diferencial Linear Ordinária de Ordem n a uma Equação da forma:

$$\boxed{a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)y = f(x)}$$

Em que $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, $\cdots$, $a_1(x)$ e $a_0(x)$ e $f(x)$ são funções contínuas num dado intervalo I e $a_n(x) \neq 0$ $\forall x \in$ I.

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de ordem n

Definição: A Equação Diferencial Linear Ordinária de Ordem n:

$$\boxed{a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)y = f(x)}$$

É dita homogênea de ordem n, se: $\boldsymbol{f(x) = 0}$

É dita não homogênea de ordem n, se: $\boldsymbol{f(x) \neq 0}$

Problema de valor inicial

Entende-se por um problema de valor inicial a Equação Diferencial Linear Ordinária de Ordem n:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y' + a_0(x)y = f(x)$$

Sujeita às n condições iniciais:

$$y(x_0) = y_0\ , \qquad y'(x_0) = y_0'\ , \qquad \cdots \qquad , \qquad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Em que $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, … , $a_0(x)$ e $f(x)$ são funções contínuas num dado intervalo I e $a_n(x) \neq 0\ \ \forall x \in I$.

Definição: Dependência e Independência Linear de funções

Um conjunto de n funções $\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\}$ é dito linearmente independente (LI) em um dado intervalo *I*, se para quaisquer constantes a_1 , a_2 ,$\cdots$, a_n , a igualdade:

$$\boxed{a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x) = 0}$$

só for possível se: $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 \quad \forall x \in I.$

Se a igualdade for possível com pelo menos uma das constantes a_1 , a_2 ,$\cdots$, a_n não nula, o conjunto é dito linearmente dependente (LD)

Teorema 1: Considere a EDO homogênea de ordem n:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (*)$$

e suponha que $y_1 , y_2, \cdots , y_n$ sejam soluções linearmente independentes da EDO homogênea em um intervalo I. Então, a solução geral y da EDO (*) é uma combinação linear das n soluções dadas $y_1 , y_2, \cdots , y_n$, ou seja:

$$\boxed{y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n}$$

sendo $a_1, a_2, \cdots a_n$ constantes arbitrárias.

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de ordem n com coeficientes constantes

Se na equação $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y' + a_0(x)y = f(x)$ tivermos que $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, $\cdots$, $a_1(x)$ e $a_0(x)$ são funções constantes, então teremos uma equação denominada Equação Diferencial Linear de Ordem n com Coeficientes Constantes:

$$\boxed{\alpha_n y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = f(x)}$$

Em que α_n , α_{n-1} , $\cdots$, α_0 são constantes e $f(x)$ é contínua num dado intervalo I e $\alpha_n \neq 0$ $\forall x \in$ I.

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de ordem 2 com coeficientes constantes

Inicialmente, admitiremos $n = 2$ e então teremos a Equação Diferencial Linear de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (1)$$

Em que a, b e c são constantes e $f(x)$ é contínua num dado intervalo I e $a \neq 0 \ \forall x \in$ I.

EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Considerando a equação diferencial : $\boxed{ay''+by'+cy=f(x)}$

Vamos estudar as equações do tipo acima para dois casos distintos:

1º Caso: Quando $f(x)=0$ (EDO é dita homogênea)

2º Caso: Quando $f(x)\neq 0$ (EDO é dita não homogênea)

PS. Mais a frente, falaremos sobre as EDOs do tipo acima de ordens superiores.

1º Caso: Quando $f(x) = 0$

Definição: Entende-se por uma Equação Diferencial Linear <u>Homogênea</u> de 2ª

Ordem com Coeficientes Constantes *a* uma equação da forma:

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0 \qquad (2)}$$

Em que a, b e c são constantes e $a \neq 0$

Para resolver a equação (2), vamos propor uma solução da forma $y = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Se $y = e^{\lambda x}$, então $y' = \lambda e^{\lambda x}$ e $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Agora substituímos na equação (2):

$$ay'' + by' + cy = a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0.$$

Mas como sabemos: $e^{\lambda x} \neq 0$, então temos necessariamente:

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ (Essa equação é denominada **Equação Característica**)

Cujas raízes são dadas por: $\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $\lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ora, sabemos que dada uma equação de segundo grau na variável λ, tal que:

$$\boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$$

Tem-se três possibilidades para a solução da equação característica, ou seja:

Caso 1: Se $b^2 - 4ac > 0$

Caso 2: Se $b^2 - 4ac = 0$

Caso 3: Se $b^2 - 4ac < 0$

Caso 1. Se $b^2 - 4ac > 0$, teremos duas raízes reais e distintas: $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

E nesse caso a solução geral da EDO (2) será dada por uma combinação linear das duas soluções linearmente independentes $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$, conforme teorema 1. Ou seja:

$$\boxed{y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \qquad com\ A\ e\ B\ constantes\ quaisquer}$$

Caso 2. Se $b^2 - 4ac = 0$, teremos duas raízes reais e iguais: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

e a solução geral da EDO (2) será dada também pela combinação linear de duas soluções linearmente independentes $e^{\lambda x}$ e $xe^{\lambda x}$, ou seja:

$$\boxed{y(x) = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}, \qquad \text{com A e B constantes quaisquer}}$$

PS. Pode-se provar que se $e^{\lambda x}$ for solução da equação (2) , então $xe^{\lambda x}$ também será solução.

Caso 3. Se $b^2 - 4ac < 0$, temos duas raízes complexas conjugadas:

$\boxed{\lambda_1 = \alpha + \beta i}$ $\quad e \quad$ $\boxed{\lambda_2 = \alpha - \beta i}$ $\quad$ $(onde\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad e \quad i = \sqrt{-1}\,)$.

Assim, a solução geral de (2) será dada também pela combinação linear de duas soluções linearmente independentes, ou seja :

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}[A\cos(\beta x) + \mathrm{Bsen}(\beta x)]\,, \qquad \text{com A e B constantes quaisquer}}$$

Exemplos: Resolva as EDOs:

1. $$\begin{cases} y'' - 9y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(Aqui\ temos:\ \ a = 1 \ \ ; \ \ b = 0 \quad e \quad c = -9)$$

Exemplos: Resolva as EDOs:

1. $y'' - 9y = 0$; $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

$(Aqui\ temos:\ \ a = 1\ \ ;\ \ b = 0\ \ \ e\ \ \ c = -9)$

Equação Característica: $\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -3$ (duas raízes reais e distintas: 1º caso)

Lembrete da solução geral: $y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$

$Solução\ geral$: $y(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x}$

$Como$: $y = Ae^{3x} + Be^{-3x}$, $então$: $y' = 3Ae^{3x} - 3Be^{-3x}$

Lembrando que: $y(0) = 0 \;\; e \;\; y'(0) = 1$

$$0 = A + B \quad e$$
$$1 = 3A - 3B$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{6} \qquad e \qquad B = -\frac{1}{6}$$

Solução do PVI:

$$\boxed{y(x) = \frac{e^{3x}}{6} - \frac{e^{-3x}}{6}}$$

2. $y'' - 2y' + y = 0$

2. $y'' - 2y' + y = 0$

Equação Característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ (duas raízes reais e iguais)

Aqui, temos: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Lembrete da Solução geral: $y(x) = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}$

Solução geral: $y(x) = Ae^{x} + Bxe^{x}$

3. $y'' + y' + y = 0,$

3. $y'' + y' + y = 0,$

Equação Característica: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad e \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Onde : $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{\text{Solução geral: } y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + \mathrm{B}\,\mathrm{sen}\,\beta x)}$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left[A cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + B sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right]}$$

No caso de uma EDO linear homogênea de ordem 3, a solução geral é

construída da mesma forma que no caso de ordem 2, ou seja se a EDO for:

$$\boxed{ay''' + by'' + cy' + dy = 0 \qquad (\text{ EDO de 3a } ordem)}$$

A solução geral será:

$$\boxed{y(x) = \quad Ay_1 + By_2 + Cy_3, \quad A, B\ e\ C\ constantes\ arbitrárias}$$

Sendo y_1 , y_2 , y_3 soluções LI da EDO dada.

No caso de uma EDO linear homogênea de ordem 4, a solução geral é construída da mesma forma que no caso de ordem 2, ou seja se a EDO for:

$$\boxed{ay^{(4)} + by''' + cy'' + dy' + ey = 0 \quad (\text{EDO de } 4a\ ordem)}$$

A solução geral será:

$$\boxed{y(x) = \quad Ay_1 + By_2 + Cy_3 + Dy_4, \quad A, B, C\ e\ D\ constantes\ arbitrárias}$$

Sendo y_1 , y_2 , y_3 , y_4 são soluções LI da EDO dada.

PS. Para ordens maiores as soluções são construídas exatamente do mesmo jeito.

EDO de Terceira Ordem

4. $y''' - 2y'' + y' = 0,$

EDO de Terceira Ordem

4. $y''' - 2y'' + y' = 0,$

Equação Característica: $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda(\lambda - 1)^2 = 0$

Note que $\lambda = 0$ é uma raiz real simples e $\lambda = 1$ é raiz real dupla, assim:

Solução geral: $y(x) = A + Be^x + Cxe^x$

EDO de Quarta Ordem:

5. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0,$

EDO de Quarta Ordem:

5. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0,$

Equação Característica: $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda^2 - 1)^2 = 0$

Cujas raízes são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$, assim:

$$\boxed{\text{Solução geral: } y(x) = Ae^{x} + Bxe^{x} + Ce^{-x} + Dxe^{-x}}$$

Exemplos: Resolva as EDOs:

6. $y'' + 6y' + 5y = 0$ $\qquad (Aqui\ temos:\ a = 1\ ;\ b = 6\ \ e\ \ c = 5)$

Equação Característica: $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 * 5}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2}$

Então temos: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -5$ (duas raízes reais e distintas: 1º caso)

$$\boxed{\text{Lembrete da Solução geral: } y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}}$$

$$\boxed{Solução\ Geral: \qquad y(x) = Ae^{-x} + Be^{-5x}}$$

Exercícios: Resolva as equações lineares homogêneas abaixo:

1. $12y'' - 5y' - 2y = 0$ Resposta: $y = c_1 e^{2x/3} + c_2 e^{-x/4}$

2. $y'' + 8y' + 16y = 0$ Resposta: $y = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$

3. $y'' + 16y = 0,$ Resposta: $y = 2\cos 4x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x$
   $y(0) = 2,$
   $y'(0) = -2$

4. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$ Resposta: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x}$