EQUAÇÕES DIFERENCIAIS - MAC 14

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES NÃO HOMOGÊNEAS DE ORDEM *N* COM COEFICIENTES CONSTANTES

Bibliografia básica:

Zill, D. G.; Cullen, M. R. Equações diferenciais. 3. Ed – V1. São Paulo - Pearson/Makron Books, 2008.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES de 2ª Ordem COM COEFICIENTES CONSTANTES

Dada a equação diferencial : $\boxed{ay''+by'+cy=f(x)}$

Vamos estudar as equações do tipo acima para dois casos distintos:

1º Caso: Quando $f(x)=0$ (e nesse caso , a EDO é dita homogênea)

2º Caso: Quando $f(x)\neq 0$ (e nesse caso , a EDO é dita não homogênea)

2º Caso: Quando $f(x) \neq 0$

Definição: Entende-se por uma Equação Diferencial Linear não Homogênea de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes, uma equação da forma:

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (1)}$$

Em que a, b e c são constantes , $a \neq 0$ e $f(x) \neq 0$

Para a resolução da EDO linear não homogênea, vamos estudar dois métodos já há muito tempo consagrados no mundo científico, a saber:

- ***Método dos Coeficientes a Determinar***: Este método é mais simples de aplicar, porém funciona apenas para uma classe restrita de funções, como veremos na sequência.

- ***Método da Variação dos Parâmetros***: Este método funciona para qualquer função $f(x)$, mas em geral é mais difícil de ser aplicado.

1º Método: Método dos Coeficientes Indeterminados

Este método é adequado para resolver a EDO linear não homogênea para os casos em que a função f(x) é dos seguintes tipos:

$f(x) = P_n(x)$ (polinômio de grau n)

$f(x) = e^{ax}$ (função exponencial)

$f(x) = a\cos(\beta x) + b\,sen(\beta x)$ (funções trigonométricas: apenas para seno e cosseno)

PS. Este método também pode ser usado quando a $f(x)$ é uma soma ou produto de duas ou três dos tipos de funções citadas.

Método dos Coeficientes Indeterminados:

Dada a equação diferencial não homogênea: $ay'' + by' + cy = f(x)$

a equação homogênea correspondente:

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0 \qquad (2)}$$

É chamada **equação complementar** (ou equação homogênea associada)

A equação complementar desempenha um papel importante na solução da equação não homogênea, como veremos a seguir.

Teorema: A solução geral da equação diferencial não homogênea

$ay'' + by' + cy = f(x)$, é dada pela soma de duas soluções:

$$\boxed{y(x) = y_c(x) + y_p(x)}$$

onde:

$y_c(x)$ é a solução geral da Equação Complementar 2 (equação homogênea).

$y_p(x)$ é uma solução particular da Equação 1 (depende do tipo da $f(x)$)

Seja a equação: $ay'' + by' + cy = f(x)$

<u>Se $f(x)$ é um polinômio</u>.

Neste caso, é razoável supor que uma solução particular y_p seja um polinômio de mesmo grau que a $f(x)$, pois:

Se y for um polinômio, então $ay'' + by' + cy$ também será um polinômio.

Então, a ideía é escrevermos y_p como um polinômio de mesmo grau que a $f(x)$ na equação diferencial e determinarmos os coeficientes de tal polinômio.

Exemplo 1 . $y'' - 3y' + 2y = 2x + 5\,,\quad y(0) = 0 \;\; e \;\; y'(0) = 0$

Exemplo 1 . $y'' - 3y' + 2y = 2x + 5\,,\quad y(0) = 0 \;\; e \;\; y'(0) = 0$

Aqui, a equação complementar é: $y'' - 3y' + 2y = 0$

E a equação característica é: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)\,(\lambda - 2) = 0$ (duas raízes reais e distintas).

Então temos: $\lambda_1 = 1 \;\; e \;\; \lambda_2 = 2$

Logo, a solução da equação complementar é:

$$y_c = Ae^{x} + Be^{2x}$$

Uma vez que $f(x) = 2x + 5$ é um polinômio de grau 1, vamos procurar uma solução particular na forma de um polinômio de grau 1 também, ou seja :

$y_p = ax + b$ (motivo: $f(x) = 2x + 5$ é um polinômio de grau 1)

Então, se $y_p = ax + b$, temos: $y_p' = a$ e $y_p'' = 0$

Agora, substituimos essas funções na equação diferencial dada:

$$y'' - 3y' + 2y = \underbrace{0}_{y_p''} - 3\underbrace{a}_{y_p'} + \underbrace{2(ax+b)}_{y_p} = 2x + 5$$

Dois polinômios são iguais quando seus coeficientes são iguais.

Então, agrupando os termos: $2ax - 3a + 2b = 2x + 5$

.

Ou seja: $2a = 2$ e $-3a + 2b = 5$. Então: $a = 1,\ b = 4$

Então, temos que a solução particular será: $y_p = x + 4$

E a solução geral será: $\boxed{y(x) = y_c + y_p = Ae^x + Be^{2x} + x + 4}$

$$Mas\ \ y(0) = 0\ \ e\ \ y'(0) = 0$$

$$y = Ae^{x} + Be^{2x} + x + 4$$

$$y' = Ae^{x} + 2Be^{2x} + 1$$

Logo: $0 = A + B + 4 \quad e \quad 0 = A + 2B + 1 \quad \Rightarrow \quad B = 3 \ \ e \ \ A = -7$

$$\boxed{y(x) = -7e^{x} + 3e^{2x} + x + 4}$$

Exemplo 2. $y'' + y' - 2y = x^2$

Exemplo 2. $y'' + y' - 2y = x^2$

Aqui, a equação complementar é: $y'' + y' - 2y = 0$

E a equação característica é: $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)\,(\lambda + 2)$=0 (duas raízes reais e distintas).

Então temos: $\lambda_1 = 1 \;\; e \;\; \lambda_2 = -2$

Logo, a solução da equação complementar é:

$$y_c = Ae^x + Be^{-2x}$$

Uma vez que $f(x) = x^2$ é um polinômio de grau 2, vamos procurar uma solução particular na forma de um polinômio de grau 2 também, ou seja :

$y_p = ax^2 + bx + c$ (motivo: $f(x) = x^2$ é um polinômio de grau 2)

Então, se $y_p = ax^2 + bx + c$, temos: $y_p' = 2ax + b$ e $y_p'' = 2a$

Agora, substituimos essas funções na equação diferencial dada:

$$y'' + y' - 2y = \underbrace{2a}_{y_p''} + \underbrace{2ax + b}_{y_p'} - 2\underbrace{(ax^2 + bx + c)}_{y_p} = x^2$$

Dois polinômios são iguais quando seus coeficientes são iguais.

Então, agrupando os termos: $-2ax^2 + (2a - 2b)x + 2a + b - 2c = x^2$.

Ou seja: $-2a = 1$, $2a - 2b = 0$ e $2a + b - 2c = 0$. Então:

$$a = -\frac{1}{2}, \qquad b = -\frac{1}{2} \;\; e \;\; c = -\frac{3}{4}$$

Então, temos que a solução particular será: $y_p = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$

E a solução geral será: $\boxed{y(x) = y_c + y_p = Ae^x + Be^{-2x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}}$

Exemplo 3. $y'' + y' - 6y = 6x^3 + 1$

Aqui, a equação complementar é: $y'' + y' - 6y = 0$

E a equação característica é: $\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)\,(\lambda + 3) = 0$

Então temos: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$

Logo, a solução da equação complementar é:

$$y_c = Ae^{2x} + Be^{-3x}$$

Uma vez que $f(x) = 6x^3 + 1$ é um polinômio de grau 3, vamos procurar uma solução particular na forma de um polinômio de grau 3 também, ou seja :

$y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$, então: $y_p' = 3ax^2 + 2bx + c$ e $y_p'' = 6ax + 2b$

Agora, substituimos essas funções na equação diferencial dada:

$$y'' + y' - 6y = \underbrace{6ax + 2b}_{y_p''} + \underbrace{3ax^2 + 2bx + c}_{y_p'} - 6\underbrace{(ax^3 + bx^2 + cx + d)}_{y_p} = 6x^3 + 1$$

$$\Rightarrow \ -6ax^3 + (3a - 6b)x^2 + (6a + 2b - 6c)x + 2b + c - 6d = 6x^3 + 1$$

$$\Rightarrow \quad -6ax^3 + (3a-6b)x^2 + (6a+2b-6c)x + 2b + c - 6d = 6x^3 + 1$$

$$\Rightarrow \quad -6a = 6 \quad ; \quad 3a - 6b = 0 \quad ; \quad 6a + 2b - 6c = 0 \quad e \quad 2b - c - 6d = 1$$

$$\Rightarrow \quad a = -1 \quad ; \quad b = -\frac{1}{2} \quad ; \quad c = -\frac{7}{6} \quad e \quad d = -\frac{19}{36}$$

$$y_p = -x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{7x}{6} - \frac{19}{36}$$

$$y = y_c + y_p = Ae^{2x} + Be^{-3x} - x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{7x}{6} - \frac{19}{36}$$

Seja a equação: $ay'' + by' + cy = f(x)$

Se $f(x)$ é uma exponencial: $f(x) = Ce^{ax}$, onde $C, a \in \mathbb{R}$.

Aqui, note que é razoável supor que uma solução particular y_p seja também uma exponencial, pois:

Se y for uma exponencial, então $ay'' + by' + cy$ também será uma exponencial.

Então, a ideía é escrevermos y_p como uma exponencial e substituir y_p , y_p' e y_p'' na equação diferencial e determinamos o coeficiente da exponencial.

Exemplo 3. Resolva: $y'' + 4y = 2e^{3x}$

Exemplo 3. Resolva: $y'' + 4y = 2e^{3x}$

A equação complementar é dada por: $y'' + 4\text{y} = 0$

A equação característica é: $\lambda^2 + 4 = 0$ (duas raízes complexas conjugadas)

Então temos: $\lambda_1 = 2i \;\; e \;\; \lambda_2 = -2i$

Logo, a solução da equação complementar é:

$$y_c = Acos(2x) + Bsen(2x)$$

Uma vez que $f(x) = 2e^{3x}$ é uma função exponencial, vamos procurar uma solução particular na forma exponencial também, ou seja::

$y_p = ce^{3x}$ (motivo: $f(x) = 2e^{3x}$ é uma função exponencial)

Então, se $y_p = ce^{3x}$ temos: $y_p' = 3ce^{3x}$ e $y_p'' = 9ce^{3x}$

Agora, substituimos essas funções na equação diferencial dada:

$$y'' + 4y = \underbrace{9ce^{3x}}_{y_p''} + 4\underbrace{(ce^{3x})}_{y_p} = 2e^{3x}, \quad \textit{então:} \; 13ce^{3x} = 2e^{3x}, \quad \textit{logo:} \; c = \frac{2}{13}$$

Solução geral: $\boxed{y(x) = y_c + y_p = A\cos(2x) + B\,sen(2x) + \frac{2}{13}e^{3x}}$

Seja a equação: $ay'' + by' + cy = f(x)$

<u>Se $f(x)$ é uma função trigonométrica:</u>

$\boldsymbol{f(x) = Ccos(\beta x)}$ ***ou*** $\boldsymbol{f(x) = Csen(\beta x)}$; ou a soma das duas funções $(sendo\ C, \beta \in \mathbb{R})$.

Aqui, note que é razoável supor que uma solução particular y_p seja também uma função seno ou cosseno, pois:

Se y for um seno ou cosseno, então $ay'' + by' + cy$ também é uma trigonométrica.

Então, a ideía é escrevermos y_p como uma soma de um seno com um cosseno e substituir y_p , y_p' e y_p'' na equação diferencial e determinarmos os coeficientes da função trigonométrica.

Exemplo 4. Resolva: $y'' + y' = senx$

Exemplo 4. Resolva: $y'' + y' = senx$

A equação auxiliar é dada por: $y'' + y' = 0$

E a equação característica é: $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$ (duas raízes reais e distintas). Então temos: $\lambda_1 = 0 \;\; e \;\; \lambda_2 = -1$

Logo, a solução da equação complementar é:

$$y_c = A + Be^{-x}$$

Uma vez que $f(x) = senx$ é uma função trigonométrica, vamos procurar uma solução particular na forma trigonométrica também:

$y_p = Ccosx + Dsenx$ (motivo: $f(x) = senx$ é uma função trigonométrica)

Então, se $y_p = Ccosx + Dsenx$ temos: $y_p' = -Csenx + Dcosx$ e
$y_p'' = -Ccosx - Dsenx$

Agora, substituimos essas funções na equação diferencial dada:

$$y'' + y' = \underbrace{-Ccosx - Dsenx}_{y_p''} \; \underbrace{- Csenx + Dcosx}_{y_p'} = senx$$

Emtão temos;

$(-C + D)cosx + (-C - D)senx = senx.$ Ou seja:

$-C + D = 0 \quad e \quad -C - D = 1.$ Ou seja: $\quad C = D = -\dfrac{1}{2}$

Solução particular: $y_p = -\frac{1}{2}cosx - \frac{1}{2}senx$

Solução geral: $\boxed{y(x) = y_c + y_p = A + Be^{-x} - \frac{1}{2}cosx - \frac{1}{2}senx}$

Resumo do Método dos Coeficientes Indeterminados:

Se $\boldsymbol{f(x) = P_n(x)}$, onde P_n é um polinômio de grau n, então tente: $y_p = Q_n(x)$ onde $Q_n(x)$ é um polinômio de grau n (cujos coeficientes são determinados por substituição na equação diferencial.)

Se $\boldsymbol{f(x) = ce^{ax}}$, ou seja $f(x)$ é uma exponencial, então tente: $y_p = Ce^{ax}$ onde C é uma constante a ser determinada por substituição na equação diferencial.

Se $\boldsymbol{f(x) = sen\beta x}$ **ou** $\boldsymbol{f(x) = cos\beta x}$ ou ainda a soma das duas, então tente: $y_p = Ccos\beta x + Dsen\beta x$ onde os coeficientes são determinados por substituição na equação diferencial.

Observação importante

Agora, chamamos a atenção para o fato de que a solução recomendada para y_p algumas vezes resulta em uma solução da equação complementar e, portanto, não pode ser uma solução da equação não homogênea.

Em tais casos, multiplicamos a solução recomendada y_p por x (ou por x^2 se necessário) de modo que nenhum termo em $y_p(x)$ seja uma solução da equação complementar.

Isso acontece porque todos os termos da solução geral devem ser linearmente independentes, ou seja, um termo não pode ser um múltiplo de outro termo NUNCA.

Quando precisamos multiplicar y_p por x ou por x^2, dizemos que fizemos um reforço na y_p

Exemplo 5. Resolva: $y'' - 3y' + 2y = e^x$

Equação característica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)\,(\lambda - 2) = 0$ (duas raízes reais e distintas).
Então temos: $\lambda_1 = 1 \ \ e \ \ \lambda_2 = 2$

Logo, a solução da equação complementar é: $y_c = Ae^x + Be^{2x}$

Como $f(x) = e^x$, então teríamos: $y_p = Ce^x$. Mas note que neste caso y_p é um múltiplo do termo Ae^x que é um dos termos da y_c.

Ou seja, se somarmos os dois termos, teremos: $Ae^x + Ce^x = (A + C)e^x = De^x$
Onde $D = A + C$. Ou seja, ao invés de termos duas soluções, temos apenas uma.

Então precisamos fazer um "reforço" na y_p multiplicando-a por x de tal modo a obter uma solução linearmente independente de cada termo da solução complementar. Então teremos:

$y_p = Cxe^x$, logo $y_p' = Ce^x + Cxe^x$ e $y_p'' = Ce^x + Ce^x + Cxe^x = 2Ce^x + Cxe^x$

Substituindo na equação diferencial:

$$y'' - 3y' + 2y = \underbrace{2Ce^x + Cxe^x}_{y_p''} - 3(\underbrace{Ce^x + Cxe^x}_{y_p'}) + 2(\underbrace{Cxe^x}_{y_p}) = e^x$$

Logo: $-Ce^x = e^x$, então: $C = -1$, logo: $y_p = -xe^x$

Solução geral: $\boxed{y(x) = y_c + y_p = Ae^x + Be^{2x} - xe^x}$

Exemplo 6:

$5y'' + y' = -6x$

Equação Homogênea:

$$5y'' + y' = 0$$

Equação Característica:

$$5\lambda^2 + \lambda = \lambda(5\lambda + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \;\; e \;\; \lambda_2 = -1/5$$

Função Complementar:

$$\boldsymbol{y_c = c_1 + c_2\, e^{-x/5}}$$

$$\boldsymbol{y_c = c_1 + c_2\, e^{-x/5}}$$

Como $f(x) = -6x$, então teríamos: $y_p = Ax + B$, *mas* B *e* c_1 *são* LD.

Então faremos um reforço na $\mathrm{y_p} \Rightarrow y_p = Ax^2 + Bx \Rightarrow y_p' = 2Ax + B$ e $y_p'' = 2A$

Agora, substituindo na Equação e colocando os coeficientes em evidência:

$5y'' + y' = 5(2A) + 2Ax + B = -6x \quad \Rightarrow \; 2A = -6$ e $10A + B = 0$

Igualando os coeficientes, temos: $A = -3, \quad B = 30$

Portanto: $y_p = -3x^2 + 30x,$

Solução Geral: $\boxed{\boldsymbol{y = y_c + y_p = c_1 + c_2 e^{-x/5} - 3x^2 + 30x}}$

<u>**Produto de funções**</u>: Se $f(x)$ for um <u>produto de funções</u> dos tipos citados, buscaremos y_p como um produto de funções do mesmo tipo.

Exemplo. $y'' - 2y' - 3y = xe^x$

Equação complementar: $y'' - 2y' - 3y = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \;\; e \;\; \lambda_2 = 3$

Duas raízes reais e distintas, então:

Solução complementar: $y_c(x) = Ae^{-x} + Be^{3x}$

$$y'' - 2y' - 3y = xe^{x}$$

Para a solução particular, tentaremos: $y_p = (Cx + \mathrm{D})e^{x}$

(motivo: $f(x)$ *é* um polinômio de grau 1 vezes uma exponencial)

Agora, procedemos da mesma forma: derivamos e substituimos na EDO.

Se $y_p = (Cx + \mathrm{D})e^{x}$, *então:* $y_p' = (C + D + Cx)e^{x}$ e $y_p'' = (2C + D + Cx)e^{x}$

Agora, substituímos na EDO: $y'' - 2y' - 3y =$

$$= (2C + D + Cx)e^{x} - 2\,(C + D + Cx)e^{x} - 3(D + Cx)e^{x} = xe^{x}$$

$(-4D - 4Cx)e^{x} = xe^{x}$, *ou seja:* $-4D - 4Cx = x \quad \Rightarrow \quad -4D = 0 \quad e \quad -4C = 1$

Então: $C = -\frac{1}{4}$ *e* $D = 0.$ *Ou seja:* $y_p = -\frac{x}{4}e^{x}$

Solução geral: $\boxed{\mathrm{y(x)} = y_c(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} - \frac{x}{4}e^{x}}$

<u>Soma de funções</u>: Se $f(x)$ for uma soma de funções dos tipos citados, ao invés de termos uma função particular, teremos duas, ou seja:

Se for dada: $\boxed{ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)}$

Teremos a solução geral: $\boxed{y(x) = y_c(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x)}$

Onde: y_{p1} está relacionada a $f_1(x)$ e y_{p2} a $f_2(x)$.

Feito isso, o resto do cálculo é exatamente como fizemos nos exemplos anteriores.

Exemplo 1: $y'' - 4y = 4x + cos2x$

Equação complementar: $y'' - 4y = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2 \ \ e \ \ \lambda_2 = -2$

Duas raízes reais e distintas, então:

A solução complementar é: $y_c(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$.

Exemplo 1: $y'' - 4y = 4x + cos2x$

Aqui: $f_1(x) = 4x \ e \ f_2(x) = cos2x$.

Daí: $y_{p1} = ax + b$ e $y_{p2} = ccos2x + dsen2x$

A partir daqui, fazemos tudo do mesmo jeito que fizemos nos outros exemplos.

Para $f_1(x)$: $y_{p1} = ax + b$, $y'_{p1} = a$ e $y''_{p1} = 0$. Substituindo na EDO:

$y'' - 4y = 0 - 4(ax + b) = 4x$, logo: $a = -1$ e $b = 0$. Então: $\boxed{y_{p1}(x) = -x}$

Para $f_2(x)$: $y_{p2} = ccos2x + dsen2x$, então: $y'_{p2} = -2csen2x + 2dcos2x$ e $y''_{p2} = -4ccos2x - 4dsen2x$. Substituindo na EDO:

$$y'' - 4y = -4ccos2x - 4dsen2x - 4(ccos2x + dsen2x) = cos2x$$

$-8ccos2x - 8dsen2x = cos2x \Rightarrow -8c = 1 \;\; e \; -8d = 0$, Então: $c = -\frac{1}{8}$ e $d = 0$

Então: $y_{p2} = -\frac{cos2x}{8}$

Solução geral: $\boxed{y(x) = y_c + y_{p1} + y_{p2} = Ae^{2x} + Be^{-2x} - x - \frac{cos2x}{8}}$

Exemplo 2. $y'' - 4y = -3xe^{x} + 3e^{-x}$

Equação complementar: $y'' - 4y = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2 \;\; e \;\; \lambda_2 = -2$

Duas raízes reais e distintas, então:

Solução complementar: $y_c(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$

Exemplo 2. $y'' - 4y = -3xe^{x} + 3e^{-x}$

Aqui: $f_1(x) = -3xe^{x}$ e $f_2(x) = 3e^{-x}$

Para $f_1(x)$: $y_{p1} = (Cx + D)e^{x}$, $y'_{p1} = (C + D + Cx)e^{x}$ e $y''_{p1} = (2C + D + Cx)e^{x}$

Substituindo na EDO: $y'' - 4y = \underbrace{(2C + D + Cx)e^{x}}_{y''_{p1}} - 4\underbrace{(Cx + D)e^{x}}_{y_{p1}} = -3xe^{x}$

Dividindo pela exponencial: $2C - 3D = 0$ e $-3C = -3 \Rightarrow C = 1$ e $D = \frac{2}{3}$

Então: $y_{p1} = \left(x + \frac{2}{3}\right)\mathrm{e}^{x}$

Para $f_2(x) = 3e^{-x}$, temos:

$y_{p2} = Ee^{-x}$, $\quad y'_{p2} = -Ee^{-x}$ e $\quad y''_{p2} = Ee^{-x}$

Substituindo na EDO: $\quad y'' - 4y = Ee^{-x} - 4Ee^{-x} = 3e^{-x} \quad \Rightarrow \quad E = -1$

Então: $\quad y_{p2} = -e^{-x}$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = y_c(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} + \left(x + \frac{2}{3}\right)e^{x} - e^{-x}}$$

Exemplo 3. $y'' - 2y' - 3y = t^2 e^{2t}$

Equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow$

$$\lambda_1 = -1 \;\; e \;\; \lambda_2 = 3$$

Solução complementar: $y_c = Ae^{3t} + Be^{-t}$

$y_p = (at^2 + bt + c)e^{2t}$

Exemplo 3. $y'' - 2y' - 3y = t^2 e^{2t}$

$$y_p = (at^2 + bt + c)e^{2t} \ ;$$
$$y_p' = (2at^2 + 2bt + 2c + 2at + b)e^{2t}$$
$$y_p'' = (4at^2 + 4bt + 4c + 8at + 4b + 2a)e^{2t}$$

$$y'' - 2y' - 3y = (-3at^2 + (-3b + 4a)t + 2a + 2b - 3c)e^{2t} = t^2 e^{2t}$$

$$-3a = 1 \ ; \ -3b + 4a = 0 \ \ e \ \ 2a + 2b - 3c = 0 \ \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \ ; \ \ b = -\frac{4}{9} \ \ e \ \ c = -\frac{14}{27}$$

$y_p = \left(-\frac{1}{3}t^2 - \frac{4}{9}t - \frac{14}{27}\right)e^{2t}$ Solução geral:

$$\boxed{y(x) = Ae^{3t} + Be^{-t} + \left(-\frac{1}{3}t^2 - \frac{4}{9}t - \frac{14}{27}\right)e^{2t}}$$

Exemplo 4: $y'' + y = senx$

A equação auxiliar é dada por: $y'' + \text{y} = 0$

E a equação característica é: $\lambda^2 + 1 = 0$ (duas raízes complexas conjugadas). Então temos: $\lambda_1 = i \quad e \quad \lambda_2 = -i$

Logo, a solução da equação complementar é: $y_c = Acosx + Bsenx$

Como $f(x) = \text{senx},$ então teríamos: $y_p = Ccosx + Dsenx.$ Mas note que também neste caso y_p é um múltiplo da y_c. Então multiplicando y_P por x, teremos

$$y_p = Cxcosx + Dxsenx$$

Então, se $y_p = Cxcosx + Dxsenx$, temos:

$y_p' = C\cos x - Cx\,\text{sen}\,x + D\,\text{sen}\,x + Dx\cos x$

$y_p'' = -2C\,\text{sen}\,x - Cx\cos x + 2D\cos x - Dx\,\text{sen}\,x$

Substituindo na equação diferencial e simplificando, temos:

$y'' + y = -2C\,\text{sen}\,x + 2D\cos x = \text{sen}\,x$, *ou seja:* $C = -\frac{1}{2}$, $D = 0$ e $y_p = -\frac{x}{2}cosx$

A solução geral é: $\boxed{y(x) = y_c + y_p = Acosx + Bsenx - \frac{x}{2}cosx}$

Exemplo 5: $y'' + 4y' = e^{x} cosx$

Equação complementar: $y'' + 4y' = 0$

Equação característica: $\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad e \quad \lambda_2 = -4$

Duas raízes reais e distintas, então:

Solução complementar: $y_c(x) = A + Be^{-4x}$

$y'' + 4y' = e^x cosx$

Para a solução particular, tentaremos: $y_p = (\text{Ccosx} + \text{Dsenx})e^x$

(motivo: $f(x)$ *é* uma trigonométrica vezes uma exponencial)

Agora, procedemos da mesma forma: derivamos e substituimos na EDO.

$y_p' = (-Csenx + Dcosx + Ccosx + Dsenx)e^x$ e

$y_p'' = (-2Csenx + 2Dcosx)e^x$

$$y_p' = (-Csenx + Dcosx + Ccosx + Dsenx)e^x \text{ e } y_p'' = (-2Csenx + 2Dcosx)e^x$$

$$y'' + 4y' =$$

$$= \underbrace{(-2Csenx + 2Dcosx)e^x}_{y_p''} + 4\underbrace{(-Csenx + Dcosx + Ccosx + Dsenx)e^x}_{y_p'} = e^x cosx$$

Dividindo tudo pela exponencial: $(4C + 6D)cosx + (-6C + 4D)senx = cosx$

Ou seja: $4C + 6D = 1 \;\; e \;\; -6C + 4D = 0 \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{13} \;\; e \;\; D = \frac{3}{26}$

$$y_p = \left(\frac{1}{13}cosx + \frac{3}{26}senx\right)e^x$$

Solução geral: $\boxed{y(x) = y_c(x) + y_p(x) = A + Be^{-4x} + \left(\frac{1}{13}cosx + \frac{3}{26}senx\right)e^x}$

Exercícios: Resolva as equações diferenciais

1. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$ Resp. $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - e^{2t}$

2. $y'' - y' - 2y = sen2x$ Resp. $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} - \frac{3}{20} sen2x + \frac{1}{20} cosx$

3. $y'' - 4y = cos2x$ Resp. $y = Ae^{2x} + Be^{-2x} - \frac{1}{8} cos2x$

4. $y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x}$ Resp. $y = Ae^{3x} + Be^{2x} - 5xe^{2x}$

$$y'' + y' - 6y = 2x$$

Resp. $\boldsymbol{y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{18}}$

9. $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$ Resp.: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + x^2 - 4x + \frac{7}{2}$

10. $y^{(4)} + 2y'' + y = (x-1)^2$
Resp.: $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 x \cos x + c_4 x \operatorname{sen} x + x^2 - 2x + 3$

11. $y'' + 4y = -2$, $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$ e $y'(\pi/8) = 2$
Resp.: $y = \sqrt{2} \operatorname{sen} 2x - 1/2$