

ET720 - Sistemas de Energia Elétrica I

Henrique Koji Miyamoto

1 Introdução aos sistemas de energia elétrica

2 Cálculo de fluxo de carga

Os componentes de um sistema de potência são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Componentes de um sistema de potência.

Componente	Função	Representação
Geração	fonte de suprimento de energia elétrica	fonte de tensão CA
Carga	consomem energia	resistência e reatância em derivação
Transmissão	condutores que levam energia da geração às cargas	resistência e reatância em série

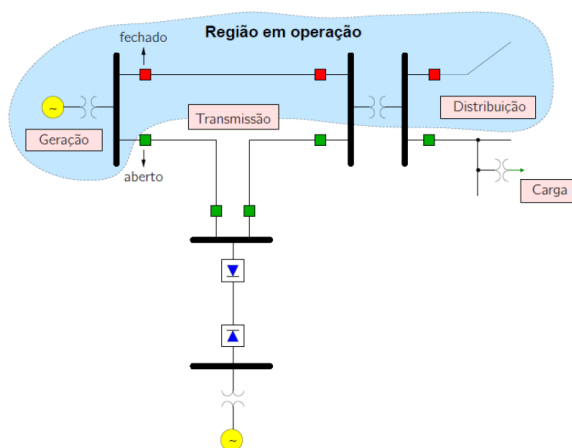


Figura 1: Sistema de potência.

Requisitos para operação em regime de um sistema trifásico:

- A potência de geração deve suprir o consumo das cargas e de perdas (ativa e reativa).
- Os módulos de tensão nas barras deve permanecer em torno do nominal (1 pu).
- Os geradores devem operar dentro dos limites de potência ativa e reativa. Linhas de transmissão e transformadores devem operar sem sobrecargas.

É desejável que as fases estejam em equilíbrio, i.e., $\|\hat{I}_a\| \approx \|\hat{I}_b\| \approx \|\hat{I}_c\|$ e $\|\hat{V}_a\| \approx \|\hat{V}_b\| \approx \|\hat{V}_c\|$, defasados de 120° . Isso ocorre principalmente em sistemas de alta e ultra-alta tensão na transmissão. Nesse caso, pode-se usar a representação monofásica e o diagrama unifilar. Mas, em redes de distribuição, pode ser necessário usar representação trifásica.

Revisão. Convenções para representações monofásica e unifilar.

1. Circuito monofásico:

- Geradores e cargas **em Y** (ou equivalente).
- Usam-se **tensões de fase e correntes de linha**.
- Bancos transformadores são representados por **Y-Y** (ou equivalente).

2. Diagrama unifilar:

- Indicam-se *tensões de linha e potências trifásicas*¹.
- *Correntes de linha e impedâncias Y (ou equivalente)*.

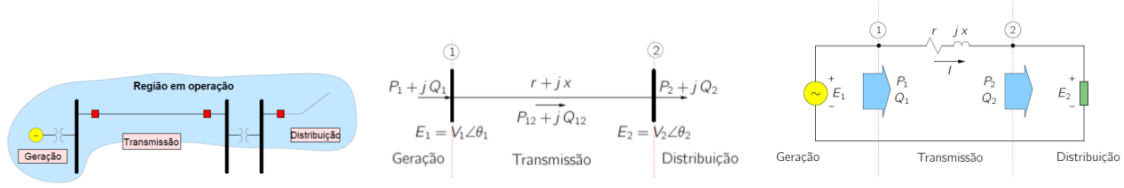


Figura 2: Representações unifilar e monofásico equivalente de um sistema de potência.

Revisão. *Sistema P.U. (por unidade):*

$$S_{base} = S_{3\phi} = 3V_f I_f, \quad V_{base} = V_l, \quad I_{base} = \frac{S_{base}}{\sqrt{3}V_{base}}, \quad Z_{base} = \frac{V_{base}^2}{S_{base}}$$

2.1 Formulação básica

O problema de *fluxo de carga* consiste em obter as condições de operação de uma rede elétrica em função de sua topologia e dos níveis de demanda e geração de potências. Faremos análise apenas estática, desconsiderando transitórios². Dessa maneira, a rede é representada por um conjunto de equações (e inequações) algébricas.

O sistema de energia é representado por circuitos equivalentes. Há dois tipos de componentes (Tabela 2). A geração e a distribuição são modeladas como injeções de potência no barramento. A linha de transmissão é modelada por um circuito RL em série.

Tabela 2: Componentes da rede elétrica.

Geradores (G) Cargas (L) Reatores <i>shunt</i> (RSh) Capacitores <i>shunt</i> (CSh)	Ligados entre um nó qualquer a o nó terra
Linhas de transmissão (LT) Transformadores (TR)	Ligados entre dois nós quaisquer

As equações do sistema são obtidas aplicando o princípio da conservação de energia em cada nó e a lei de Ohm nos componentes. A resolução do problema típico de sistemas de energia requer o uso de um procedimento algorítmico, pois ele se torna rapidamente difícil para redes maiores³.

Barras Os nós do sistema são representados por barras, caracterizadas por duas grandezas complexas: *tensão* ($E_k = V_k \angle \theta_k$) e *potência* ($S_k = P_k + jQ_k$)⁴. Podemos classificar as barras com relação às variáveis que são conhecidas/desconhecidas em cada uma delas (Tabela 3).

Tabela 3: Tipos de barras.

Tipo	Dados	Incógnitas	Características
PQ	P_k, Q_k	V_k, θ_k	Barras de carga
PV	P_k, V_k	Q_k, θ_k	Barras de geração
Vθ (referência ou <i>slack</i>)	V_k, θ_k	P_k, Q_k	Barras de geração

As barras de geração do tipo PV incluem condensadores síncronos. A barra de referência tem dupla função: (i) fornecer a referência angular do sistema e (ii) fechar o balanço de potência, levando em conta as perdas de transmissão não conhecidas no início do problema (por isso, costuma-se escolhê-la como uma unidade geradora de grande capacidade).

Cargas As cargas são modeladas como injeções de potências nas barras⁵. A convenção de sinais será a seguinte:

- $P_k > 0$ - potência entrando - geração
- $P_k < 0$ - potência saindo - consumo

¹Não obstante, nos cálculos, utilizam-se *tensões de fase e potências monofásicas*.

²Consideramos que a variação temporal é suficientemente lenta para que possamos desconsiderar o efeito transitório.

³Algumas ideias para resolvê-lo são: resolução analítica e por tentativa e erro.

⁴A potência líquida representa a diferença entre geração e consumo: $S_k = S_k^G - S_k^C$.

⁵Trataremos apenas de potências constantes

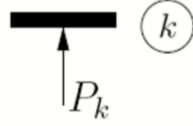


Figura 3: Representação de injeção de potência na barra k .

Linhas de transmissão Modelamos as linhas de transmissão com o modelo π , em que r é a resistência série, x é a reatância série e b é o carregamento total *charging* (o dobro da admitância *shunt*).

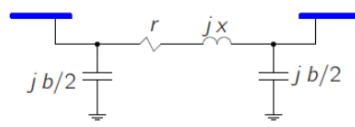


Figura 4: Modelo π para linhas de transmissão.

2.2 Formulação nodal

Considere a rede da Figura 2.2, em que foi aplicada a definição de potências e correntes líquidas e o modelo π equivalente para linhas de transmissão.

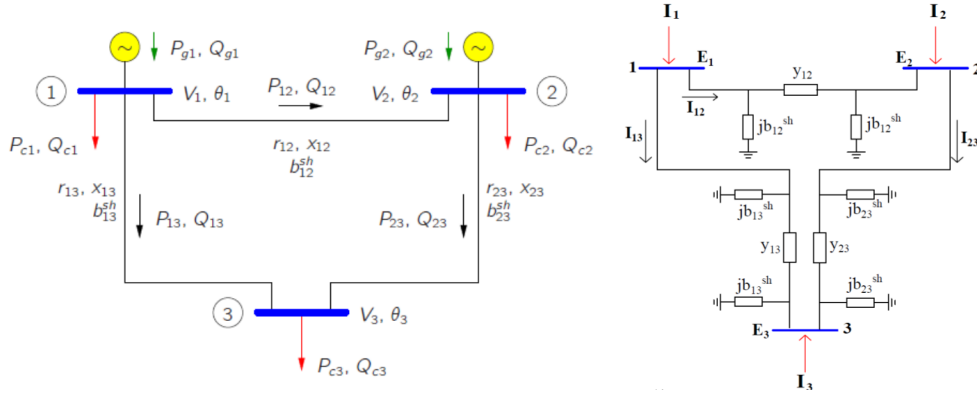


Figura 5: Exemplo de rede elétrica.

Aplicando a lei das correntes de Kirchhoff em todos os nós, obtemos, em notação matricial:

$$I = YE$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{12} + y_{13} + jb_{12}^{sh} + jb_{13}^{sh} & -y_{12} & -y_{13} \\ -y_{12} & y_{12} + y_{23} + jb_{12}^{sh} + jb_{23}^{sh} & -y_{23} \\ -y_{13} & -y_{23} & y_{13} + y_{23} + jb_{13}^{sh} + jb_{23}^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

onde $I_{n \times 1}$ é o vetor de injeções nodais de corrente, $E_{n \times 1}$ é o vetor de tensões nodais, $Y_{n \times n}$ é a matriz de admitância nodal e n é o número de barras na rede.

A matriz $Y_{n \times n}$ é formada da seguinte forma:

- Elementos fora da diagonal principal: $Y_{km} = -y_{km}$
- Elementos da diagonal principal: $Y_{kk} = \sum_{m \in \Omega_k} (y_{km} + jb_{km}^{sh})$ ⁶

A matriz de admitância pode ser separada em matriz condutância e matriz susceptância:

$$Y = \Re\{Y\} + j\Im\{Y\} = G + jB$$

A corrente em cada barra pode ser calculada como

$$I_k = \sum_{m \in K} Y_{km} E_m = Y_{kk} E_k + \sum_{m \in \Omega_k} Y_{km} E_m$$
⁷

⁶ Ω_k é o conjunto das barras conectadas diretamente à barra k .

⁷ K é o conjunto formado pela barra k e suas vizinhas.

Para deduzir as equações de potência, substituímos a equação para I_k acima em $S_k = E_k I_k^*$, obtendo:

$$P_k = V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km})$$

$$Q_k = V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km})$$

onde $\theta_{km} := \theta_k - \theta_m = \arg(E_k) - \arg(E_m)$ e $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$.

Comentário sobre a resolubilidade do problema Para as barras PQ e PV, é possível escrever as equações de P_k e, para as barras PQ, é possível escrever as equações de Q_k . Portanto, temos $N_{PQ} + N_{PV}$ equações de P_k e N_{PQ} equações de Q_k , totalizando $2N_{PQ} + N_{PV}$ equações.

As incógnitas são V_k e θ_k nas barras PQ e θ_k nas barras PV. No total, temos $2N_{PQ} + N_{PV}$ incógnitas, que é o mesmo número de equações. Portanto o sistema é possível e determinado.

Uma vez determinado o valor das incógnitas, pode-se calcular P_k, Q_k na barra de referência e Q_k nas barras PV.

Ideia da resolução A ideia da resolução é:

1. De alguma maneira, determinar os fasores de tensão.
2. A partir deles, calcular as potências P_k nas barras PQ e PV e Q_k nas barras PQ.
3. Comparar tais valores calculados (P_k^{calc}, Q_k^{calc}) com os especificados pelo problema (P_k^{esp}, Q_k^{esp}).

Para fazer a comparação, calculam-se $\Delta P_k, \Delta Q_k$, os erros de potência, resíduos de potência ou *mismatches* de potência.

$$\Delta P_k = P_k^{esp} - P_k^{calc}$$

$$\Delta Q_k = Q_k^{esp} - Q_k^{calc}$$

Idealmente, o problema está solucionado quando esses erros se anulam. Na prática, vamos aceitar uma solução que tenha ambos os erros abaixo de certa tolerância ϵ .

Método de Newton É o método usado para a resolução do problema de fluxo de carga. Apresentamos o algoritmo para o caso multidimensional, em que o objetivo é encontrar a solução para $g(x) = 0$, onde $g(x) = [g_1(x) \dots g_n(x)]^T$ é o vetor de *mismatches* e $x = [x_1 \dots x_n]^T$ é o vetor de incógnitas.

Algoritmo 1: Algoritmo do método de Newton para caso multidimensional.

Entrada: Ponto inicial x_0 e sistema de equações $g(x) = 0$

Saída: Solução x

1 início

2 Inicializar o contador de iterações $v \leftarrow 0$ e fazer $x^{(0)} \leftarrow x_0$.

3 Calcular o valor de $g(x^{(v)})$.

4 Testar a convergência:

5 **se** $|g_i(x^{(v)})| \leq \epsilon, \forall i = 1, 2, \dots, n$ **então**

6 $x \leftarrow x^{(v)}$ é a solução procurada com tolerância $\pm\epsilon$.

7 **return** x

8 fim

9 Calcular a matriz jacobiana $J(x^{(v)}) = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} g_i \right]$.

10 Calcular novo ponto $\Delta x^{(v)} \leftarrow J^{-1} g(x^{(v)})$, $x^{(v+1)} \leftarrow x^{(v)} + \Delta x^{(v)}$

11 Incrementar contador $v \leftarrow v + 1$ e voltar para linha 3.

12 fim

É comum inicializar o vetor de incógnitas como *flat start*, i.e., módulos de tensão unitários ($V_i = 1$) e ângulos nulos ($\theta_i = 0$).

No problema de fluxo de carga:

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ V \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{esp} - P^{calc} \\ Q^{esp} - Q^{calc} \end{bmatrix}, \quad J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta P & \frac{\partial}{\partial V} \Delta P \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta Q & \frac{\partial}{\partial V} \Delta Q \end{bmatrix}$$

Vantagens e desvantagens do método de Newton:

- É mais confiável (converge em casos que outros métodos divergem).
- O número de iterações necessárias para convergência independe da dimensão.
- Requer mais espaço de armazenamento (matriz jacobiana).
- O tempo computacional por iteração é maior (inversão e multiplicação com matriz jacobiana).
- Tem convergência rápida (quadrática).
- Não é sensível à escolha da barra de referência, mas o é à escolha do ponto inicial.

Cálculo da matriz jacobiana Como o cálculo dos *mismatches* envolve um termo constante (especificado), podemos simplificar a matriz jacobiana. Por exemplo:

$$\Delta P = P^{esp} - P^{calc}(V, \theta) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta P = -\frac{\partial}{\partial \theta} P^{calc}$$

É comum representar a matriz jacobiana em termos de submatrizes:

$$J(x) = -\begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix}, \text{ onde } H = \frac{\partial P}{\partial \theta}, N = \frac{\partial P}{\partial V}, M = \frac{\partial Q}{\partial \theta}, L = \frac{\partial Q}{\partial V}$$

Assim:

$$g(x) = -J(x)\Delta x \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} P^{esp} - P^{calc} \\ Q^{esp} - Q^{calc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix}}$$

As componentes das submatrizes são:

$$\begin{aligned} H & \begin{cases} H_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial \theta_m} = V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ H_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial \theta_k} = -B_{kk} V_k^2 - Q_k \end{cases} \\ N & \begin{cases} N_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \\ N_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial V_k} = V_k^{-1} (P_k + G_{kk} V_k^2) \end{cases} \\ M & \begin{cases} M_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_m} = -V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \\ M_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_k} = -G_{kk} V_k^2 + P_k \end{cases} \\ L & \begin{cases} L_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = V_k^{-1} (Q_k - B_{kk} V_k^2) \end{cases} \end{aligned}$$

Perdas O fluxo de potência na linha que liga a barra k a m é dado por

$$S_{km}^* = E_k^* I_{km}, \quad I_{km} = y_{km}(E_k - E_m) + j b_{km}^{sh} E_k$$

As perdas de potência na linha km são

$$\boxed{S_{perdas} = S_{km} + S_{mk}}$$

$$\begin{aligned} P_{perdas} &= P_{km} + P_{mk} = g_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}) \\ &= g_{km}|E_k - E_m|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{perdas} &= Q_{km} + Q_{mk} = -b_{km}^{sh}(V_k^2 + V_m^2) - 2b_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}) \\ &= -b_{km}^{sh}(V_k^2 + V_m^2) - b_{km}|E_k - E_m|^2 \end{aligned}$$

Algoritmo 2: Algoritmo do método de Newton para o problema de fluxo de potência.

Entrada: Ponto inicial (θ_k^0, V_k^0) , sistema de equações P_k, Q_k e parâmetros das linhas Y **Saída:** Solução (θ_k, V_k)

```
1 início
2   Inicializar o contador de iterações  $v \leftarrow 0$  e fazer  $\theta_k^{(v)} \leftarrow \theta_k^0$  e  $V_k^{(v)} \leftarrow V_k^0$ 
3   Calcular  $P_k(\theta_k^{(v)}, V_k^{(v)})$  e  $Q_k(\theta_k^{(v)}, V_k^{(v)})$  e os mismatches  $\Delta P_k^{(v)}$  e  $\Delta Q_k^{(v)}$ .
4   Testar a convergência:
5   se  $\max\{|\Delta P_k^{(v)}|\} \leq \epsilon$  e  $\max\{|\Delta Q_k^{(v)}|\} \leq \epsilon$  então
6        $(\theta_k, V_k) \leftarrow (\theta_k^{(v)}, V_k^{(v)})$  é a solução procurada com tolerância  $\pm\epsilon$ .
7       Calcular  $P_k$  e  $Q_k$  na barra de referência e  $Q_k$  nas barras PV.
8   fim
9   Calcular a matriz jacobiana  $J(\theta^{(v)}, V^{(v)}) = \begin{bmatrix} H(\theta^{(v)}, V^{(v)}) & N(\theta^{(v)}, V^{(v)}) \\ M(\theta^{(v)}, V^{(v)}) & L(\theta^{(v)}, V^{(v)}) \end{bmatrix}$ 
10  Calcular novos valores  $\begin{cases} \theta^{(v+1)} = \theta^{(v)} + \Delta\theta^{(v)} \\ V^{(v+1)} = V^{(v)} + \Delta V^{(v)} \end{cases}$ , onde  $\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}$ 
11  Incrementar contador  $v \leftarrow v + 1$  e voltar para linha 3.
12 fim
```

3 Fontes primárias de energia elétrica

- Geração termoeleétrica
 - Turbina a vapor
 - Turbina a gás
 - Máquina de combustão interna a pistão
 - Reator nuclear
- Geração hidroelétrica
- Geração eólica
- Geração fotovoltaica

4 Métodos desacoplados

Os métodos desacoplados são simplificações do método geral de Newton para solução do problema de fluxo de carga.

4.1 Método desacoplado geral

Considera-se que algumas sensibilidades são predominantes:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} \text{ e } \frac{\partial Q}{\partial V} \gg \frac{\partial Q}{\partial \theta} \text{ e } \frac{\partial P}{\partial V}$$

Isso se verifica para redes de transmissão de extra e ultra alta tensão (acima de 230kV), mas em geral não ocorre em redes de distribuição (níveis de tensão são mais baixos).

Devido à consideração feita, as submatrizes $N = \frac{\partial P}{\partial V}$ e $M = \frac{\partial Q}{\partial \theta}$ são descartadas, resultando em:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta P = H\Delta\theta \\ \Delta Q = L\Delta V \end{cases}$$

Como os *mismathces* de potência ativa e reativa têm equações independentes, é possível aplicar um esquema de *solução alternada*, que apresenta melhor convergência.

1. Meia-iteração ativa: atualizar os ângulos das tensões a partir dos *mismathces* de potência ativa.

$$\Delta P(V^v, \theta^v) = H(V^v, \theta^v) \Delta\theta^v$$

$$\theta^{v+1} = \theta^v + \Delta\theta^v$$

2. Meia-iteração reativa: atualizar as magnitudes das tensões a partir dos *mismatches* de potência reativa.

$$\Delta Q(V^v, \theta^{v+1}) = L(V^v, \theta^{v+1}) \Delta V^v$$

$$V^{v+1} = V^v + \Delta V^v$$

A cada meia-iteração, para calcular os *mismatches* de potência ativa ou reativa, são utilizados os valores mais atualizados de V e θ . Isso parcialmente compensa as aproximações feitas na matriz jacobiana ($M \approx N \approx 0$).

Importante! Cada subproblema pode ter velocidade de convergência diferente, mas é necessário, a cada iteração completa, fazer as duas meia-iterações (mesmo que um subproblema já tenha convergido).

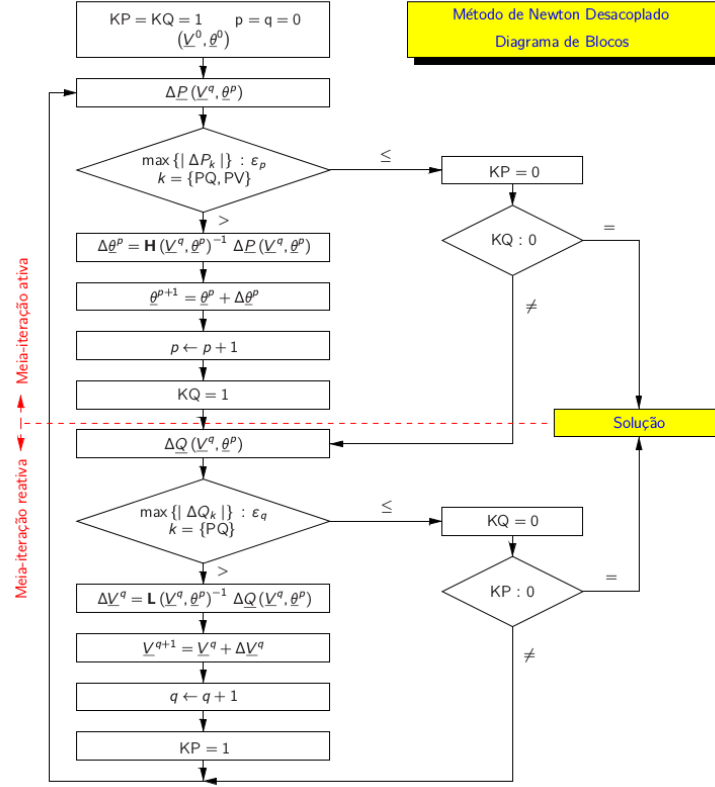


Figura 6: Algoritmo do método desacoplado.

Uma versão diferente Esta versão pode apresentar convergência mais rápida para alguns sistemas. Consiste em “normalizar” o problema com relação às tensões V_i .

Considere a matriz diagonal contendo as tensões

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & & \\ & \ddots & \\ & & V_n \end{bmatrix}$$

As submatrizes H e L podem escritas como

$$\begin{aligned} H &= V H' \\ L &= V L' \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} H' &= V^{-1} H \\ L' &= V^{-1} L \end{aligned}$$

Assim, as equações do método de Newton ficam:

$$\begin{aligned} \Delta P/V &= H' \Delta \theta \\ \Delta Q/V &= L' \Delta V \end{aligned}$$

onde as notações $\Delta P/V$ e $\Delta Q/V$ indicam que cada *mismatch* de potência deve ser dividido pela respectiva tensão na barra (ex.: $\Delta P_1/V_1$)

Nesse caso, os elementos de H' e L' ficam:

$$\begin{aligned} H' &\begin{cases} H'_{km} = V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ H'_{kk} = -B_{kk} V_k - Q_k/V_k \end{cases} \\ L' &\begin{cases} L'_{km} = (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ L'_{kk} = Q_k/V_k^2 - B_{kk} \end{cases} \end{aligned}$$

4.2 Método desacoplado rápido

Esse método é uma simplificação do método anterior, considerando as seguintes aproximações:

- $\cos \theta_{km} \approx 1$ ($\theta_{km} \ll 1$): válido para sistemas em geral, especialmente EAT (extra-alta tensão) e UAT (ultra-alta tensão).
- $B_{km} \gg G_{km} \sin \theta_{km}$ ($\theta_{km} \ll 1$): válido para sistemas em geral, especialmente EAT e UAT.
- $B_{kk} V_k^2 \gg Q_k$: reatâncias *shunt* são, em geral, muito maiores que reatâncias série.
- $V_k \approx 1$: valores em P.U.

Usando essas aproximações, os termos da matriz jacobiana ficam:

$$\begin{aligned} H'_{kk} &= -B_{kk} & L'_{kk} &= -B_{kk} \\ H'_{km} &= -B_{km} & L'_{km} &= -B_{km} \\ H'_{mk} &= -B_{mk} & L'_{mk} &= -B_{mk} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} L'_{kk} &= -B_{kk} \\ L'_{km} &= -B_{km} \\ L'_{mk} &= -B_{mk} \end{aligned}$$

Definimos as matrizes $B' = H'$ e $B'' = L'$. As equações ficam então:

$$V^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B' & 0 \\ 0 & B'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta P/V = B' \Delta \theta \\ \Delta Q/V = B'' \Delta V \end{cases}$$

A vantagem desse método é que as matrizes B' e B'' são constantes, pois dependem somente dos parâmetros da rede. Essas matrizes são obtidas a partir da matriz $B = \Im\{Y\}$, com as seguintes características:

- Linhas e colunas associados à barra *slack* não aparecem em B' , pois não conhecemos P na barra *slack*.
- Linhas e colunas associados às barras PV e *slack* não aparecem em B'' , pois não conhecemos Q nessas barras.

Versão XB Podemos fazer mais uma simplificação, escrevendo os elementos das matrizes B' como

$$\begin{aligned} B'_{kk} &= \sum_{m=1}^{NB} x_{km}^{-1} & B''_{kk} &= -B_{kk} \\ B'_{km} &= B'_{mk} = -x_{km}^{-1} & B''_{km} &= B''_{mk} = -B_{km} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} B''_{kk} &= -B_{kk} \\ B''_{km} &= B''_{mk} = -B_{km} \end{aligned}$$

Observação: O método desacoplado rápido também faz iterações alternadas (meia-iteração ativa e reativa)

5 Fluxo de carga trifásico

5.1 Introdução

Características de sistemas de distribuição:

- Requerem modelagem trifásica do fluxo de carga.
- Têm estrutura radial ou quase radial (poucas malhas ou *loops*).
- A operação é desbalanceada, multifásica, com equipamentos aterrados ou não.
- Presença de geração distribuída e novas tecnologias, como veículos elétricos.
- O número de barras e ramos é extremamente grande.

Para analisar esses sistemas, os métodos tradicionais de fluxo de carga podem não ser adequados, notadamente o método desacoplado rápido. Ele é adequado para linhas com relação X/R elevada (típico de redes de transmissão), mas na distribuição, como os cabos são finos, a resistência é maior e a reatância, menor (X/R pequeno).

Existem diferentes técnicas desenvolvidas para calcular fluxo de carga em redes de distribuição:

- Modificações do método de Newton (e suas variações).
- Varredura direta e reversa (*back-forward sweep*).
- Modificação das variáveis de estado: AMB (baseado em matriz de admitâncias) e BCB (baseado em correntes dos ramos).

5.2 Modelagem da rede

A modelagem trifásica permite considerar *desbalanços nas cargas e desequilíbrios na rede*. Os desbalanços nas cargas são típicos de sistemas de média e baixa tensão e se devem à impossibilidade de distribuir as cargas uniformemente entre as fases; à aleatoriedade do consumo; e à presença de cargas monofásicas e bifásicas. Os desequilíbrios na rede se devem à não transposição das fases das linhas e ao compartilhamento das faixas de servidão por diversas linhas. Esses desequilíbrios podem ser contabilizados pelos acoplamentos mútuos entre as fases dos elementos da rede.

Em uma rede com n_b barras, há $6n_b$ variáveis de estado, já que em cada barra há três módulos e três ângulos para as tensões (um para cada fase): $(V_k^a, \theta_k^a), (V_k^b, \theta_k^b), (V_k^c, \theta_k^c)$.

Capacitores e indutores Capacitores e reatores *shunt* são tratados como impedâncias constante com ligação estrela⁸.

- Bancos de capacitores *shunt* são representados por matrizes de admitância primitivas diagonais Y_{sh} ⁹ e contribuem somente para a matriz de admitâncias nodais próprias (apenas diagonal de Y).

$$[Y_{sh}] = \text{diag}(1/jX_c, 1/jX_c, 1/jX_c)$$

- Bancos de capacitores ou indutores são elementos séries representados também por matrizes de admitância primitivas diagonais Y_s ¹⁰:

$$[Y_s] = \text{diag}(1/jX_c, 1/jX_c, 1/jX_c)$$

Essas matrizes contribuem para as matrizes de admitância nodais próprias e mútuas das barras a que estão ligadas da seguinte forma:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_s & -Y_s \\ -Y_s & Y_s \end{bmatrix}$$

Linhas de transmissão As linhas de transmissão são modeladas como linhas curtas, nas quais só se consideram efeitos eletromagnéticos, representada por matrizes de impedâncias Z_s .

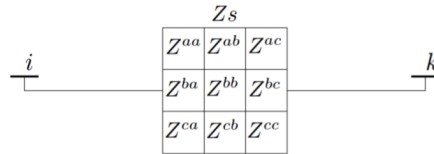


Figura 7: Matriz de admitância Z_s para linhas curtas.

A matriz de impedâncias primitivas Z_s se relaciona com tensões e correntes de linha por:

$$\begin{bmatrix} E_{ik}^a \\ E_{ik}^b \\ E_{ik}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ik}^a \\ I_{ik}^b \\ I_{ik}^c \end{bmatrix} \Rightarrow [E_{ik}^{abc}] = [Z_s][I_{ik}^{abc}]$$

A matriz de admitâncias pode ser obtida como $Y_s = Z_s^{-1}$. Assim, temos a relação

$$\begin{bmatrix} I_i^{abc} \\ I_k^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_s^{-1} & -Z_s^{-1} \\ -Z_s^{-1} & Z_s^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i^{abc} \\ E_k^{abc} \end{bmatrix}$$

Linhas médias e longas consideram efeitos eletromagnéticos e eletrostáticos. Essas linhas são representadas por um modelo π para cada fase.

Para esse modelo:

$$\begin{bmatrix} I_i^{abc} \\ I_k^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_s^{-1} + Y_{sh}/2 & -Z_s^{-1} \\ -Z_s^{-1} & Z_s^{-1} + Y_{sh}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i^{abc} \\ E_k^{abc} \end{bmatrix}$$

Transformadores Os diversos tipos de conexão entre transformadores podem ser representados pela associação de matrizes $Y_{pp}, Y_{ss}, Y_{sp}, Y_{ps}$, que contêm as admitâncias próprias e mútuas do primário e secundário do transformador. Como o acoplamento é simétrico, temos $Y_{sp} = Y_{ps}^T$

⁸Ligações em triângulo devem ser substituídas pela estrela equivalente.

⁹A notação $\text{diag}(x_0, \dots, x_n)$ denota a matriz diagonal de dimensão $n \times n$.

$$\begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & x_n \end{bmatrix}$$

¹⁰Tanto nesse caso como no anterior, não se consideram os acoplamentos entre fases.

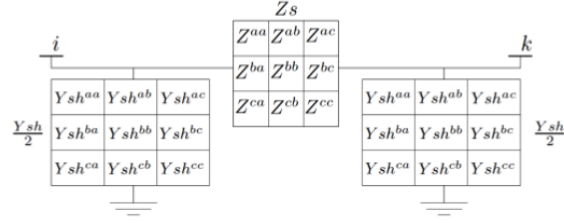


Figura 8: Matriz de admitância Z_s para linhas médias e longas.

Primário	Secundário	Y_{gp}	Y_{ss}	Y_{ps} e Y'_{sp}
Y-g	Y-g	Y_I	Y_I	$-Y_I$
Y-g	Y	Y_{II}	Y_{II}	$-Y_{II}$
Y-g	D	Y_I	Y_{II}	Y_{III}
Y	Y	Y_{II}	Y_{II}	$-Y_{II}$
Y	D	Y_{II}	Y_{II}	Y_{III}
D	D	Y_{II}	Y_{II}	Y_{III}

$$Y_I = \begin{bmatrix} y_t & 0 & 0 \\ 0 & y_t & 0 \\ 0 & 0 & y_t \end{bmatrix}, \quad Y_{II} = 1/3 \begin{bmatrix} 2y_t & -y_t & -y_t \\ -y_t & 2y_t & -y_t \\ -y_t & -y_t & 2y_t \end{bmatrix}, \quad Y_{III} = 1/\sqrt{3} \begin{bmatrix} -y_t & y_t & 0 \\ 0 & -y_t & y_t \\ y_t & 0 & -y_t \end{bmatrix}$$

► O termo y_t é a admitância de dispersão do transformador.

Figura 9: Submatrizes para representação de transformadores.

Referência angular No caso de redes de distribuição, a referência angular é alocada na subestação de energia e é necessário referenciar as três fases, defasadas de 120° . Por exemplo: $\theta^a = 0$, $\theta^b = -120^\circ$, $\theta^c = 120^\circ$.

Uma forma mais precisa de especificar a referência angular no caso trifásico é admitir a presença de um gerador equivalente da rede de transmissão conectado à subestação.

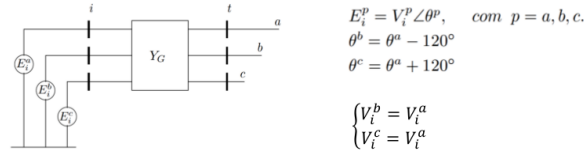


Figura 10: Referência angular para rede de distribuição trifásica.

Matriz de admitância do sistema A matriz de admitância do sistema é formada a partir de duas regras simples:

- A matriz de admitância própria (elementos da diagonal principal) é formada pela soma das matrizes de admitância próprias dos elementos conectados à barra.
- A matriz de admitância mútua (elementos fora da diagonal principal) é o negativo das matrizes de admitâncias mútuas do elemento que conecta as barras.

Exemplo:

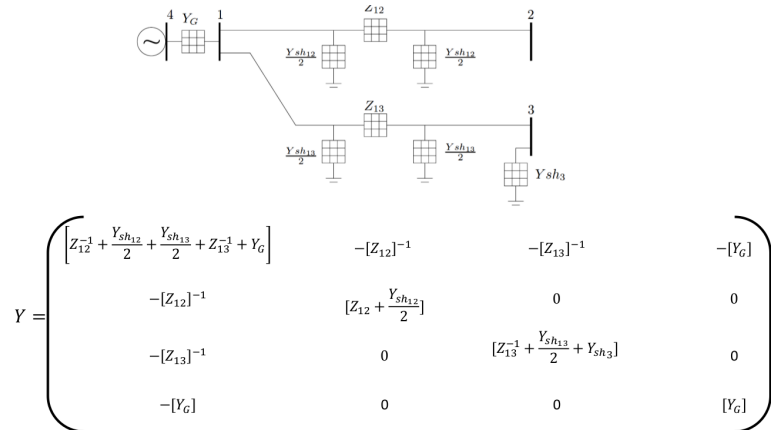


Figura 11: Exemplo de matriz de admitância do sistema.

Linhas bifásicas e monofásicas É comum encontrar linhas monofásicas e bifásicas, além de trifásicas. Uma possível solução para sua modelagem é tratar tais trechos como trifásicos, usando matrizes impedância e admitância trifásicas. Para isso, anulam-se os termos da matriz que não são relevantes.

$$Y_{23}^{abc} = \begin{pmatrix} y_{12}^{aa} & y_{12}^{ab} & 0 \\ y_{12}^{ba} & y_{12}^{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y_{23}^{abc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{23}^{cc} \end{pmatrix}$$

Figura 12: Exemplo de matrizes para linhas monofásica e bifásica.

► Portanto, a matriz de admitância da rede, considerando apenas matrizes 3x3, é dada, para o caso da linha bifásica, por:

$$\begin{pmatrix} I_1^{abc} \\ I_2^{abc} \\ I_3^{abc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{12}^{abc} + Ysh_{12}^{abc} & -Y_{12}^{abc} & 0 \\ -Y_{12}^{abc} & Y_{12}^{abc} + Ysh_{12}^{abc} + Y_{23}^{abc} + Ysh_{23}^{abc} & -Y_{23}^{abc} \\ 0 & -Y_{23}^{abc} & Y_{23}^{abc} + Ysh_{23}^{abc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{abc} \\ E_2^{abc} \\ E_3^{abc} \end{pmatrix}$$

► E para o caso da linha monofásica:

$$\begin{pmatrix} I_1^{abc} \\ I_2^{abc} \\ I_3^{abc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{12}^{abc} + Ysh_{12}^{abc} & -Y_{12}^{abc} & 0 \\ -Y_{12}^{abc} & Y_{12}^{abc} + Ysh_{12}^{abc} + Y_{23}^{abc} + Ysh_{23}^{abc} & -Y_{23}^{abc} \\ 0 & -Y_{23}^{abc} & Y_{23}^{abc} + Ysh_{23}^{abc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{abc} \\ E_2^{abc} \\ E_3^{abc} \end{pmatrix}$$

Figura 13: Matriz de admitância da rede para linhas monofásica e bifásica.

5.3 Métodos de solução

Referências

- [1] MONTICELLI, Alcir e GARCIA, Ariovaldo. *Introdução a sistemas de energia elétrica*. 2ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.