

MAC440 - LISTA 6: SÉRIES DE FOURIER

1. (a) Determine a série de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

$$\text{Resp. } \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin(3x) + \frac{2}{5\pi} \sin(5x) + \dots = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$$

- (b) Supondo que a série obtida no item acima converge para a função f em $x = \pi/2$, substitua na série obtida x por $\pi/2$ e determine uma série numérica para $\pi/4$.

$$\text{Resp. } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$$

2. Determine a série de Fourier de $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

$$\text{Resp. } \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$$

3. Determine a série de Fourier de $f(x) = x$, com $\pi \leq x \leq \pi$.

$$\text{Resp. } 2 \sin x - \frac{2 \sin(2x)}{2} + \frac{2 \sin(3x)}{3} - \frac{2 \sin(4x)}{4} + \dots = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

4. Determine a série de Fourier de $f(x) = |x|$, com $\pi \leq x \leq \pi$.

$$\text{Resp. } \frac{\pi}{2} - \frac{4 \cos x}{\pi} - \frac{4 \cos(3x)}{9\pi} - \frac{4 \cos(5x)}{25} - \dots = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

5. (a) Determine a série de Fourier de $f(x) = x^2$, com $\pi \leq x \leq \pi$.

- (b) Supondo que a série do item anterior converge para a função dada em $x = \pi$, substitua x por π na série obtida e determine uma série numérica para $\pi^2/6$.

- (c) Obtenha a série de Fourier da função $\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3}$ via integração termo a termo a série de Fourier do item (a).

6. Determine a série de Fourier de $f(x) = x^2 + 1$, com $\pi \leq x \leq \pi$.

7. Determine a série de Fourier de $f(x) = x + 1$, com $\pi \leq x \leq \pi$.