



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS - MAC 14

Equação Diferencial Linear de 1^a ordem

Bibliografia básica:

Zill, D. G.; Cullen, M. R. Equações diferenciais. 3. Ed – V1. São Paulo - Pearson/Makron Books, 2008.



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE 1^a ORDEM

Definição: Uma equação diferencial que pode ser escrita na forma:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Em que as funções $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas em um mesmo intervalo aberto (a, b) é denominada *Equação Diferencial Linear de 1^a Ordem na variável dependente y*.



Agora, se na equação: $y' + p(x)y = q(x)$

Tivermos: $q(x) = 0$, ficamos com: $y' + p(x)y = 0$

Que é denominada **EDO linear homogênea de 1a ordem**

PS. Para desenvolvermos o caso geral, usaremos o caso homogêneo, ou seja, quando $q(x) = 0$.



Então, dada a EDO linear homogênea de 1a Ordem: $y' + p(x)y = 0$

Podemos escrever: $\frac{1}{y}y' = -p(x)$ (*que é uma EDO separável*)

Agora, lembramos que: $y' = \frac{dy}{dx}$, então temos:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = P(x), \quad (\text{onde } P(x) = -p(x)) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y}dy = P(x)dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int P(x)dx \Rightarrow \ln y = \int P(x)dx + K \Rightarrow y = Ce^{\int P(x)dx}$$

Com: $C = e^K$



Definição: A função:

$$I(x) = e^{\int P(x)dx}$$

é denominada de **Fator integrante** e nós a utilizaremos para resolver o caso geral, ou seja quando $q(x) \neq 0$



Para a solução do caso geral, multiplicamos os dois lados da equação

$y' + p(x)y = q(x)$ pelo fator integrante $I(x) = e^{\int p(x)dx}$, ou seja:

$$(y' + p(x)y)I(x) = q(x)I(x) \Leftrightarrow (y' + p(x)y)e^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Note que: $(y' + p(x)y)e^{\int p(x)dx} = y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = \frac{d}{dx}[ye^{\int p(x)dx}]$

Então:

$$(y' + p(x)y)e^{\int p(x)dx} = \frac{d}{dx}[ye^{\int p(x)dx}] \Rightarrow \frac{d}{dx}[yI(x)] = q(x)I(x).$$



Dada: $\frac{d}{dx}[yI(x)] = q(x)I(x)$ e agora integrando dos dois lados, temos:

$$\int \frac{d}{dx}[yI(x)]dx = \int q(x)I(x)dx \Rightarrow yI(x) = \int q(x)I(x)dx + k$$

Solução geral da EDO linear de 1a ordem: $y' + p(x)y = q(x)$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right], \quad k \in \mathbb{R}$$



Solução geral da EDO linear de 1a ordem não homogênea:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right], \quad k \in \mathbb{R}$$

Onde $I(x) = e^{\int p(x)dx}$ é o Fator integrante



Ex 1. Resolva o PVI:

$$\begin{cases} y' + 5y = e^{-3x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Aqui: $p(x) = 5$ e $q(x) = e^{-3x}$



Ex 1. Resolva o PVI:

$$p(x) = 5 \quad e \quad q(x) = e^{-3x}$$

Fator integrante: $I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 5dx} = e^{5x}$

$$I(x) = e^{5x}$$

(Lembrete: $y(x) = \frac{1}{I(x)} [\int q(x)I(x)dx + k]$)

$$\int q(x)I(x)dx = \int e^{-3x} e^{5x} dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$



Agora, usando a fórmula deduzida: $y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right]$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right] = \frac{1}{e^{5x}} \left[\frac{1}{2} e^{2x} + k \right] \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2} e^{-3x} + k e^{-5x}$$

Agora, usando a condição inicial: $y(0) = 0$, temos: $0 = \frac{1}{2} + k \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$

Solução do PVI:

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{-3x} - \frac{1}{2} e^{-5x}$$



Ex 2. Calcule a solução geral da EDO:

$$xy' - 2y = 2x, \quad x > 0$$

Primeiro, dividimos tudo por x :

$$y' - \frac{2}{x}y = 2 \quad \Rightarrow$$

Então: $p(x) = -\frac{2}{x}$ e $q(x) = 2$



Ex 2.

$$p(x) = -\frac{2}{x} \quad e \quad q(x) = 2$$

Fator integrante:

$$I(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$



$$I(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\int q(x)I(x)dx = \int 2x^{-2}dx = 2\frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{2}{x}$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right] = \frac{1}{1/x^2} \left[-\frac{2}{x} + k \right] = -2x + kx^2$$

Solução geral:

$$y(x) = -2x + kx^2, \quad k \in \mathbb{R}$$



Ex 3. $y' + 3x^2y = 3x^2$



Ex 3. $y' + 3x^2y = 3x^2$ ($p(x) = 3x^2$ e $q(x) = 3x^2$)

Fator integrante: $I(x) = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$

$$\int q(x)I(x)dx = \int 3x^2e^{x^3}dx = \int e^u du = e^u = e^{x^3} \quad (u = x^3 \text{ e } du = 3x^2dx)$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right] = \frac{1}{e^{x^3}} [e^{x^3} + k] = 1 + ke^{-x^3}$$

Solução geral : $y(x) = 1 + ke^{-x^3}, \quad k \in \mathbb{R}$



$$\text{Ex 4: } y' - 7y = e^x$$



Ex 4: $y' - 7y = e^x$, ($p(x) = -7$ e $q(x) = e^x$)

Fator integrante: $I = e^{\int -7dx} = e^{-7x}$

$$\int q(x)I(x)dx = \int e^{-7x} e^x dx = \int e^{-6x} dx = -\frac{1}{6}e^{-6x}$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right] = \frac{1}{e^{-7x}} \left[-\frac{1}{6}e^{-6x} + k \right] = -\frac{1}{6}e^x + ke^{7x}$$

Solução geral:

$$y(x) = -\frac{1}{6}e^x + ke^{7x}, \quad k \in \mathbb{R}$$



Ex 5. $xy' + x^2y = x^2, \quad x > 0$



Ex 5. $xy' + x^2y = x^2, \quad x > 0$

Resolução: Dividindo tudo por x : $y' + xy = x$; $p(x) = x$ e $q(x) = x$

fator integrante: $I(x) = e^{\int x dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$

$$\int q(x)I(x)dx = \int xe^{\frac{x^2}{2}}dx = \int e^u du = e^u = e^{\frac{x^2}{2}}; \quad u = \frac{x^2}{2}; \quad du = xdx$$

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[e^{\frac{x^2}{2}} + k \right] = 1 + ke^{-\frac{x^2}{2}}$$

Solução geral:

$$y(x) = 1 + ke^{-\frac{x^2}{2}}, \quad k \in \mathbb{R}$$



Exercícios: Resolva as EDOs

$$1. y' + 2xy = 2x^3$$

$$solução: y = (x^2 - 1) + Ce^{-x^2}$$

$$2. xy' + x^2y = x^2, x > 0$$

$$solução: y = 1 + Ce^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$3. (x+2)y' + y = x^2 - x + 2, \quad x > -2$$

$$solução: y = \frac{2x^3 - 3x^2 + 12x + C}{6(x+2)}$$

Exercícios: Resolva o problema de valor inicial

$$1. y' = 2y + \operatorname{sen}(t) \text{ e } y(0) = 1 \quad solução: y = \frac{-1}{5}(2\operatorname{sen}(t) + \cos(t)) + \frac{6}{5}e^{2t}$$

$$2. \frac{dy}{dx} - 2y = e^{2x} \text{ e } y(0) = 2 \quad solução: y = e^{2x}(x + 2)$$