Linguagens Formais e Autômatos (CC5220/CCM420)

Aula 06 – Operações Regulares

Prof. Luciano Rossi

Ciência da Computação
Centro Universitário FEI

2º Semestre de 2025

- Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais;
- Dizemos que $\mathbb{N}$ é fechado sob multiplicação;
- Para quaisquer x e $y \in \mathbb{N}$, $x \times y \in \mathbb{N}$;
- $\mathbb{N}$ não é fechado sob divisão;
- Para quaisquer x e $y \in \mathbb{N}$, $x \div y \notin \mathbb{N}$.

Definição

Sejam A e B linguagens. Definimos as operações regulares união, concatenação e estrela da seguinte forma.

- União: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- Concatenação: $A \circ B = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.
- Estrela: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geqslant 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$.

Suponha que o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Se $A = \{a, b\}$ e $B = \{c, d\}$, então:

- $A \cup B = \{a, b, c, d\}$;
- $A \circ B = \{ac, ad, bc, bd\}$; e
- $A^* = \{\epsilon, a, b, aa, bb, ab, ba, \ldots\}$.

Teorema

A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de união. Em outras palavras, se A_1 e A_2 são linguagens regulares, o mesmo acontece com $A_1 \cup A_2$.

Suponha:

- M_1 reconheça A_1, onde $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$, e que
- M_2 reconheça A_2, onde $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$.

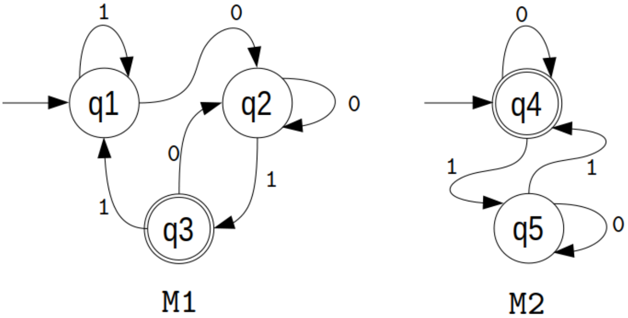
Para construir M que reconhece $A_1 \cup A_2$, onde $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ faça:

- $Q = \{(r_1, r_2) | r_1 \in Q_1 \text{ e } r_2 \in Q_2\}$;
- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$;
- $\delta =$ para cada $(r_1, r_2) \in Q$ e cada $a \in \Sigma$, faça:
  - $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) | r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$[1].

[1] O mesmo que $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$

Linguagens Formais e Autômatos

Operações Regulares – União (AFD)

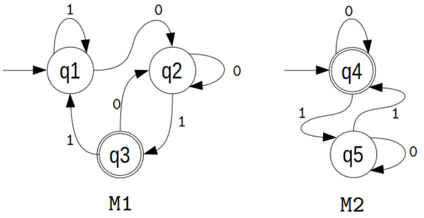


Suponha:

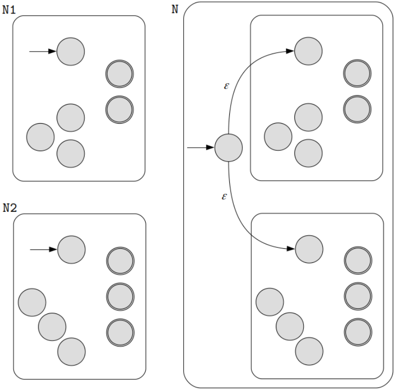
- M_1 reconheça A_1, onde $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$, e que
- M_2 reconheça A_2, onde $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$.

Para construir M que reconhece $A_1 \cup A_2$, onde $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ faça:

- $Q = \{(r_1, r_2) | r_1 \in Q_1 \text{ e } r_2 \in Q_2\}$;
- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$;
- $\delta =$ para cada $(r_1, r_2) \in Q$ e cada $a \in \Sigma$, faça:
  - $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) | r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$[a].



[a] O mesmo que $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$



$N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconhece A_1
$N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ reconhece A_2

$N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ reconhece $A_1 \cup A_2$
$Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$
O estado q_0 é o estado inicial de N
$F = F_1 \cup F_2$

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & q = q_0 \text{ e } a = \epsilon \\ \emptyset & q = q_0 \text{ e } a \neq \epsilon. \end{cases}$$

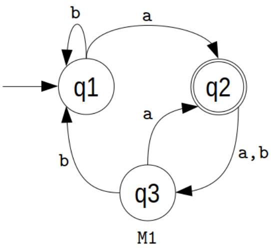
Linguagens Formais e Autômatos

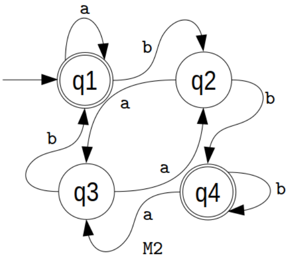
Operações Regulares - União (AFN)

$N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconhece A_1
$N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ reconhece A_2

$N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ reconhece $A_1 \cup A_2$
$Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$
O estado q_0 é o estado inicial de N
$F = F_1 \cup F_2$

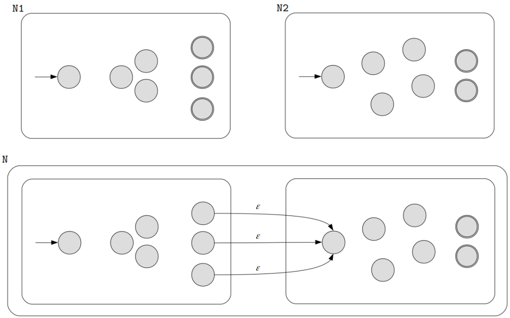
$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & q = q_0 \text{ e } a = \epsilon \\ \emptyset & q = q_0 \text{ e } a \neq \epsilon. \end{cases}$$





Linguagens Formais e Autômatos

Operações Regulares - Concatenação (AFN)



$N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconhece A_1
$N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ reconhece A_2

$N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ reconhece $A_1 \circ A_2$
$Q = Q_1 \cup Q_2$
O estado q_1 é o estado inicial de N_1
$F = F_2$

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & q \in F_1 \text{ e } a \neq \epsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_2\} & q \in F_1 \text{ e } a = \epsilon \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2. \end{cases}$$

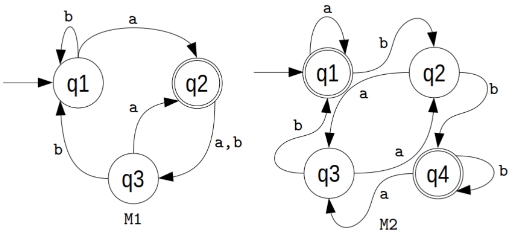
Linguagens Formais e Autômatos

Operações Regulares - Concatenação (AFN)

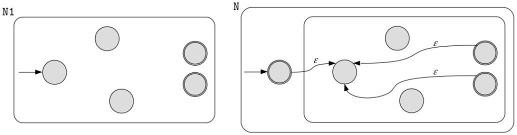
$N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconhece A_1
$N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ reconhece A_2

$N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ reconhece $A_1 \circ A_2$
$Q = Q_1 \cup Q_2$
O estado q_1 é o estado inicial de N_1
$F = F_2$

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & q \in F_1 \text{ e } a \neq \epsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_2\} & q \in F_1 \text{ e } a = \epsilon \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2. \end{cases}$$



Operações Regulares - Operação Estrela (AFN)



$N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconhece A_1

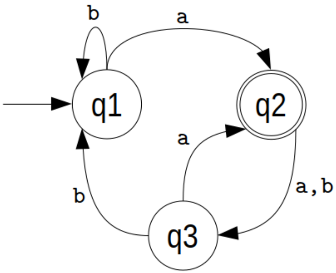
$N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ reconhece A^*
$Q = \{q_0\} \cup Q_1$
O estado q_0 é o estado inicial de N
$F = \{q_0\} \cup F_1$

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & q \in F_1 \text{ e } a \neq \epsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_1\} & q \in F_1 \text{ e } a = \epsilon \\ \{q_1\} & q = q_0 \text{ e } a = \epsilon \\ \emptyset & q = q_0 \text{ e } a \neq \epsilon. \end{cases}$$

$N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconhece A_1

$N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ reconhece A^*
$Q = \{q_0\} \cup Q_1$
O estado q_0 é o estado inicial de N
$F = \{q_0\} \cup F_1$

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & q \in F_1 \text{ e } a \neq \epsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_1\} & q \in F_1 \text{ e } a = \epsilon \\ \{q_1\} & q = q_0 \text{ e } a = \epsilon \\ \emptyset & q = q_0 \text{ e } a \neq \epsilon. \end{cases}$$



M1

1. Considere as seguintes linguagens:
   - $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ termina em 01}\}$
   - $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ começa e termina com o mesmo símbolo}\}$
   - $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* : \text{ toda posição ímpar de w é 1}\}$
   - $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ não contém 110 como subcadeia}\}$
   - $L_5 = \{w \in \{0,1\}^* : \text{ todo 0 em w é seguido de pelo menos um 1}\}$
2. Determine AFN que reconheçam as seguintes linguagens:
   - $L_1 \cup L_2$
   - $L_3 \circ L_4$
   - ${L_5}^*$
   - $(L_1 \cup L_3)^*$
   - $(L_1^* \cup L_3^*) \circ (L_4 \cup L_5)$
   - $L_1 \cup (L_5^*)^*$

Linguagens Formais e Autômatos (CC5220/CCM420)

Aula 06 – Operações Regulares

Prof. Luciano Rossi

Ciência da Computação
Centro Universitário FEI

2º Semestre de 2025