EE881 - Princípios de Comunicações I

Henrique Koji Miyamoto

1 Introdução e objetivos

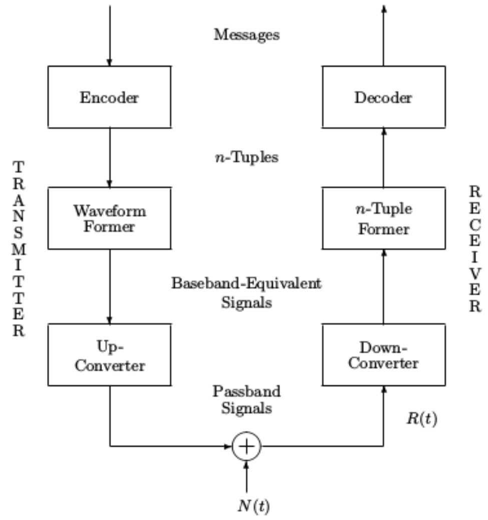

Figura 1: Visão geral do problema de comunicação.

2 Projeto do receptor para observações no tempo discreto: primeira camada

2.1 Introdução

O sistema de comunicação considerado nessa seção é composto pelas seguintes partes:

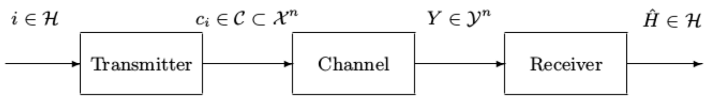

Figura 2: Sistema de comunicação considerado nessa análise.

- A **fonte** produz mensagens a serem transmitidas. É modelada como uma variável aleatória H que assume valores no conjunto de índices $\mathcal{H} = \{0, 1, ..., m-1\}$, cada um com probabilidade $P_H(i)$.
- O **canal** é descrito por um alfabeto de entrada $\mathcal{X}$, um alfabeto de saída $\mathcal{Y}$ (assumiremos $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$) e uma descrição estatística da saída dada a entrada (verossimilhança). Se $Y \in \mathcal{Y}$ é uma variável aleatória discreta, descrevemos a distribuição de probabilidade $P_{Y|X}(\cdot|x)$; se é uma variável aleatória contínua, descrevemos a função densidade de probabilidade $f_{Y|X}(\cdot|x)$[1].
- O **transmissor** é modelado como uma aplicação do conjunto de mensagens $\mathcal{H} = \{0, ..., m-1\}$ no conjunto de sinais (constelação de sinais) $\mathcal{C} = \{c_0, ..., c_{m-1}\}$, em que $c_i \in \mathcal{X}^n$ para algum n.
- A tarefa do **receptor** é "adivinhar" a realização da hipótese H a partir da realização da saída do canal. O palpite do receptor é denotado $\hat{i}$ e a variável aleatória associada a esse processo aleatório é $\hat{H} \in \mathcal{H}$.

[1] Em geral, o canal não tem memória, i.e., a probabilidade da ocorrência de uma sequência de variáveis aletórias na saída é o produto das probabilidades de ocorrência de cada variável.

2.2 Teste de hipóteses

Teste de hipóteses é o problema de "adivinhar" a realização da variável aleatória $H \in \mathcal{H}$ com base na realização da variável aleatória Y (obseravação). É o mesmo que *decodificação* ou *tomada de decisão*. Em comunicações, a hipótese H é a mensagem transmitida e a observação Y é a saída do canal.

Objetivo: Queremos estabelecer uma estratégia de decisão que maximiza a probabilidade de acerto $P_c = Pr\{\hat{H} = H\}$, ou, equivalentemente, minimiza a probabilidade de erro $P_e = Pr\{\hat{H} \neq H\} = 1 - P_c$.

Da regra de Bayes, temos

$$P_{H|Y}(i|y) = \frac{P_H(i) f_{Y|H}(y|i)}{f_Y(y)}$$

em que $f_Y(y) = \sum_i P_H(i) f_{Y|H}(y|)$. Ao observar $Y = y$, a probabilidade de $H = i$ vai do *prior* (probabilidade *a priori*) $P_H(i)$ para o *posterior* (probabilidade *a posteriori*) $P_{H|Y}(i|y)$.

Regra MAP (máximo *a posteriori*): A decisão ótima para $\hat{H} = i$, que maximiza a probabilidade de acerto, é a que maximiza a probabilidade a posteriori $P_{H|Y}(i|y)$[2].

$$\boxed{\hat{H}(y) = \arg\max_{i \in \mathcal{H}} P_{H|Y}(i|y)}$$

A probabilidade de acerto da variável aleatória $P_{H|Y}(\hat{H}(Y)|Y)$ é

$$P_c = \mathbb{E}[P_{H|Y}(\hat{H}(Y)|Y)] = \int_y P_{H|Y}(\hat{H}(Y)|Y) f_Y(y) dy$$

Regra ML (máxima verossimilhança): É uma regra de decisão subótima que maximiza a verossimilhança $f_{Y|H}(y|i)$. Pode ser usada quando os *priors* são uniformes (neste caso, MAP $\equiv$ ML) ou quando são desconhecidos.

$$\boxed{\hat{H}(y) = \arg\max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i)}$$

2.2.1 Teste de hipóteses binário

Trata-se do caso particular em que $\mathcal{H} = \{0, 1\}$.

Regra MAP:

$$P_{H|Y}(1|y) = \frac{f_{Y|H}(y|1) P_H(1)}{f_Y(y)} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \frac{f_{Y|H}(y|0) P_H(0)}{f_Y(y)} = P_{H|Y}(0|y)$$

$$\boxed{f_{Y|H}(y|1) P_H(1) \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} f_{Y|H}(y|0) P_H(0)}$$

$$\underbrace{\Lambda(y)}_{\text{razão de verossimilhança}} := \frac{f_{Y|H}(y|1)}{f_{Y|H}(y|0)} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \frac{P_H(0)}{P_H(1)} =: \underbrace{\eta}_{\text{limiar}}$$

Regra ML:

$$\boxed{f_{Y|H}(y|1) \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} f_{Y|H}(y|0)}$$

Uma função $\hat{H} : \mathcal{Y} \to \mathcal{H}$ é chamada *função de decisão* ou *função de decodificação*. Podemos descrevê-las em função de *regiões de decisão*:

$$\mathcal{R}_i = \{y \in \mathcal{Y} : \hat{H}(y) = i\}$$

.

Dessa forma, a probabilidade de erro pode ser computada:

$$P_e(0) = Pr\{Y \in \mathcal{R}_1 | H = 0\} = \int_{\mathcal{R}_1} f_{Y|H}(y|0) dy$$

$$P_e(1) = Pr\{Y \in \mathcal{R}_0 | H = 1\} = \int_{\mathcal{R}_0} f_{Y|H}(y|1) dy$$

$$\boxed{P_e = P_e(1) P_H(1) + P_e(0) P_H(0)}$$

[2] Se ocorre um empate, não faz diferença por qual hipótese escolhemos, já que elas têm a mesma probabilidade de erro.

2.2.2 Teste de hipóteses m-ário

Esse é o caso mais geral, em que $\mathcal{H} = \{0, 1, ..., m-1\}$.
Regra MAP:

$$\boxed{\hat{H}_{MAP}(y) = \arg\max_{i \in \mathcal{H}} P_{H|Y}(i|y) = \arg\max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i) P_H(i)}$$

Regra ML:

$$\boxed{\hat{H}_{ML}(y) = \arg\max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i)}$$

Regiões de decodificação e probabilidade de erro:

$$\mathcal{R}_i := \{y : \hat{H}(y) = i\}$$

$$P_e(i) := Pr\{\hat{H} \neq H | H = i\} = \int_{R_i^c} f_{Y|H}(y|i) dy = 1 - \underbrace{\int_{R_i} f_{Y|H}(y|i) dy}_{P_c(i)}$$

$$P_e := Pr\{\hat{H} \neq H\} = \sum_{i=0}^{m-1} P_H(i) P_e(i)$$

2.3 A função Q

A função Q é definida como

$$Q(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

Propriedade básica: Se Z é uma variável aleatória com distribuição normal de média nula e variância unitária, $Z \sim N(0, 1)$, então $Pr\{Z \geq x\} = Q(x)$. Se Z tem média m e variância σ^2, $Z \sim N(m, \sigma^2)$, então $Pr\{Z \geq x\} = Q(\frac{x-m}{\sigma})$.

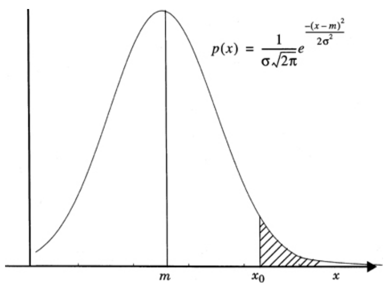

Figura 3: Distribuição normal de média m e variância σ^2.

Outras propriedades da função Q:

- Se $Z \sim N(0, 1)$, $F_Z := Pr\{Z \leq z\} = 1 - Q(z)$.
- $Q(0) = 1/2$, $Q(-\infty) = 1$, $Q(\infty) = 0$.
- $Q(-x) + Q(x) = 1$

2.4 Projeto de receptor para canal AWGN no tempo-discreto

Considere comunicação por um canal ruidoso no tempo-discreto. A hipótese $H \in \mathcal{H}$ representa uma mensagem gerada aleatoriamente. O transmissor mepeia $H = i$ em uma n-upla $c_i \in \mathbb{R}^n$. O canal adiciona um vetor ruído aleatório Z com média nula e componentes de distribuição gaussiana independentes e identicamente distribuídas de variância σ^2, i.e., $Z \sim N(0, \sigma^2 I_n)$. A observação é $Y = c_i + Z$.

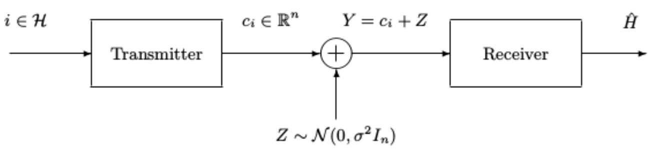

Figura 4: Diagrama de comunicação por um canal ruidoso.

2.4.1 Decisão binária para observação escalar

Seja a mensagem $H \in \{0,1\}$ com um transmissor que mapeia $H=0 \mapsto c_0 \in \mathbb{R}$ e $H=1 \mapsto c_1 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} H=0: \quad Y \sim N(c_0,\sigma^2) \to f_{Y|H}(y|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(y-c_0)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ H=1: \quad Y \sim N(c_1,\sigma^2) \to f_{Y|H}(y|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(y-c_1)^2}{2\sigma^2}\right\} \end{cases}$$

Regra MAP:

$$\Lambda(y) = \frac{f_{Y|H}(y|1)}{f_{Y|H}(y|0)} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \eta \Rightarrow \ln\Lambda(y) = \frac{(y-c_0)^2-(y-c_1)^2}{2\sigma^2} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \ln\eta \Rightarrow y\frac{c_1-c_0}{\sigma^2} + \frac{c_0^2-c_1^2}{2\sigma^2} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \ln\eta$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir $c_1 > c_0$ e escrever:

$$\boxed{y \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{c_1-c_0}\ln\eta + \frac{c_0+c_1}{2} =: \theta}$$

Regra ML:
Se $P_H(0)=P_H(1)=\frac{1}{2}$, então MAP $\equiv$ ML. A regra é de *distância mínima*:

$$\boxed{y \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \frac{c_0+c_1}{2}}$$

Probabilidade de erro

$$P_e = P_H(0)P_e(0) + P_H(1)P_e(1) = P_H(0)Q\left(\frac{\theta-c_0}{\sigma}\right) + P_H(1)Q\left(\frac{\theta-c_1}{\sigma}\right)$$

No caso $P_H(0)=P_H(1)=\dfrac{1}{2}$, temos $\dfrac{\theta-c_0}{\sigma} = \dfrac{c_1-\theta}{\sigma}$, logo:

$$P_e = Q\left(\frac{c_1-c_0}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

2.4.2 Decisão binária para observação de n-uplas

Nesse caso, $H \in \{0,1\}$ e $c_i \in \mathbb{R}^n,\ i=0,1$. O ruído adicionado pelo canal é $Z \sim N(0,\sigma^2 I_n)$.

$$\begin{cases} H=0: \quad Y = c_0 + Z \sim N(c_0,\sigma^2 I_n) \to f_{Y|H}(y|0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\|y-c_0\|^2}{2\sigma^2}\right\} \\ H=1: \quad Y = c_1 + Z \sim N(c_1,\sigma^2 I_n) \to f_{Y|H}(y|1) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\|y-c_1\|^2}{2\sigma^2}\right\} \end{cases}$$

Regra MAP:

$$\Lambda(y) = \frac{f_{Y|H}(y|1)}{f_{Y|H}(y|0)} = \exp\left\{\frac{\|y-c_0\|^2-\|y-c_1\|^2}{2\sigma^2}\right\} \Rightarrow \ln\Lambda(y) = \langle y, \frac{c_1-c_0}{\sigma^2}\rangle + \frac{\|c_0\|^2-\|c_1\|^2}{2\sigma^2}$$

$$\ln\Lambda(y) \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \ln\eta \Rightarrow \langle y, \frac{c_1-c_0}{\sigma^2}\rangle + \frac{\|c_0\|^2-\|c_1\|^2}{2\sigma^2} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \ln\eta \Rightarrow \boxed{\langle y, \underbrace{\frac{c_1-c_0}{d}}_{\psi}\rangle \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{d}\ln\eta + \frac{\|c_1\|^2-\|c_0\|^2}{2d} =: \theta}$$

As regiões de decisão $\mathcal{R}_0$ e $\mathcal{R}_1$ são delimitadas pelo plano afim $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle y,\psi\rangle = \theta\}$.

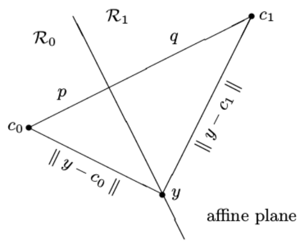

Figura 5: Visualização geométrica das regiões de decodificação.

É possível mostrar que as distâncias p e q (Figura 5) são tais que

$$p = \frac{d}{2} + \frac{\sigma^2 \ln \eta}{d} \text{ e } q = \frac{d}{2} - \frac{\sigma^2 \ln \eta}{d}$$

Regra ML: Se $P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$, então MAP $\equiv$ ML. A regra é de *distância mínima*:

$$\boxed{\|y - c_0\| \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \|y - c_1\|}$$

Observações:

- Quando $P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$, temos $p = q$ e o plano afim é equidistante de c_0 e c_1.
- O vetor ψ não é afetado pelos priors, mas o limiar θ é, i.e., os priors afetam a posição, mas não a orientação do plano afim.
- O efeito anterior é aumentado quando a variância σ^2 aumenta.

Probabilidade de erro
Podemos deduzir as probabilidades de erro geometricamente a partir da Figura 5. Lembrando que $\langle Z, \psi \rangle \sim N(0, \sigma^2)$.

$$P_e(0) = Pr\{\langle Z, \psi \rangle \geq p\} = Q\left(\frac{p}{\sigma}\right)$$

$$P_e(1) = Pr\{\langle Z, \psi \rangle \geq q\} = Q\left(\frac{q}{\sigma}\right)$$

$$P_e = P_H(0)\left(\frac{p}{\sigma}\right) + P_H(1)\left(\frac{q}{\sigma}\right)$$

Para o caso $P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$:

$$P_e = P_e(0) = P_e(1) = Pr\{\langle Z, \psi \rangle \geq \frac{d}{2}\} = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

2.5 Decisão m-ária para observação de n-uplas

Nesse caso, $H = i,\ i \in \{0, ..., m-1\}$ e $c_i \in \mathbb{R}^n$. Assumiremos a simplificação $P_H(i) = \frac{1}{m}$.
Receptor ML:

$$\hat{H}_{ML} = \arg\max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i) = \arg\max_{i \in \mathcal{H}} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\|y - c_i\|^2}{2\sigma^2}\right\} = \boxed{\arg\min_{i \in \mathcal{H}} \|y - c_i\|}$$

Mais uma vez, a regra de decisão para o receptor ML é de distância mínima. A menos de empates, a região de decisão $\mathcal{R}_i$ é a região de Voronoi[3].

Exemplo 2.1. *Modulação **m-PAM** (pulse amplitude modulation): a constelação de sinais é $\{c_0, c_1, ..., c_{m-1}\} \in \mathbb{R}$. Para canal AWGN e receptor ML, a regra de decodificação é de distância mínima. A decodificação é errada se o ruído for maior que $d = c_i - c_{i-1}$.*
Para os pontos da ponta, c_0 e c_{m-1}:

$$P(i) = Pr\left\{Z > \frac{d}{2}\right\} = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right),\ i = 0, m-1$$

Para os demais pontos:

$$P(i) = Pr\left\{\left\{Z \geq \frac{d}{2}\right\} \cup \left\{Z < -\frac{d}{2}\right\}\right\} = 2Pr\left\{Z \geq \frac{d}{2}\right\} = 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right),\ i = 1, ..., m-2$$

Assim:

$$P_e = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m} P_e(i) = \frac{2}{m} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) + \frac{m-2}{2} 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = \left(2 - \frac{2}{m}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

[3] A região de Voronoi do ponto $c_i \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto $R(c_i) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|c_i - x\| \leq \|c_i - y\| \forall y \in \mathbb{R}^n\}$.

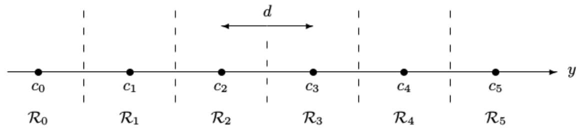

Figura 6: Exemplo de modulação 6-PAM, com regiões de decodificação.

Exemplo 2.2. *Modulação* ***m-QAM*** *(quadrature amplitude modulation): a constelação de sinais é formada por conjuntos de* $(2n)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ *pontos em quadratura no* $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.
Para o caso simples 4-QAM (Figura 7), a probabilidade de acerto de cada ponto é

$$P_c(i) = Pr\left\{\left\{Z_1 \leq -\frac{d}{2}\right\} \cap \left\{Z_2 \geq -\frac{d}{2}\right\}\right\} = \left[1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right]^2, \ i = 0, 1, 2, 3$$

$$P_e = P_e(i) = 1 - P_c(i) = 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) - Q^2\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

Também seria possível calcular a probabilidade de erro como:

$$P_e = Pr\left\{Z_1 \leq -\frac{d}{2}\right\} + Pr\left\{Z_2 \leq -\frac{d}{2}\right\} - Pr\left\{\left\{Z_1 \leq -\frac{d}{2}\right\} \cap \left\{Z_2 \geq -\frac{d}{2}\right\}\right\}$$

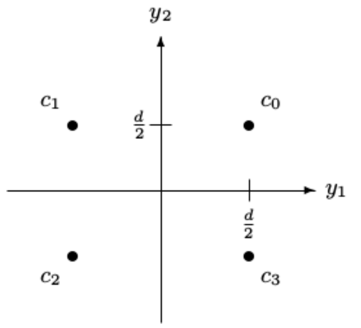

Figura 7: Exemplo de modulação 4-QAM.

2.6 Irrelevância e estatística suficiente

Definição 2.1. *Três variáveis aleatórias* U, V, W *formam uma* ***cadeia de Markov*** *nesssa ordem,* $U \to V \to W$, *se a distribuição de* W, *dados* U *e* V, *é independente de* U, *i.e.,* $P_{W|U,V}(w|u,v) = P_{W|V}(w|v)$.

Seja Y a observação e $T(Y)$ uma função de Y. Note que $H \to Y \to T(Y)$ é sempre verdade, mas $H \to T(Y) \to Y$ não é.

Definição 2.2. *Seja* $T(Y)$ *uma variável aleatória obtida do processamento da observação* Y. *Se* $H \to T(Y) \to Y$ *forma uma cadeia de Markov, então T(Y) é uma* ***estatística suficiente*** *para a hipótese* H.

Teorema 2.1. *Se* $T(Y)$ *é uma estatística suficiente para* H, *então um decodificador MAP que estima* H *a partir de* $T(Y)$ *obtém a mesma probabilidade de erro que um que estima* H *a partir de* Y, *i.e.,*

$$P_{H|Y}(i|y) = P_{H|Y,T}(i|y,t) = P_{H|T}(i|t)^4, \quad t = T(y)$$

Exemplo 2.3. *Considere o esquema de comunicação mostrado a seguir, em que* H, Z_1, Z_2 *são variáveis aleatórias independentes. Um receptor MAP que observa* Y_1 *obtém a mesma probabilidade de erro que um que observa* Y_1 *e* Y_2. *Nesse caso,* Y_1 *é uma estatística suficiente e* Y_2 *é uma estatística irrelevante.*

Seja um decodificador MAP que, observando Y, sempre realiza a mesma decisão que se observasse apenas $T(Y)$. Isso não implica que $H \to T(Y) \to Y$, pois, para termos cadeia de Markov, é necessário que $P_{H|Y,T(Y)}(i|y,t) = P_{H|T(Y)}(i|t)$ para todos os valores de i, y, t. Por outro lado, para que y não tenha efeito na decisão MAP, basta que, para todo y, t, o máximo de $P_{H|Y,T(Y)}(\cdot|y,t)$ e de $P_{H|T(Y)}(\cdot|t)$ sejam atingidos para o mesmo i.

Teorema 2.2. *(Teorema da fatoração de Fisher-Neyman) Suponha que* $g_0, g_1, ..., g_{m-1}$ *e* h *são funções tais que, para cada* $i \in \mathcal{H}$, *vale*

$$f_{Y|H}(y|i) = g_i(T(Y))h(y).$$

Então T *é uma estatística suficiente.*

[4] A primeira igualdade vale, pois T é função de Y. A segunda vale, pois $H \to T(Y) \to Y$.

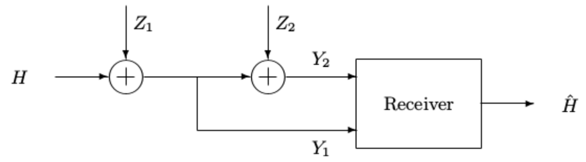

Figura 8: Esquema de comunicação com estatísticas suficiente e irrelevante.

2.7 Limitantes de probabilidade de erro

2.7.1 Limitante da união

Usaremos o limitante da união para aproximar cálculos de probabilidade de erro em testes de várias hipóteses.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{A}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} P(\mathcal{A}_i).$$

A probabilidade de erro exata é dada pela avaliação da integral abaixo para todo i. No entanto, nem sempre é fácil avaliar a integral.

$$P_e(i) = Pr\{Y \in \mathcal{R}_i^c | H = i\} = \int_{\mathcal{R}_i^c} f_{Y|H}(y|i)dy.$$

Defina

$$\mathcal{B}_{i,j} := \{y : P_H(j) f_{Y|H}(y|j) \geq P_H(i) f_{Y|H}(y|i)\}, \quad i \neq j$$

o conjunto de y para os quais a decodificação MAP escolhe j sobre i.

Usaremos o fato de que

$$\mathcal{R}_i^c \subseteq \bigcup_{j \neq i} \mathcal{B}_{i,j}{}^5.$$

Então podemos escrever o limitante da união:

$$P_e(i) = Pr\{Y \in \mathcal{R}_i^c | H = i\} \leq Pr\{Y \in \bigcup_{j \neq i} \mathcal{B}_{i,j} | H = i\} \leq \sum_{j \neq i} Pr\{Y \in \mathcal{B}_{i,j} | H = i\} = \sum_{j \neq i} \int_{\mathcal{B}_{i,j}} f_{Y|H}(y|i)dy$$

O ganho é que é tipicamente mais fácil integrar sobre $\mathcal{B}_{i,j}$ que sobre $\mathcal{R}_i^c$.

Exemplo 2.4. *Modulação* ***m-PSK*** *(phase-shift keying): os pontos distribuiídos em um círculo, de tal forma que* $c_i = \sqrt{\mathcal{E}}\left(\cos\left(\frac{2\pi i}{m}\right), \sin\left(\frac{2\pi i}{m}\right)\right)$ *para* $m \geq 2$.
Seja o caso 8-PSK (Figura 9). Para o canal AWGN, $H = i : \quad Y \sim N(c_i, \sigma^2 I_2)$.

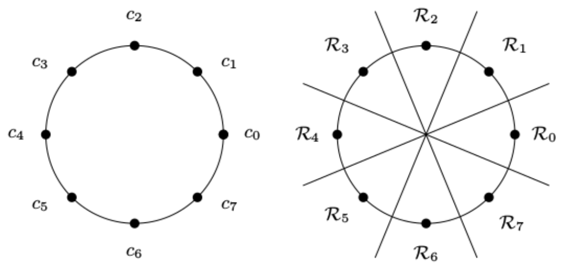

Figura 9: Exemplo de modulação 8-PSK com regiões de decodificação.

A probabilidade de erro exata é dada por

$$P_e(i) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi - \frac{\pi}{m}} \exp\left\{-\frac{\sin^2(\frac{\pi}{m})\mathcal{E}}{\sin^2(\theta) 2\sigma^2}\right\} d\theta.$$

Usando o limitante da união, temos

$$P_e(i) = Pr\{Y \in \mathcal{B}_{i,i-1} \cup \mathcal{B}_{i,i+1} | H = i\} \leq Pr\{Y \in \mathcal{B}_{i,i-1} | H = i\} + Pr\{Y \in \mathcal{B}_{i,i+1} | H = i\} = 2Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{\sigma} \sin \frac{\pi}{m}\right).$$

[5] A igualdade só vale se todos os empates forem decididos contra i.

2.7.2 Limitante da união de Bhattacharyya

Ver [1], p. 48-51.

Referências

[1] RIMOLDI, Bixio. *Principles of Digital Communication*: A Top-Down Approach. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.