MAC440 - Lista de exercícios: Sequências Numéricas

1. Decidir se a afirmação é verdadeira ou falsa:

   a) Toda sequência limitada é convergente.
   b) Toda sequência convergente é limitada.
   c) Uma sequência é convergente se, e somente se, é limitada.
   d) Toda sequência monótona é limitada.
   e) Toda sequência monótona é convergente.
   f) Toda sequência convergente é monótona.
   g) Se uma sequência é divergente, então não é monótona.
   h) A sequência (a_n) dada por $a_1 = 0$ e $a_n = 2 - a_n, \ \forall n \geq 1$ é divergente.
   i) O produto de duas sequências divergentes é divergente.
   j) O produto de uma sequência divergente por outra convergente é divergente.
   k) Se uma sequência possuir uma subsequência convergente, então ela própria é convergente.

   Resp. São verdadeiras apenas as afirmações b) e h).

2. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, se possível, e decida se a sequência é convergente ou divergente.

   a) $a_n = \dfrac{(5n^3+2)(n-2)}{\sqrt[3]{n}}$ b) $a_n = \dfrac{\text{sen}((0,4)^n)}{n^3+6}$ c) $a_n = \dfrac{\ln(3n)}{2e^{4n}}$

   d) $a_n = \sqrt{\dfrac{n+2}{7n+1}}$ e) $a_n = \dfrac{\sqrt{2n^3+1}}{4n^2+5n-1}$ f) $a_n = \dfrac{4^n - 3^n}{e^n}$

   g) $a_n = \cos\left(\dfrac{1-(0{,}3)^n}{2n}\right)$ h) $a_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+3n+5}}$ i) $a_n = \dfrac{\ln(4n)}{n^2}$

   j) $a_n = \dfrac{7n(n+2)^2}{5n^2+3}$ k) $a_n = e^{8/3n}$ l) $a_n = \dfrac{\text{sen}(3n)}{n^2}$

   m) $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ n) $a_n = \dfrac{\sqrt{3n^2+n^3+1}}{(n+1)(n-5)}$ o) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

   Resp.

(a) $+\infty$ e diverge	(b) 0 e converge	(c) 0 e converge	(d) $\sqrt{\dfrac{1}{7}}$ e converge
(e) 0 e converege	(f) $+\infty$ e diverge	(g) 1 e converge	(h) 2 e converge
(i) 0 e converge	(j) $+\infty$ e diverge	(k) 1 e converge	(l) 0 e converge
(m) 0 e converge	(n) 0 e converge	(o) 0 e converge	

3. Determine uma fórmula para o termo geral a_n de cada sequência abaixo, assumindo que o padrão dos termos fornecidos continue:

   a) $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$ b) 2,4,6,8,... c) 2,-4,8,-16,... d) $1, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{-1}{27}, \ldots$

   Resp.

   a) $a_n = (-1)^n n, \ n \geq 1$ b) $a_n = 2n, \ n \geq$ c) $a_n = (-1)^{n-1}2^n, \ n \geq 1$ d) $a_n = \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n, \ n \geq 0$

4. Se R$ 200,00 foram investidos a uma taxa de juros de 8% ao ano contabilizados anualmente, depois de n anos o investimento valerá $a_n = 200(1{,}08)^n$ reais .

   a) Calcule os 5 primeiros termos da sequência (use duas casas decimais - não esqueça os centavos). Resp. $a_1 = 216{,}00,\ a_2 = 233{,}28,\ a_3 = 251{,}94,\ a_4 = 272{,}10,\ a_5 = 293{,}87$

   b) A sequência é convergente ou divergente? Justifique sua resposta. Resp. A sequência é divergente, pois é múltipla da sequência geométrica com razão $|r| = 1{,}08 > 1$.

5. um piscicultor possui 6.000 peixes em uma lagoa. O número de peixes aumenta a uma taxa de 7% ao mês e ele retira 400 peixes mensalmente da lagoa.

   a) Mostre que a população de peixes depois de n meses é dada por $P_n = (1{,}07)P_{n-1} - 400$, com $P_0 = 6.000$ e $n \geq 1$.

   b) Determine o número de peixes na lagoa após um ano. Resp. Haverá 6357 peixes na lagoa após um ano.

6. Suponha que você saiba que (a_n) é uma sequência de números decrescentes e que todos os termos estão entre 4 e 7. Explique por que a sequência tem um limite. O que se pode afirmar sobre esse valor?

   Resp. Trata-se de uma sequência monótona (decrescente) e limitada (todos seus valores estão entre 4 e 7). Portanto é convergente e seu limite estará no intervalo real $[4, 7]$.

7. Dada a sequência (a_n) definida por recorrência por $a_1 = \sqrt{5}$ e $a_{n+1} = \sqrt{5a_n},\ \forall n \geq 1$. Supondo que a sequência seja crescente e limitada, calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

   Resp. (a_n) monótona e limitada $\Rightarrow$ (a_n) é convergente. Seja $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}$.

   Temos: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5a_n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \sqrt{5 \lim\limits_{n\to+\infty} a_n} \Rightarrow L = \sqrt{5L}$.

   Elevando ao quadrado ambos os lados da equação $L = \sqrt{5L}$ obtemos $L^2 = 5L$, o que resulta em $L^2 - 5L = 0$. As soluções dessa equação são $L = 0$ e $L = 5$. Como todos os termos da sequência são maiores ou iguais a $\sqrt{5}$ (pois a sequência é crescente e $a_1 = \sqrt{5}$), seque que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 5$.

8. Se $A \geq 1$, então a sequência definida por $a_1 = \dfrac{A}{2}$ e $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{A}{a_n}\right),\ \forall n \geq 1$.

   a) Escreva os quatro primeiros termos da sequência (a_n) em função apenas de A.

   b) Supondo que a sequência é monótona e limitada, mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{A}$.

9. Uma sequência é definida recursivamente por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 4),\ \forall n \geq 1$

   a) Mostre que $a_n < 2$ para todo $n \geq 1$. Sug. Use indução finita.

   b) Mostre que (a_n) é sequência crescente (isto é, $a_n \geq a_{n+1}$) para todo $n \geq 1$. Sug. Use indução finita.

   c) Conclua que a sequência (a_n) é convergente e calcule seu limite.