

ET720 - Sistemas de Energia Elétrica I

Henrique Koji Miyamoto

1 Introdução aos sistemas de energia elétrica

2 Cálculo de fluxo de carga

Os componentes de um sistema de potência são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Componentes de um sistema de potência.

Componente	Função	Representação
Geração	fonte de suprimento de energia elétrica	fonte de tensão CA
Carga	consomem energia	resistência e reatância em derivação
Transmissão	condutores que levam energia da geração às cargas	resistência e reatância em série

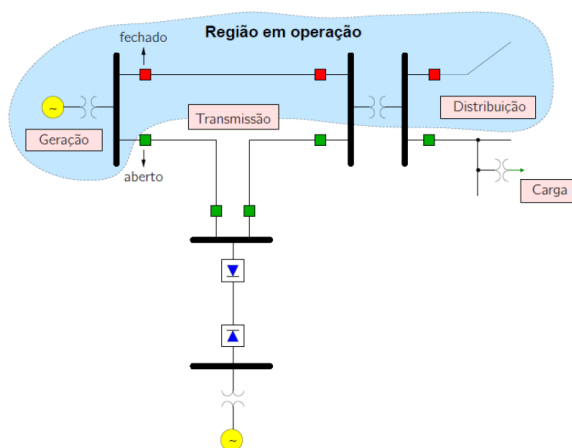


Figura 1: Sistema de potência.

Requisitos para operação em regime de um sistema trifásico:

- A potência de geração deve suprir o consumo das cargas e de perdas (ativa e reativa).
- Os módulos de tensão nas barras deve permanecer em torno do nominal (1 pu).
- Os geradores devem operar dentro dos limites de potência ativa e reativa. Linhas de transmissão e transformadores devem operar sem sobrecargas.

É desejável que as fases estejam em equilíbrio, i.e., $\|\hat{I}_a\| \approx \|\hat{I}_b\| \approx \|\hat{I}_c\|$ e $\|\hat{V}_a\| \approx \|\hat{V}_b\| \approx \|\hat{V}_c\|$, defasados de 120° . Isso ocorre principalmente em sistemas de alta e ultra-alta tensão na transmissão. Nesse caso, pode-se usar a representação monofásica e o diagrama unifilar. Mas, em redes de distribuição, pode ser necessário usar representação trifásica.

Revisão 1. Convenções para representações monofásica e unifilar.

1. *Circuito monofásico:*

- Geradores e cargas **em Y** (ou equivalente - $Z_{\Delta} = 3Z_Y$).
- Usam-se **tensões de fase e correntes de linha**.
- Bancos transformadores são representados por **Y-Y** (ou equivalente).

2. *Diagrama unifilar:*

- Indicam-se *tensões de linha e potências trifásicas*¹.
- *Correntes de linha e impedâncias Y* (ou equivalente- $Z_{\Delta} = 3Z_Y$).

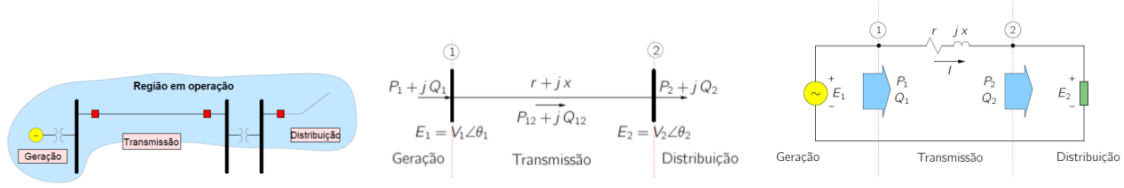


Figura 2: Representações unifilar e monofásico equivalente de um sistema de potência.

Revisão 2. *Sistema P.U. (por unidade):*

$$S_{base} = S_{3\phi} = 3V_f I_f, \quad V_{base} = V_l, \quad I_{base} = \frac{S_{base}}{\sqrt{3}V_{base}}, \quad Z_{base} = \frac{V_{base}^2}{S_{base}}$$

2.1 Formulação básica

O problema de *fluxo de carga* consiste em obter as condições de operação de uma rede elétrica em função de sua topologia e dos níveis de demanda e geração de potências. Faremos análise apenas estática, desconsiderando transitórios². Dessa maneira, a rede é representada por um conjunto de equações (e inequações) algébricas.

O sistema de energia é representado por circuitos equivalentes. Há dois tipos de componentes (Tabela 2). A geração e a distribuição são modeladas como injeções de potência no barramento. A linha de transmissão é modelada por um circuito RL em série.

Tabela 2: Componentes da rede elétrica.

Geradores (G) Cargas (L) Reatores <i>shunt</i> (RSh) Capacitores <i>shunt</i> (CSh)	Ligados entre um nó qualquer a o nó terra
Linhas de transmissão (LT) Transformadores (TR)	Ligados entre dois nós quaisquer

As equações do sistema são obtidas aplicando o princípio da conservação de energia em cada nó e a lei de Ohm nos componentes. A resolução do problema típico de sistemas de energia requer o uso de um procedimento algorítmico, pois ele se torna rapidamente difícil para redes maiores³.

Barras Os nós do sistema são representados por barras, caracterizadas por duas grandezas complexas: *tensão* ($E_k = V_k \angle \theta_k$) e *potência* ($S_k = P_k + jQ_k$)⁴. Podemos classificar as barras com relação às variáveis que são conhecidas/desconhecidas em cada uma delas (Tabela 3).

Tabela 3: Tipos de barras.

Tipo	Dados	Incógnitas	Características
PQ	P_k, Q_k	V_k, θ_k	Barras de carga
PV	P_k, V_k	Q_k, θ_k	Barras de geração
Vθ (referência ou <i>slack</i>)	V_k, θ_k	P_k, Q_k	Barras de geração

As barras de geração do tipo PV incluem condensadores síncronos. A barra de referência tem dupla função: (i) fornecer a referência angular do sistema e (ii) fechar o balanço de potência, levando em conta as perdas de transmissão não conhecidas no início do problema (por isso, costuma-se escolhê-la como uma unidade geradora de grande capacidade).

Cargas As cargas são modeladas como injeções de potências nas barras⁵. A convenção de sinais será a seguinte:

- $P_k > 0$ - potência entrando - geração
- $P_k < 0$ - potência saindo - consumo

¹Não obstante, nos cálculos, utilizam-se *tensões de fase e potências monofásicas*.

²Consideramos que a variação temporal é suficientemente lenta para que possamos desconsiderar o efeito transitório.

³Algumas ideias para resolvê-lo são: resolução analítica e por tentativa e erro.

⁴A potência líquida representa a diferença entre geração e consumo: $S_k = S_k^G - S_k^C$.

⁵Trataremos apenas de potências constantes

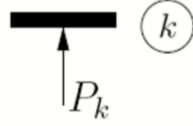


Figura 3: Representação de injeção de potência na barra k .

Linhas de transmissão Modelamos as linhas de transmissão com o modelo π , em que r é a resistência série, x é a reatância série e b é o carregamento total *charging* (o dobro da admitância *shunt*).

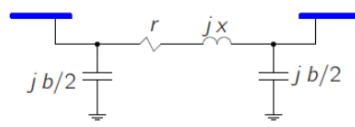


Figura 4: Modelo π para linhas de transmissão.

2.2 Formulação nodal

Considere a rede da Figura 2.2, em que foi aplicada a definição de potências e correntes líquidas e o modelo π equivalente para linhas de transmissão.

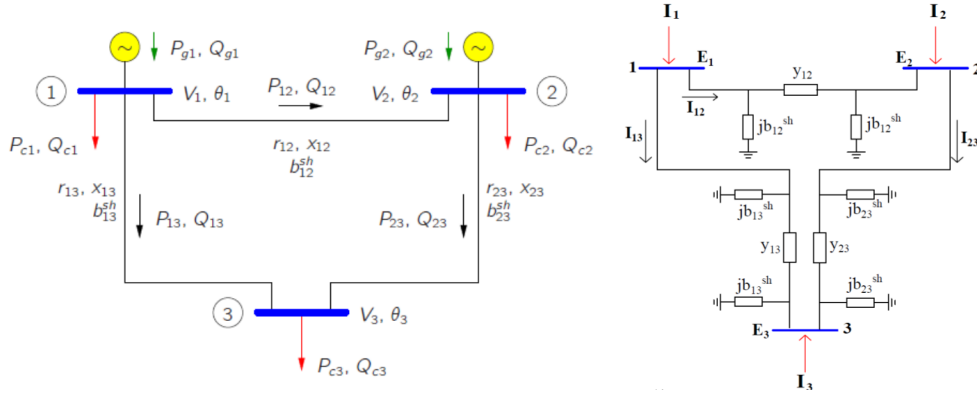


Figura 5: Exemplo de rede elétrica.

Aplicando a lei das correntes de Kirchhoff em todos os nós, obtemos, em notação matricial:

$$I = YE$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{12} + y_{13} + jb_{12}^{sh} + jb_{13}^{sh} & -y_{12} & -y_{13} \\ -y_{12} & y_{12} + y_{23} + jb_{12}^{sh} + jb_{23}^{sh} & -y_{23} \\ -y_{13} & -y_{23} & y_{13} + y_{23} + jb_{13}^{sh} + jb_{23}^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

onde $I_{n \times 1}$ é o vetor de injeções nodais de corrente, $E_{n \times 1}$ é o vetor de tensões nodais, $Y_{n \times n}$ é a matriz de admitância nodal e n é o número de barras na rede.

A matriz $Y_{n \times n}$ é formada da seguinte forma:

- Elementos fora da diagonal principal: $Y_{km} = -y_{km}$
- Elementos da diagonal principal: $Y_{kk} = \sum_{m \in \Omega_k} (y_{km} + jb_{km}^{sh})$ ⁶

A matriz de admitância pode ser separada em matriz condutância e matriz susceptância:

$$Y = \Re\{Y\} + j\Im\{Y\} = G + jB$$

A corrente em cada barra pode ser calculada como

$$I_k = \sum_{m \in K} Y_{km} E_m = Y_{kk} E_k + \sum_{m \in \Omega_k} Y_{km} E_m$$
⁷

⁶ Ω_k é o conjunto das barras conectadas diretamente à barra k .

⁷ K é o conjunto formado pela barra k e suas vizinhas.

Para deduzir as equações de potência, substituímos a equação para I_k acima em $S_k = E_k I_k^*$, obtendo:

$$\begin{aligned} P_k &= V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \\ Q_k &= V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \end{aligned}$$

onde $\theta_{km} := \theta_k - \theta_m = \arg(E_k) - \arg(E_m)$ e $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$.

Comentário sobre a resolubilidade do problema Para as barras PQ e PV, é possível escrever as equações de P_k e, para as barras PQ, é possível escrever as equações de Q_k . Portanto, temos $N_{PQ} + N_{PV}$ equações de P_k e N_{PQ} equações de Q_k , totalizando $2N_{PQ} + N_{PV}$ equações.

As incógnitas são V_k e θ_k nas barras PQ e θ_k nas barras PV. No total, temos $2N_{PQ} + N_{PV}$ incógnitas, que é o mesmo número de equações. Portanto o sistema é possível e determinado.

Uma vez determinado o valor das incógnitas, pode-se calcular P_k, Q_k na barra de referência e Q_k nas barras PV.

Ideia da resolução A ideia da resolução é:

1. De alguma maneira, determinar os fasores de tensão.
2. A partir deles, calcular as potências P_k nas barras PQ e PV e Q_k nas barras PQ.
3. Comparar tais valores calculados (P_k^{calc}, Q_k^{calc}) com os especificados pelo problema (P_k^{esp}, Q_k^{esp}).

Para fazer a comparação, calculam-se $\Delta P_k, \Delta Q_k$, os erros de potência, resíduos de potência ou *mismatches* de potência.

$$\begin{aligned} \Delta P_k &= P_k^{esp} - P_k^{calc} \\ \Delta Q_k &= Q_k^{esp} - Q_k^{calc} \end{aligned}$$

Idealmente, o problema está solucionado quando esses erros se anulam. Na prática, vamos aceitar uma solução que tenha ambos os erros abaixo de certa tolerância ϵ .

Método de Newton É o método usado para a resolução do problema de fluxo de carga. Apresentamos o algoritmo para o caso multidimensional, em que o objetivo é encontrar a solução para $g(x) = 0$, onde $g(x) = [g_1(x) \dots g_n(x)]^T$ é o vetor de *mismatches* e $x = [x_1 \dots x_n]^T$ é o vetor de incógnitas.

Algoritmo 1: Algoritmo do método de Newton para caso multidimensional.

Entrada: Ponto inicial x_0 e sistema de equações $g(x) = 0$

Saída: Solução x

1 início

2 Inicializar o contador de iterações $v \leftarrow 0$ e fazer $x^{(0)} \leftarrow x_0$.

3 Calcular o valor de $g(x^{(v)})$.

4 Testar a convergência:

5 se $|g_i(x^{(v)})| \leq \epsilon, \forall i = 1, 2, \dots, n$ então

6 | $x \leftarrow x^{(v)}$ é a solução procurada com tolerância $\pm\epsilon$.

7 | return x

8 fim

9 Calcular a matriz jacobiana $J(x^{(v)}) = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} g_i \right]$.

10 Calcular novo ponto $\Delta x^{(v)} \leftarrow J^{-1} g(x^{(v)})$, $x^{(v+1)} \leftarrow x^{(v)} + \Delta x^{(v)}$

11 Incrementar contador $v \leftarrow v + 1$ e voltar para linha 3.

12 fim

É comum inicializar o vetor de incógnitas como *flat start*, i.e., módulos de tensão unitários ($V_i = 1$) e ângulos nulos ($\theta_i = 0$).

No problema de fluxo de carga:

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ V \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{esp} - P^{calc} \\ Q^{esp} - Q^{calc} \end{bmatrix}, \quad J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta P & \frac{\partial}{\partial V} \Delta P \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta Q & \frac{\partial}{\partial V} \Delta Q \end{bmatrix}$$

Vantagens e desvantagens do método de Newton:

- É mais confiável (converge em casos que outros métodos divergem).
- O número de iterações necessárias para convergência independe da dimensão.
- Requer mais espaço de armazenamento (matriz jacobiana).
- O tempo computacional por iteração é maior (inversão e multiplicação com matriz jacobiana).
- Tem convergência rápida (quadrática).
- Não é sensível à escolha da barra de referência, mas o é à escolha do ponto inicial.

Cálculo da matriz jacobiana Como o cálculo dos *mismatches* envolve um termo constante (especificado), podemos simplificar a matriz jacobiana. Por exemplo:

$$\Delta P = P^{esp} - P^{calc}(V, \theta) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta P = -\frac{\partial}{\partial \theta} P^{calc}$$

É comum representar a matriz jacobiana em termos de submatrizes:

$$J(x) = -\begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix}, \text{ onde } H = \frac{\partial P}{\partial \theta}, N = \frac{\partial P}{\partial V}, M = \frac{\partial Q}{\partial \theta}, L = \frac{\partial Q}{\partial V}$$

Assim:

$$g(x) = -J(x)\Delta x \Rightarrow \begin{bmatrix} P^{esp} - P^{calc} \\ Q^{esp} - Q^{calc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix}$$

As componentes das submatrizes são:

$$\begin{aligned} H & \begin{cases} H_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial \theta_m} = V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ H_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial \theta_k} = -B_{kk} V_k^2 - Q_k \end{cases} \\ N & \begin{cases} N_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \\ N_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial V_k} = V_k^{-1} (P_k + G_{kk} V_k^2) \end{cases} \\ M & \begin{cases} M_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_m} = -V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \\ M_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_k} = -G_{kk} V_k^2 + P_k \end{cases} \\ L & \begin{cases} L_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = V_k^{-1} (Q_k - B_{kk} V_k^2) \end{cases} \end{aligned}$$

Perdas O fluxo de potência na linha que liga a barra k a m é dado por

$$S_{km}^* = E_k^* I_{km}, \quad I_{km} = y_{km}(E_k - E_m) + j b_{km}^{sh} E_k$$

As perdas de potência na linha km são

$$S_{perdas} = S_{km} + S_{mk}$$

$$\begin{aligned} P_{perdas} &= P_{km} + P_{mk} = g_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}) \\ &= g_{km}|E_k - E_m|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{perdas} &= Q_{km} + Q_{mk} = -b_{km}^{sh}(V_k^2 + V_m^2) - 2b_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}) \\ &= -b_{km}^{sh}(V_k^2 + V_m^2) - b_{km}|E_k - E_m|^2 \end{aligned}$$

Algoritmo 2: Algoritmo do método de Newton para o problema de fluxo de potência.

Entrada: Ponto inicial (θ_k^0, V_k^0) , sistema de equações P_k, Q_k e parâmetros das linhas Y **Saída:** Solução (θ_k, V_k)

```
1 início
2   Inicializar o contador de iterações  $v \leftarrow 0$  e fazer  $\theta_k^{(v)} \leftarrow \theta_k^0$  e  $V_k^{(v)} \leftarrow V_k^0$ 
3   Calcular  $P_k(\theta_k^{(v)}, V_k^{(v)})$  e  $Q_k(\theta_k^{(v)}, V_k^{(v)})$  e os mismatches  $\Delta P_k^{(v)}$  e  $\Delta Q_k^{(v)}$ .
4   Testar a convergência:
5   se  $\max\{|\Delta P_k^{(v)}|\} \leq \epsilon$  e  $\max\{|\Delta Q_k^{(v)}|\} \leq \epsilon$  então
6        $(\theta_k, V_k) \leftarrow (\theta_k^{(v)}, V_k^{(v)})$  é a solução procurada com tolerância  $\pm\epsilon$ .
7       Calcular  $P_k$  e  $Q_k$  na barra de referência e  $Q_k$  nas barras PV.
8   fim
9   Calcular a matriz jacobiana  $J(\theta^{(v)}, V^{(v)}) = \begin{bmatrix} H(\theta^{(v)}, V^{(v)}) & N(\theta^{(v)}, V^{(v)}) \\ M(\theta^{(v)}, V^{(v)}) & L(\theta^{(v)}, V^{(v)}) \end{bmatrix}$ 
10  Calcular novos valores  $\begin{cases} \theta^{(v+1)} = \theta^{(v)} + \Delta\theta^{(v)} \\ V^{(v+1)} = V^{(v)} + \Delta V^{(v)} \end{cases}$ , onde  $\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}$ 
11  Incrementar contador  $v \leftarrow v + 1$  e voltar para linha 3.
12 fim
```

3 Fontes primárias de energia elétrica

- Geração termoeleétrica
 - Turbina a vapor
 - Turbina a gás
 - Máquina de combustão interna a pistão
 - Reator nuclear
- Geração hidroelétrica
- Geração eólica
- Geração fotovoltaica

4 Métodos desacoplados

Os métodos desacoplados são simplificações do método geral de Newton para solução do problema de fluxo de carga.

4.1 Método desacoplado geral

Considera-se que algumas sensibilidades são predominantes:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} \text{ e } \frac{\partial Q}{\partial V} \gg \frac{\partial Q}{\partial \theta} \text{ e } \frac{\partial P}{\partial V}$$

Isso se verifica para redes de transmissão de extra e ultra alta tensão (acima de 230kV), mas em geral não ocorre em redes de distribuição (níveis de tensão são mais baixos).

Devido à consideração feita, as submatrizes $N = \frac{\partial P}{\partial V}$ e $M = \frac{\partial Q}{\partial \theta}$ são descartadas, resultando em:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta P = H\Delta\theta \\ \Delta Q = L\Delta V \end{cases}$$

Como os *mismathces* de potência ativa e reativa têm equações independentes, é possível aplicar um esquema de *solução alternada*, que apresenta melhor convergência.

1. Meia-iteração ativa: atualizar os ângulos das tensões a partir dos *mismathces* de potência ativa.

$$\Delta P(V^v, \theta^v) = H(V^v, \theta^v) \Delta\theta^v$$

$$\theta^{v+1} = \theta^v + \Delta\theta^v$$

2. Meia-iteração reativa: atualizar as magnitudes das tensões a partir dos *mismatches* de potência reativa.

$$\Delta Q(V^v, \theta^{v+1}) = L(V^v, \theta^{v+1}) \Delta V^v$$

$$V^{v+1} = V^v + \Delta V^v$$

A cada meia-iteração, para calcular os *mismatches* de potência ativa ou reativa, são utilizados os valores mais atualizados de V e θ . Isso parcialmente compensa as aproximações feitas na matriz jacobiana ($M \approx N \approx 0$).

Importante! Cada subproblema pode ter velocidade de convergência diferente, mas é necessário, a cada iteração completa, fazer as duas meia-iterações (mesmo que um subproblema já tenha convergido).

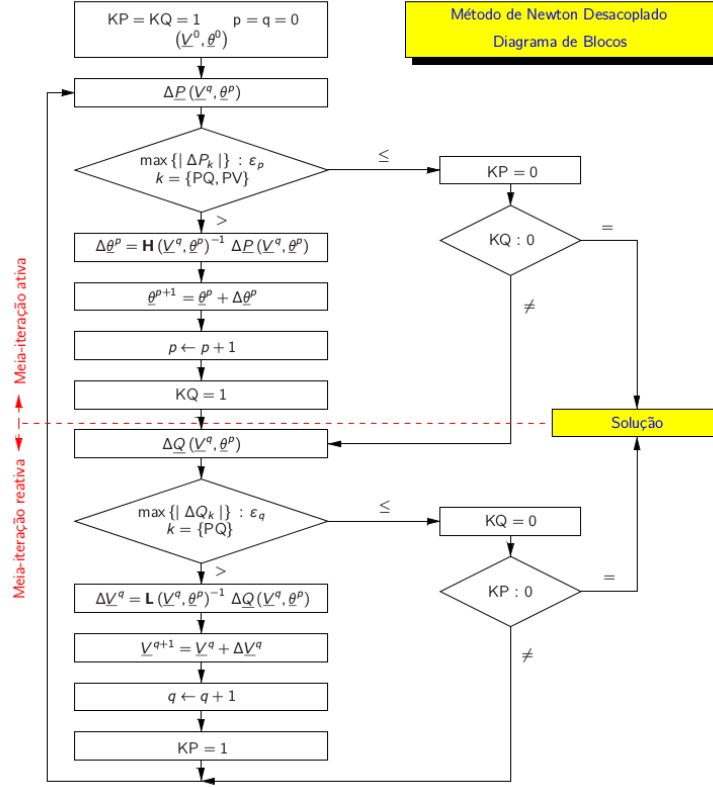


Figura 6: Algoritmo do método desacoplado.

Uma versão diferente Esta versão pode apresentar convergência mais rápida para alguns sistemas. Consiste em “normalizar” o problema com relação às tensões V_i .

Considere a matriz diagonal contendo as tensões

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & & \\ & \ddots & \\ & & V_n \end{bmatrix}$$

As submatrizes H e L podem escritas como

$$\begin{aligned} H &= V H' \\ L &= V L' \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} H' &= V^{-1} H \\ L' &= V^{-1} L \end{aligned}$$

Assim, as equações do método de Newton ficam:

$$\begin{aligned} \Delta P/V &= H' \Delta \theta \\ \Delta Q/V &= L' \Delta V \end{aligned}$$

onde as notações $\Delta P/V$ e $\Delta Q/V$ indicam que cada *mismatch* de potência deve ser dividido pela respectiva tensão na barra (ex.: $\Delta P_1/V_1$)

Nesse caso, os elementos de H' e L' ficam:

$$\begin{aligned} H' &\begin{cases} H'_{km} = V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ H'_{kk} = -B_{kk} V_k - Q_k/V_k \end{cases} \\ L' &\begin{cases} L'_{km} = (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ L'_{kk} = Q_k/V_k^2 - B_{kk} \end{cases} \end{aligned}$$

4.2 Método desacoplado rápido

Esse método é uma simplificação do método anterior, considerando as seguintes aproximações:

- $\cos \theta_{km} \approx 1$ ($\theta_{km} \ll 1$): válido para sistemas em geral, especialmente EAT (extra-alta tensão) e UAT (ultra-alta tensão).
- $B_{km} \gg G_{km} \sin \theta_{km}$ ($\theta_{km} \ll 1$): válido para sistemas em geral, especialmente EAT e UAT.
- $B_{kk} V_k^2 \gg Q_k$: reatâncias *shunt* são, em geral, muito maiores que reatâncias série.
- $V_k \approx 1$: valores em P.U.

Usando essas aproximações, os termos da matriz jacobiana ficam:

$$\begin{aligned} H'_{kk} &= -B_{kk} & L'_{kk} &= -B_{kk} \\ H'_{km} &= -B_{km} & L'_{km} &= -B_{km} \\ H'_{mk} &= -B_{mk} & L'_{mk} &= -B_{mk} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} L'_{kk} &= -B_{kk} \\ L'_{km} &= -B_{km} \\ L'_{mk} &= -B_{mk} \end{aligned}$$

Definimos as matrizes $B' = H'$ e $B'' = L'$. As equações ficam então:

$$V^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B' & 0 \\ 0 & B'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta P/V = B' \Delta \theta \\ \Delta Q/V = B'' \Delta V \end{cases}$$

A vantagem desse método é que as matrizes B' e B'' são constantes, pois dependem somente dos parâmetros da rede. Essas matrizes são obtidas a partir da matriz $B = \Im\{Y\}$, com as seguintes características:

- Linhas e colunas associados à barra *slack* não aparecem em B' , pois não conhecemos P na barra *slack*.
- Linhas e colunas associados às barras PV e *slack* não aparecem em B'' , pois não conhecemos Q nessas barras.

Versão XB Podemos fazer mais uma simplificação, escrevendo os elementos das matrizes B' como

$$\begin{aligned} B'_{kk} &= \sum_{m=1}^{NB} x_{km}^{-1} & B''_{kk} &= -B_{kk} \\ B'_{km} &= B'_{mk} = -x_{km}^{-1} & B''_{km} &= B''_{mk} = -B_{km} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} B''_{kk} &= -B_{kk} \\ B''_{km} &= B''_{mk} = -B_{km} \end{aligned}$$

Observação: O método desacoplado rápido também faz iterações alternadas (meia-iteração ativa e reativa)

5 Fluxo de carga trifásico

5.1 Introdução

Características de sistemas de distribuição:

- Requerem modelagem trifásica do fluxo de carga.
- Têm estrutura radial ou quase radial (poucas malhas ou *loops*).
- A operação é desbalanceada, multifásica, com equipamentos aterrados ou não.
- Presença de geração distribuída e novas tecnologias, como veículos elétricos.
- O número de barras e ramos é extremamente grande.

Para analisar esses sistemas, os métodos tradicionais de fluxo de carga podem não ser adequados, notadamente o método desacoplado rápido. Ele é adequado para linhas com relação X/R elevada (típico de redes de transmissão), mas na distribuição, como os cabos são finos, a resistência é maior e a reatância, menor (X/R pequeno).

Existem diferentes técnicas desenvolvidas para calcular fluxo de carga em redes de distribuição:

- Modificações do método de Newton (e suas variações).
- Varredura direta e reversa (*back-forward sweep*).
- Modificação das variáveis de estado: AMB (baseado em matriz de admitâncias) e BCB (baseado em correntes dos ramos).

5.2 Modelagem da rede

A modelagem trifásica permite considerar *desbalanços nas cargas e desequilíbrios na rede*. Os desbalanços nas cargas são típicos de sistemas de média e baixa tensão e se devem à impossibilidade de distribuir as cargas uniformemente entre as fases; à aleatoriedade do consumo; e à presença de cargas monofásicas e bifásicas. Os desequilíbrios na rede se devem à não transposição das fases das linhas e ao compartilhamento das faixas de servidão por diversas linhas. Esses desequilíbrios podem ser contabilizados pelos acoplamentos mútuos entre as fases dos elementos da rede.

Em uma rede com n_b barras, há $6n_b$ variáveis de estado, já que em cada barra há três módulos e três ângulos para as tensões (um para cada fase): $(V_k^a, \theta_k^a), (V_k^b, \theta_k^b), (V_k^c, \theta_k^c)$.

Capacitores e indutores Capacitores e reatores *shunt* são tratados como impedâncias constante com ligação estrela⁸.

- Bancos de capacitores *shunt* são representados por matrizes de admitância primitivas diagonais Y_{sh} ⁹ e contribuem somente para a matriz de admitâncias nodais próprias (apenas diagonal de Y).

$$[Y_{sh}] = \text{diag}(1/jX_c, 1/jX_c, 1/jX_c)$$

- Bancos de capacitores ou indutores são elementos séries representados também por matrizes de admitância primitivas diagonais Y_s ¹⁰:

$$[Y_s] = \text{diag}(1/jX_c, 1/jX_c, 1/jX_c)$$

Essas matrizes contribuem para as matrizes de admitância nodais próprias e mútuas das barras a que estão ligadas da seguinte forma:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_s & -Y_s \\ -Y_s & Y_s \end{bmatrix}$$

Linhas de transmissão As linhas de transmissão são modeladas como linhas curtas, nas quais só se consideram efeitos eletromagnéticos, representada por matrizes de impedâncias Z_s .

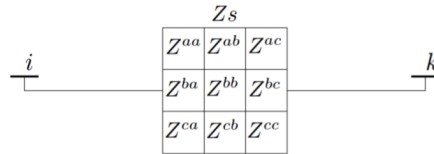


Figura 7: Matriz de admitância Z_s para linhas curtas.

A matriz de impedâncias primitivas Z_s se relaciona com tensões e correntes de linha por:

$$\begin{bmatrix} E_{ik}^a \\ E_{ik}^b \\ E_{ik}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ik}^a \\ I_{ik}^b \\ I_{ik}^c \end{bmatrix} \Rightarrow [E_{ik}^{abc}] = [Z_s][I_{ik}^{abc}]$$

A matriz de admitâncias pode ser obtida como $Y_s = Z_s^{-1}$. Assim, temos a relação

$$\begin{bmatrix} I_i^{abc} \\ I_k^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_s^{-1} & -Z_s^{-1} \\ -Z_s^{-1} & Z_s^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i^{abc} \\ E_k^{abc} \end{bmatrix}$$

Linhas médias e longas consideram efeitos eletromagnéticos e eletrostáticos. Essas linhas são representadas por um modelo π para cada fase.

Para esse modelo:

$$\begin{bmatrix} I_i^{abc} \\ I_k^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_s^{-1} + Y_{sh}/2 & -Z_s^{-1} \\ -Z_s^{-1} & Z_s^{-1} + Y_{sh}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i^{abc} \\ E_k^{abc} \end{bmatrix}$$

Transformadores Os diversos tipos de conexão entre transformadores podem ser representados pela associação de matrizes $Y_{pp}, Y_{ss}, Y_{sp}, Y_{ps}$, que contêm as admitâncias próprias e mútuas do primário e secundário do transformador. Como o acoplamento é simétrico, temos $Y_{sp} = Y_{ps}^T$

⁸Ligações em triângulo devem ser substituídas pela estrela equivalente.

⁹A notação $\text{diag}(x_0, \dots, x_n)$ denota a matriz diagonal de dimensão $n \times n$.

$$\begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & x_n \end{bmatrix}$$

¹⁰Tanto nesse caso como no anterior, não se consideram os acoplamentos entre fases.

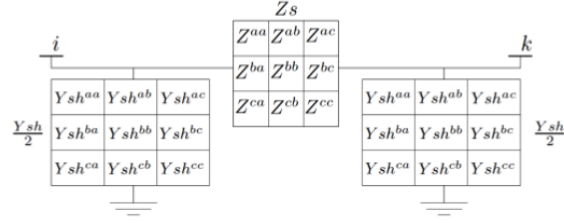


Figura 8: Matriz de admitância Z_s para linhas médias e longas.

Primário	Secundário	Y_{gp}	Y_{ss}	Y_{ps} e Y'_{gp}
Y-g	Y-g	Y_I	Y_I	$-Y_I$
Y-g	Y	Y_{II}	Y_{II}	$-Y_{II}$
Y-g	D	Y_I	Y_{II}	Y_{III}
Y	Y	Y_{II}	Y_{II}	$-Y_{II}$
Y	D	Y_{II}	Y_{II}	Y_{III}
D	D	Y_{II}	Y_{II}	Y_{III}

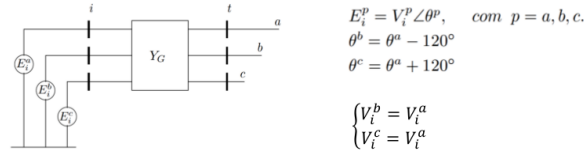
$$Y_I = \begin{bmatrix} y_t & 0 & 0 \\ 0 & y_t & 0 \\ 0 & 0 & y_t \end{bmatrix}, \quad Y_{II} = 1/3 \begin{bmatrix} 2y_t & -y_t & -y_t \\ -y_t & 2y_t & -y_t \\ -y_t & -y_t & 2y_t \end{bmatrix}, \quad Y_{III} = 1/\sqrt{3} \begin{bmatrix} -y_t & y_t & 0 \\ 0 & -y_t & y_t \\ y_t & 0 & -y_t \end{bmatrix}$$

► O termo y_t é a admitância de dispersão do transformador.

Figura 9: Submatrizes para representação de transformadores.

Referência angular No caso de redes de distribuição, a referência angular é alocada na subestação de energia e é necessário referenciar as três fases, defasadas de 120° . Por exemplo: $\theta^a = 0$, $\theta^b = -120^\circ$, $\theta^c = 120^\circ$.

Uma forma mais precisa de especificar a referência angular no caso trifásico é admitir a presença de um gerador equivalente da rede de transmissão conectado à subestação.



$$E_i^p = V_i^p \angle \theta^p, \quad \text{com } p = a, b, c.$$

$$\theta^b = \theta^a - 120^\circ$$

$$\theta^c = \theta^a + 120^\circ$$

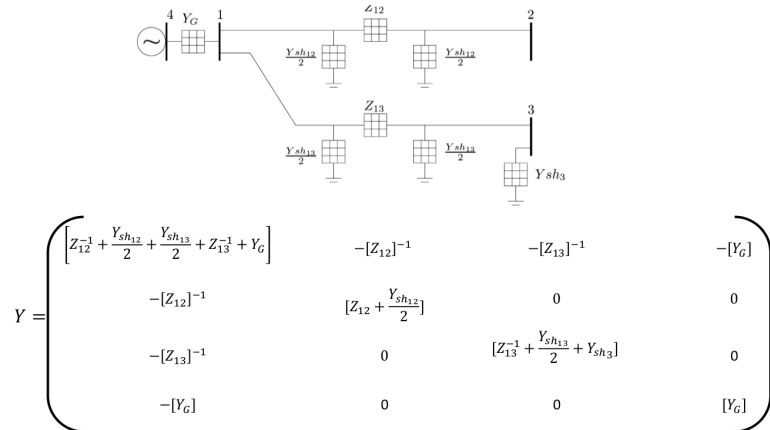
$$\begin{cases} V_i^b = V_i^a \\ V_i^c = V_i^a \end{cases}$$

Figura 10: Referência angular para rede de distribuição trifásica.

Matriz de admitância do sistema A matriz de admitância do sistema é formada a partir de duas regras simples:

- A matriz de admitância própria (elementos da diagonal principal) é formada pela soma das matrizes de admitância próprias dos elementos conectados à barra.
- A matriz de admitância mútua (elementos fora da diagonal principal) é o negativo das matrizes de admitâncias mútuas do elemento que conecta as barras.

Exemplo:



$$Y = \begin{bmatrix} \left[Z_{12}^{-1} + \frac{Y_{sh12}}{2} + \frac{Y_{sh13}}{2} + Z_{13}^{-1} + Y_G \right] & -[Z_{12}]^{-1} & -[Z_{13}]^{-1} & -[Y_G] \\ -[Z_{12}]^{-1} & \left[Z_{12} + \frac{Y_{sh12}}{2} \right] & 0 & 0 \\ -[Z_{13}]^{-1} & 0 & \left[Z_{13}^{-1} + \frac{Y_{sh13}}{2} + Y_{sh3} \right] & 0 \\ -[Y_G] & 0 & 0 & [Y_G] \end{bmatrix}$$

Figura 11: Exemplo de matriz de admitância do sistema.

Linhas bifásicas e monofásicas É comum encontrar linhas monofásicas e bifásicas, além de trifásicas. Uma possível solução para sua modelagem é tratar tais trechos como trifásicos, usando matrizes impedância e admitância trifásicas. Para isso, anulam-se os termos da matriz que não são relevantes.

$$Y_{23}^{abc} = \begin{pmatrix} y_{12}^{aa} & y_{12}^{ab} & 0 \\ y_{12}^{ba} & y_{12}^{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y_{23}^{abc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{23}^{cc} \end{pmatrix}$$

Figura 12: Exemplo de matrizes para linhas monofásica e bifásica.

► Portanto, a matriz de admitância da rede, considerando apenas matrizes 3x3, é dada, para o caso da linha bifásica, por:

$$\begin{pmatrix} I_1^{abc} \\ I_2^{abc} \\ I_3^{abc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{12}^{abc} + Ysh_{12}^{abc} & -Y_{12}^{abc} & 0 \\ -Y_{12}^{abc} & Y_{12}^{abc} + Ysh_{12}^{abc} + Y_{23}^{abc} + Ysh_{23}^{abc} & -Y_{23}^{abc} \\ 0 & -Y_{23}^{abc} & Y_{23}^{abc} + Ysh_{23}^{abc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{abc} \\ E_2^{abc} \\ E_3^{abc} \end{pmatrix}$$

► E para o caso da linha monofásica:

$$\begin{pmatrix} I_1^{abc} \\ I_2^{abc} \\ I_3^{abc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{12}^{abc} + Ysh_{12}^{abc} & -Y_{12}^{abc} & 0 \\ -Y_{12}^{abc} & Y_{12}^{abc} + Ysh_{12}^{abc} + Y_{23}^{abc} + Ysh_{23}^{abc} & -Y_{23}^{abc} \\ 0 & -Y_{23}^{abc} & Y_{23}^{abc} + Ysh_{23}^{abc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{abc} \\ E_2^{abc} \\ E_3^{abc} \end{pmatrix}$$

Figura 13: Matriz de admitância da rede para linhas monofásica e bifásica.

5.3 Métodos de solução

5.3.1 Método desacoplado rápido com rotação dos eixos

Consiste em rotacionar temporariamente o sistema de referência complexo, de modo que as novas impedâncias tenham relação X/R favorável para aplicação do método desacoplado rápido (valores maiores).

- Rotação de impedâncias¹¹:

$$Z' = Ze^{j\phi} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} R' \\ X' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ X \end{bmatrix}$$

- Rotação das potências:

$$S' = \frac{V^2}{Z'^*} = \frac{V^2}{(Ze^{j\phi})^*} = \frac{V^2}{Z^*e^{-j\phi}} = Se^{j\phi}$$

Proposta para obtenção de valores ótimos do ângulo de rotação ϕ ¹²:

$$\phi = \frac{1}{NR} \sum_{\ell=1}^{NR} \phi_{\ell},$$

onde: ϕ é o ângulo de rotação ótimo, NR é o número de ramos da rede, ℓ é o ramo que conecta as barras k e m e $\phi_{\ell} = 90^\circ - \arctan(x_{km}/r_{km})$.

5.4 Varredura direta e reversa

Considere a rede com 4 barras e 3 ramos a seguir na Figura 14. Eis o algoritmo de resolução (Algoritmo 3). Nesse exemplo, temos, para os passos 4 e 5, respectivamente:

$$I_{24} = I_4, \quad I_{23} = I_3, \quad I_{12} = I_2 + I_{23} + I_{24}$$

$$V_2 = V_1 - Z_{12}I_{12}, \quad V_3 = V_2 - Z_{23}I_{23}, \quad V_4 = V_2 - Z_{24}I_{24}$$

Esse método é específico para redes radiais, mas há modificações propostas para redes fracamente malhadas e para inclusão de reguladores de tensão, geração distribuída etc. O esquema de numeração das barras e ramos é fundamental para a eficiência do método (Figura 15).

Na Tabela 4, são apresentados os principais pontos de comparação entre o método de Newton e o método de varredura.

¹¹Para a segunda forma, $Z = R + jX$ ($C = \mathbb{R}^2$).

¹²GOMES, Ricardo B., *Resolução do problema de fluxo de carga para redes de distribuição utilizando o método desacoplado rápido com rotação automática de eixos*. Dissertação de Mestrado, FEEC/Unicamp, 2006.

[illegible]

Algoritmo 3: Algoritmo do método de varredura direta e reversa para rede da Figura 14.

1 início

2 | Arbitrar tensões nodais E_k , $k = 2, 3, 4$ (a tensão da subestação é conhecida, p. ex. $E_k = 1 \angle 0^\circ \text{pu}$).

3 Calcular correntes nodais $I_k = \left(\frac{S_k}{E_k}^* + Y_k^{sh} E_k, k = 2, 3, 4 \right)$, em que Y_k^{sh} é admitância *shunt*.

4 *Back sweep:* partindo dos ramos terminais em direção à subestação, calcular as correntes nos ramos que conectam os nós k e m :

$$I_{km} = I_m + \sum_{j \in F_m} I_{mj}$$

onde F_m é o conjunto das barras alimentadas pela barra m .

5 *Forward sweep*: atualizar as tensões nodais começando da subestação em direção às barras terminais:

$$V_m = V_k - Z_{km}I_{km}$$

para a barra m , em que a barra k é a outra barra terminal do ramo km , que alimenta m .

6 se $\max_k \{\Delta V_k\} \leq \epsilon$ então

7	Solução obtida.
---	-----------------

8	fm
---	----

9	Voltar para o passo 3.
---	------------------------

10 fim

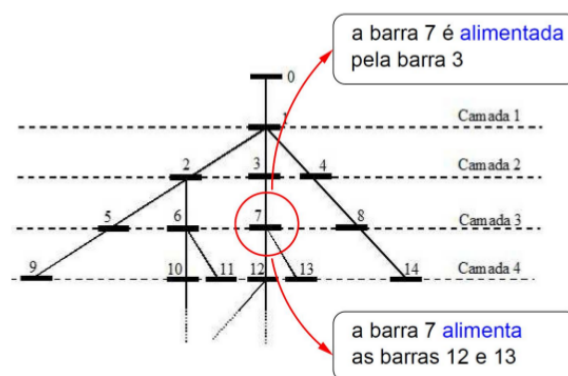


Figura 15: Exemplo de numeração para solução por varredura.

	Newton	Varredura
Complexidade de implementação	Alta	Baixa
Convergência	Quadrática Independência do número de barras PV	Independência do ponto inicial Dependência do número de barras PV
Flexibilidade	Alta	Baixa
Necessidade de memória	Alta	Baixa
Esforo computacional	Alto	Baixo

6 Transformadores

Tipos de transformadores:

- Transformador elevador (*step-up transformer*)

- Transformador abaixador (*step-down transformer*)
- Transformador regulador (*regulating transformer*)
Relação aproximadamente 1 : 1, defasagem entrada-saída
- Transformadores de medição
De corrente e de potencial

6.1 Transformador monofásico

No transformador ideal:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = a$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = a^2$$

$$S_1 = V_1 I_1^* = V_2 I_2^* = S_2$$

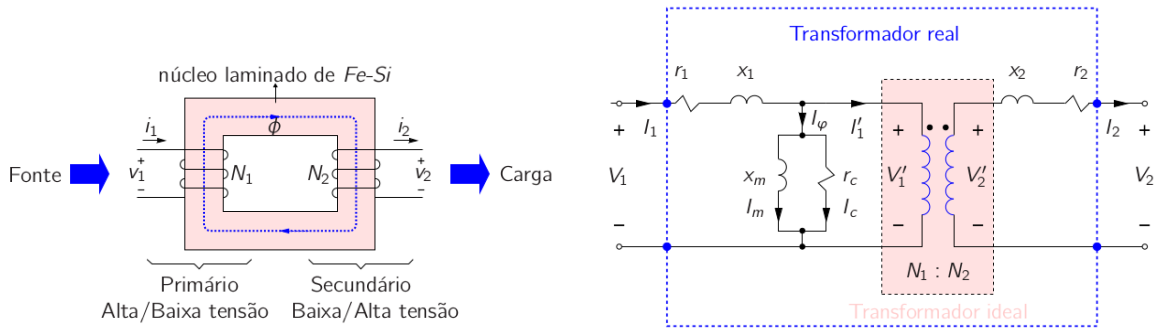


Figura 16: Diagrama e circuito equivalente de transformador monofásico real.

No modelo do transformador real são considerados:

- r_1, r_2 - resistência de perdas ôhmicas nos enrolamentos (perdas cobre)
- x_1, x_2 - reatâncias de dispersão de fluxo
- r_c - resistência de perdas no núcleo¹³ (perdas ferro)
- x_m - reatância de magnetização do núcleo

É possível fazer simplificações no circuito equivalente do transformador monofásico:

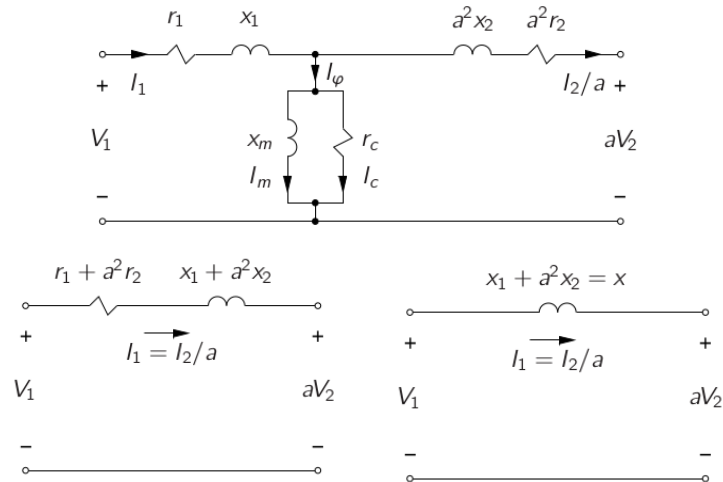


Figura 17: Simplificações do circuito equivalente do transformador monofásico.

¹³Por histerese e correntes parasitas.

1. Eliminar o transformador ideal refletindo as impedâncias do secundário.
2. Como $I_\phi \ll I_1$, pode-se desprezar os parâmetros *shunt*.
3. Para transformadores de alta potência (centenas de kVA), as perdas ôhmicas são desprezíveis em comparação com as reatâncias.

6.2 Transformadores trifásicos

Duas formas de obtenção:

- Banco trifásico (três transformadores monofásicos - núcleos distintos). É possível mudar as ligações.
- Transformador trifásico (três enrolamentos em um mesmo núcleo). É mais compacto e mais barato, mas as ligações são internas e não há como alterá-las.

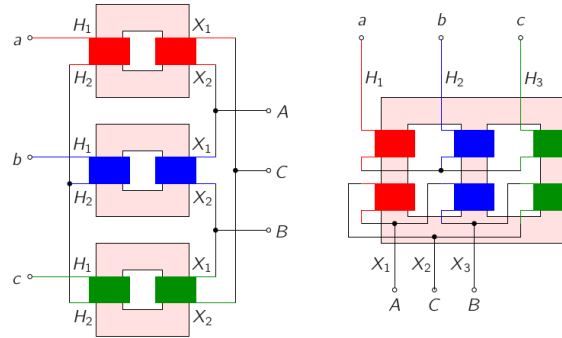


Figura 18: Tipos de transformadores trifásicos.

Tipos de ligação de transformadores trifásicos:

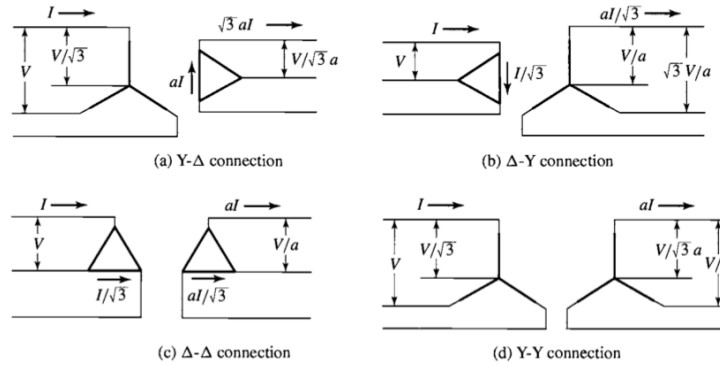


Figura 19: Tipos de ligações em transformadores trifásicos.

- Ligação $Y-\Delta$: utilizada para transformadores abaixadores. A relação de transformação é $a\sqrt{3}\angle 30^\circ$ entre tensões de linha do primário e secundário.
- Ligação $\Delta-Y$: utilizada em transformadores elevadores e abaixadores. A relação de transformação é $a/\sqrt{3}\angle -30^\circ$ entre tensões de linha do primário e do secundário.
- Ligação $\Delta-\Delta$: permite a ligação em Δ aberto ou em $V-V$ (caso em que sabe-se que a carga vai crescer no futuro). Relação de transformação $a\angle 0^\circ$ entre tensões de linha.
- Ligação $Y-Y$: raramente utilizada, pois as terceiras harmônicas provocam distorção nas formas de onda. Pode ser resolvido com aterramento dos neutros ou com instalação de terciário (também usado para alimentar a subestação). Relação de transformação $a\angle 0^\circ$ entre tensões de linha.

6.3 Autotransformador

Obtido com ligação física entre os enrolamentos primário e secundário. Vantagem: maior tensão no lado de alta, maior corrente no lado de baixa, maior potência suportada. Desvantagem: ligação elétrica entre primário e secundário (não há isolamento elétrico).

Em sistemas de potência, autotransformadores são ligados em Y, com neutro solidamente aterrado e possuem um enrolamento terciário, ligado em Δ .

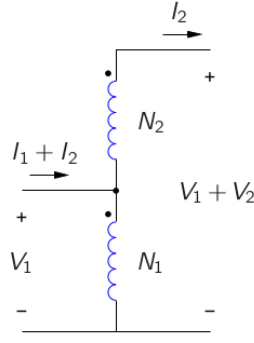


Figura 20: Circuito de um autotransformador.

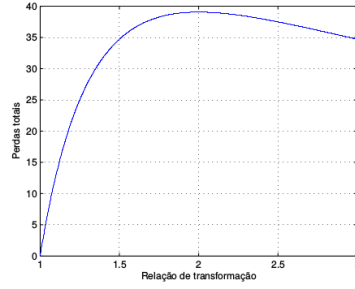


Figura 21: Relação entre perdas totais e relação de transformação em autotransformadores.

6.4 Transformadores de três enrolamentos

São muito usados em sistemas de potência. Características do terceiro enrolamento:

- Baixa tensão, baixa potência.
- Pode ser conectado a fonte suporte de potência reativa.
- Pode ser utilizado para alimentar subestação (carga).
- Pode capturar componentes harmônicas e correntes de sequência zero devido a desbalanceamento da carga.

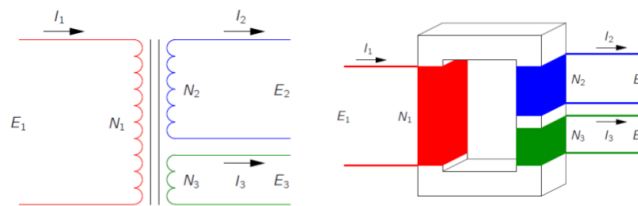


Figura 22: Transformadores de três enrolamentos.

$$\frac{E_1}{N_1} = \frac{E_2}{N_2} = \frac{E_3}{N_3}$$

$$S_1 = S_2 + S_3$$

6.5 Transformadores com *tap* variável

São transformadores com relação de espira variável. Essa mudança de posição do *tap* pode ser manual ou automática, sem ou com carga (*on-load tap changer*). O comutador de *tap* normalmente fica no lado de alta tensão (correntes menores). Em geral, a mudança é automática e operada por motores acionados por relés, para manter a tensão em um nível determinado (do lado da carga).

Estrutura geral do transformador:

- TC, TP - transformador de corrente e de potencial, para medição de corrente e de tensão.

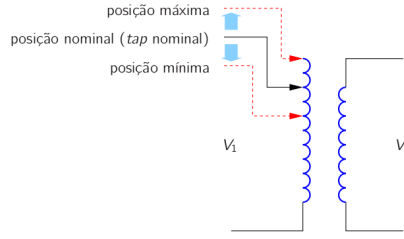


Figura 23: Transformadores com *tap* variável.

- V ajuste (tensão de referência, ponto de ajuste, centro de banda) - tensão desejada no terminal do regulador ou em uma barra remota do alimentador de distribuição.
- Largura de faixa - variação permitida entre a tensão de referência e a tensão provocada pela carga. Exemplo: para tensão de 127 V e margem de 2 V, o regulador não comutará o *tap* na faixa [125, 129] V. Evita acionamentos excessivos.
- Temporização (tempo morto) - *delay* para iniciar a comutação de *tap*. Também evita acionamentos excessivos (para variações pequenas e rápidas de tensão).
- Compensação por queda de tensão na linha (*line drop compensation*) - compensa a queda de tensão da linha entre regulador de tensão e centro de carga determinado, distante de $R_L + jX_L$ do regulador.

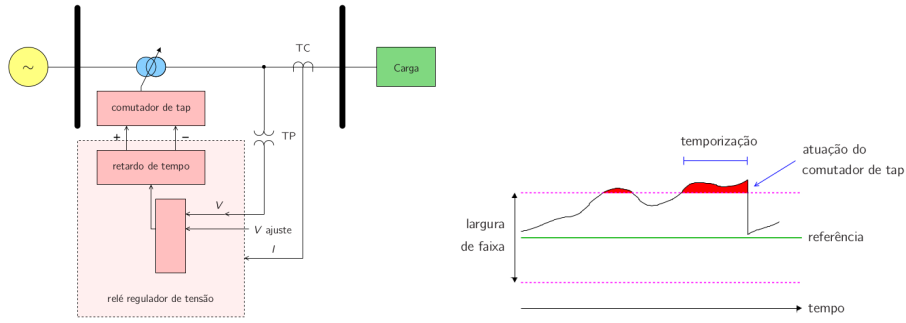


Figura 24: Estrutura geral do transformador (esquerda) e parâmetros de acionamento de *tap* (direita).

Em transformadores reguladores de tensão série, o transformador acrescenta ΔV ao valor de tensão V nas três fases. A variação em geral é de $\pm 10\%$ (*tap* com 32 níveis). Transformadores defasadores são usados para controlar a defasagem de tensões entre primário e secundário através do controle do fluxo de potência ativa por ele.

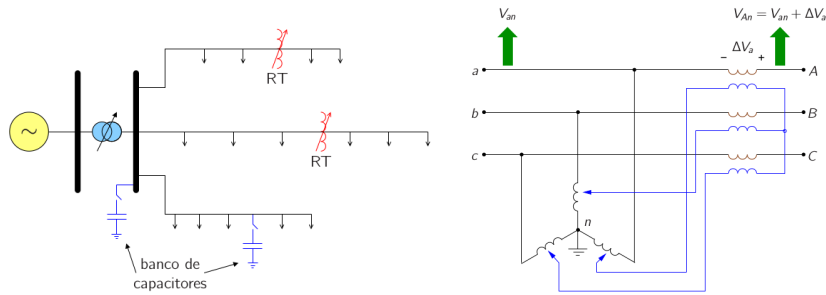


Figura 25: Autotransformador regulador de tensão (esquerda) e transformador regulador (direita).

Representação computacional Transformadores podem ser representados de maneira similar a linhas de transmissão, pois ambos elementos conectam dois nós da rede. Assim, serão também representados por um modelo π .

Considere um transformador com relação de espiras $1 : \alpha$. Ele pode ser representado pelo seguinte π .

Dado um transformador de impedância $z = 1/y$ e relação de espiras $1 : \alpha$, seu modelo π é formado pelas indutâncias

$$\frac{y}{a}, \quad \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) y, \quad \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) y$$

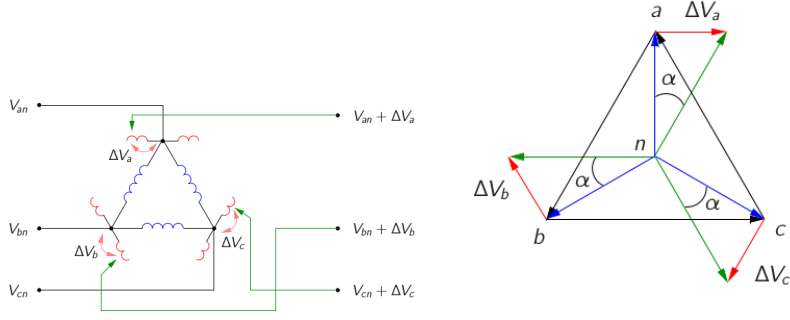


Figura 26: Transformador defasador.

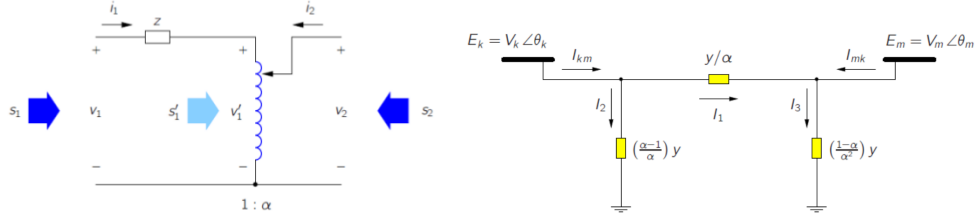


Figura 27: Modelo π para transformador, onde $y = 1/z$.

- Se $\alpha < 1$, a impedância B é capacitiva e C , indutiva. A tendência é V_k aumentar e V_m diminuir.
- Se $\alpha > 1$, a impedância B é indutiva e C , capacitiva. A tendência é V_m aumentar e V_k diminuir.

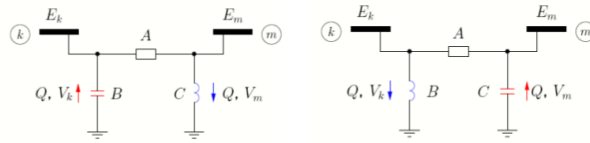


Figura 28: Modelo π para $\alpha < 1$ (esquerda) e $\alpha > 1$ (direita).

As correntes são dadas por

$$I_{km} = I_1 + I_2 = yE_k - \frac{y}{\alpha}E_m$$

$$I_{mk} = -I_1 + I_3 = -\frac{y}{\alpha}E_k + \frac{y}{\alpha^2}E_m$$

Os fluxos de potência são dados por¹⁴.

$$S_{km}^* = E_k I_{km}^* = P_{km} + jQ_{km}$$

$$P_{km} = gV_k^2 - \frac{V_k V_m}{\alpha} (g \cos \theta_{km} + b \sin \theta_{km})$$

$$Q_{km} = -bV_k^2 - \frac{V_k V_m}{\alpha} (g \sin \theta_{km} - b \cos \theta_{km})$$

$$S_{mk}^* = E_k I_{mk}^* = P_{mk} + jQ_{mk}$$

$$P_{mk} = \frac{g}{\alpha^2} V_m^2 - \frac{V_k V_m}{\alpha} (g \cos \theta_{km} - b \sin \theta_{km})$$

$$Q_{mk} = -\frac{b}{\alpha^2} V_m^2 + \frac{V_k V_m}{\alpha} (g \sin \theta_{km} + b \cos \theta_{km})$$

As perdas podem ser calculadas como

$$P_{perdas} = P_{km} + P_{mk}$$

$$Q_{perdas} = Q_{km} + Q_{mk}$$

¹⁴Onde $y = g + jb$

7 Cálculo de curto-circuito

Um sistema de potência está constantemente sujeito a distúrbios no seu estado normal. As perturbações mais severas são os *curto-circuitos* ou *faltas*, quando ocorre perda de isolamento entre fases ou entre uma fase e a terra. Durante a falta, ocorre conexão entre pontos da rede ou da terra por uma impedância muito baixa, o que resulta na passagem de corrente elevada. Assim, ocorre liberação de grandes energias, que podem danificar instalações e equipamentos elétricos.

Dentre as causas desses eventos estão: contatos com árvores, defeitos de equipamentos, descargas atmosféricas etc. A análise de curto-circuito é fundamental para o planejamento, operação e manutenção de um sistema de potência (determinação da capacidade de interrupção dos equipamentos de chaveamento, projeto dos relés de proteção, seleção de reatores limitadores de corrente, cálculo de esforço mecânico nos equipamentos, cálculos da malha de aterramento).

O sistema de aterramento afeta a magnitude e o ângulo da corrente de curto-circuito à terra. Existem três tipos de aterramento: sistema não aterrado (neutro isolado), sistema aterrado por impedâncias, sistema eficazmente aterrado (sem impedâncias). No sistema não aterrado, a corrente de curto-circuito para a terra é desprezível e as sobretensões sustentadas são elevadas; no sistema aterrado, a corrente de curto-circuito para a terra é elevada e as sobretensões são reduzidas.

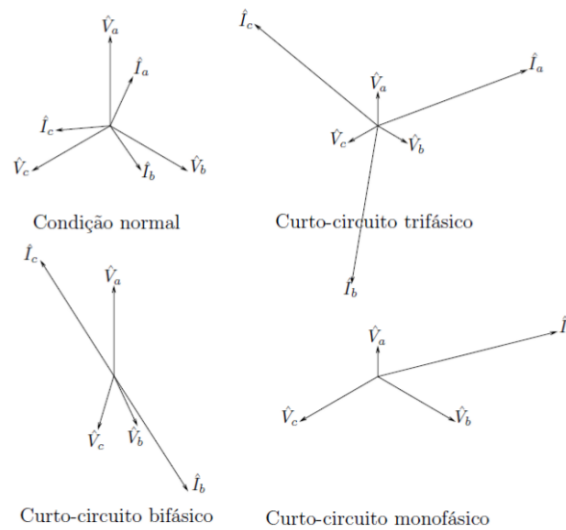


Figura 29: Diagrama fasorial dos tipos de curto-circuito.

Consequências do curto-circuito:

- Dissipação de potência na parte resistiva do circuito, provocando aquecimento segundo $k \cdot I_{cc}^2 \cdot r \cdot \Delta t$.
- A queda de tensão no momento da falta provoca transtornos aos consumidores. Motores de indução têm torque $\tau \propto V^2$. Cargas como sistemas de iluminação e computadores são sensíveis a quedas de tensão.
- Queda abrupta de tensão pode provocar instabilidade na operação paralela de geradores, podendo causar desagregação do sistema e interrupção de fornecimento para consumidores.
- Mudanças rápidas na configuração do sistema elétrico causadas por curto-circuito após a retirada do circuito sob falta podem ainda provocar:
 - Sobrecarga em equipamentos - passagem de corrente acima do valor nominal.
 - Sufreqüência e sobrefreqüência - causadas pelo desequilíbrio entre geração e carga.
 - Sobretensão - provocada pela súbita retirada de carga e pelo efeito capacitivo das linhas de transmissão.

Corrente assimétrica de curto-circuito Um aspecto importante para a especificação da corrente de curto-circuito é a assimetria que ela pode apresentar.

- O valor de pico máximo da corrente de curto-circuito assimétrica define a característica dinâmica dos equipamentos, enquanto o valor eficaz da corrente simétrica define a característica térmica.
- O comportamento de uma corrente $i(t)$ tem uma parcela de regime permanente (componente AC), calculada pelos programas de curto-circuito, e uma parcela transitória (componente DC).
- Para considerar a parcela transitória, os programas usam fórmulas aproximadas das normas (ANSI/IEEE ou IEC, por exemplo).

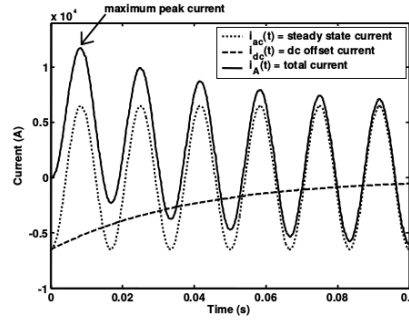


Figura 30: Resposta temporal de um sinal de corrente.

Para obter o valor da corrente assimétrica em qualquer instante:

$$I_{ass} = I_{ef} \sqrt{2} (1 + e^{-t/\tau}), \quad \tau = \frac{X}{\omega R} \times 1000 \text{ ms}$$

onde $X/R = X_+/R_+$ para curto trifásico ou $X/R = (2X_+ + X_0)/(2R_+ + R_0)$ para curto monofásico. I_{ef} é o valor eficaz de corrente obtido pelo programa de curto-circuito, t é o tempo contado a partir da falta e τ é a constante de tempo vista dos terminais do disjuntor.

Sistema P.U. Os cálculos da análise de curto-circuito são feitos no sistema P.U. (Revisão 2) (ou em porcentagem), devido às muitas vantagens que essa normalização oferece. Em sistemas de potência, é comum escolher as tensões nominais do sistema como tensões de base e 100 MVA como potência de base. Em sistemas de média e baixa tensão, outros valores de potência podem ser adotados.

Uma relação útil é a mudança de base de uma impedância em P.U.:

$$z_1 = z_2 \frac{S_{base1}}{S_{base2}} \left(\frac{V_{base2}}{V_{base1}} \right)^2$$

7.1 Curto-circuito equilibrado

O curto-circuito trifásico é um evento equilibrado (tensões e correntes permanecem balanceadas), portanto pode ser analisado a partir da representação monofásica (sequência positiva) da rede. Embora a ocorrência de uma falta seja um fenômeno dinâmico (modelado por equações diferenciais), pode-se empregar uma modelagem estatística (equações algébricas).

Hipóteses simplificadoras da análise:

- Todas as máquinas síncronas são consideradas operando com tensão de 1 pu e ângulo 0° .
- Os parâmetros *shunt* das linhas são descartados.
- As cargas são descartadas.
- Todos os transformadores são considerados operando com *tap* nominal (1 pu).
- A rede de sequência positiva é igual à de sequência negativa.

Além disso, há outros fatores cujas indeterminações decorrem da natureza do problema. As simplificações adotadas equivalem ao sistema operando em vazio (sem cargas ou correntes antes da falta).

A complexidade dos cálculos depende da topologia da rede: malhada ou radial.

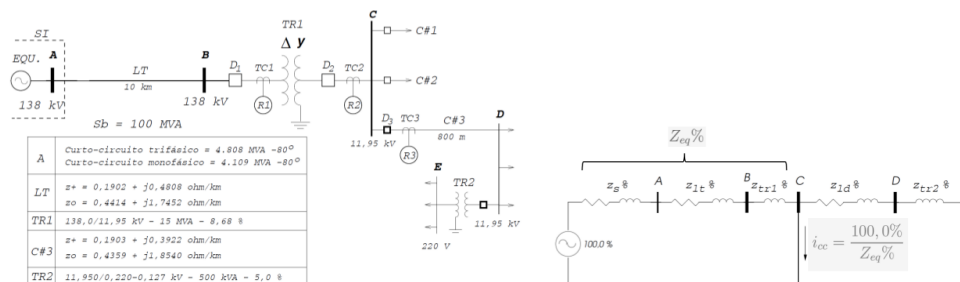


Figura 31: Curto-circuito (barra C) em rede radial.

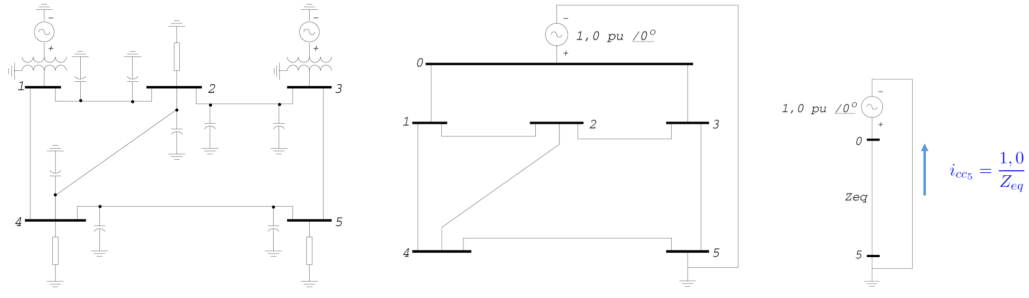


Figura 32: Curto-circuito (barra 5) em rede malhada.

No caso da rede malhada, após aplicação das simplificações, o problema se resume a encontrar Z_{eq} para todas as barras de modo eficiente¹⁵.

Método de resolução As impedâncias do sistema são representadas na matriz de impedâncias Z_{barra} , que é formada da seguinte forma:

- Os elementos Z_{kk} são as impedâncias próprias dos nós ou impedâncias equivalentes entre o nó sob falta e a barra de referência.
- Os elementos Z_{km} são as impedâncias de transferência entre os nós k e m .

As tensões e correntes nas barras de uma rede sob curto-circuito se relacionam pela matriz de impedâncias como

$$[v] = [Z_{barra}][i]$$

Se a referência de tensão (nó terra) acompanha a barra sob curto, a matriz de impedâncias será diferente para o curto em cada barra. Para resolver isso, a altera-se a referência para a barra 0 da rede. Nesse novo modelo, as tensões nas barras devem ser corrigidas por

$$v_i^r = 1 + v_i$$

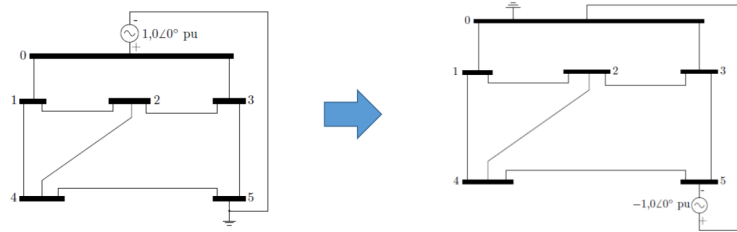


Figura 33: Correção do nó de referência.

O objetivo do método é calcular:

1. Correntes de curto-circuito em todas as barras.

$$i_{cc_k} = \frac{-1}{Z_{kk}}$$

2. Tensões nas barras vizinhas para cada curto.

$$v_i^r = 1 - \frac{Z_{ik}}{Z_{kk}}$$

3. Fluxos de correntes nas linhas vizinhas para cada curto.

$$i_{p-q} = \frac{v_p^r - v_q^r}{z_{pq}}$$

¹⁵ Isso é necessário para calcular a corrente de curto total na barra, mas é apenas uma das necessidades para solucionar o problema.

Em princípio a matriz $[Z_{barra}]$ pode ser obtida invertendo a matriz de admitâncias. Mas como cargas e *shunts* foram descartados, essa matriz é singular. Para resolver isso, devem-se acrescentar as *impedâncias dos geradores*. Agora sim:

$$[Z] = [Y]^{-1}$$

Em sistemas radiais, as correntes de curto-circuito não variam muito com a capacidade dos geradores, mas dependem da distância x até a fonte. Os valores máximo e mínimo dessa corrente dependem da tensão nominal da fonte V_S , da impedância equivalente do sistema Z_S e da impedância total da linha Z_L .

$$I_{cc}^{max} = \frac{V_S}{|Z_S|}, \quad I_{cc}^{max} = \frac{V_S}{|Z_S + Z_L|}$$

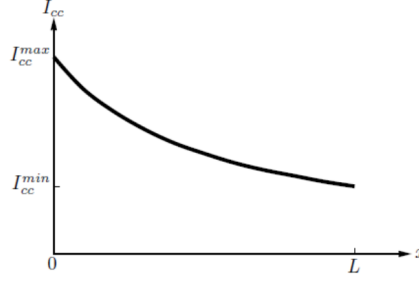


Figura 34: Variação da corrente de curto-circuito com a distância da fonte (rede radial).

Preparação dos dados

- Há três maneiras de fornecer o *equivalente da fonte*:

1. Impedâncias (Ω).

$$z_{+s} = \frac{Z_{+s}}{Z_{base}}$$

2. Correntes de curtos-circuitos (A).

$$S_{3\phi} = \sqrt{3}V_l I_l, \quad S_{3\phi} = \frac{V_l^2}{Z} \Rightarrow Z_{+s} = \frac{V_l}{\sqrt{3}I_{cc3\phi}}$$

3. Potências de curto-circuitos (MVA).

$$S_{3\phi} = \frac{V_l^2}{Z} \Rightarrow Z_{+s} = \frac{V_l^2}{S_{cc3\phi}}$$

- Os dados das linhas de transmissão e distribuição normalmente são dados em Ω/km .

$$z_{+l} = \frac{Z_{+L}}{Z_{base}}$$

- Os fabricantes fornecem a impedância porcentual dos *transformadores*.

$$z_{+t_s} = z_{+t_e} \frac{S_{base_s}}{S_{base_e}}$$

7.2 Curto-circuito desequilibrado

Componentes simétricas Método que simplifica a análise de circuitos trifásicos desequilibrados, proposto por Charles Le-Geyt Fortescue em 1913. Consiste em decompor um sistema trifásico em três componentes:

1. *Componente de sequência positiva*: três fasores de módulos iguais, defasados de 120° , com mesma sequência de fase que o sistema original ($\hat{A}_+, \hat{B}_+, \hat{C}_+$).
2. *Componente de sequência negativa*: três fasores de módulos iguais, defasados de 120° , com sequência de fase inversa em relação ao sistema original ($\hat{A}_-, \hat{B}_-, \hat{C}_-$).

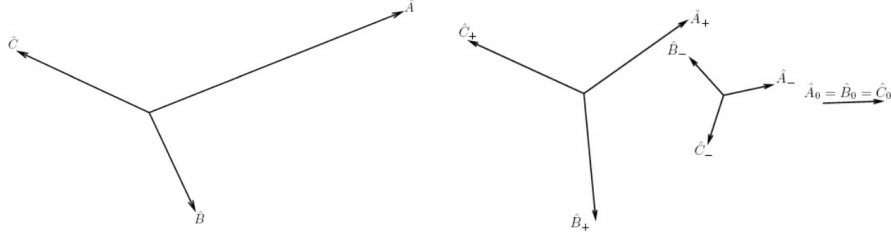


Figura 35: Representação de sistema trifásico desequilibrado e componentes simétricas.

3. *Componente de sequência zero*: três fasores de módulos iguais e em fase ($\hat{A}_0, \hat{B}_0, \hat{C}_0$).

$$\hat{A} = \hat{A}_+ + \hat{A}_- + \hat{A}_0$$

$$\hat{B} = \hat{B}_+ + \hat{B}_- + \hat{B}_0$$

$$\hat{C} = \hat{C}_+ + \hat{C}_- + \hat{C}_0$$

Introduzindo o operador $a := e^{j120^\circ}$, temos $a^2 = e^{j240^\circ}$ e $a^3 = 1$.

$$\hat{A} = \hat{A}_+ + \hat{A}_- + \hat{A}_0$$

$$\hat{B} = a^2 \hat{A}_+ + a \hat{A}_- + \hat{A}_0$$

$$\hat{C} = a \hat{A}_+ + a^2 \hat{A}_- + \hat{A}_0$$

Em notação matricial, temos a matriz de componentes simétricas ou de Fortescue T :

$$P = TS \Leftrightarrow S = T^{-1}P$$

$$\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \\ \hat{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_+ \\ \hat{A}_- \\ \hat{A}_0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \hat{A}_+ \\ \hat{A}_- \\ \hat{A}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \\ \hat{C} \end{bmatrix}$$

Potência trifásica em componentes simétricas:

$$S = P + jQ = 3(\hat{V}_+ \hat{I}_+^* + \hat{V}_- \hat{I}_-^* + \hat{V}_0 \hat{I}_0^*)$$

Impedância de elementos passivos:

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_+ \\ \hat{V}_- \\ \hat{V}_0 \end{bmatrix} = T^{-1} Z_C T \begin{bmatrix} \hat{I}_+ \\ \hat{I}_- \\ \hat{I}_0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \hat{I}_+ \\ \hat{I}_- \\ \hat{I}_0 \end{bmatrix} = T^{-1} Y_C T \begin{bmatrix} \hat{V}_+ \\ \hat{V}_- \\ \hat{V}_0 \end{bmatrix}$$

Linhas de transmissão desequilibradas:

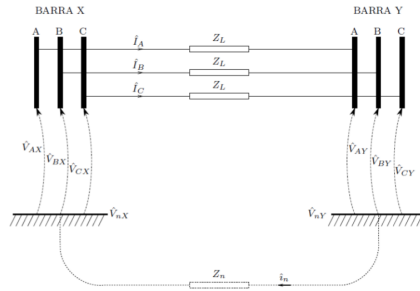


Figura 36: Linha de transmissão com carga desequilibrada.

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_{AX} - \hat{V}_{AY} \\ \hat{V}_{BX} - \hat{V}_{BY} \\ \hat{V}_{CX} - \hat{V}_{CY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_L + Z_n & Z_n & Z_n \\ Z_n & Z_L + Z_n & Z_n \\ Z_n & Z_n & Z_L + Z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_A \\ \hat{I}_B \\ \hat{I}_C \end{bmatrix}$$

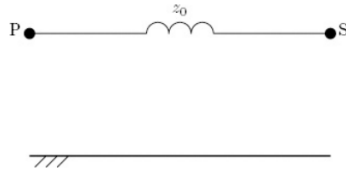
$$Z_S = T^{-1} Z_C T = \begin{bmatrix} Z_L & 0 & 0 \\ 0 & Z_L & 0 \\ 0 & 0 & Z_L + 3Z_n \end{bmatrix}$$

Transformadores:

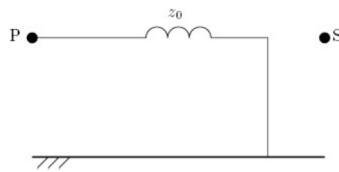
- A impedância de sequência positiva é um parâmetro série.
- A impedância de sequência negativa é igual à de sequência positiva.
- A impedância de sequência zero depende do esquema de ligação e do tipo de núcleo (núcleo envolvido ou *core type* e núcleo envolvente ou *shell type*). Pode assumir valores (em P.U.) $\{z_+, 0,85z_+, 5z_+, \infty\}$.

Tipos de transformadores e ligações:

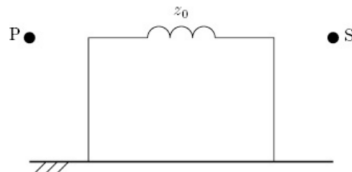
- Transformador trifásico de núcleo envolvente ou banco monofásico ligado em Y-Y com neutros aterrado



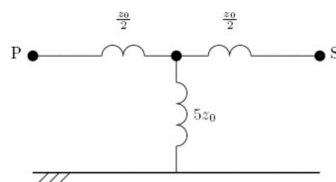
- Transformador trifásico de núcleo envolvente ou banco monofásico ligado em Y- Δ com neutro aterrado



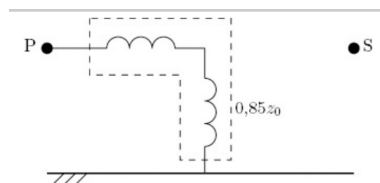
- Transformador trifásico de núcleo envolvente ou banco monofásico ligado em Δ - Δ



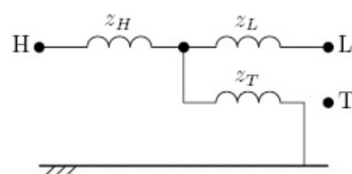
- Transformador trifásico com núcleo envolvido ligado em Y-Y com neutros aterrados



- Transformador trifásico com núcleo envolvido ligado em Y- Δ com neutro aterrado



- Autotransformador trifásico com núcleo envolvente



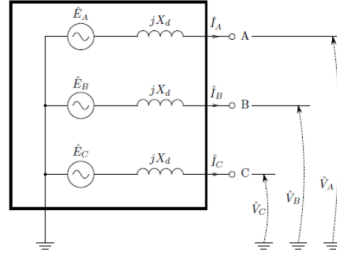


Figura 37: Máquina síncrona.

Geradores síncronos:

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_A \\ \hat{V}_B \\ \hat{V}_C \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \hat{E}_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_1 + a^2 Z_2 + a Z_3 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 + a Z_2 + a^3 Z_3 & 0 \\ 0 & 0 & Z_1 + Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_A \\ \hat{I}_B \\ \hat{I}_C \end{bmatrix}$$

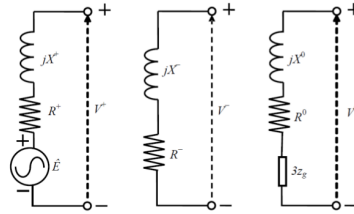


Figura 38: Equivalente da máquina síncrona.

Observações importantes

- As redes de sequência contêm as impedâncias de todos os elementos da rede, inclusive dos geradores.
- As matrizes impedâncias das redes de sequência são obtidas invertendo as matrizes admitâncias das redes de sequência. O procedimento de obtenção das matrizes admitâncias é o mesmo já visto para curto-circuito trifásico.
- Como a topologia e os parâmetros das redes de sequência positiva e negativa são iguais, suas matrizes admitâncias são iguais.
- A topologia e os parâmetros da rede sequência zero depende da configuração dos transformadores. Sua matriz de admitâncias é diferente das redes de sequência positiva e negativa.
- As impedâncias usadas no cálculo de correntes e tensões durante uma falta estão nas matrizes de impedância de sequência positiva, negativa e zero. Os elementos Z_{kk} são as impedâncias próprias dos nós ou impedâncias equivalentes entre o nó e a barra de referência (sob falta). Os elementos Z_{km} são impedâncias de transferência entre os nós k e m .

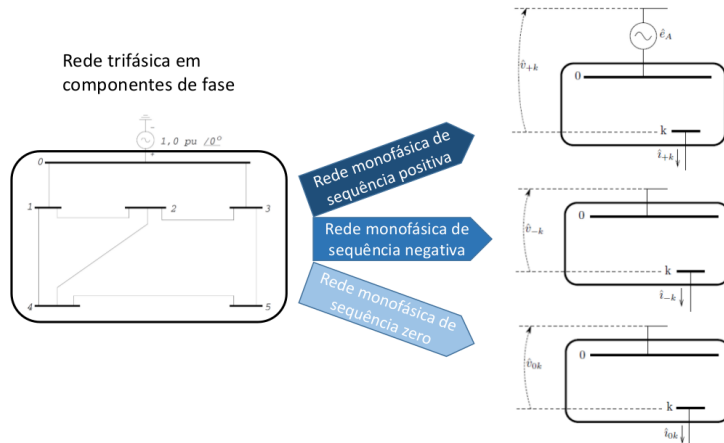


Figura 39: Decomposição do circuito trifásico em componentes simétricas.

Etapas para analisar curto-circuito em um sistema de potência:

1. Obter impedâncias de sequência positiva e zero.
2. Obter redes de sequência positiva e zero.
3. Obter conexão das redes de seqüências de acordo com o tipo de falta.

7.2.1 Curto-circuito bifásico

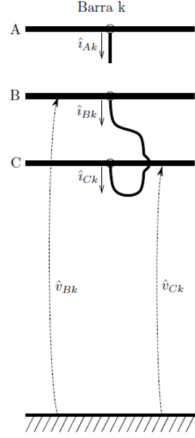


Figura 40: Curto-circuito bifásico na barra k .

Condições de contorno:

$$\hat{i}_{Ak} = 0, \quad \hat{i}_{Bk} = -\hat{i}_{Ck}, \quad \hat{v}_{Bk} = \hat{v}_{Ck}$$

Aplicando as condições de contorno nas equações de correntes:

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{+k} \\ \hat{i}_{-k} \\ \hat{i}_{0k} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{i}_{Bk} \\ -\hat{i}_{Bk} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} a\hat{i}_{Bk} - a^2\hat{i}_{Bk} \\ a^2\hat{i}_{Bk} - a\hat{i}_{Bk} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \hat{i}_{+k} = -\hat{i}_{-k} \\ \hat{i}_{0k} = 0 \end{cases}$$

Aplicando as condições de contorno nas equações de tensões:

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_{+k} \\ \hat{v}_{-k} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_{Ak} \\ \hat{V}_{Bk} \\ -\hat{v}_{Bk} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \hat{v}_{Ak} - \hat{v}_{Bk} \\ \hat{v}_{Ak} - \hat{v}_{Bk} \\ \hat{v}_{Ak} + 2\hat{v}_{Bk} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \hat{v}_{+k} = \hat{v}_{-k} \end{cases}$$

Usando as relações para gerador síncrono:

$$\begin{aligned} \hat{v}_{+k} &= \hat{e}_A - \hat{i}_{+k} Z_{kk}^+ \\ \hat{v}_{+k} &= 0 - \hat{i}_{-k} Z_{kk}^- \end{aligned}$$

Usando que $\hat{i}_{+k} = -\hat{i}_{-k}$ e $\hat{v}_{+k} = \hat{v}_{-k}$, temos:

$$\hat{i}_{+k} = \hat{i}_{-k} = \frac{\hat{e}_A}{Z_{kk}^+ + Z_{kk}^-}$$

a. Corrente de curto-circuito bifásico na barra k :

$$\hat{i}_{+k} = \hat{i}_{-k} = \frac{-1}{2Z_{kk}^+}, \quad \hat{i}_{0k} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{Ak} \\ \hat{i}_{Bk} \\ \hat{i}_{Ck} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{+k} \\ \hat{i}_{-k} \\ \hat{i}_{0k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -j\sqrt{3}\frac{1}{2Z_{kk}^+} \\ j\sqrt{3}\frac{1}{2Z_{kk}^+} \end{bmatrix}$$

b. Tensão de sequência positiva

$$v_{+i}^R = 1 - \frac{Z_{ik}^+}{2Z_{kk}^+}$$

c. Tensão de sequência negativa nas barras

$$v_{-i}^R = \frac{Z_{ik}^+}{2Z_{kk}^+}$$

d. Tensões de fase nas barras

$$\begin{cases} \hat{v}_{Ai} = \hat{v}_{+i} + \hat{v}_{-i} = 1 \\ \hat{v}_{Bi} = a^2 \hat{v}_{+i}^R + a \hat{v}_{-i}^R = a^2 + j\sqrt{3} \frac{Z_{ik}^+}{2Z_{kk}^+} \\ \hat{v}_{Ci} = a \hat{v}_{+i}^R + a^2 \hat{v}_{-i}^R = a - j\sqrt{3} \frac{Z_{ik}^+}{2Z_{kk}^+} \end{cases}$$

e. Fluxo de corrente de sequência positiva nas linhas

$$\hat{i}_{+p-q}^R = \frac{\hat{v}_{+p}^R - \hat{v}_{+q}^R}{z_{p-q}^+} = \left(\frac{Z_{q,k}^+ - Z_{p,k}^+}{2Z_{kk}^+} \right) \frac{1}{z_{p-q}^+}$$

f. Fluxo de corrente de sequência negativa nas linhas

$$\hat{i}_{-p-q}^R = \frac{\hat{v}_{-p}^R - \hat{v}_{-q}^R}{z_{p-q}^+} = \left(\frac{Z_{p,k}^+ - Z_{q,k}^+}{2Z_{kk}^+} \right) \frac{1}{z_{p-q}^+}$$

g. Fluxos de corrente na linha $p - q$ em componentes de fase

$$\begin{cases} \hat{i}_{Ap-q} = \hat{i}_{+p-q} + \hat{i}_{i_{p-q}} = 0 \\ \hat{i}_{Bp-q} = a^2 \hat{i}_{+p-q} + a \hat{i}_{i_{p-q}} = j\sqrt{3} \frac{Z_{p,k}^+ - Z_{q,k}^+}{2Z_{kk}^+} \frac{1}{z_{p-q}^+} \\ \hat{i}_{Cp-q} = a \hat{i}_{+p-q} + a^2 \hat{i}_{i_{p-q}} = j\sqrt{3} \frac{Z_{q,k}^+ - Z_{p,k}^+}{2Z_{kk}^+} \frac{1}{z_{p-q}^+} \end{cases}$$

7.2.2 Curto-circuito monofásico

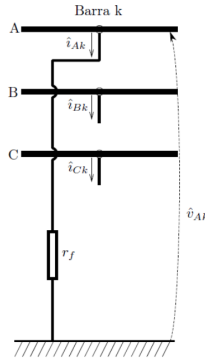


Figura 41: Curto-circuito monofásico na barra k .

Condições de contorno:

$$\hat{i}_{Bk} = \hat{i}_{Ck} = 0, \quad \hat{v}_{Ak} = \hat{i}_{Ak} r_f$$

Aplicando as condições de contorno nas equações de correntes:

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{+k} \\ \hat{i}_{-k} \\ \hat{i}_{0k} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{Ak} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \hat{i}_{Ak} \\ \hat{i}_{Ak} \\ \hat{i}_{Ak} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \hat{i}_{+k} = \hat{i}_{-k} = \hat{i}_{0k} = \frac{1}{3} \hat{i}_{Ak} \\ \hat{i}_{+k} + \hat{i}_{-k} + \hat{i}_{0k} = \hat{i}_{Ak} = 3\hat{i}_{0k} \end{cases}$$

Aplicando as condições de contorno nas equações de tensões como gerador:

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_{+k} \\ \hat{v}_{-k} \\ \hat{v}_{0k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{kk}^+ & 0 & 0 \\ 0 & Z_{kk}^+ & 0 \\ 0 & 0 & Z_{kk}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{Ak}/3 \\ \hat{i}_{Ak}/3 \\ \hat{i}_{Ak}/3 \end{bmatrix}$$

Mas

$$\hat{v}_{Ak} = \hat{v}_{+k} + \hat{v}_{-k} + \hat{v}_{0k} \Rightarrow \hat{i}_{Ak} r_f = (Z_{kk}^+ + Z_{kk}^- + Z_{kk}^0) \hat{i}_{Ak} / 3 \Rightarrow \hat{i}_{Ak} = \frac{3\hat{e}_A}{(Z_{kk}^+ + Z_{kk}^- + Z_{kk}^0 + 3r_f)}$$

$$\therefore \hat{i}_{+k} = \hat{i}_{-k} = \hat{i}_{0k} = \frac{\hat{e}_A}{(Z_{kk}^+ + Z_{kk}^- + Z_{kk}^0 + 3r_f)}$$

a. Corrente de curto-circuito¹⁶ na barra k

$$\hat{i}_{+k} = \hat{i}_{-k} = \hat{i}_{0k} = \frac{-1}{2Z_{kk}^+ + Z_{kk}^0}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{Ak} \\ \hat{i}_{Bk} \\ \hat{i}_{Ck} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2Z_{kk}^+ + Z_{kk}^0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b. Tensão de sequência positiva nas barras

$$\hat{v}_{+i}^R = 1 + \hat{v}_{+i} = 1 - \frac{Z_{ik}^+}{2Z_{kk}^+ + Z_{kk}^0}$$

c. Tensão de sequência negativa nas barras

$$\hat{v}_{-i}^R = 0 + \hat{v}_{-i} = -\frac{Z_{ik}^+}{2Z_{kk}^+ + Z_{kk}^0}$$

d. Tensão de sequência zero nas barras

$$\hat{v}_{0i}^R = 0 + \hat{v}_{0i} = -\frac{Z_{0k}^+}{2Z_{kk}^+ + Z_{kk}^0}$$

e. Tensões de fase nas barras

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_{Ai} \\ \hat{v}_{Bi} \\ \hat{v}_{Ci} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} [\hat{v}_{+i}^R \hat{v}_{-i}^R \hat{v}_{0i}^R] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2Z_{ik}^+ + Z_{ik}^0}{2Z_{kk}^+ + Z_{kk}^0} \\ a^2 - \frac{Z_{ik}^0 - Z_{ik}^+}{2Z_{kk}^+ + Z_{kk}^0} \\ a - \frac{Z_{ik}^0 - Z_{ik}^+}{2Z_{kk}^+ + Z_{kk}^0} \end{bmatrix}$$

f. Fluxo de corrente de sequência positiva nas linhas

$$\hat{i}_{+p-q}^R = \frac{\hat{v}_{+p}^R - \hat{v}_{+q}^R}{z_{p-q}^+} = \left(\frac{Z_{q,k}^+ - Z_{p,k}^+}{2Z_{kk}^+ + Z_{kk}^0} \right) \frac{1}{z_{p-q}^+}$$

g. Fluxo de corrente de sequência negativa nas linhas

$$\hat{i}_{i_{p-q}}^R = \frac{\hat{v}_{-p}^R - \hat{v}_{-q}^R}{z_{p-q}^+} = \left(\frac{Z_{q,k}^+ - Z_{p,k}^+}{2Z_{kk}^+ + Z_{kk}^0} \right) \frac{1}{z_{p-q}^+}$$

h. Fluxo de corrente de sequência zero nas linhas

$$\hat{i}_{0p-q}^R = \frac{\hat{v}_{0p}^R - \hat{v}_{0q}^R}{z_{p-q}^+} = \left(\frac{Z_{q,k}^0 - Z_{p,k}^0}{2Z_{kk}^+ + Z_{kk}^0} \right) \frac{1}{z_{p-q}^0}$$

i. Fluxo de corrente na linha $p - q$ em componentes de fase

$$\begin{cases} \hat{i}_{Ap-q} = \hat{i}_{+p-q} + \hat{i}_{-p-q} + \hat{i}_{0p-q} = \frac{1}{2Z_{kk}^+ + Z_{kk}^0} \left(2 \frac{Z_{q,k}^+ - Z_{p,k}^+}{z_{p-q}^+} + \frac{Z_{q,k}^0 - Z_{p,k}^0}{z_{p-q}^0} \right) \\ \hat{i}_{Bp-q} = a^2 \hat{i}_{+p-q} + a \hat{i}_{-p-q} + \hat{i}_{0p-q} = \frac{1}{2Z_{kk}^+ + Z_{kk}^0} \left(\frac{Z_{p,k}^+ - Z_{q,k}^+}{z_{p-q}^+} + \frac{Z_{q,k}^0 - Z_{p,k}^0}{z_{p-q}^0} \right) \\ \hat{i}_{Cp-q} = a \hat{i}_{+p-q} + a^2 \hat{i}_{-p-q} + \hat{i}_{0p-q} = \hat{i}_{Bp-q} \end{cases}$$

Referências

- [1] MONTICELLI, Alcir e GARCIA, Arioaldo. *Introdução a sistemas de energia elétrica*. 2ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [2] SATO, Fujio e FREITAS, Walimir. *Análise de curto-circuito e princípios de proteção em sistemas de energia elétrica: fundamentos e prática*. Rio de Janeiro, RJ: Elsevier: Campus, 2015.
- [3] CASTRO, Carlos. Notas de aula de ET720. Disponível em: www0.fee.unicamp.br/cursos/et720/.

¹⁶Considerando curto-circuito sólido ou franco, a resistência de falta é nula, i.e., $r_f = 0$.