Матрицы 1

#конспекты

Цитата

"В тесте я попросил Вас найти определитель матрицы 2×3. Забавно, что некоторые всерьёз попытались это сделать."
— Профессор математики, имя неизвестно

Определения

Определение

Матрица A размера (порядка) $m \times n$ (читается "m на n") — это совокупность $m \cdot n$ элементов a_{ij}, организованных в m строк и n столбцов, где i - номер строки $(1 \leq i \leq m)$, а j — номер столбца $(1 \leq j \leq n)$

Нотация

$$A = A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Замечание

Нотация матриц может быть следующая: [ ], || ||;

Виды матриц (основные виды)

- *квадратная* — число строк равно числу столбцов $(m = n)$:^1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- *матричная строка* — кол.-во столбцов равно 1 $(m = 1)$:
  $A = (a_{11}, a_{12}, a_{13} \ldots a_{1n})$
- диагональная матрица — квадратная матрица, в которой все недиагональные элементы равны 0 $(aij = 0, npu\ i \neq j)$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 92 \end{pmatrix}$$

- *верхнетреугольная матрица* — квадратная матрица, все элементы которой *под главной диагональю* равны 0 $(a_{ij} = 0, npu\ i > j)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

- *нижнетреугольная матрица* — квадратная матрица, все элементы которой *над главной диагональю* равны 0 $(a_{ij} = 0, npu\ i < j)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- *единичная матрица* — матрицы, где все диагональные элементы равны 1 $(a_{ij} = 1, npu\ i = j)$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами

Линейные операции

Сложение матриц одинаковой размерности

$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$

Умножение на число

$k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$

Дополнительные (нелинейные) операции

Транспонирование матрицы

Определение

A^T — матрица, полученная из исходной матрицы *A* заменой строк на столбцы. $(a_{ij} = a_{ji})$

Пример 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 12 & 6 & -7 \\ 0 & 81 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ -2 & 6 & 81 \\ 4 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

Пример 2:

$$(1 \quad 2 \quad -5 \quad 12)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Свойства транспонирования:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ *(порядок меняется!)*

Умножение матриц

Abstract

Произведение матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times k$ есть матрица C размера $m \times k$.

Важное условие: число *столбцов* первой матрицы должно быть равно числу *строк* второй матрицы (размерности $m \times k = k \times n$).

Проще говоря, при умножении матриц друг на друга идет умножение *каждой строки* первой матрицы с *каждым столбцом* второй матрицы.

Пример:

Общий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot c_1 & b_1 \cdot c_2 \\ a_2 \cdot c_1 & b_2 \cdot c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}7 & 8\\ 9 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1\cdot 7+2\cdot 9+3\cdot 2) & (1\cdot 8+2\cdot 1+3\cdot 3)\\ (4\cdot 7+5\cdot 9+6\cdot 2) & (4\cdot 8+5\cdot 1+6\cdot 3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}31 & 19\\ 85 & 55\end{pmatrix}$$

Свойства умножения матриц:

- Ассоциативность: $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$
- Дистрибутивность: $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$
- **НЕ**коммутативность: $A\cdot B \neq B\cdot A$ ($AB = BA$, если обе матрицы квадратные.
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B$.

Элементарные преобразования матриц

Определение

Элементарные преобразования матрицы — такие преобразования матрицы, в результате которых сохраняется эквивалентность матриц.

К *элементарным преобразованиям* матрицы относятся:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы (1);
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля (умножается именно ряд матрицы, а не вся матрица!) (2);
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число (3).

> Здесь под *рядами* имеются в виду как **строки**, так и **столбцы**.

> Цифры в скобках здесь нужны, чтобы далее вам было удобнее видеть, какие именно преобразования были применены в примерах.

> Две матрицы называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. *Запись*: $A \sim B$

При помощи элементарных преобразований мы можем привести любую матрицу к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической*, например

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Пример. Привести к каноническому виду матрицу

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \overset{-5,\ 1}{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \overset{-2,\ -3}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix}} \sim$$

$$\sim \underset{\qquad 15\ \ 12\ \ 13}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix}} \sim \underset{+3}{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \underset{-1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коряво, конечно, но, думаю, сойдёт.
Разберём, какие свойства применялись:

- сначала мы поменяли местами столбцы матрицы (1-ое преобразование);
- далее воспользовались 3-им преобразованием два раза.
- в четвертой матрице мы умножили 2-ой столбец на $\frac{1}{5}$, 3-ий столбец на $\frac{1}{2}$, а 4-ый на $\frac{1}{3}$ (2-ое преобразование);
- и, наконец, снова применили 3-е преобразование два раза.

К нелинейным операциям относят также *вычисление обратной матрицы*, однако данная тема достаточно обширная, поэтому для нее выделено отдельное место в статье.

Для чего нужно?

Элементарные преобразования кажутся достаточно бесполезными, однако иногда они достаточно сильно упрощают вычисление определителя матрицы.
Также элементарные позволят нам в будущем находить *ранг матрицы*.

Определитель матрицы и обратная матрица

Определитель матрицы

Каждой **квадратной матрице** порядка n можно поставить в соответствие число, называемое определителем (детерминантом) этой матрицы. Определитель матрицы $A = (a_{ij})$ обозначается

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

или коротко $\det A$. Могут также использоваться следующие обозначения:

- $\det(a_{ij})$
- $|A|$
- $|a_{ij}|$

Важно!

Как было сказано выше, определитель можно найти только у **квадратных матриц**. У других матриц определитель вычислить **нельзя**.

Замечания

- Определитель треугольной и диагональной матрицы равен произведению элементов её главной диагонали.
- Определитель единичной матрицы $\det E = 1$.

Теорема

Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей $(det(A \cdot B) = detA \cdot detB)$

Для чего нужно?

Определитель нужен для расчёта обратных матриц, речь о которых пойдёт далее.

Обратная матрица

Для начала немного определений и понятий:

- Матрица A^{-1} называется *обратной* (к) матрице А, если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, где E — единичная матрица. Если для матрицы A существует обратная, то A называется *обратимой*.
- Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если её определитель не равен нулю (и *вырожденной* — в противном случае).

Теорема (условие существования обратной матрицы)

Для того, чтобы для квадратной матрицы A *существовала обратная матрица*, необходимо и достаточно, чтобы A была *невырожденной* (то есть $detA \neq 0$).

Обратную матрицу можно найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \tilde{A},$$

где матрица

$$\tilde{A} = (A_*)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *присоединённой* к матрице A. Она получена путём транспонированием матрицы A_*, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} (определителя) матрицы A.
Матрицу A_* также называют *союзной к матрице* A.

Звучит сложно, поэтому попробуем разобраться в этом на простом примере.

Пример

- Найти матрицу, обратную матрице $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
  Решение:
  Вспомним формулу: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$:
  Для начала найдём $\det A$:
  $\det A = (0 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = -2$

Далее нам необходимо найти матрицу алгебраических дополнений элементов матрицы A
:

- $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3$
- $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2$
- $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1$
- $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 0 = 0$

Таким образом, матрица алгебраических дополнений A_* элементов матрицы A:

$$A_* = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Транспонируем матрицу A_* и получим матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Нам известно всё необходимо, чтобы вычислить обратную матрицу A^{-1}, поэтому воспользуемся вышеуказанной формулой:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь сделаем проверку, что наша обратная матрица правильно высчитана. Как? Вспомним определение обратной матрицы:
Матрица A^{-1} называется обратной (к) матрице А, если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, где E — единичная матрица.
Пользуясь определением, мы сможем проверить, правильно ли мы рассчитали обратную матрицу. Если при умножении матрицы на её обратную матрицу мы получим единичную матрицу, значит мы решили всё верно. Итак:

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \\ -2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & -2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

В итоге имеем:

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Конечный результат — единичная матрица, значит всё верно. Отлично! Мы смогли правильно вычислить обратную матрицу.
(Для вычислений лучше использовать случай, когда дробный множитель находится за матрицей, а не в ней, то есть $-\frac{1}{2}$ вносится в матрицу только в самом конце проверки).

Для чего нужно?

Обратная матрица — важный инструмент для решения *матричных уравнений*, речь о которых пойдёт в следующей статье.

Смежные темы

- Определители
- Алгебраические дополнения
- Матрицы 2

Источники

- Заочник — основы матриц; операции и действия с матрицами
- Заочник — как вычислять обратные матрицы
- Заочник — хорошее дополнение по матричным операциям и выражениям
- Хабр. Подробная статья про матрицы, затрагивающая огромную часть теории по ним (для тех, кому всего вышеуказанного было недостаточно :D)
  Credits: @mixxturka