ET720 - Sistemas de Energia Elétrica I

Henrique Koji Miyamoto

1 Introdução aos sistemas de energia elétrica

2 Cálculo de fluxo de carga

Os componentes de um sistema de potência são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Componentes de um sistema de potência.

Componente	Função	Representação
Geração	fonte de suprimento de energia elétrica	fonte de tensão CA
Carga	consomem energia	resistência e reatância em derivação
Transmissão	condutores que levam energia da geração às cargas	resistência e reatância em série

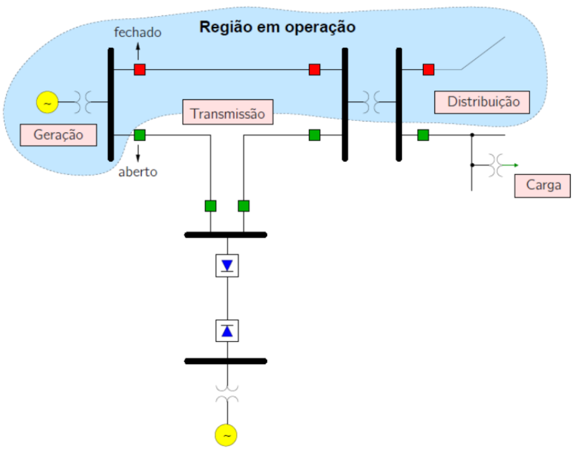

Figura 1: Sistema de potência.

Requisitos para operação em regime de um sistema trifásico:

- A potência de geração deve suprir o consumo das cargas e de perdas (ativa e reativa).
- Os módulos de tensão nas barras deve permanecer em torno do nominal (1 pu).
- Os geradores devem operar dentro dos limites de potência ativa e reativa. Linhas de transmissão e transformadores devem operar sem sobrecargas.

É desejável que as fases estejam em equilíbrio, i.e., $\|\hat{I}_a\| \approx \|\hat{I}_b\| \approx \|\hat{I}_c\|$ e $\|\hat{V}_a\| \approx \|\hat{V}_b\| \approx \|\hat{V}_c\|$, defasados de 120º. Isso ocorre principalmente em sistemas de alta e ultra-alta tensão na transmissão. Nesse caso, pode-se usar a representação monofásica e o diagrama unifilar. Mas, em redes de distribuição, pode ser necessário usar representação trifásica.

Revisão. *Convenções para representações monofásica e unifilar.*

1. *Circuito monofásico:*
   - *Geradores e cargas* ***em Y*** *(ou equivalente).*
   - *Usam-se* ***tensões de fase*** *e* ***correntes de linha****.*
   - *Bancos transformadores são representados por* ***Y-Y*** *(ou equivalente).*
2. *Diagrama unifilar:*

- *Indicam-se **tensões de linha** e **potências trifásicas**[1].*
- ***Correntes de linha** e **impedâncias Y** (ou equivalente).*

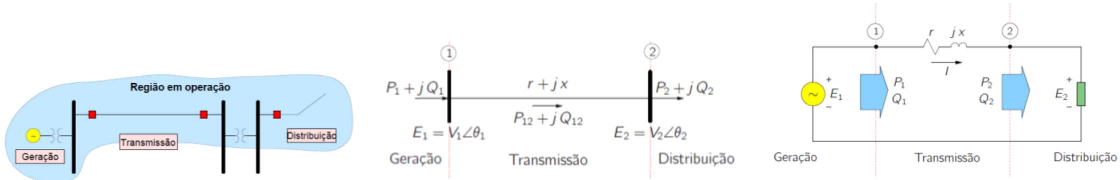

Figura 2: Representações unifilar e monofásico equivalente de um sistema de potência.

Revisão. *Sistema P.U. (por unidade):*

$$S_{base} = S_{3\phi} = 3V_f I_f, \quad V_{base} = V_l, \quad I_{base} = \frac{S_{base}}{\sqrt{3}V_{base}}, \quad Z_{base} = \frac{V_{base}^2}{S_{base}}$$

2.1 Formulação básica

O problema de *fluxo de carga* consiste em obter as condições de operação de uma rede elétrica em função de sua topologia e dos níveis de demanda e geração de potências. Faremos análise apenas estática, desconsiderando transitórios[2]. Dessa maneira, a rede é representada por um conjunto de equações (e inequações) algébricas.

O sistema de energia é representado por circuitos equivalentes. Há dois tipos de componentes (Tabela 2). A geração e a distribuição são modeladas como injeções de potência no barramento. A linha de transmissão é modelada por um circuito RL em série.

Tabela 2: Componentes da rede elétrica.

Geradores (G) Cargas (L) Reatores *shunt* (RSh) Capacitores *shunt* (CSh)	Ligados entre um nó qualquer a o nó terra
Linhas de transmissão (LT) Transformadores (TR)	Ligados entre dois nós quaisquer

As equações do sistema são obtidas aplicando o princípio da conservação de energia em cada nó e a lei de Ohm nos componentes. A resolução do problema típico de sistemas de energia requer o uso de um procedimento algorítmico, pois ele se torna rapidamente difícil para redes maiores[3].

Barras Os nós do sistema são representados por barras, caracterizadas por duas grandezas complexas: *tensão* ($E_k = V_k\angle\theta_k$) e *potência* ($S_k = P_k + jQ_k$)[4]. Podemos classificar as barras com relação às variáveis que são conhecidas/desconhecidas em cada uma delas (Tabela 3).

Tabela 3: Tipos de barras.

Tipo	**Dados**	**Incógnitas**	**Características**
PQ	P_k, Q_k	V_k, θ_k	Barras de carga
PV	P_k, V_k	Q_k, θ_k	Barras de geração
Vθ (referência ou *slack*)	V_k, θ_k	P_k, Q_k	Barras de geração

As barras de geração do tipo PV incluem condensadores síncronos. A barra de referência tem dupla função: (i) fornecer a referência angular do sistema e (ii) fechar o balanço de potência, levando em conta as perdas de transmissão não conhecidas no início do problema (por isso, costuma-se escolhê-la como uma unidade geradora de grande capacidade).

Cargas As cargas são modeladas como injeções de potências nas barras[5]. A convenção de sinais será a seguinte:

- $P_k > 0$ - potência entrando - geração
- $P_k < 0$ - potência saindo - consumo

[1] Não obstante, nos cálculos, utilizam-se *tensões de fase* e *potências monofásicas*.
[2] Consideramos que a variação temporal é suficientemente lenta para que possamos desconsiderar o efeito transitório.
[3] Algumas ideias para resolvê-lo são: resolução analítica e por tentativa e erro.
[4] A potência líquida representa a diferença entre geração e consumo: $S_k = S_k^G - S_k^C$.
[5] Trataremos apenas de potências constantes

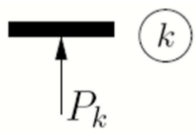

Figura 3: Representação de injeção de potência na barra k.

Linhas de transmissão Modelamos as linhas de transmissão com o modelo π, em que r é a resistência série, x é a reatância série e b é o carregamento total *charging* (o dobro da admitância *shunt*).

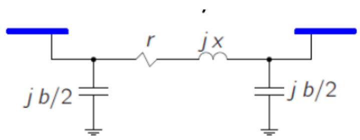

Figura 4: Modelo π para linhas de transmissão.

2.2 Formulação nodal

Considere a rede da Figura 2.2, em que foi aplicada a definição de potências e correntes líquidas e o modelo π equivalente para linhas de transmissão.

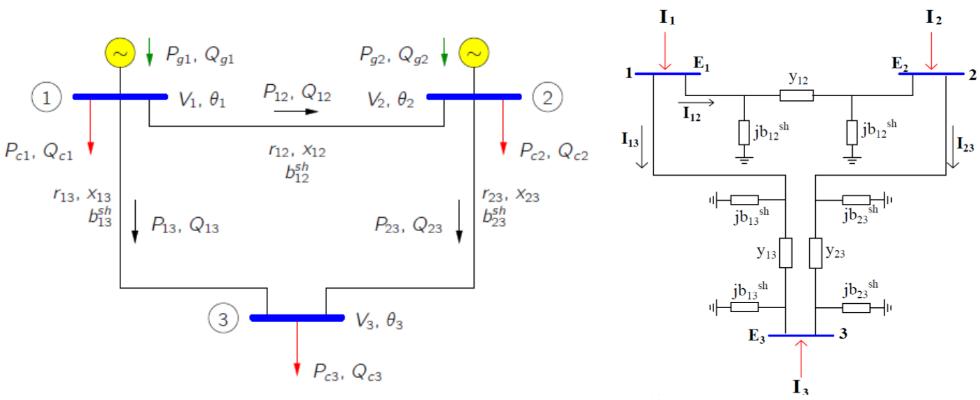

Figura 5: Exemplo de rede elétrica.

Aplicando a lei das correntes de Kirchhoff em todos os nós, obtemos, em notação matricial:

$$I = YE$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{12} + y_{13} + jb_{12}^{sh} + jb_{13}^{sh} & -y_{12} & -y_{13} \\ -y_{12} & y_{12} + y_{23} + jb_{12}^{sh} + jb_{23}^{sh} & -y_{23} \\ -y_{13} & -y_{23} & y_{13} + y_{23} + jb_{13}^{sh} + jb_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

onde $I_{n\times 1}$ é o vetor de injeções nodais de corrente, $E_{n\times 1}$ é o vetor de tensões nodais, $Y_{n\times n}$ é a matriz de admitância nodal e n é o número de barras na rede.

A matriz $Y_{n\times n}$ é formada da seguinte forma:

- Elementos fora da diagonal principal: $Y_{km} = -y_{km}$
- Elementos da diagonal principal: $Y_{kk} = \sum_{m\in\Omega_k}(y_{km} + jb_{km}^{sh})$[6]

A matriz de admitância pode ser separada em matriz condutância e matriz susceptância:

$$Y = \Re\{Y\} + j\Im\{Y\} = G + jB$$

A corrente em cada barra pode ser calculada como

$$I_k = \sum_{m\in K} Y_{km}E_m = Y_{kk}E_k + \sum_{m\in\Omega_k} Y_{km}E_m{}^7$$

[6] Ω_k é o conjunto das barras conectadas diretamente à barra k.
[7] K é o conjunto formado pela barra k e suas vizinhas.

Para deduzir as equações de potência, substituímos a equação para I_k acima em $S_k = E_k I_k^*$, obtendo:

$$
\begin{aligned}
P_k &= V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos\theta_{km} + B_{km} \sin\theta_{km}) \\
Q_k &= V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \sin\theta_{km} - B_{km} \cos\theta_{km})
\end{aligned}
$$

onde $\theta_{km} := \theta_k - \theta_m = \arg(E_k) - \arg(E_m)$ e $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$.

Comentário sobre a resolubilidade do problema Para as barras PQ e PV, é possível escrever as equações de P_k e, para as barras PQ, é possível escrever as equações de Q_k. Portanto, temos $N_{PQ} + N_{PV}$ equações de P_k e N_{PQ} equações de Q_k, totalizando $2N_{PQ} + N_{PV}$ equações.

As incógnitas são V_k e θ_k nas barras PQ e θ_k nas barras PV. No total, temos $2N_{PQ} + N_{PV}$ incógnitas, que é o mesmo número de equações. Portanto o sistema é possível e determinado.

Uma vez determinado o valor das incógnitas, pode-se calcular P_k, Q_k na barra de referência e Q_k nas barras PV.

Ideia da resolução A ideia da resolução é:

1. De alguma maneira, determinar os fasores de tensão.
2. A partir deles, calcular as potências P_k nas barras PQ e PV e Q_k nas barras PQ.
3. Comparar tais valores calculados (P_k^{calc}, Q_k^{calc}) com os especificados pelo problema (P_k^{esp}, Q_k^{esp}).

Para fazer a comparação, calculam-se $\Delta P_k, \Delta Q_k$, os erros de potência, resíduos de potência ou *mismatches* de potência.

$$
\begin{aligned}
\Delta P_k &= P_k^{esp} - P_k^{calc} \\
\Delta Q_k &= Q_k^{esp} - Q_k^{calc}
\end{aligned}
$$

Idealmente, o problema está solucionado quando esses erros se anulam. Na prática, vamos aceitar uma solução que tenha ambos os erros abaixo de certa tolerância ϵ.

Método de Newton É o método usado para a resolução do problema de fluxo de carga. Apresentamos o algoritmo para o caso multidimensional, em que o objetivo é encontrar a solução para $g(x) = 0$, onde $g(x) = [g_1(x) \dots g_n(x)]^T$ é o vetor de *mismatches* e $x = [x_1 \dots x_n]^T$ é o vetor de incógnitas.

Algoritmo 1: Algoritmo do método de Newton para caso multidimensional.

Entrada: Ponto inicial x_0 e sistema de equações $g(x) = 0$
Saída: Solução x
1 **início**
2   Inicializar o contador de iterações $v \leftarrow 0$ e fazer $x^{(0)} \leftarrow x_0$.
3   Calcular o valor de $g(x^{(v)})$.
4   Testar a convergência:
5   **se** $|g_i(x^{(v)})| \leq \epsilon, \ \forall i = 1, 2, ..., n$ **então**
6         $x \leftarrow x^{(v)}$ é a solução procurada com tolerância $\pm\epsilon$.
7   **return** x
8   **fim**
9   Calcular a matriz jacobiana $J(x^{(v)}) = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} g_i\right]$.
10   Calcular novo ponto $\Delta x^{(v)} \leftarrow J^{-1} g(x^{(v)}),\ x^{(v+1)} \leftarrow x^{(v)} + \Delta x^{(v)}$
11   Incrementar contador $v \leftarrow v + 1$ e voltar para linha 3.
12 **fim**

No problema de fluxo de carga:

$$
x = \begin{bmatrix} \theta \\ V \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{esp} - P^{calc} \\ Q^{esp} - Q^{calc} \end{bmatrix}, \quad J(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \theta} \Delta P & \dfrac{\partial}{\partial V} \Delta P \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} \Delta Q & \dfrac{\partial}{\partial V} \Delta Q \end{bmatrix}
$$

Vantagens e desvantagens do método de Newton:

- É mais confiável (converge em casos que outros métodos divergem).
- O número de iterações necessárias para convergência independe da dimensão.
- Requer mais espaço de armazenamento (matriz jacobiana).
- O tempo computacional por iteração é maior (inversão e multiplicação com matriz jacobiana).
- Tem convergência rápida (quadrática).
- Não é sensível à escolha da barra de referência, mas o é à escolha do ponto inicial.

Cálculo da matriz jacobiana Como o cálculo dos *mismatches* envolve um termo constante (especificado), podemos simplificar a matriz jacobiana. Por exemplo:

$$\Delta P = P^{esp} - P^{calc}(V,\theta) \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial\theta}\Delta P = -\frac{\partial}{\partial\theta}P^{calc}$$

É comum representar a matriz jacobiana em termos de submatrizes:

$$J(x) = -\begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix}, \text{ onde } H = \frac{\partial P}{\partial\theta},\; N = \frac{\partial P}{\partial V},\; M = \frac{\partial Q}{\partial\theta},\; L = \frac{\partial Q}{\partial V}$$

Assim:

$$g(x) = -J(x)\Delta x \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} P^{esp} - P^{calc} \\ Q^{esp} - Q^{calc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix}$$

As componentes das submatrizes são:

$$H\begin{cases} H_{km} = \dfrac{\partial P_k}{\partial\theta_m} = V_k V_m (G_{km}\sin\theta_{km} - B_{km}\cos\theta_{km}) \\ H_{kk} = \dfrac{\partial P_k}{\partial\theta_k} = -B_{kk}V_k^2 - Q_k \end{cases}$$

$$N\begin{cases} N_{km} = \dfrac{\partial P_k}{\partial V_m} = V_k (G_{km}\cos\theta_{km} + B_{km}\sin\theta_{km}) \\ N_{kk} = \dfrac{\partial P_k}{\partial V_k} = V_k^{-1}(P_k + G_{kk}V_k^2) \end{cases}$$

$$M\begin{cases} M_{km} = \dfrac{\partial Q_k}{\partial\theta_m} = -V_k V_m (G_{km}\cos\theta_{km} + B_{km}\sin\theta_{km}) \\ M_{kk} = \dfrac{\partial Q_k}{\partial\theta_k} = -G_{kk}V_k^2 + P_k \end{cases}$$

$$L\begin{cases} L_{km} = \dfrac{\partial Q_k}{\partial V_m} = V_k (G_{km}\sin\theta_{km} - B_{km}\cos\theta_{km}) \\ L_{kk} = \dfrac{\partial Q_k}{\partial V_k} = V_k^{-1}(Q_k - B_{kk}V_k^2) \end{cases}$$

Perdas O fluxo de potência na linha que liga a barra k a m é dado por

$$S_{km}^* = E_k^* I_{km}, \quad I_{km} = y_{km}(E_k - E_m) + jb_{km}^{sh}E_k$$

As perdas de potência na linha km são

$$\begin{aligned} P_{perdas} = P_{km} + P_{mk} &= g_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_kV_m\cos\theta_{km}) \\ &= g_{km}|E_k - E_m|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{perdas} = Q_{km} + Q_{mk} &= -b_{km}^{sh}(V_k^2 + V_m^2) - 2b_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_kV_m\cos\theta_{km}) \\ &= -b_{km}^{sh}(V_k^2 + V_m^2) - b_{km}|E_k - E_m|^2 \end{aligned}$$

Referências

[1] MONTICELLI, Alcir e GARCIA, Ariovaldo. *Introdução a sistemas de energia elétrica.* Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2003.

Algoritmo 2: Algoritmo do método de Newton para o problema de fluxo de potência.

Entrada: Ponto inicial $(\theta_k^0 \ V_k^0)$, sistema de equações P_k, Q_k e parâmetros das linhas Y

Saída: Solução $(\theta_k V_k)$

1 **início**

2 Inicializar o contador de iterações $v \leftarrow 0$ e fazer $\theta_k^{(v)} \leftarrow \theta_k^0$ e $V_k^{(v)} \leftarrow V_k^0$

3 Calcular $P_k(\theta_k^{(v)}, V_k^{(v)})$ e $Q_k(\theta_k^{(v)}, V_k^{(v)})$ e os *mismatches* $\Delta P_k^{(v)}$ e $\Delta Q_k^{(v)}$.

4 Testar a convergência:

5 **se** $\max\{|\Delta P_k^{(v)}|\} \leq \epsilon$ *e* $\max\{|\Delta Q_k^{(v)}|\} \leq \epsilon$ **então**

6 $(\theta_k V_k) \leftarrow (\theta_k^{(v)} V_k^{(v)})$ é a solução procurada com tolerância $\pm\epsilon$.

7 Calcular P_k e Q_k na barra de referência e Q_k nas barras PV.

8 **fim**

9 Calcular a matriz jacobiana $J(\theta^{(v)}, V^{(v)}) = \begin{bmatrix} H(\theta^{(v)}, V^{(v)}) & N(\theta^{(v)}, V^{(v)}) \\ M(\theta^{(v)}, V^{(v)}) & L(\theta^{(v)}, V^{(v)}) \end{bmatrix}$

10 Calcular novos valores $\begin{cases} \theta^{(v+1)} = \theta^{(v)} + \Delta\theta^{(v)} \\ V^{(v+1)} = V^{(v)} + \Delta V^{(v)} \end{cases}$, onde $\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}$

11 Incrementar contador $v \leftarrow v + 1$ e voltar para linha 3.

12 **fim**