



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS - MAC 14

Equação Diferencial Linear de 1ª ordem

Bibliografia básica:

Zill, D. G.; Cullen, M. R. Equações diferenciais. 3. Ed – V1. São Paulo - Pearson/Makron Books, 2008.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE 1ª ORDEM



Definição: Uma equação diferencial que pode ser escrita na forma:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Em que as funções $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas em um mesmo intervalo aberto (a, b) é denominada *Equação Diferencial Linear de 1ª Ordem na variável dependente y* .



Agora, se na equação: $y' + p(x)y = q(x)$

Tivermos: $q(x) = 0$, ficamos com: $y' + p(x)y = 0$

*Que é denominada **EDO linear homogênea de 1ª ordem***

PS. Para desenvolvermos o caso geral, usaremos o caso homogêneo, ou seja, quando $q(x) = 0$.



Então, dada a EDO linear homogênea de 1ª Ordem: $y' + p(x)y = 0$

Podemos escrever: $\frac{1}{y}y' = -p(x)$ (que é uma EDO separável)

Agora, lembramos que: $y' = \frac{dy}{dx}$, então temos:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = P(x), \quad (\text{onde } P(x) = -p(x)) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y}dy = P(x)dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int P(x)dx \Rightarrow \ln y = \int P(x)dx + K \Rightarrow y = Ce^{\int P(x)dx}$$

$$\text{Com: } C = e^K$$



Definição: A função:

$$I(x) = e^{\int P(x)dx}$$

é denominada de **Fator integrante** e nós a utilizaremos para resolver o caso geral, ou seja quando $q(x) \neq 0$



Para a solução do caso geral, multiplicamos os dois lados da equação

$y' + p(x)y = q(x)$ pelo fator integrante $I(x) = e^{\int p(x)dx}$, ou seja:

$$(y' + p(x)y)I(x) = q(x)I(x) \Leftrightarrow (y' + p(x)y)e^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Note que: $(y' + p(x)y)e^{\int p(x)dx} = y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = \frac{d}{dx}[ye^{\int p(x)dx}]$

Então:

$$(y' + p(x)y)e^{\int p(x)dx} = \frac{d}{dx}[ye^{\int p(x)dx}] \Rightarrow \frac{d}{dx}[yI(x)] = q(x)I(x).$$



Dada: $\frac{d}{dx}[yI(x)] = q(x)I(x)$ e agora integrando dos dois lados, temos:

$$\int \frac{d}{dx}[yI(x)]dx = \int q(x)I(x)dx \Rightarrow yI(x) = \int q(x)I(x)dx + k$$

Solução geral da EDO linear de 1a ordem: $y' + p(x)y = q(x)$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right], \quad k \in \mathbb{R}$$



Solução geral da EDO linear de 1a ordem não homogênea:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right], \quad k \in \mathbb{R}$$

Onde $I(x) = e^{\int p(x)dx}$ é o Fator integrante



Ex 1. Resolva o PVI:

$$\begin{cases} y' + 5y = e^{-3x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Aqui: $p(x) = 5$ e $q(x) = e^{-3x}$



Ex 1. Resolva o PVI:

$$p(x) = 5 \text{ e } q(x) = e^{-3x}$$

$$\text{Fator integrante: } I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 5dx} = e^{5x}$$

$$I(x) = e^{5x}$$

$$(\text{Lembrete: } y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right])$$

$$\int q(x)I(x)dx = \int e^{-3x} e^{5x}dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$



Agora, usando a fórmula deduzida: $y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right]$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right] = \frac{1}{e^{5x}} \left[\frac{1}{2}e^{2x} + k \right] \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}e^{-3x} + ke^{-5x}$$

Agora, usando a condição inicial: $y(0) = 0$, temos: $0 = \frac{1}{2} + k \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$

Solução do PVI:

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-5x}$$



Ex 2. Calcule a solução geral da EDO:

$$xy' - 2y = 2x, \quad x > 0$$

Primeiro, dividimos tudo por x :

$$y' - \frac{2}{x}y = 2 \Rightarrow$$

$$\text{Então: } p(x) = -\frac{2}{x} \quad e \quad q(x) = 2$$

Ex 2.



$$p(x) = -\frac{2}{x} \quad e \quad q(x) = 2$$

Fator integrante:

$$I(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$



$$I(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\int q(x)I(x)dx = \int 2x^{-2}dx = 2\frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{2}{x}$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right] = \frac{1}{1/x^2} \left[-\frac{2}{x} + k \right] = -2x + kx^2$$

Solução geral:

$$y(x) = -2x + kx^2, \quad k \in \mathbb{R}$$



Ex 3. $y' + 3x^2y = 3x^2$



Ex 3. $y' + 3x^2y = 3x^2$ ($p(x) = 3x^2$ e $q(x) = 3x^2$)

Fator integrante: $I(x) = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$

$$\int q(x)I(x)dx = \int 3x^2 e^{x^3} dx = \int e^u du = e^u = e^{x^3} \quad (u = x^3 \text{ e } du = 3x^2 dx)$$

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right] = \frac{1}{e^{x^3}} [e^{x^3} + k] = 1 + ke^{-x^3}$$

Solução geral :

$$y(x) = 1 + ke^{-x^3}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Ex 4: $y' - 7y = e^x$





Ex 4: $y' - 7y = e^x$, ($p(x) = -7$ e $q(x) = e^x$)

Fator integrante: $I = e^{\int -7dx} = e^{-7x}$

$$\int q(x)I(x)dx = \int e^{-7x} e^x dx = \int e^{-6x} dx = -\frac{1}{6}e^{-6x}$$


$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int q(x)I(x)dx + k \right] = \frac{1}{e^{-7x}} \left[-\frac{1}{6}e^{-6x} + k \right] = -\frac{1}{6}e^x + ke^{7x}$$

Solução geral:

$$y(x) = -\frac{1}{6}e^x + ke^{7x}, \quad k \in \mathbb{R}$$



Ex 5. $xy' + x^2y = x^2, \quad x > 0$



Ex 5. $xy' + x^2y = x^2, \quad x > 0$

Resolução: Dividindo tudo por x : $y' + xy = x$; $p(x) = x$ e $q(x) = x$

fator integrante: $I(x) = e^{\int x dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$

$$\int q(x)I(x)dx = \int xe^{\frac{x^2}{2}}dx = \int e^u du = e^u = e^{\frac{x^2}{2}}; \quad u = \frac{x^2}{2} \quad ; \quad du = xdx$$

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[e^{\frac{x^2}{2}} + k \right] = 1 + ke^{-\frac{x^2}{2}}$$

Solução geral: $y(x) = 1 + ke^{-\frac{x^2}{2}}, \quad k \in \mathbb{R}$



Exercícios: Resolva as EDOs

1. $y' + 2xy = 2x^3$

solução: $y = (x^2 - 1) + Ce^{-x^2}$

2. $xy' + x^2y = x^2, x > 0$

solução: $y = 1 + Ce^{\frac{-x^2}{2}}$

3. $(x + 2)y' + y = x^2 - x + 2, x > -2$

solução: $y = \frac{2x^3 - 3x^2 + 12x + C}{6(x+2)}$

Exercícios: Resolva o problema de valor inicial

1. $y' = 2y + \text{sen}(t)$ e $y(0) = 1$ *solução:* $y = \frac{-1}{5}(2\text{sen}(t) + \cos(t)) + \frac{6}{5}e^{2t}$

2. $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{2x}$ e $y(0) = 2$ *solução:* $y = e^{2x}(x + 2)$