Mellin 変換について

柴田研究室　小林慶鑑

Mellin　変換、逆mellin 変換

- Mellin 変換

$$\hat{f}(n) = \int_0^\infty x^{n-1} f(x)dx$$

- 逆Mellin　変換

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-n}\hat{f}(n)dn$$

（nは複素数、cは任意実数）

Motivation

- Mellin 変換を用いると、evolution equation

$$\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} p\ (x, Q^2) = \sum_{p'} P_{pp'}(x, \alpha_s(Q^2)) \otimes p'\ (x, Q^2)$$

の右辺が積の形でかける。

$$A(x) \otimes B(x) = \int_x^1 \frac{dy}{y} A(\frac{x}{y}) B(y)$$

→方程式を解くには逆Mellin変換が必要になる

逆Mellin変換

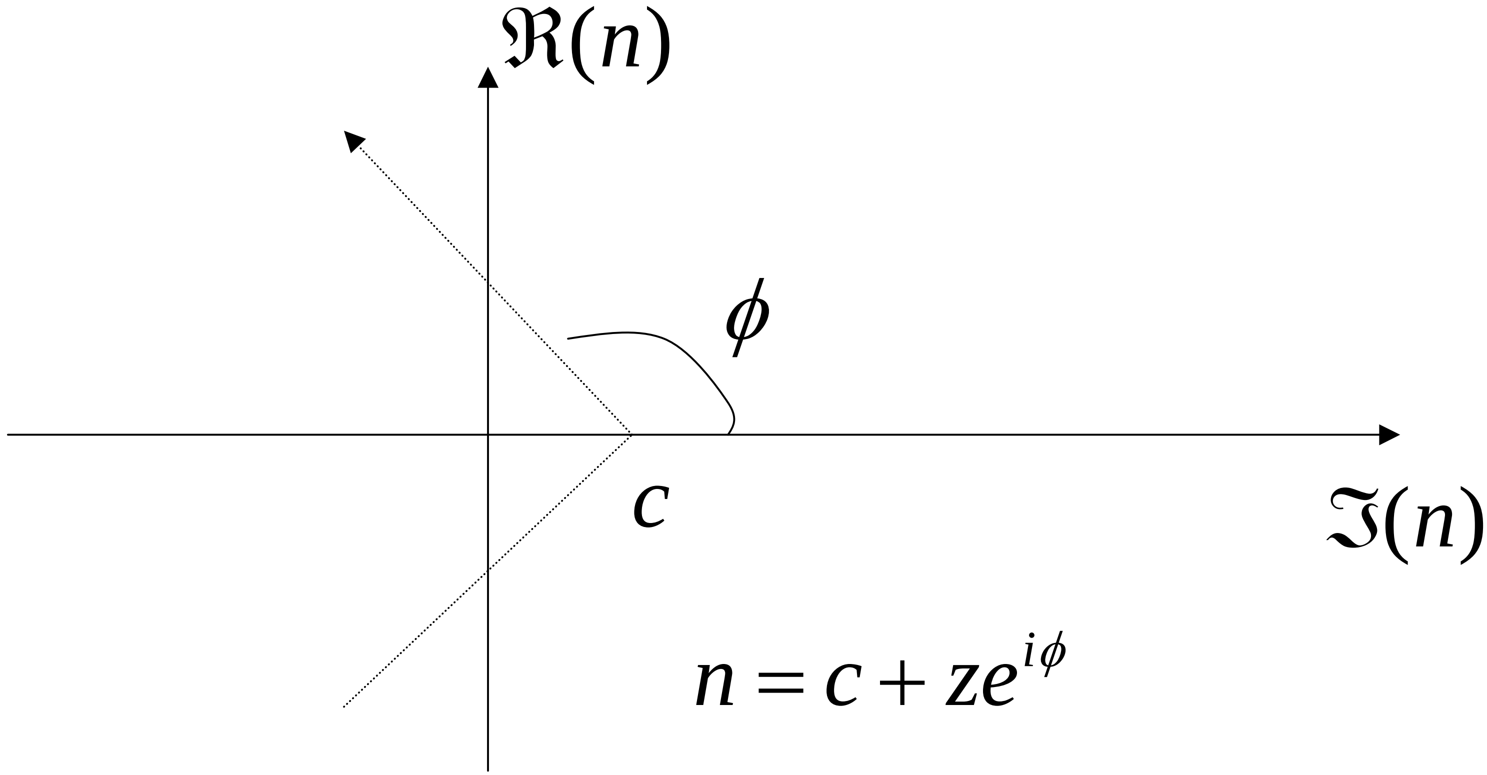
- 逆Mellin変換

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-n}\hat{f}(n)dn$$

の積分変数nを、実定数c, ϕ を用いて $n = c + ze^{i\phi}$
とおくことによりnから実変数zに積分変数を変換

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Im}[e^{i\phi}x^{1-c-z\exp(i\phi)}\hat{f}(n = c + ze^{i\phi})]dz \quad (※)$$

- (*)式の積分経路は、下図の用になる。



$$n = c + ze^{i\phi}$$

- 適切な定数c、ϕを用いて、(*)の積分を行うことによりf(x)が求まる。

逆Mellin変換の例

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{f}(n) = \frac{\pi}{\sin(\pi n)}$$

互いに解析的に変換された式が求まる

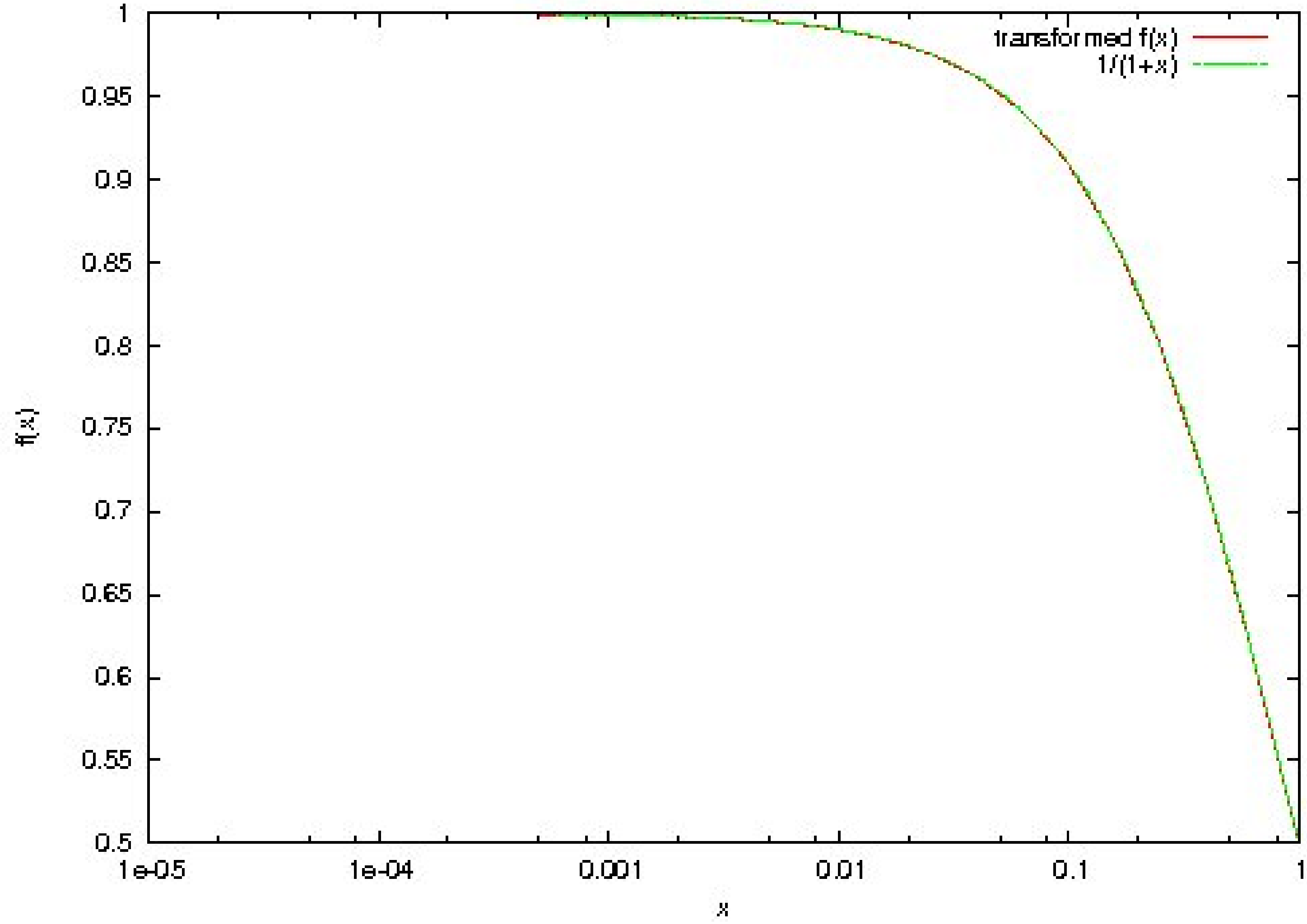
逆Mellin変換の例

$$\hat{f}(n) = \frac{\pi}{\sin(\pi n)}$$

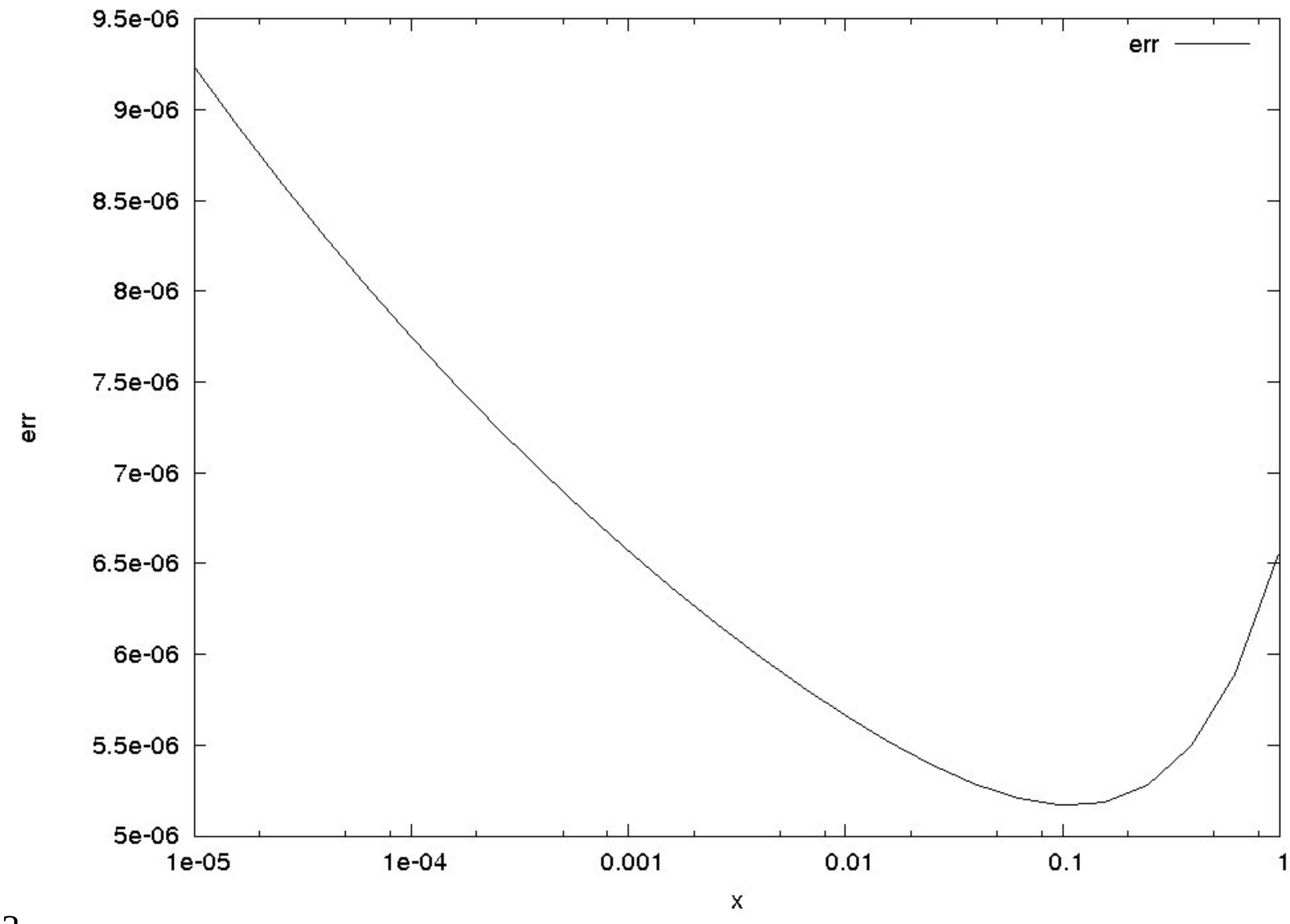
の逆Mellin変換をガウス・ルジャンドル積分を用いて行う

・変換パラメータ
　ｃ＝１．１，ϕ ＝3/4 π
・ガウス積分パラメータ
　区間分割数n=10000
　分点数m=5
　積分範囲(10^-7<z<100)

数値解と解析解の比較


transformed f(x)
1/(1+x)
f(x)
x
1
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
1e-05
1e-04
0.001
0.01
0.1
1

数値解と解析解の比較ー誤差



誤差の原因

- 小さいx→被積分関数の振動
- 大きなx→被積分関数の発散

変換パラメータϕの検証

- (*)式の被積分関数

$$e^{i\phi}x^{1-c-z\exp(i\phi)} = \exp(c\log\frac{1}{x})\exp(z\cos\phi\log\frac{1}{x})$$
$$*\exp(iz\sin\phi\log\frac{1}{x})$$

に着目

・zが大きくなるにつれこの関数が小さくなる
　ようパラメータ設定→ $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ を採用

他の文献との比較

文献	c	ϕ	Zmax
[1]	1.9	$3/4\pi$	80
[2]	1.1	$3/4\pi$	30

今回使用したパラメータ

	1.1	$3/4\pi$	100

今後の課題

- 適切なパラメータの設定
- 実際のPDFへの適用
- ….

参考文献

- [1] A. Vogt Comput.Phys.Commun.170:65-92,2005.

- [2] M.Miyama and S.Kumano,Comput.Phys.Commun.94(1996) 185