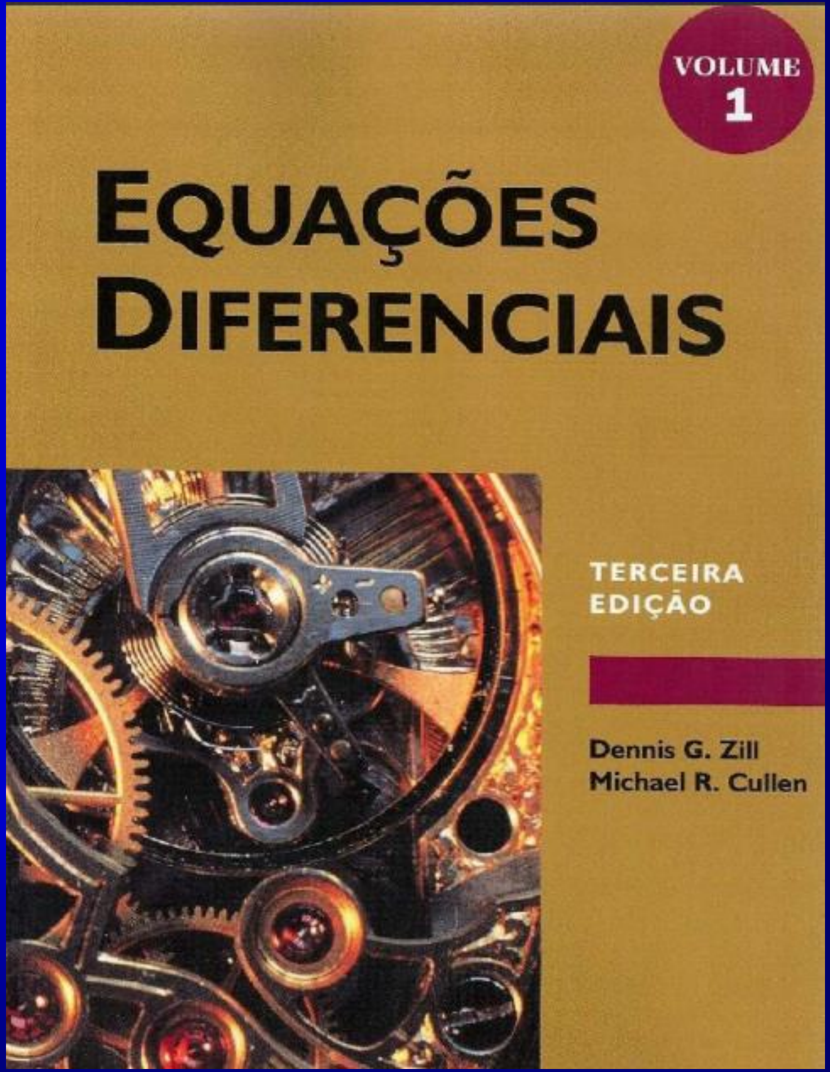
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

MAC 140



Texto Baseado no livro:

Zill, D. G.; Cullen, M. R. Equações diferenciais.
3. Ed – V1. São Paulo - Pearson/Makron Books, 2008.

Fundamentos

- Vários problemas importantes da engenharia, da física, da química,
da biologia e das ciências humanas em geral são formulados por equações que envolvem a derivada de uma certa função desconhecida.

Exemplos:

$$y'' = 3x + 2$$

$$y' = 5xy + y$$

- Tais equações são chamadas de **equações diferenciais e** envolvem uma função desconhecida e uma ou mais derivadas de tal função

Fundamentos

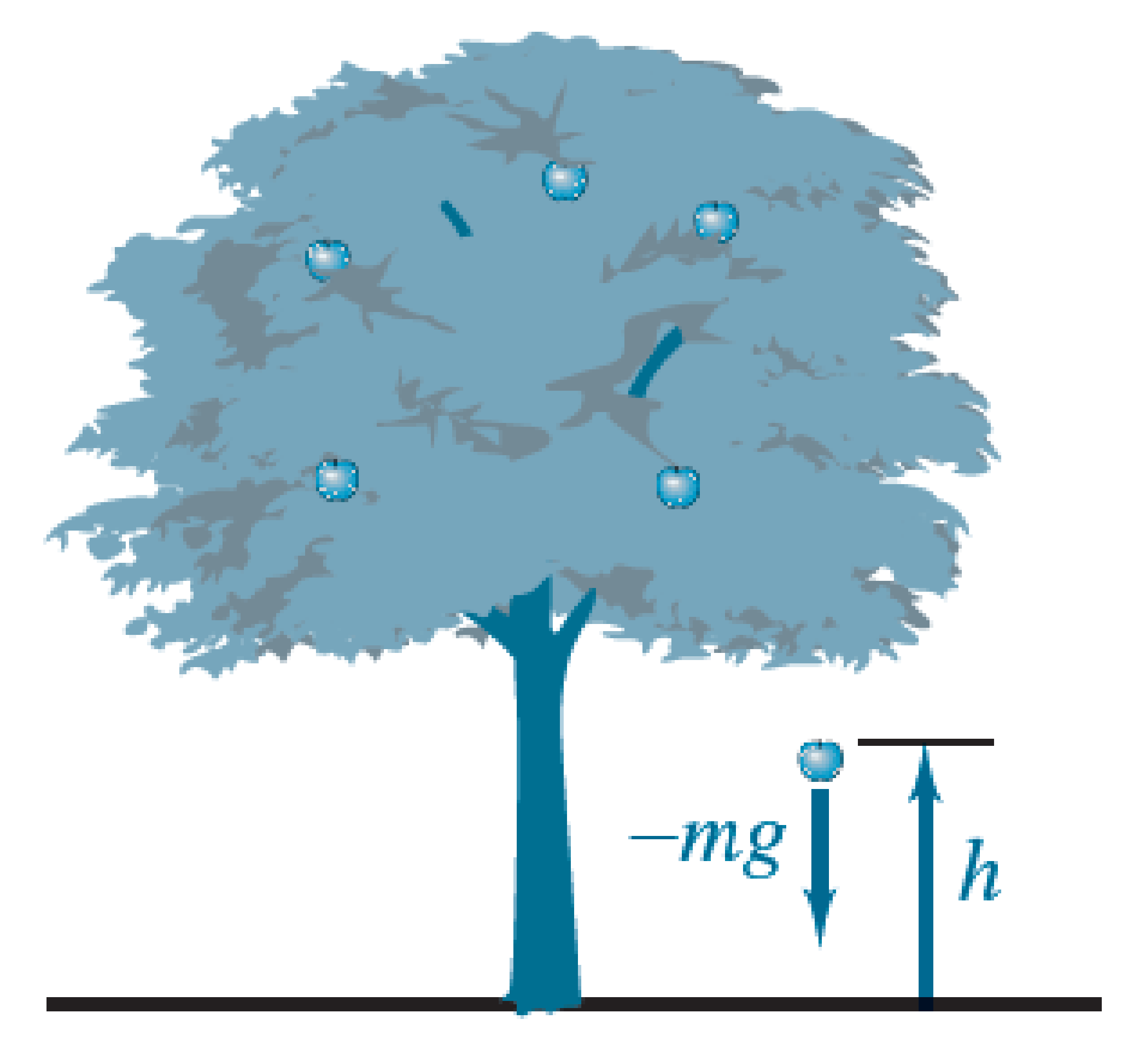
- Dois exemplos de modelos desenvolvidos no cálculo são:

✓ a queda livre de um corpo e

✓ o decaimento (ou desintegração) de uma substância radioativa.

Motivação

Maçã em queda livre.



Motivação

No caso da queda livre, um objeto é solto de certa altura acima do solo e cai sob a força da gravidade.

Lembrando da segunda lei de Newton: f = ma , temos :

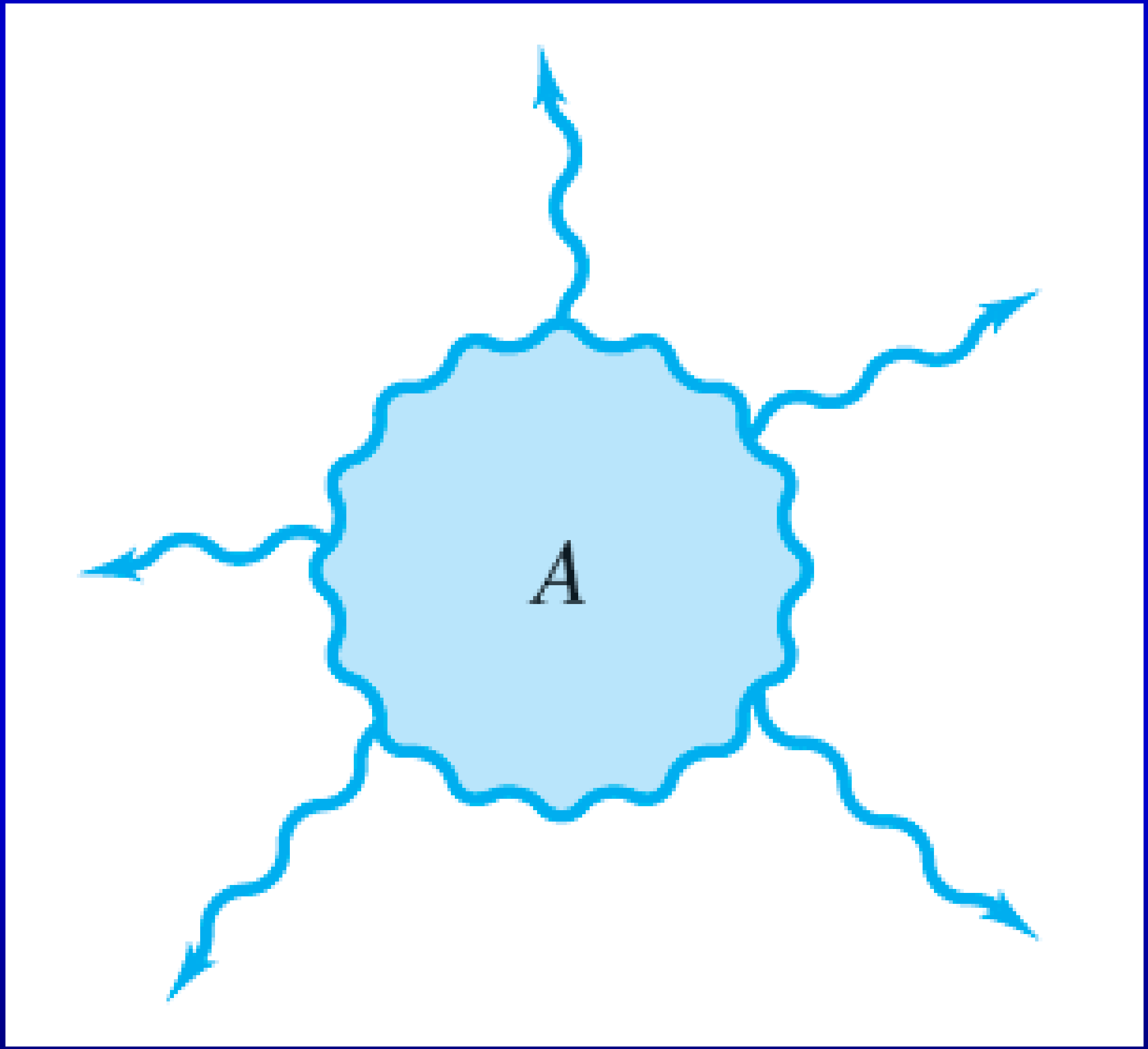
$$-mg = m\frac{d^2h}{dt^2} \qquad \Rightarrow \qquad mg + m\frac{d^2h}{dt^2} = 0$$

Dividindo dos dois lados por m, temos a seguinte equação diferencial de segunda ordem na função desconhecida $h(t)$:

$$\boxed{\frac{d^2h}{dt^2} + g = 0}$$

Motivação

Decaimento radioativo



Motivação

A taxa de decaimento é proporcional à quantidade de substância radioativa presente

Para resolver essa equação diferencial, nós a reescrevemos na forma:

$$\frac{dA}{dt} = -kA \quad , \qquad\qquad k > 0$$

Ou seja, temos a seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$\boxed{\frac{dA}{dt} + kA = 0}$$

Fundamentos

Se uma equação envolve a derivada de uma variável com relação a outra, então a primeira variável é chamada de **variável dependente** e a segunda de **variável independente**.

A equação diferencial que envolve apenas derivadas com relação a uma única variável independente é chamada de **equação diferencial ordinária (EDO)**.

A equação diferencial que envolve derivadas parciais com relação a mais de uma variável independente é uma **equação diferencial parcial (EDP)** .

A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem das derivadas de mais alta ordem (das derivadas) nela presentes.

Fundamentos

Uma equação diferencial é dita **linear** se ela puder ser escrita na forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = F(x)$$

Ou seja, as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são de 1º grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y e suas derivadas é sempre 1.

ii) Cada coeficiente $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ dos termos depende apenas da variável independente x

Fundamentos

Se uma equação diferencial ordinária não é linear, então a chamamos de equação diferencial ordinária **não linear**. Exemplos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y^3 = 0$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não linear por causa do termo y^3.

$$t^3\frac{dx}{dt} = t^3 + x$$

é linear de primeira ordem na variável dependente x.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} = \cos x$$

é não linear de segunda ordem por causa do termo $y\frac{dy}{dx} = yy'$.

Soluções e problemas de valor inicial

Uma forma geral para uma equação de ordem n com x independente e y dependente, pode ser expressa como:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

Em muitos casos, podemos isolar o termo de mais alta ordem $\frac{d^n y}{dx^n} = y^n$ e escrever a equação acima, como:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

PS. Ao resolvermos uma EDO obtemos uma família de soluções. Se quisermos obter uma solução única, precisamos estabelecer o que denominamos de “Condições Iniciais”

Exemplos: Para a equação:

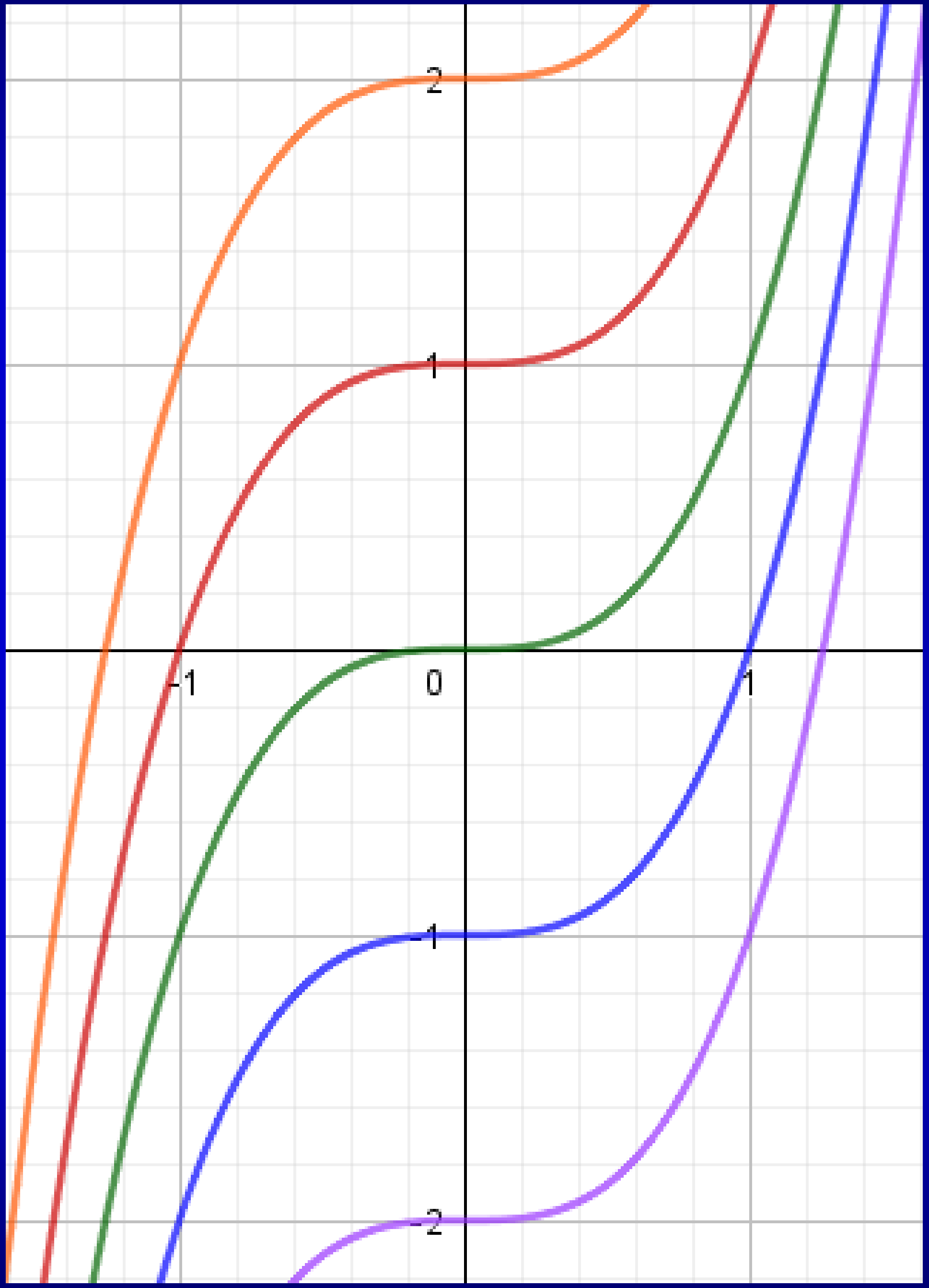
$y' = 3x^2$ *sabemos que a solução é dada por:* $y(x) = x^3 + k, \quad k \in \mathbb{R}$

Como k pode ser qualquer número real, então dizemos que temos uma família de soluções.

$$y(x) = x^3 + k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Ao lado estão as curvas para:

$$k = -2\,, -1\,, 0\,, 1\,, 2$$



Porém, se quisermos uma solução única, podemos exigir que a curva $y = y(x)$ passe por um certo ponto (x_0, y_0) e assim teremos, não mais uma família de soluções, mas uma solução particular, definida da seguinte forma:

Problema de Valor Inicial (PVI): No caso de uma equação diferencial de primeira ordem, para que tenhamos uma solução única, definimos o PVI para a equação $F(x, y, y') = 0$ como sendo a equação diferencial mais uma condição inicial do tipo :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Teorema da Existência e Unicidade

Considere o problema de valor inicial: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Se $f(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas no retângulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b \;\; e \;\; c < y < d\}$ contendo $(x_0\,, y_0),$ então o PVI acima possui solução única em um intervalo I contendo x_0.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM SEPARÁVEL

Definição: Uma equação diferencial de 1ª ordem que pode ser escrita na forma diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)} \qquad ou \qquad f(y)dy = g(x)dx$$

é chamada de equação diferencial de 1ª ordem de variáveis separáveis, pois sempre é possível separar as variáveis de tal modo que uma variável fique de um lado da equação e a outra variável fique do outro lado da equação.

Solução da EDO Separável: É determinada integrando-se ambos os lados da equação. Ou seja, dada a equação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)} \quad \Rightarrow \quad f(y)dy = g(x)dx$$

Agora integramos dos dois lados:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

E temos: $\mathrm{F(y)} + \mathrm{k}_1 = \mathrm{G(x)} + \mathrm{K}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F(y)} = \mathrm{G(x)} + \mathrm{k}_2 - \mathrm{k}_1$

Solução da EDO Separável

Então, temos a seguinte solução para a EDO Separável de 1ª Ordem:

$$\boxed{F(y) = G(x) + k}$$

Onde: $F(y)$ é $uma\ primitiva\ de\ f(y)$, $G(x)$ é $uma\ primitiva\ de\ g(x)$

e $k = k_2 - k_1$ é uma constante.

EQUAÇÃO SEPARÁVEL

Exemplos: Resolva as equações diferenciais:

1) $\frac{dx}{dt} = 2tx \ , \quad x > 0$

EQUAÇÃO SEPARÁVEL

1) $\dfrac{dx}{dt} = 2tx \;,\quad x > 0$

Primeiro separamos as variáveis: $\dfrac{dx}{dt} = 2tx \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x}dx = 2tdt$

Depois integramos dos dois lados: $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int 2tdt$

$\Leftrightarrow \quad \ln x = t^2 + C$

EQUAÇÃO SEPARÁVEL

$\ln x = t^2 + C \ \ (agora\ aplicamos\ a\ exponencial\ dos\ dois\ lados\ e\ obtemos:)$

$x = e^{t^2+C} = e^{t^2}.e^{C}.$ $\quad Podemos\ ainda\ fazer\ \ k = e^{C}\ \ e\ chegamos\ a$

Solução geral dada explicitamente: $\boxed{x(t) = \boldsymbol{k e^{t^2}}}$

$\left(\boldsymbol{Passo\ a\ passo}:\ \ln x = t^2 + C \rightarrow e^{\ln\ x} = e^{t^2+c} \Rightarrow x = e^{t^2}e^{c} = ke^{t^2}\right)$

EQUAÇÃO SEPARÁVEL

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^3}{3y^2}$,   com $y(0) = 1$ (Problema de Valor Inicial (PVI))

EQUAÇÃO SEPARÁVEL

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{3y^2}$, com $y(0) = 1$ (Problema de Valor Inicial (PVI))

$Solução$: $Primeiro\ separamos\ as\ variáveis$: $3y^2\,dy = 4x^3 dx$

$Depois\ integramos\ dos\ dois\ lados$: $\int 3y^2 dy = \int 4x^3 dx$

$\Leftrightarrow\ y^3 = x^4 + C \Rightarrow Usando\ y(0) = 1,\ temos: C = 1$

Solução do PVI: $x^4 - y^3 + 1 = 0$ $(solução\ implícita)$

EQUAÇÃO SEPARÁVEL

3) $(e^y - 1)y' = 2 + \cos(x)$

Solução: Lembrando que $y' = \dfrac{dy}{dx} \quad \Rightarrow$

$$(e^y - 1)\frac{dy}{dx} = 2 + cos(x) \quad \Rightarrow$$

$$(e^y - 1)dy = (2 + cos(x))dx$$

EQUAÇÃO SEPARÁVEL

3) $(e^y - 1)y' = 2 + \cos(x)$

$$\int (e^y - 1)dy = \int (2 + cos(x))dx \quad \Leftrightarrow \quad e^y - y = 2x + sen(x) + C$$

Solução geral dada implicitamente:

$$\boxed{\boldsymbol{e^y - y - 2x - sen(x) = C \ , \quad C \in \mathbb{R}}}$$

EQUAÇÃO SEPARÁVEL

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+3x-y-3}{xy+4y-2x-8}$

EQUAÇÃO SEPARÁVEL

4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+3x-y-3}{xy+4y-2x-8}$

$$Solução: \ \frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy + 4y - 2x - 8} = \frac{x(y+3) - (y+3)}{y(x+4) - 2(x+4)} =$$

$$\frac{(x-1)(y+3)}{(y-2)(x+4)} \Rightarrow \frac{(y-2)}{(y+3)}dy = \frac{(x-1)}{(x+4)}dx$$

$$\int \frac{(y-2)}{(y+3)}dy = \int \frac{(x-1)}{(x+4)}dx \Leftrightarrow \int \left(1 - \frac{5}{y+3}\right)dy = \int \left(1 - \frac{5}{x+4}\right)dx \Leftrightarrow$$

EQUAÇÃO SEPARÁVEL

$$\int \left(1 - \frac{5}{y+3}\right) dy = \int \left(1 - \frac{5}{x+4}\right) dx \quad \Leftrightarrow \quad (lembrete\text{: } e^{a+b} = e^a e^b)$$

$$y - 5ln|y+3| = x - 5ln|x+4| + C \quad \Leftrightarrow \quad y - x = ln|y+3|^5 - ln|x+4|^5 + C$$

$$y - x = ln\left(\frac{|y+3|^5}{|x+4|^5}\right) + C \quad \Leftrightarrow \quad e^{y-x} = \frac{|y+3|^5}{|x+4|^5} k \qquad \left(k = e^C \quad e \quad e^{y-x} = \frac{e^y}{e^x}\right)$$

Solução geral dada implicitamente: $\boxed{\boldsymbol{e^y|x+4|^5 = K|y+3|^5 e^x}}$

Aplicação: Problemas de Crescimento e Decrescimento

Considere a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Se y = y(t) depende do tempo, esta equação diz que a taxa de variação de y é proporcional a y. Esta quantidade aumenta se $k > 0$ e diminui se $k < 0$. A variável y pode modelar:

- O tamanho de uma população
- O decaimento de uma substância radioativa (neste caso, $k < 0$ é a taxa de decaimento)
- A quantidade de dinheiro investido (neste caso, k é a taxa de juros)
- Resfriamento de um corpo.

etc ...

Aplicação: Lei de resfriamento de Newton

A Lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação da temperatura T(t) de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença da temperatura atual do corpo T(t) e a temperatura constante do meio ambiente Tm, ou seja:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - T_m) \\ T(0) = T_o \end{cases}$$

Lei de resfriamento de Newton

Questão 1: Uma esfera de cobre é aquecida a uma temperatura de 100^oC em um ambiente que tem temperatura de 30^oC. Ou seja, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - 30) \\ T(0) = 100 \end{cases}$$

a) Escreva a função que calcula a temperatura da esfera em um instante qualquer em função do tempo t, resolvendo o PVI.

b) Qual será a temperatura da esfera após transcorridos 5 minutos, supondo $k = -\frac{1}{5}$?

Lei de resfriamento de Newton

$$a)\ \frac{dT}{dt} = k(T-30) \Rightarrow \frac{1}{T-30}dT = kdt \Rightarrow \int \frac{1}{T-30}dT = \int k\,dt$$

$$\ln(T-30) = kt + c \Rightarrow T - 30 = ae^{kt} \Rightarrow \boxed{T(t) = 30 + ae^{kt},} \qquad sendo\ a = e^{c}$$

$$T(0) = 100 \Rightarrow 100 = 30 + a \Rightarrow a = 70 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{T(t) = 30 + 70e^{kt}}}$$

$$\boldsymbol{b)\ T(5) = 30 + 70e^{-1} \Rightarrow T(5) = 30 + \frac{70}{e} \approx 55,8}$$

$$T \approx 55{,}8^{0}C$$

Lei de resfriamento de Newton

2) A temperatura de um termômetro T imerso em um meio tendo temperatura ambiente T_a pode ser determinada, de acordo com a lei de resfriamento de Newton, pela equação:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_a), \quad \text{onde } K \text{ é uma constante de proporcionalidade.}$$

Sabendo que o tempo é dado em minutos e que um termômetro com uma leitura de 100^0C é colocado em um meio tendo uma temperatura constante de 70^0C e que a constante $\mathrm{K} = -0{,}2$, determine a temperatura do termômetro após 20 minutos. Ou seja, resolva o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -0{,}2(T - 70) \\ T(0) = 100 \end{cases}$$

Lei de resfriamento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = -0{,}2(T - 70) \;\Rightarrow\; \frac{1}{T - 70}dT = -0{,}2dt \;\Rightarrow\; \int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{T} - \mathbf{70})}\boldsymbol{dT} = -\mathbf{0.2}\int \boldsymbol{dt} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{ln(T - 70) = -0.2t + C \Rightarrow T - 70 = e^{-0.2t+C} \Rightarrow T = 70 + \alpha e^{-0.2t} \qquad (\alpha = e^{C})}$$

Como T(0) = 100 temos $100 = 70 + \alpha e^{0} \Rightarrow \alpha = 30$

Solução do PVI: $\boxed{T(t) = 70 + 30e^{-0.2t}}$

Para $t = 20\,min$ temos: $T(20) = 70 + 30e^{-4} \quad \Rightarrow \quad T \cong 70{,}5^{0}C$

Aplicação: Rendimento de um Investimento

3) Calcule o rendimento do capital R$10.000,00 investidos por 5 anos a uma taxa de juros anual de 5%.

Solução: A constante é k = 0.05 (5%) e portanto temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 0{,}05y \\ y(0) = 10000 \end{cases}$$

Aplicação: Rendimento de um Investimento

3) Calcule o rendimento do capital R$10.000,00 investidos por 5 anos a uma taxa de juros anual de 5%.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 0{,}05y \\ y(0) = 10000 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}05y \Rightarrow \frac{1}{y}dy = 0{,}05dt \Rightarrow \quad lny = 0{,}05t + c \;\; \Rightarrow \;\; y = e^{0{,}05t+c} = ae^{0{,}05t}, \qquad (a = e^c)$$

Como a condição inicial é y(0) = 10000, segue que: $10000 = a$

$$\boxed{y(t) = 10000e^{0{,}05t}}$$

Após 5 anos, o capital aumenta para: $y(5) = 10000e^{0{,}25} = 12840{,}25$.

Isto é, o capital rendeu R$2.840,25.

Aplicação: Datação por Carbono 14

Datação por Carbono 14: A proporção por carbono 14 (radioativo) em relação ao carbono 12 presente nos seres vivos é constante. Quando um organismo morre a absorção de carbono 14 cessa e a partir de então o carbono 14 vai se transformando (decaindo) em carbono 12 a uma taxa que é proporcional a quantidade presente no organismo.

Podemos descrever o problema de encontrar a quantidade de carbono 14 em função do tempo, y(t), como o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky, \qquad\qquad k < 0 \\ y(0) = y_o \end{cases}$$

Datação por Carbono 14

4) O Santo Sudário de Turin ficou conhecido por que alguns cristãos católicos acreditam ser o manto funerário de Jesus Cristo. Está preservado para exposição na Catedral San Giovanni Battista em Turin desde 1578. Três testes independentes de datação feitos em 1988 revelaram que a quantidade de carbono 14 do manto estaria entre 99,119% e 99,275% da quantidade encontrada em um tecido novo equivalente. Como podemos usar esses dados para determinar a idade do sudário?

Resolução: Este é um típico problema de decaimento radioativo, onde a taxa de decaimento (y') é proporcional à quantidade do seu material (ky) a cada instante t. Para o carbono 14, sabe-se que a constante de proporcionalidade é k = –0,00001216. Assim, a equação diferencial que modela o problema é:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -0{,}00001216y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$A\ solução\ da\ EDO$ é $dada\ por$: $\quad y(t) = ae^{-0{,}00001216t}$

Datação por Carbono 14

Sendo y_0 a quantidade inicial de carbono 14 no sudário e substituindo na solução, achamos o valor da constante c:

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{-0{,}00001216t}}$$

Como dito no enunciado, a quantidade de carbono 14 em 1988 era de 99,119% do valor inicial y_0 . Quanto tempo levou para a quantidade de carbono 14 decair de $1y_0$ para $0{,}99119y_0$? Substituindo estes dados na equação e resolvendo-a para a variável tempo t:

$$0{,}99119y_0 = y_0\, e^{-0{,}00001216t} \Rightarrow 0{,}99119 = e^{-0{,}00001216t} \Rightarrow t = -\frac{\ln(0{,}99119)}{0{,}00001216} \approx 727{,}7\ anos$$

Isto é, o sudário deve ter sido fabricado por volta do ano 1260 (1988 – 728). Desta forma, não poderia ter sido usado como manto funerário de Jesus Cristo

Aplicação: Dinâmica populacional

5) Consideremos uma situação formada por uma população de Organismos zooplanctônicos. São colocadas em um béquer 3 fêmeas partenogenéticas grávidas (não há necessidade de fecundação pelo macho) de um microcrustáceo chamado cladócero em condições ideais de alimentação, temperatura, aeração e iluminação e ausência de predadores. Sabendo-se que em 10 dias havia 240 indivíduos, determine a população em função do tempo supondo-se que a taxa de crescimento da população é proporcional à população atual

A população, y(t), é a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Dinâmica populacional

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{1}{y}dy = kdt \;\Rightarrow\; lny = kt + c \;\Rightarrow\; \boxed{y(t) = ae^{kt}\,, \qquad a = e^{c}}$$

Usando: $y(0) = 3 \;\Rightarrow\; 3 = a \quad \Rightarrow \boxed{y(t) = 3e^{kt}}$

Como em 10 dias a populacão é de 240 indivíduos, então substituindo-se t = 10 e y = 240 obtemos: $240 = 3e^{10k} \;\Rightarrow\; k = \frac{\ln(80)}{10}$

Assim, a funcão que descreve como a populacão de bactérias varia com o tempo é:

$$\boxed{y(t) = 3e^{kt} = 3e^{\frac{ln(80)t}{10}}}$$

Por exemplo, em 20 dias, teremos: $y(20) = 19200$

Exercícios

1) $\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2$ $\qquad$ *Resp.* $\text{arc tg } y = x + \frac{x^3}{3} + c$

2) $(1 + x^2)dy + xdx = 0$ $\qquad$ Resp. $y = -\frac{1}{2} ln|x^2 + 1| + c$

3) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ $\qquad$ Resp. $y = ln[-1/(e^x + C)]$