

Linguagens Formais e Autômatos (CC5220/CCM420)

Aula 09 - Linguagens Livre do Contexto (Normalização)

Prof. Luciano Rossi

Ciência da Computação
Centro Universitário FEI

2º Semestre de 2025

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto

- Quando se trabalha com linguagens livres de contexto, é frequentemente conveniente tê-las em **forma simplificada**;
- A **forma normal de Chomsky** é o modo mais simples de simplificação;
- Ela é útil para a **construção de algoritmos** para trabalhar com gramáticas livres do contexto.

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto

Definição

Uma gramática livre-do-contexto está na **forma normal de Chomsky** se toda regra é da forma

$$A \rightarrow BC$$

$$A \rightarrow a$$

onde a é qualquer terminal e A , B e C são quaisquer variáveis - exceto que B e C não podem ser a variável inicial.

Adicionalmente, permitimos a regra $S \rightarrow \epsilon$, onde S é a variável inicial.

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto

- Podemos converter **qualquer gramática G** para a forma normal de Chomsky;
- A conversão tem **várias etapas** nas quais as regras que **violam as condições** são substituídas por **regras equivalentes** que são satisfatórias.

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Processo

- 1° Adicionar uma nova variável inicial S_0 e a regra $S_0 \rightarrow S$;
- 2° Remover todas as regras $A \rightarrow \epsilon$ em que A não é a variável inicial;
 - Se tivermos a regra $R \rightarrow A$, adicionamos $R \rightarrow \epsilon$, a menos que tenhamos removido previamente essa regra;
- 3° Tratar as regras unitárias eliminando regras do tipo $A \rightarrow B$, se uma regra $B \rightarrow u$ aparecer, adicionamos a regra $A \rightarrow u$, a menos que essa unitária tenha sido previamente removida;
- 4° Substituir cada regra $A \rightarrow u_1 u_2 u_3, \dots, u_k$, onde $k \geq 3$ e cada u_i é uma variável ou símbolo terminal, pelas regras $A \rightarrow u_1 A_1, A_1 \rightarrow u_2 A_2, A_2 \rightarrow u_3 A_3, \dots, A_{k-2} \rightarrow u_{k-1} u_k$.

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Exemplo 01

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

$$S \rightarrow ASA \mid aB$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b \mid \epsilon$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 01: Adicionar uma nova variável inicial S_0 e a regra $S_0 \rightarrow S$

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b \mid \epsilon$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 02: Remover todas as regras $A \rightarrow \epsilon$ em que A não é a variável inicial

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a$$

$$A \rightarrow B \mid S \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow b \mid \epsilon$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 02: Remover todas as regras $A \rightarrow \epsilon$ em que A não é a variável inicial

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \mid S$$

$$A \rightarrow B \mid S \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow b$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 03: Tratar as regras unitárias eliminando regras do tipo $A \rightarrow B$, se uma regra $B \rightarrow u$ aparecer, adicionamos a regra $A \rightarrow u$, a menos que essa unitária tenha sido previamente removida;

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \mid S$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 03: Tratar as regras unitárias eliminando regras do tipo $A \rightarrow B$, se uma regra $B \rightarrow u$ aparecer, adicionamos a regra $A \rightarrow u$, a menos que essa unitária tenha sido previamente removida;

$$S_0 \rightarrow S \mid \textcolor{red}{ASA} \mid \textcolor{red}{aB} \mid \textcolor{red}{a} \mid \textcolor{red}{SA} \mid \textcolor{red}{AS}$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 03: Tratar as regras unitárias eliminando regras do tipo $A \rightarrow B$, se uma regra $B \rightarrow u$ aparecer, adicionamos a regra $A \rightarrow u$, a menos que essa unitária tenha sido previamente removida;

$$S_0 \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$A \rightarrow B \mid S \mid b$$

$$B \rightarrow b$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 03: Tratar as regras unitárias eliminando regras do tipo $A \rightarrow B$, se uma regra $B \rightarrow u$ aparecer, adicionamos a regra $A \rightarrow u$, a menos que essa unitária tenha sido previamente removida;

$$S_0 \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$A \rightarrow S \mid b \mid ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$B \rightarrow b$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 04: Substituir cada regra $A \rightarrow u_1 u_2 u_3, \dots, u_k$, onde $k \geq 3$ e cada u_i é uma variável ou símbolo terminal, pelas regras

$A \rightarrow u_1 A_1, A_1 \rightarrow u_2 A_2, A_2 \rightarrow u_3 A_3, \dots, A_{k-2} \rightarrow u_{k-1} u_k$.

$S_0 \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$

$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$

$A \rightarrow b \mid ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$

$B \rightarrow b$

$A_1 \rightarrow SA$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 04: Substituir cada regra $A \rightarrow u_1 u_2 u_3, \dots, u_k$, onde $k \geq 3$ e cada u_i é uma variável ou símbolo terminal, pelas regras

$A \rightarrow u_1 A_1, A_1 \rightarrow u_2 A_2, A_2 \rightarrow u_3 A_3, \dots, A_{k-2} \rightarrow u_{k-1} u_k$.

$S_0 \rightarrow A A_1 \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$

$S \rightarrow A A_1 \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$

$A \rightarrow b \mid A A_1 \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$

$B \rightarrow b$

$A_1 \rightarrow SA$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 04: Substituir cada regra $A \rightarrow u_1 u_2 u_3, \dots, u_k$, onde $k \geq 3$ e cada u_i é uma variável ou símbolo terminal, pelas regras

$A \rightarrow u_1 A_1, A_1 \rightarrow u_2 A_2, A_2 \rightarrow u_3 A_3, \dots, A_{k-2} \rightarrow u_{k-1} u_k$.

$S_0 \rightarrow AA_1 \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$

$S \rightarrow AA_1 \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$

$A \rightarrow b \mid AA_1 \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$

$B \rightarrow b$

$A_1 \rightarrow SA$

$U \rightarrow a$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Gramática na forma normal de Chomsky:

$$S_0 \rightarrow AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$S \rightarrow AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$A \rightarrow b \mid AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$B \rightarrow b$$

$$A_1 \rightarrow SA$$

$$U \rightarrow a$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Exemplo 02

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

$$A \rightarrow BAB \mid B \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow 00 \mid \epsilon$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 1:

$$S_0 \rightarrow A$$

$$A \rightarrow BAB \mid B \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow 00 \mid \epsilon$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 2:

$$S_0 \rightarrow A$$

$$A \rightarrow BAB \mid B \mid \epsilon \mid \textcolor{red}{BA} \mid \textcolor{red}{AB} \mid \textcolor{red}{A}$$

$$B \rightarrow 00 \mid \epsilon$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 2:

$$S_0 \rightarrow A \mid \epsilon$$

$$A \rightarrow BAB \mid B \mid \epsilon \mid BA \mid AB \mid A \mid BB$$

$$B \rightarrow 00$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 3:

$$S_0 \rightarrow A \mid \epsilon \mid \textcolor{red}{BAB} \mid \textcolor{red}{B} \mid \textcolor{red}{BA} \mid \textcolor{red}{AB} \mid \textcolor{red}{A} \mid \textcolor{red}{BB}$$
$$A \rightarrow BAB \mid B \mid BA \mid AB \mid A \mid BB$$
$$B \rightarrow 00$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 3:

$S_0 \rightarrow \epsilon \mid BAB \mid B \mid BA \mid AB \mid A \mid BB \mid 00$

$A \rightarrow BAB \mid B \mid BA \mid AB \mid A \mid BB \mid 00$

$B \rightarrow 00$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 3:

$$S_0 \rightarrow \epsilon \mid BAB \mid BA \mid AB \mid A \mid BB \mid 00$$

$$A \rightarrow BAB \mid BA \mid AB \mid A \mid BB \mid 00$$

$$B \rightarrow 00$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 4:

$$S_0 \rightarrow \epsilon \mid BAB \mid BA \mid AB \mid BB \mid 00$$

$$A \rightarrow BAB \mid BA \mid AB \mid BB \mid 00$$

$$B \rightarrow 00$$

$$B_1 \rightarrow AB$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 4:

$$S_0 \rightarrow \epsilon \mid BB_1 \mid BA \mid AB \mid BB \mid 00$$

$$A \rightarrow BB_1 \mid BA \mid AB \mid BB \mid 00$$

$$B \rightarrow 00$$

$$B_1 \rightarrow AB$$

$$U \rightarrow 0$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exemplo

Passo 4:

$$S_0 \rightarrow \epsilon \mid BB_1 \mid BA \mid AB \mid BB \mid UU$$

$$A \rightarrow BB_1 \mid BA \mid AB \mid BB \mid UU$$

$$B \rightarrow UU$$

$$B_1 \rightarrow AB$$

$$U \rightarrow 0$$

Linguagens Formais e Autômatos

Linguagens Livres de Contexto - Exercícios

Transforme as gramáticas para a forma normal de Chomsky.

$$\begin{aligned} G_1 \quad S &\rightarrow TT \mid U \\ T &\rightarrow 0T \mid T0 \mid \# \\ U &\rightarrow 0U00 \mid \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2 \quad S &\rightarrow aSb \mid bY \mid Ya \\ Y &\rightarrow bY \mid aY \mid \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_3 \quad E &\rightarrow E + T \mid T \\ T &\rightarrow T \times F \mid F \\ F &\rightarrow (E) \mid a \end{aligned}$$

Linguagens Formais e Autômatos (CC5220/CCM420)

Aula 09 - Linguagens Livre do Contexto (Normalização)

Prof. Luciano Rossi

Ciência da Computação
Centro Universitário FEI

2º Semestre de 2025