Векторное произведение векторов

#конспекты

Определения

Определение

Векторное произведение двух векторов — это операция, результатом которой является *новый вектор*, перпендикулярный обоим исходным векторам.

Замечания:

- Модуль векторного произведения равен *площади параллелограмма*, построенного на этих векторах, а направление определяется правилом правой руки:
  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$
- Мы можем найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:
  $S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}\,;\vec{b}})$
- Мы можем вычислить векторное произведение по координатам, используя определитель:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Свойства

---

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{b}$
2. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
3. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ (*аналогично для* b)
4. $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

5. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

Примеры задач (уровень A-B)

Пример 1. (задание 1.279)

- Упростить: $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$
  Решение:
  Раскроем скобки и воспользуемся *1,2,5 свойствами*.

  $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} = 2$

  Ответ: $\boxed{2\vec{a} \times \vec{b}}$

Пример 2. (задание 1.283)

- $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{k}) = ?$
  Решение:
  Выполним вычисления по действиям: 1 действие — $(\vec{i} \times \vec{k})$; 2 действие — $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{k})$.

1. Нам даны координаты векторов, представленные в виде базисных векторов. Следовательно, мы можем воспользоваться определителем:

$$(\vec{i} \times \vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{j}$$

2. Проделаем аналогичные действия для 2 действия:

$$(\vec{i} \times -\vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k}$$

   Ответ: $\boxed{-\vec{k}}$

Пример 3. (задание 1.287; ~B)

- Доказать, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ векторы $\vec{a} \times \vec{p}$, $\vec{a} \times \vec{q}$, $\vec{a} \times \vec{r}$ компланарны.
  Доказательство:

Пусть вектора $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ - являются результатами векторных $\vec{a} \times \vec{p}$, $\vec{a} \times \vec{q}$, $\vec{a} \times \vec{r}$ соответственно. Из определения векторного произведения векторов можно сказать, что все вектора $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ являются ортогональными (перпендикулярными) к вектору $\vec{a}$.
Условие компланарности векторов: если векторы лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, они компланарны. А так как наши векторы $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ ортогональны вектору $\vec{a}$, они все лежат в одной плоскости, следовательно условие компланарности выполняется.
Ч.Т.Д.

Смежные темы

- Смешанное произведение
- Скалярное произведение *векторов*
- Векторы

Источники

- математика для заочника