

# Векторное произведение векторов

#конспекты

## Определения

### ⌚ Определение

**Векторное произведение двух векторов** — это операция, результатом которой является *новый вектор*, перпендикулярный обоим исходным векторам.

## Замечания:

- Модуль векторного произведения равен *площади параллелограмма*, построенного на этих векторах, а направление определяется правилом правой руки:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$$

- Мы можем найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$$

- Мы можем вычислить векторное произведение по координатам, используя определитель:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

### ⚠️ Осторожно

Не стоит путать векторное произведение ( $\vec{a} \times \vec{b}$ ) и модуль векторного произведения ( $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ). Результатом векторного

произведения векторов является **вектор**, тогда как при модуле векторного произведения мы получаем **скаляр** полученного вектора.

То есть формула  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$  неприменима для векторного произведения.

## Свойства

---

1.  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{b}$
2.  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
3.  $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$  (аналогично для  $b$ )
4.  $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
5.  $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

## Примеры задач (уровень А-В)

---

Пример 1. (задание 1.279)

- Упростить:  $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$

**Решение:**

Раскроем скобки и воспользуемся 1,2,5 свойствами.

$$\begin{aligned}(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} \\&= \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} = 2\vec{a} \times \vec{b}\end{aligned}$$

**Ответ:**  $2\vec{a} \times \vec{b}$

Пример 2. (задание 1.283)

- $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{k}) = ?$

**Решение:**

Выполним вычисления по действиям: 1 действие —  $(\vec{i} \times \vec{k})$ ; 2 действие —  $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{k})$ .

1. Нам даны координаты векторов, представленные в виде базисных векторов. Следовательно, мы можем воспользоваться определителем:

$$(\vec{i} \times \vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{j}$$

2. Проделаем аналогичные действия для 2 действия:

$$(\vec{i} \times -\vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k}$$

**Ответ:**

*Пример 3. (задание 1.287; ~B)*

- Доказать, что для любых векторов  $\vec{a}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  векторы  $\vec{a} \times \vec{p}, \vec{a} \times \vec{q}, \vec{a} \times \vec{r}$  компланарны.

**Доказательство:**

Пусть вектора  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  являются результатами векторных  $\vec{a} \times \vec{p}, \vec{a} \times \vec{q}, \vec{a} \times \vec{r}$  соответственно. Из определения векторного произведения векторов можно сказать, что все вектора  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  являются ортогональными (перпендикулярными) к вектору  $\vec{a}$ .

Условие компланарности векторов: если векторы лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, они компланарны. А так как наши векторы  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  ортогональны вектору  $\vec{a}$ , они все лежат в одной плоскости, следовательно условие компланарности выполняется.

**Ч.Т.Д.**

## Смежные темы

---

- [Смешанное произведение](#)
- Скалярное произведение векторов
- Векторы

## Источники

---

- [Заочник. Разбор векторного произведения векторов с хорошими примерами](#)