

# EE881 - Princípios de Comunicações I

Henrique Koji Miyamoto

## 1 Introdução e objetivos

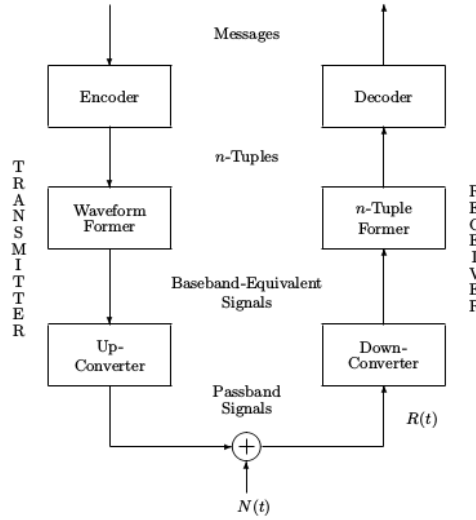


Figura 1: Visão geral do problema de comunicação.

## 2 Projeto do receptor para observações no tempo discreto: primeira camada

### 2.1 Introdução

O sistema de comunicação considerado nessa seção é composto pelas seguintes partes:

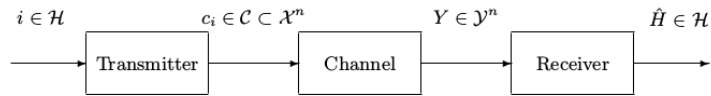


Figura 2: Sistema de comunicação considerado nessa análise.

- A **fonte** produz mensagens a serem transmitidas. É modelada como uma variável aleatória  $H$  que assume valores no conjunto de índices  $\mathcal{H} = \{0, 1, \dots, m-1\}$ , cada um com probabilidade  $P_H(i)$ .
- O **canal** é descrito por um alfabeto de entrada  $\mathcal{X}$ , um alfabeto de saída  $\mathcal{Y}$  (assumiremos  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ ) e uma descrição estatística da saída dada a entrada (verossimilhança). Se  $Y \in \mathcal{Y}$  é uma variável aleatória discreta, descrevemos a distribuição de probabilidade  $P_{Y|X}(\cdot|x)$ ; se é uma variável aleatória contínua, descrevemos a função densidade de probabilidade  $f_{Y|X}(\cdot|x)$ <sup>1</sup>.
- O **transmissor** é modelado como uma aplicação do conjunto de mensagens  $\mathcal{H} = \{0, \dots, m-1\}$  no conjunto de sinais (constelação de sinais)  $\mathcal{C} = \{c_0, \dots, c_{m-1}\}$ , em que  $c_i \in \mathcal{X}^n$  para algum  $n$ .
- A tarefa do **receptor** é “adivinhar” a realização da hipótese  $H$  a partir da realização da saída do canal. O palpite do receptor é denotado  $\hat{i}$  e a variável aleatória associada a esse processo aleatório é  $\hat{H} \in \mathcal{H}$ .

<sup>1</sup>Em geral, o canal não tem memória, i.e., a probabilidade da ocorrência de uma sequência de variáveis aleatórias na saída é o produto das probabilidades de ocorrência de cada variável.

## 2.2 Teste de hipóteses

*Teste de hipóteses* é o problema de “adivinhar” a realização da variável aleatória  $H \in \mathcal{H}$  com base na realização da variável aleatória  $Y$  (observação). É o mesmo que *decodificação* ou *tomada de decisão*. Em comunicações, a hipótese  $H$  é a mensagem transmitida e a observação  $Y$  é a saída do canal.

**Objetivo:** Queremos estabelecer uma estratégia de decisão que maximiza a probabilidade de acerto  $P_c = Pr\{\hat{H} = H\}$ , ou, equivalentemente, minimiza a probabilidade de erro  $P_e = Pr\{\hat{H} \neq H\} = 1 - P_c$ .

Da regra de Bayes, temos

$$P_{H|Y}(i|y) = \frac{P_H(i)f_{Y|H}(y|i)}{f_Y(y)}$$

em que  $f_Y(y) = \sum_i P_H(i)f_{Y|H}(y|i)$ . Ao observar  $Y = y$ , a probabilidade de  $H = i$  vai do *prior* (probabilidade *a priori*)  $P_H(i)$  para o *posterior* (probabilidade *a posteriori*)  $P_{H|Y}(i|y)$ .

**Regra MAP (máximo a posteriori):** A decisão ótima para  $\hat{H} = i$ , que maximiza a probabilidade de acerto, é a que maximiza a probabilidade a posteriori  $P_{H|Y}(i|y)$ <sup>2</sup>.

$$\hat{H}(y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} P_{H|Y}(i|y)$$

A probabilidade de acerto da variável aleatória  $P_{H|Y}(\hat{H}(Y)|Y)$  é

$$P_c = \mathbb{E}[P_{H|Y}(\hat{H}(Y)|Y)] = \int_y P_{H|Y}(\hat{H}(Y)|Y)f_Y(y)dy$$

**Regra ML (máxima verossimilhança):** É uma regra de decisão subótima que maximiza a verossimilhança  $f_{Y|H}(y|i)$ . Pode ser usada quando os *priors* são uniformes (neste caso, MAP  $\equiv$  ML) ou quando são desconhecidos.

$$\hat{H}(y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i)$$

### 2.2.1 Teste de hipóteses binário

Trata-se do caso particular em que  $\mathcal{H} = \{0, 1\}$ .

**Regra MAP:**

$$P_{H|Y}(1|y) = \frac{f_{Y|H}(y|1)P_H(1)}{f_Y(y)} \stackrel{\hat{H}=1}{\underset{\hat{H}=0}{\geq}} \frac{f_{Y|H}(y|0)P_H(0)}{f_Y(y)} = P_{H|Y}(0|y)$$

$$f_{Y|H}(y|1)P_H(1) \stackrel{\hat{H}=1}{\underset{\hat{H}=0}{\geq}} f_{Y|H}(y|0)P_H(0)$$

$$\underbrace{\Lambda(y)}_{\text{razão de verossimilhança}} := \frac{f_{Y|H}(y|1)}{f_{Y|H}(y|0)} \stackrel{\hat{H}=1}{\underset{\hat{H}=0}{\geq}} \frac{P_H(0)}{P_H(1)} =: \underbrace{\eta}_{\text{limiar}}$$

**Regra ML:**

$$f_{Y|H}(y|1) \stackrel{\hat{H}=1}{\underset{\hat{H}=0}{\geq}} f_{Y|H}(y|0)$$

Uma função  $\hat{H} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{H}$  é chamada *função de decisão* ou *função de decodificação*. Podemos descrevê-las em função de *regiões de decisão*:

$$\mathcal{R}_i = \{y \in \mathcal{Y} : \hat{H}(y) = i\}$$

Dessa forma, a probabilidade de erro pode ser computada:

$$P_e(0) = Pr\{Y \in \mathcal{R}_1 | H = 0\} = \int_{\mathcal{R}_1} f_{Y|H}(y|0)dy$$

$$P_e(1) = Pr\{Y \in \mathcal{R}_0 | H = 1\} = \int_{\mathcal{R}_0} f_{Y|H}(y|1)dy$$

$$P_e = P_e(1)P_H(1) + P_e(0)P_H(0)$$

<sup>2</sup>Se ocorre um empate, não faz diferença por qual hipótese escolhemos, já que elas têm a mesma probabilidade de erro.

### 2.2.2 Teste de hipóteses $m$ -ário

Esse é o caso mais geral, em que  $\mathcal{H} = \{0, 1, \dots, m-1\}$ .

**Regra MAP:**

$$\hat{H}_{MAP}(y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} P_{H|Y}(i|y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i) P_H(i)$$

**Regra ML:**

$$\hat{H}_{ML}(y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i)$$

Regiões de decodificação e probabilidade de erro:

$$\mathcal{R}_i := \{y : \hat{H}(y) = i\}$$

$$P_e(i) := \Pr\{\hat{H} \neq H | H = i\} = \int_{\mathcal{R}_i^c} f_{Y|H}(y|i) dy = 1 - \underbrace{\int_{\mathcal{R}_i} f_{Y|H}(y|i) dy}_{P_c(i)}$$

$$P_e := \Pr\{\hat{H} \neq H\} = \sum_{i=0}^{m-1} P_H(i) P_e(i)$$

### 2.3 A função $Q$

A função  $Q$  é definida como

$$Q(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

**Propriedade básica:** Se  $Z$  é uma variável aleatória com distribuição normal de média nula e variância unitária,  $Z \sim N(0, 1)$ , então  $\Pr\{Z \geq x\} = Q(x)$ . Se  $Z$  tem média  $m$  e variância  $\sigma^2$ ,  $Z \sim N(m, \sigma^2)$ , então  $\Pr\{Z \geq x\} = Q(\frac{x-m}{\sigma})$ .

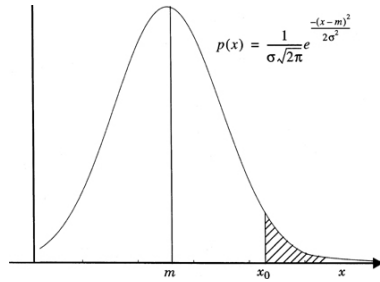


Figura 3: Distribuição normal de média  $m$  e variância  $\sigma^2$ .

Outras propriedades da função  $Q$ :

- Se  $Z \sim N(0, 1)$ ,  $F_Z := \Pr\{Z \leq z\} = 1 - Q(z)$ .
- $Q(0) = 1/2$ ,  $Q(-\infty) = 1$ ,  $Q(\infty) = 0$ .
- $Q(-x) + Q(x) = 1$

### 2.4 Projeto de receptor para canal AWGN no tempo-discreto

Considere comunicação por um canal ruidoso no tempo-discreto. A hipótese  $H \in \mathcal{H}$  representa uma mensagem gerada aleatoriamente. O transmissor mapeia  $H = i$  em uma  $n$ -upla  $c_i \in \mathbb{R}^n$ . O canal adiciona um vetor ruído aleatório  $Z$  com média nula e componentes de distribuição gaussiana independentes e identicamente distribuídas de variância  $\sigma^2$ , i.e.,  $Z \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ . A observação é  $Y = c_i + Z$ .

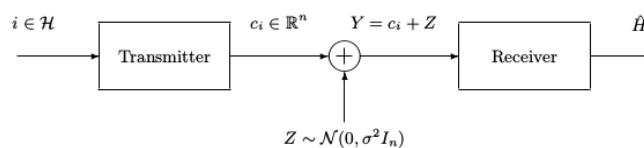


Figura 4: Diagrama de comunicação por um canal ruidoso.

### 2.4.1 Decisão binária para observação escalar

Seja a mensagem  $H \in \{0, 1\}$  com um transmissor que mapeia  $H = 0 \mapsto c_0 \in \mathbb{R}$  e  $H = 1 \mapsto c_1 \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} H = 0 : Y \sim N(c_0, \sigma^2) \rightarrow f_{Y|H}(y|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(y-c_0)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ H = 1 : Y \sim N(c_1, \sigma^2) \rightarrow f_{Y|H}(y|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(y-c_1)^2}{2\sigma^2} \right\} \end{cases}$$

**Regra MAP:**

$$\Lambda(y) = \frac{f_{Y|H}(y|1)}{f_{Y|H}(y|0)} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \eta \Rightarrow \ln \Lambda(y) = \frac{(y-c_0)^2 - (y-c_1)^2}{2\sigma^2} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \ln \eta \Rightarrow y \frac{c_1 - c_0}{\sigma^2} + \frac{c_0^2 - c_1^2}{2\sigma^2} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \ln \eta$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir  $c_1 > c_0$  e escrever:

$$\boxed{y \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{c_1 - c_0} \ln \eta + \frac{c_0 + c_1}{2} =: \theta}$$

**Regra ML:**

Se  $P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$ , então MAP  $\equiv$  ML. A regra é de *distância mínima*:

$$\boxed{y \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \frac{c_0 + c_1}{2}}$$

**Probabilidade de erro**

$$P_e = P_H(0)P_e(0) + P_H(1)P_e(1) = P_H(0)Q\left(\frac{\theta - c_0}{\sigma}\right) + P_H(1)Q\left(\frac{\theta - c_1}{\sigma}\right)$$

No caso  $P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$ , temos  $\frac{\theta - c_0}{\sigma} = \frac{c_1 - \theta}{\sigma}$ , logo:

$$P_e = Q\left(\frac{c_1 - c_0}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

### 2.4.2 Decisão binária para observação de $n$ -uplas

Nesse caso,  $H \in \{0, 1\}$  e  $c_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0, 1$ . O ruído adicionado pelo canal é  $Z \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ .

$$\begin{cases} H = 0 : Y = c_0 + Z \sim N(c_0, \sigma^2 I_n) \rightarrow f_{Y|H}(y|0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{\|y-c_0\|^2}{2\sigma^2} \right\} \\ H = 1 : Y = c_1 + Z \sim N(c_1, \sigma^2 I_n) \rightarrow f_{Y|H}(y|1) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{\|y-c_1\|^2}{2\sigma^2} \right\} \end{cases}$$

**Regra MAP:**

$$\Lambda(y) = \frac{f_{Y|H}(y|1)}{f_{Y|H}(y|0)} = \exp \left\{ \frac{\|y-c_0\|^2 - \|y-c_1\|^2}{2\sigma^2} \right\} \Rightarrow \ln \Lambda(y) = \langle y, \frac{c_1 - c_0}{\sigma^2} \rangle + \frac{\|c_0\|^2 - \|c_1\|^2}{2\sigma^2}$$

$$\ln \Lambda(y) \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \ln \eta \Rightarrow \langle y, \frac{c_1 - c_0}{\sigma^2} \rangle + \frac{\|c_0\|^2 - \|c_1\|^2}{2\sigma^2} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \ln \eta \Rightarrow \underbrace{\langle y, \frac{c_1 - c_0}{d} \rangle}_{\psi} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{d} \ln \eta + \frac{\|c_1\|^2 - \|c_0\|^2}{2d} =: \theta$$

As regiões de decisão  $\mathcal{R}_0$  e  $\mathcal{R}_1$  são delimitadas pelo plano afim  $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, \psi \rangle = \theta\}$ .

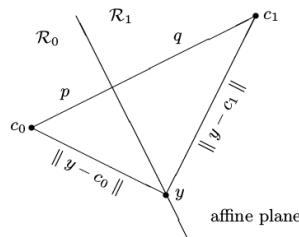


Figura 5: Visualização geométrica das regiões de decodificação.

É possível mostrar que as distâncias  $p$  e  $q$  (Figura 5) são tais que

$$p = \frac{d}{2} + \frac{\sigma^2 \ln \eta}{d} \text{ e } q = \frac{d}{2} - \frac{\sigma^2 \ln \eta}{d}$$

**Regra ML:** Se  $P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$ , então MAP  $\equiv$  ML. A regra é de *distância mínima*:

$$\boxed{\|y - c_0\| \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \|y - c_1\|}$$

Observações:

- Quando  $P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$ , temos  $p = q$  e o plano afim é equidistante de  $c_0$  e  $c_1$ .
- O vetor  $\psi$  não é afetado pelos priors, mas o limiar  $\theta$  é, i.e., os priors afetam a posição, mas não a orientação do plano afim.
- O efeito anterior é aumentado quando a variância  $\sigma^2$  aumenta.

### Probabilidade de erro

Podemos deduzir as probabilidades de erro geometricamente a partir da Figura 5. Lembrando que  $\langle Z, \psi \rangle \sim N(0, \sigma^2)$ .

$$P_e(0) = Pr\{\langle Z, \psi \rangle \geq p\} = Q\left(\frac{p}{\sigma}\right)$$

$$P_e(1) = Pr\{\langle Z, \psi \rangle \geq q\} = Q\left(\frac{q}{\sigma}\right)$$

$$P_e = P_H(0) \left(\frac{p}{\sigma}\right) + P_H(1) \left(\frac{q}{\sigma}\right)$$

Para o caso  $P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$ :

$$P_e = P_e(0) = P_e(1) = Pr\{\langle Z, \psi \rangle \geq \frac{d}{2}\} = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

## 2.5 Decisão $m$ -ária para observação de $n$ -uplas

Nesse caso,  $H = i$ ,  $i \in \{0, \dots, m-1\}$  e  $c_i \in \mathbb{R}^n$ . Assumiremos a simplificação  $P_H(i) = \frac{1}{m}$ .

**Receptor ML:**

$$\hat{H}_{ML} = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\|y - c_i\|^2}{2\sigma^2}\right\} = \boxed{\arg \min_{i \in \mathcal{H}} \|y - c_i\|}$$

Mais uma vez, a regra de decisão para o receptor ML é de distância mínima. A menos de empates, a região de decisão  $\mathcal{R}_i$  é a região de Voronoi<sup>3</sup>.

**Exemplo 2.1.** *Modulação **m-PAM** (pulse amplitude modulation): a constelação de sinais é  $\{c_0, c_1, \dots, c_{m-1}\} \in \mathbb{R}$ . Para canal AWGN e receptor ML, a regra de decodificação é de distância mínima. A decodificação é errada se o ruído for maior que  $d = c_i - c_{i-1}$ .*

*Para os pontos da ponta,  $c_0$  e  $c_{m-1}$ :*

$$P(i) = Pr\left\{Z > \frac{d}{2}\right\} = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right), \quad i = 0, m-1$$

*Para os demais pontos:*

$$P(i) = Pr\left\{\left\{Z \geq \frac{d}{2}\right\} \cup \left\{Z < -\frac{d}{2}\right\}\right\} = 2Pr\left\{Z \geq \frac{d}{2}\right\} = 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right), \quad i = 1, \dots, m-2$$

*Assim:*

$$P_e = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m} P_e(i) = \frac{2}{m} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) + \frac{m-2}{2} 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = \left(2 - \frac{2}{m}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

<sup>3</sup>A região de Voronoi do ponto  $c_i \in \mathbb{R}^n$  é o conjunto  $R(c_i) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|c_i - x\| \leq \|c_i - y\| \forall y \in \mathbb{R}^n\}$ .

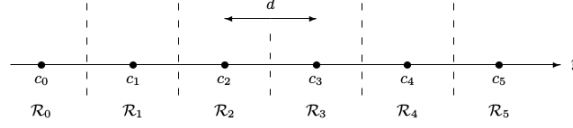


Figura 6: Exemplo de modulação 6-PAM, com regiões de decodificação.

**Exemplo 2.2.** Modulação **m-QAM** (quadrature amplitude modulation): a constelação de sinais é formada por conjuntos de  $(2n)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  pontos em quadratura no  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ .

Para o caso simples 4-QAM (Figura 7), a probabilidade de acerto de cada ponto é

$$P_c(i) = \Pr \left\{ \left\{ Z_1 \leq -\frac{d}{2} \right\} \cap \left\{ Z_2 \geq -\frac{d}{2} \right\} \right\} = \left[ 1 - Q \left( \frac{d}{2\sigma} \right) \right]^2, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

$$P_e = P_e(i) = 1 - P_c(i) = 2Q \left( \frac{d}{2\sigma} \right) - Q^2 \left( \frac{d}{2\sigma} \right)$$

Também seria possível calcular a probabilidade de erro como:

$$P_e = \Pr \left\{ Z_1 \leq -\frac{d}{2} \right\} + \Pr \left\{ Z_2 \leq -\frac{d}{2} \right\} - \Pr \left\{ \left\{ Z_1 \leq -\frac{d}{2} \right\} \cap \left\{ Z_2 \geq -\frac{d}{2} \right\} \right\}$$

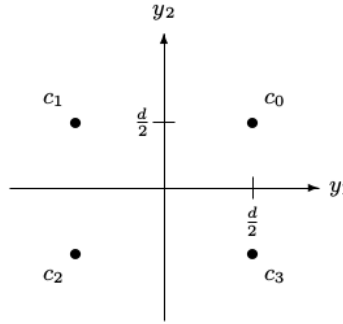


Figura 7: Exemplo de modulação 4-QAM.

## 2.6 Irrelevância e estatística suficiente

**Definição 2.1.** Três variáveis aleatórias  $U, V, W$  formam uma **cadeia de Markov** nessa ordem,  $U \rightarrow V \rightarrow W$ , se a distribuição de  $W$ , dados  $U$  e  $V$ , é independente de  $U$ , i.e.,  $P_{W|U,V}(w|u,v) = P_{W|V}(w|v)$ .

Seja  $Y$  a observação e  $T(Y)$  uma função de  $Y$ . Note que  $H \rightarrow Y \rightarrow T(Y)$  é sempre verdade, mas  $H \rightarrow T(Y) \rightarrow Y$  não é.

**Definição 2.2.** Seja  $T(Y)$  uma variável aleatória obtida do processamento da observação  $Y$ . Se  $H \rightarrow T(Y) \rightarrow Y$  forma uma cadeia de Markov, então  $T(Y)$  é uma **estatística suficiente** para a hipótese  $H$ .

**Teorema 2.1.** Se  $T(Y)$  é uma estatística suficiente para  $H$ , então um decodificador MAP que estima  $H$  a partir de  $T(Y)$  obtém a mesma probabilidade de erro que um que estima  $H$  a partir de  $Y$ , i.e.,

$$P_{H|Y}(i|y) = P_{H|Y,T}(i|y,t) = P_{H|T}(i|t)^4, \quad t = T(y)$$

**Exemplo 2.3.** Considere o esquema de comunicação mostrado a seguir, em que  $H, Z_1, Z_2$  são variáveis aleatórias independentes. Um receptor MAP que observa  $Y_1$  obtém a mesma probabilidade de erro que um que observa  $Y_1$  e  $Y_2$ . Nesse caso,  $Y_1$  é uma estatística suficiente e  $Y_2$  é uma estatística irrelevante.

Seja um decodificador MAP que, observando  $Y$ , sempre realiza a mesma decisão que se observasse apenas  $T(Y)$ . Isso não implica que  $H \rightarrow T(Y) \rightarrow Y$ , pois, para termos cadeia de Markov, é necessário que  $P_{H|Y,T}(i|y,t) = P_{H|T(Y)}(i|t)$  para todos os valores de  $i, y, t$ . Por outro lado, para que  $y$  não tenha efeito na decisão MAP, basta que, para todo  $y, t$ , o máximo de  $P_{H|Y,T(Y)}(\cdot|y,t)$  e de  $P_{H|T(Y)}(\cdot|t)$  sejam atingidos para o mesmo  $i$ .

**Teorema 2.2.** (Teorema da fatoração de Fisher-Neyman) Suponha que  $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$  e  $h$  são funções tais que, para cada  $i \in \mathcal{H}$ , vale

$$f_{Y|H}(y|i) = g_i(T(Y))h(y).$$

Então  $T$  é uma estatística suficiente.

<sup>4</sup>A primeira igualdade vale, pois  $T$  é função de  $Y$ . A segunda vale, pois  $H \rightarrow T(Y) \rightarrow Y$ .

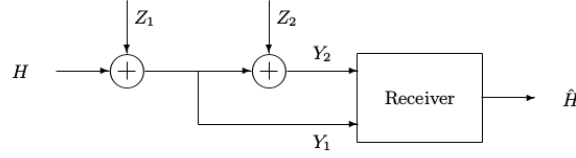


Figura 8: Esquema de comunicação com estatísticas suficiente e irrelevante.

## 2.7 Limitantes de probabilidade de erro

### 2.7.1 Limitante da união

Usaremos o limitante da união para aproximar cálculos de probabilidade de erro em testes de várias hipóteses.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m \mathcal{A}_i\right) \leq \sum_{i=1}^m P(\mathcal{A}_i).$$

A probabilidade de erro exata é dada pela avaliação da integral abaixo para todo  $i$ . No entanto, nem sempre é fácil avaliar a integral.

$$P_e(i) = \Pr\{Y \in \mathcal{R}_i^c | H = i\} = \int_{\mathcal{R}_i^c} f_{Y|H}(y|i) dy.$$

Defina

$$\mathcal{B}_{i,j} := \{y : P_H(j) f_{Y|H}(y|j) \geq P_H(i) f_{Y|H}(y|i)\}, \quad i \neq j$$

o conjunto de  $y$  para os quais a decodificação MAP escolhe  $j$  sobre  $i$ .

Usaremos o fato de que

$$\mathcal{R}_i^c \subseteq \bigcup_{j \neq i} \mathcal{B}_{i,j}.$$

Então podemos escrever o limitante da união:

$$P_e(i) = \Pr\{Y \in \mathcal{R}_i^c | H = i\} \leq \Pr\{Y \in \bigcup_{j \neq i} \mathcal{B}_{i,j} | H = i\} \leq \sum_{j \neq i} \Pr\{Y \in \mathcal{B}_{i,j} | H = i\} = \sum_{j \neq i} \int_{\mathcal{B}_{i,j}} f_{Y|H}(y|i) dy$$

O ganho é que é tipicamente mais fácil integrar sobre  $\mathcal{B}_{i,j}$  que sobre  $\mathcal{R}_i^c$ .

**Exemplo 2.4.** Modulação **m-PSK** (phase-shift keying): os pontos distribuídos em um círculo, de tal forma que  $c_i = \sqrt{\mathcal{E}} \left( \cos\left(\frac{2\pi i}{m}\right), \sin\left(\frac{2\pi i}{m}\right) \right)$  para  $m \geq 2$ .

Seja o caso 8-PSK (Figura 9). Para o canal AWGN,  $H = i$ :  $Y \sim N(c_i, \sigma^2 I_2)$ .

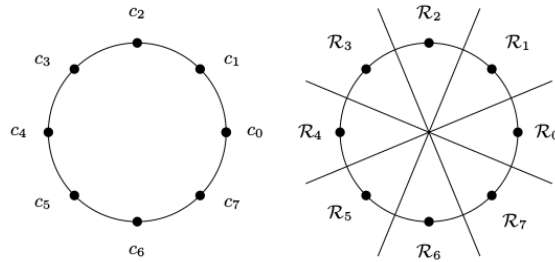


Figura 9: Exemplo de modulação 8-PSK com regiões de decodificação.

A probabilidade de erro exata é dada por

$$P_e(i) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi - \frac{\pi}{m}} \exp\left\{-\frac{\sin^2(\frac{\pi}{m})\mathcal{E}}{\sin^2(\theta)2\sigma^2}\right\} d\theta.$$

Usando o limitante da união, temos

$$P_e(i) = \Pr\{Y \in \mathcal{B}_{i,i-1} \cup \mathcal{B}_{i,i+1} | H = i\} \leq \Pr\{Y \in \mathcal{B}_{i,i-1} | H = i\} + \Pr\{Y \in \mathcal{B}_{i,i+1} | H = i\} = 2Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{\sigma} \sin \frac{\pi}{m}\right).$$

<sup>5</sup>A igualdade só vale se todos os empates forem decididos contra  $i$ .

### 2.7.2 Limitante da união de Bhattacharyya

Ver [1], p. 48-51.

## 3 Projeto de receptor para canal AWGN no tempo contínuo: segunda camada

### 3.1 Introdução

Nesse capítulo, tratamos do mesmo problema do capítulo anterior, mas para o canal AWGN no tempo *contínuo*.

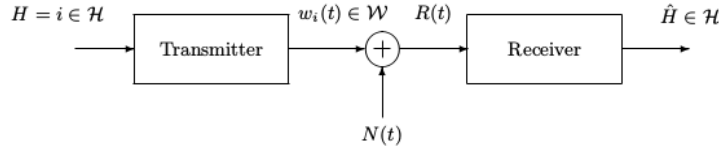


Figura 10: Esquema de comunicação por um canal AWGN no tempo contínuo.

Seja o conjunto de sinais  $\mathcal{W} = \{w_0(t), \dots, w_{m-1}(t)\}$ . São feitas duas exigências sobre esse conjunto:

1. A norma quadrática de um sinal  $w_i(t)$  é associada à sua energia. Segue que qualquer vetor do espaço vetorial  $\mathcal{V}$  gerado por  $\mathcal{W}$  é uma função com quadrado integrável.
2. Se  $v \in \mathcal{V}$  tem norma nula, então  $v(t)$  é nulo para todo  $t$ .

Juntas, essas condições implicam que  $\mathcal{V}$  é um espaço vetorial com produto interno de funções com quadrado integrável. Os sinais de comunicação do mundo real são desse tipo: têm energia finita e são contínuos.

Motivos para nos preocuparmos com a energia (ou potência) de um sinal:

- Regulações que limitam a potência dos sinais transmitidos, por motivos de segurança e reusabilidade de espectro.
- Gasto de energia para transmitir sinais (ex.: bateria).
- Seria injusto comparar métodos de transmissão de sinais que não usam a mesma potência.

Trabalharemos com uma decomposição do transmissor e receptor. Consideraremos o transmissor como formado por um *codificador* que mapeia a mensagem  $i \in \mathcal{H}$  em uma  $n$ -upla  $c_i$  e por um *gerador de forma de onda* que mapeia  $c_i$  em  $w_i(t)$ . Analogamente, o receptor consiste de um *formador de  $n$ -uplas* e de um *decodificador*, que funciona como estudado no capítulo anterior.

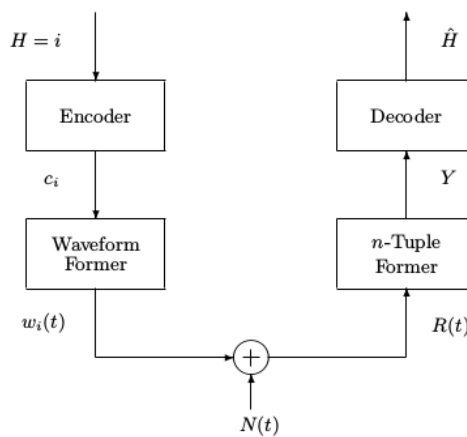


Figura 11: Decomposição do transmissor e receptor.

### 3.2 Ruído gaussiano branco

**Definição 3.1.**  $N(t)$  é um ruído gaussiano branco de densidade espectral de potência  $\frac{N_0}{2}$  se, para qualquer coleção finita de funções reais  $\mathcal{L}_2$   $g_1(\alpha), \dots, g_k(\alpha)$ ,

$$Z_i = \int N(\alpha) g_i(\alpha) d\alpha \quad i = 1, 2, \dots, k$$



é uma coleção de variáveis aleatórias gaussianas de distribuição conjunta de média nula e covariância

$$\text{cov}(Z_i, Z_j) = \mathbb{E}[Z_i Z_j^*] = \frac{N_0}{2} \int g_i(t) g_j^*(t) dt = \frac{N_0}{2} \langle g_i, g_j \rangle.$$

**Lema 3.1.** *Seja  $\{g_1(t), \dots, g_k(t)\}$  um conjunto ortonormal de funções reais. Então  $Z = (Z_1, \dots, Z_k)^T$ , com  $Z_i$  da definição anterior, é um vetor aleatório de distribuição gaussiana, com média nula, componentes i.i.d. e variância  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ .*

O ruído é dito *branco*, pois, como luz branca, o ruído branco gaussiano tem potência igualmente distribuída em todas as frequências. Os ruídos podem ser naturais (térmico, solar, cósmico) ou produzidos pelo homem (rupidos de motores elétricos, linhas de transmissão).

### 3.3 Observações e estatística suficiente

A saída do canal  $R(t)$  (Figuras 10, 11) não pode ser observável, mas sim  $k$ -uplas  $V = (V_1, \dots, V_k)^T$  tais que

$$V_i = \int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha) g_i^*(\alpha) d\alpha \quad i = 1, \dots, k$$

em que  $k$  é um inteiro positivo arbitrário e  $g_1(t), \dots, g_k(t)$  são formas de onda de energia finita arbitrárias.

Seja  $\mathcal{V}$  o espaço vetorial com produto interno gerado pelo conjunto de sinais  $\mathcal{W}$  e seja  $\{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$  uma base ortonormal de  $\mathcal{V}$ . A  $n$ -upla  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ , com  $i$ -ésima componente

$$Y_i = \int R(\alpha) \psi_i^* d\alpha$$

é uma estatística suficiente para a hipótese  $H$  em uma coleção de medidas que contém  $Y$ .

De fato,  $Y = c_i + Z_{\parallel \mathcal{V}}$  é uma projeção de  $R(t)$  no espaço de sinais  $\mathcal{V}$  e  $U_{\perp \mathcal{V}}$  é irrelevante e contém somente ruído independente.

### 3.4 Arquitetura do transmissor e do receptor

O transmissor tem um módulo *codificador* que produz o conjunto de palavras-código  $c_i = (c_{i,1}, \dots, c_{i,n})^T$  e um *gerador de forma de onda*, que produz sinais  $w_i(t) \in \mathcal{W}$  a partir de  $c_i$ , usando uma base ortonormal  $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ <sup>67</sup>, de forma que o sinal no canal contínuo é  $w_i(t) = \sum_j c_{i,j} \psi_j(t)$ .

O canal adiciona ruído gaussiano branco  $N(t)$  de variância  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} I_n$ .

A parte do receptor mais próxima do canal é o *gerador de  $n$ -uplas*, que realiza uma redução de dados ao calcular  $Y \in \mathbb{R}^n$  a partir de  $R(t) = w_i(t) + N(t)$ . Para isso, projeta cada componente do sinal no espaço de sinais  $\mathcal{V}$   $Y_i = \langle R, \psi_i \rangle$ . O *decodificador* realiza o teste de hipóteses baseado na observação  $Y$ :

$$H = i : \quad Y = c_i + Z$$

em que  $Z \sim N(0, \frac{N_0}{2} I_n)$  é independente de  $H$ , decodificando o vetor  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ . Esse é o mesmo teste de hipóteses estudado no capítulo anterior, para um canal AWGN no tempo discreto.

A decomposição do sistema transmissor/receptor apresentada é completamente geral e permite reduzir o problema ao tempo discreto, conforme já estudado. Além disso, a relação entre tempo discreto e contínuo permite calcular energias e distâncias em qualquer domínio, i.e.:

$$\sum_{j=1}^n |c_{i,j}|^2 = \|c_i\|^2 = \|w_i(t)\|^2 = \int |w_i(t)|^2 dt$$

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{i,j} - c_{k,j})^2} = \|c_i - c_k\| = \|w_i(t) - w_k(t)\| = \sqrt{\int [w_i(t) - w_k(t)]^2 dt}$$

Observações:

- Conjuntos de sinais no tempo contínuo podem parecer diferentes, mas compartilhar do mesmo livro de códigos, o que é suficiente para garantir que a probabilidade de erro é a mesma.
- Para constelações binárias, o que importa para a probabilidade de erro é a distância entre dois sinais e nada mais.

<sup>6</sup>Como a base é ortonormal,  $\langle \psi_i(t), \psi_j(t) \rangle = \delta_{ij}$  e  $\|\psi_i(t)\| = 1$ .

<sup>7</sup>Para produzir uma base ortonormal, podemos usar o método de Gram-Schmidt.

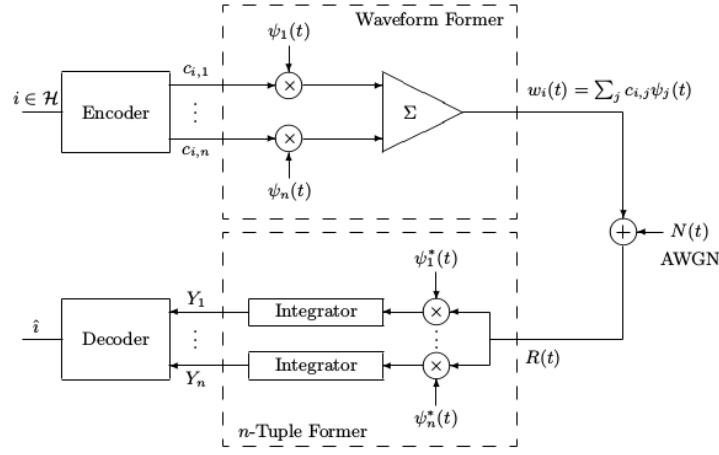


Figura 12: Decomposição detalhada do transmissor e receptor.

**Exemplo 3.1. Single-shot PAM:** Seja o pulso de energia unitária  $\psi(t)$ . O sinal transmitido é da forma

$$w_i(t) = c_i \psi(t),$$

em que  $c_i$  assume valores em um subconjunto discreto de  $\mathbb{R}$  da forma  $\{\pm a, \pm 3a, \dots, \pm(m-1)a\}$  para um inteiro positivo  $a$ .

**Exemplo 3.2. Single-shot PSK:** Sejam  $T$  e  $f_c$  números positivos e  $m$  inteiro positivo e assumamos  $2f_c T$  inteiro. O sinal é da forma

$$w_i(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T}} \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi}{m} i\right) \mathbb{1}\{t \in [0, T]\}, \quad i = 1, \dots, m-1$$

Podemos reescrever como

$$w_i(t) = c_{i,1} \psi_1(t) + c_{i,2} \psi_2(t)$$

onde

$$\begin{aligned} c_{i,1} &= \sqrt{\mathcal{E}} \cos\left(\frac{2\pi i}{m}\right), & \psi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t) \mathbb{1}\{t \in [0, T]\} \\ c_{i,2} &= \sqrt{\mathcal{E}} \sin\left(\frac{2\pi i}{m}\right), & \psi_2(t) &= -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t) \mathbb{1}\{t \in [0, T]\} \end{aligned}$$

**Exemplo 3.3. Single-shot QAM:** Sejam  $T$  e  $f_c$  números positivos tais que  $2f_c T$  seja inteiro e  $m$  inteiro positivo par. O sinal é da forma

$$w_i(t) = c_{i,1} \psi_1(t) + c_{i,2} \psi_2(t),$$

em que

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t) \mathbb{1}\{t \in [0, T]\} \\ \psi_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t) \mathbb{1}\{t \in [0, T]\} \end{aligned}$$

e  $c_i = (c_{i,1}, c_{i,2})^T$ ,  $i = 0, \dots, m^2 - 1$  assume valores discretos da forma  $\{\pm a, \pm 3a, \dots, \pm(m-1)a\}$ , para  $a$  positivo.

### 3.5 Generalização e estruturas alternativas de recepção

O teste de hipóteses tem como entradas os priors  $P_H(i)$  e a observação  $Y$  com distribuição

$$f_{Y|H}(y|i) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{(n/2)}} \exp\left(-\frac{\|y - c_i\|^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{(\pi N_0)^{(n/2)}} \exp\left(-\frac{\|y - c_i\|^2}{N_0}\right).$$

A regra de decodificação MAP pode ser escrita de três maneiras distintas e equivalentes:

$$\hat{H} = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} P_H(i) f_{Y|H}(y|i) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} P_H(i) \exp\left(-\frac{\|y - c_i\|^2}{N_0}\right) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} \ln P_H(i) - \frac{\|y - c_i\|^2}{N_0}$$

$$\hat{H} = \arg \min_{i \in \mathcal{H}} \|y - c_i\|^2 - N_0 \ln P_H(i)$$

Usando que  $\|y - c_i\|^2 = \|y\|^2 + \|c_i\|^2 - 2\Re\{\langle y, c_i \rangle\}$ , temos:

$$\hat{H} = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} \langle y, c_i \rangle - \frac{\|c_i\|^2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln P_H(i)$$

Usando equivalência entre tempo discreto e tempo contínuo, temos:

$$\hat{H} = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} \int R(t) w_i^*(t) dt - \frac{\|w_i(t)\|^2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln P_H(i)$$

A regra MAP nas três formas acima requer uma operação do tipo

$$\int R(t) b^*(t) dt$$

onde  $b(t)$  é uma função  $\psi_i(t)$  ou  $w_i(t)$ . Há duas maneiras de fazer isso:

1. Através de um *correlator*, um dispositivo que multiplica e integra dois sinais de entrada (realiza o produto interno entre eles). A saída é  $y(t) = \int R(t) b^*(t) dt$ .
2. Através de um *filtro casado*, i.e., um filtro que recebe  $R(t)$  na entrada e tem resposta ao impulso  $h(t) = b^*(T - t)$  ( $T$  é um parâmetro que garante que o  $h(t)$  é causal). Nesse caso, a saída em  $t = T$  será  $y(T) = \int R(\alpha) b^*(\alpha) d\alpha$ .

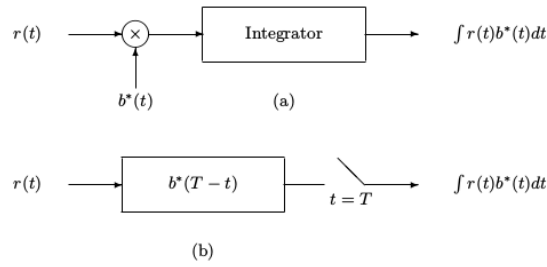


Figura 13: Implementação com correlador (a) e com filtro casado (b).

### 3.6 Canais em tempo contínuo revisitados

## 4 Soluções de compromisso no projeto de sinal

### 4.1 Introdução

### 4.2 Transformações isométricas aplicadas ao livro de códigos

## Referências

- [1] RIMOLDI, Bixio. *Principles of Digital Communication: A Top-Down Approach*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.