

# Linguagens Formais e Autômatos (CC5220/CCM420)

## Aula 08 – Gramática Livre do Contexto

Prof. Luciano Rossi

Ciência da Computação  
Centro Universitário FEI

2º Semestre de 2025

# Linguagens Formais e Autômatos

O que foi visto até agora...

- Autômatos Finitos
  - ▶ Operações Regulares
- Não-determinismo
  - ▶ Equivalência entre AFD e AFN
  - ▶ Fecho sob operações regulares
- Expressões Regulares
  - ▶ Equivalência com autômatos finitos

# Linguagens Formais e Autômatos

## Linguagens Livres de Contexto

### Desafio

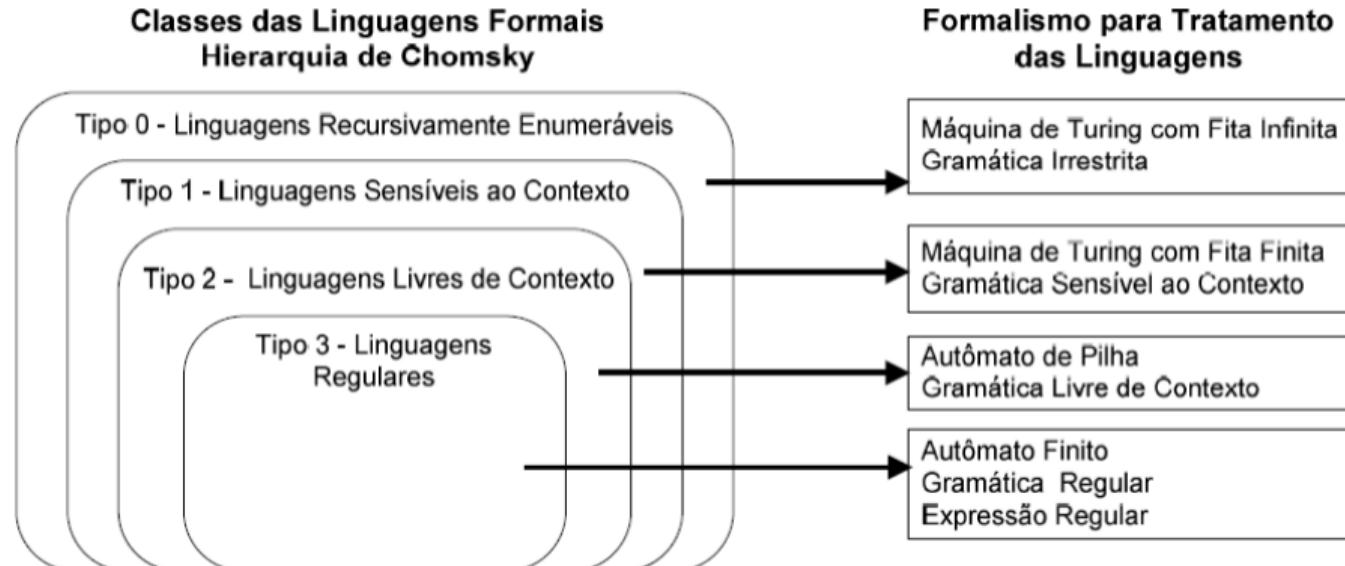
- Você consegue projetar um autômato que reconheça a linguagem:

$$\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

?

# Linguagens Formais e Autômatos

## Linguagens Livres de Contexto



Fonte: MATSUNO (2006)

# Linguagens Formais e Autômatos

## Linguagens Livres de Contexto

- Os autômatos finitos e as expressões regulares não são capazes de descrever todos os tipos de linguagens;
- A linguagem  $\{0^n1^n | n \geq 0\}$  é um exemplo;
- As gramáticas livres do contexto são mais poderosas para a descrições de linguagens;
- Descrevem características recursivas;

# Linguagens Formais e Autômatos

## Linguagens Livres de Contexto

- Inicialmente utilizadas para o estudo de **linguagens humanas**;
- Muito utilizadas para a especificação e **compilação** de linguagens de programação;
- As linguagens associadas às gramáticas livres de contexto são denominadas de linguagens livres do contexto;
- As linguagens livres do contexto incluem todas as linguagens regulares.

# Linguagens Formais e Autômatos

## Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

$$G_1 : \begin{array}{l} A \rightarrow 0A1 \\ A \rightarrow B \\ B \rightarrow \# \end{array}$$

- Regras de substituição (produções)
- Cada regra aparece como uma linha na gramática
- $A$  e  $B$  são as variáveis de  $G_1$  e  $A$  é a variável inicial
- 0, 1 e  $\#$  são terminais;
- A gramática descreve uma linguagem gerando as cadeias dessa linguagem:
  1. Escreva a variável inicial;
  2. Encontre uma variável que esteja escrita e uma regra que comece com essa variável;
  3. Repita o passo 2 até que não reste nenhuma variável.

# Linguagens Formais e Autômatos

## Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

$$G_1 : \begin{array}{l} A \rightarrow 0A1 \\ A \rightarrow B \\ B \rightarrow \# \end{array}$$

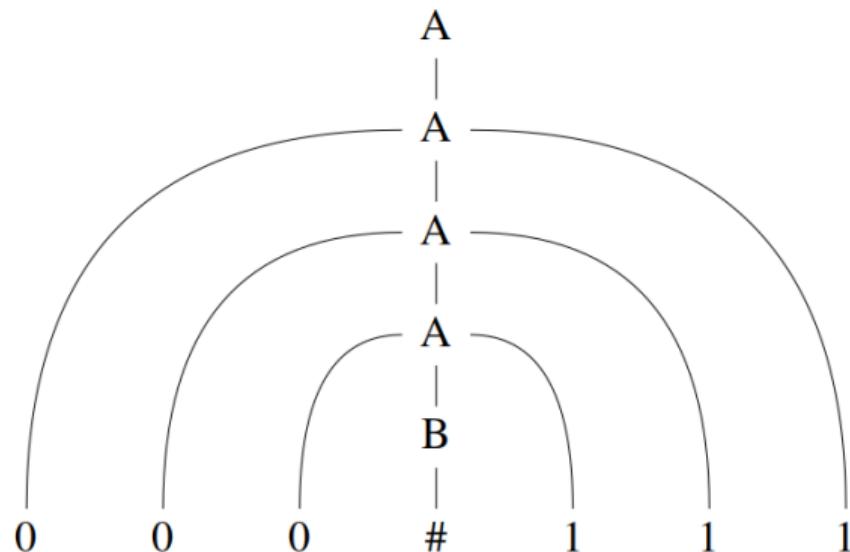
- Por exemplo, a gramática  $G_1$  gera a cadeia 000#111;
- A sequência de substituições para obter a cadeia é denominada derivação;
- Uma **derivação** da cadeia 000#111 na gramática  $G_1$  é:

$$A \Leftrightarrow 0A1 \Leftrightarrow 00A11 \Leftrightarrow 000A111 \Leftrightarrow 000B111 \Leftrightarrow 000\#111$$

# Linguagens Formais e Autômatos

## Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

- **Árvore sintática** para  $000\#111$  na gramática  $G_1$ .



# Linguagens Formais e Autômatos

## Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

- O conjunto de todas as cadeias geradas desta maneira constitui a **linguagem** da gramática;
- Escrevemos  $L(G_1)$  para a linguagem da gramática  $G_1$ ;
- Alguma experimentação com  $G_1$  nos mostra que  $L(G_1) = \{0^n\#1^n | n \geq 0\}$ ;
- Qualquer linguagem que possa ser **gerada** por uma gramática livre do contexto é chamada de **linguagem livre do contexto** (LLC);
- Por conveniência, abreviamos várias regras com a mesma variável do lado esquerdo:
- $A \rightarrow 0A1$  e  $A \rightarrow B$  podem ser escritas como  $A \rightarrow 0A1|B$ .

# Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Definição formal de gramática livre do contexto

## Definição

Uma gramática livre do contexto é um 4-upla  $(V, \Sigma, R, S)$ , onde:

1.  $V$  é um conjunto finito denominado variáveis;
2.  $\Sigma$  é um conjunto finito, distinto de  $V$ , denominado terminais;
3.  $R$  é um conjunto finito de regras, com cada regra sendo uma variável e uma cadeia de variáveis e terminais;
4.  $S \in V$  é a variável inicial.

# Linguagens Formais e Autômatos

## Linguagens Livres de Contexto - Exemplos de gramática livre do contexto

- Considere a gramática  $G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, R, S)$ ;
- O conjunto de regras,  $R$ , é  $S \rightarrow aSb|SS|\epsilon$ ;
- Essa gramática gera cadeias tais como  $abab$ ,  $aaabbb$  e  $aababb$ ;
- Se considerarmos  $a = ($  e  $b = )$  é fácil identificar que a linguagem da gramática é o conjunto de cadeias de parênteses apropriadamente aninhados;
- Exemplos:
  - ▶  $()()((()))$
  - ▶  $((((())}))$
  - ▶  $((()()())()$

# Linguagens Formais e Autômatos

## Projetando gramáticas livre do contexto (GLC)

- As GLCs são mais difíceis de construir que os AFs;
- Muitas LLCs são a união de LLCs mais simples;
- Exemplo: para obter a gramática para a linguagem  $\{0^n1^n|n \geq 0\} \cup \{1^n0^n|n \geq 0\}$ , primeiro construa a gramática

$$S_1 \rightarrow 0S_11|\epsilon$$

para a linguagem  $\{0^n1^n|n \geq 0\}$  e a gramática

$$S_2 \rightarrow 1S_20|\epsilon$$

para a linguagem  $\{1^n0^n|n \geq 0\}$  e então adicione a regra  $S \rightarrow S_1|S_2$ .

# Linguagens Formais e Autômatos

## Exercícios

1. Considere a seguinte GLC:

$$E \rightarrow E + T \mid T$$

$$T \rightarrow T \times F \mid F$$

$$F \rightarrow (E) \mid a$$

Dê árvores sintáticas e derivações para cada cadeia abaixo:

- a.  $a$
  - b.  $a + a$
  - c.  $a + a + a$
  - d.  $((a))$
2. Dê gramáticas livres do contexto que gerem as seguintes linguagens.

- a.  $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contém pelo menos três } 1s\}$
- b.  $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ começa e termina com o mesmo símbolo}\}$
- c.  $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{o comprimento de } w \text{ é ímpar}\}$
- d.  $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{o comprimento de } w \text{ é ímpar e o símbolo do meio é } 0\}$
- e.  $\{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R \text{ ou seja, } w \text{ é um palíndromo}\}$
- f.  $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ tenha mais } as \text{ que } bs\}$

# Linguagens Formais e Autômatos (CC5220/CCM420)

## Aula 08 – Gramática Livre do Contexto

Prof. Luciano Rossi

Ciência da Computação  
Centro Universitário FEI

2º Semestre de 2025