EE754 - Ondas Guiadas

Henrique Koji Miyamoto

1 Teoria e Aplicações de Linhas de Transmissão

Para transmissão eficiente ponto a ponto de potência ou informação, a energia deve ser direcionada ou guiada. Para isso, estudaremos a propagação de ondas eletromagnéticas no modo TEM (*transverse electromagnetic*, i.e., **B**, **H** e a direção de propagação são perpendiculares entre si no guia de onda). Exemplos de guias de ondas: linha de transmissão de placas paralelas, par de fios, cabo coaxial.

Comprimento elétrico É a razão entre a maior dimensão de um condutor e o comprimento da onda que o atravessa:

$$L_e = \frac{L}{\lambda}$$

Abaixo de determinado valor, não é possível mais tratar o problema com Teoria de Circuitos, pois as distorções não são mais desprezíveis. Nesse caso, é necessário um tratamento com Teoria Eletromagnética.

1.1 Ondas TEM em linha de transmissão de placas paralelas

Considere uma onda TEM polarizada na direção y e que se propaga na direção z por uma linha de transmissão de placas paralelas. Para campos com variação harmônica, a equação de onda na região do dielétrico sem fonte é a equação homogênea de Helmholtz (de ondas planas):

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_c^2 \mathbf{E} = 0,$$

cuja solução é

$$\mathbf{E} = E_y \hat{\mathbf{y}} = E_0 e^{-\gamma z} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{H} = H_x \hat{\mathbf{x}} = -\frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z} \hat{\mathbf{x}}.$$

Os parâmetros γ e η são, respectivamente, a constante de propagação e a impedância intrínseca do meio dielétrico. Desprezando efeitos de borda e assumindo meio sem perdas, temos:

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}, \qquad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

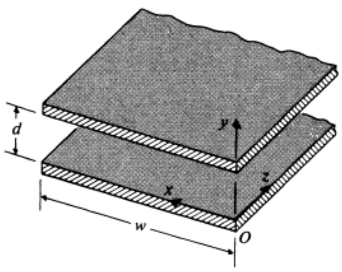

Figura 1: Linha de transmissão de placas paralelas.

Usando as condições de contorno entre dielétrico e condutor perfeito, temos:

- Em $y = 0$ e $y = d$:

$$E_t = 0 \text{ e } H_n = 0,$$

  pois $E_x = E_z = 0$ e $H_y = 0$.

- Em $y = 0$ (*lower plate*), $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$:

$$\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{D} = \rho_{sl} \Rightarrow \rho_{sl} = \epsilon E_y$$

$$\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{sl} \Rightarrow \mathbf{J}_{sl} = -H_x \hat{\mathbf{z}}$$

- Analogamente, em $y = d$ (*upper plate*), $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{y}}$:

$$-\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{D} = \rho_{su} \Rightarrow \rho_{su} = -\epsilon E_y$$

$$-\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{su} \Rightarrow \mathbf{J}_{su} = H_x \hat{\mathbf{z}}$$

As cargas e correntes superficiais nos condutores variam senoidalmente, pois a variação de E_y e H_x é também harmônica.

As equações de Maxwell na forma fasorial

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$$

reduzem-se a

$$\frac{d}{dz}E_y = j\omega\mu H_x, \quad \frac{d}{dz}H_x = j\omega\epsilon E_y.$$

Integrando-as e usando as definições

$$V(z) = -\int_0^d E_y dy, \quad I(z) = \int_0^w J_{su}(z) dx$$

é possível deduzir expressões para a indutância por unidade de comprimento e capacitância por unidade de comprimento:

$$\boxed{L = \mu \frac{d}{w} \text{ (H/m)}} \quad \boxed{C = \epsilon \frac{w}{d} \text{ (C/m)}}$$

e obter um par de equações de linhas de transmissão com variação temporal harmônica:

$$\frac{d^2}{dz^2}V(z) = -\omega^2 LCV(z)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}I(z) = -\omega^2 LCI(z)$$

cujas soluções são

$$\boxed{V(z) = V_0 e^{-j\beta z}} \quad \boxed{I(z) = I_0 e^{-j\beta z}}.$$

A constante de fase é

$$\boxed{\beta = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \text{ (rad/m)}}$$

A *impedância característica* da linha é

$$\boxed{Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \sqrt{LC} = \frac{d}{w}\eta}$$

A velocidade de propagação ao longo da linha é

$$\boxed{u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}}$$

1.1.1 Linhas de transmissão com perdas

Causas de perdas em linhas de transmissão: o meio dielétrico tem tangente de perdas não nula e as placas não são condutores perfeitos. Modelamos esses efeitos através de uma condutância G por unidade de comprimento entre as placas e de uma resistência R por unidade de comprimento das duas placas.

A condutância por unidade de comprimento é dada por

$$\boxed{G = \sigma \frac{w}{d} \text{ (S/m)}}$$

A resistência por unidade de comprimento é dada por[1]

$$\boxed{R = 2\left(\frac{R_s}{w}\right) = \frac{2}{w}\sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} \text{ (Ω/m)}}$$

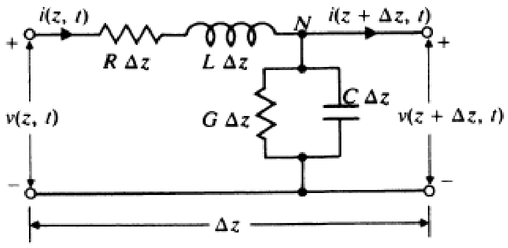

Figura 2: Circuito equivalente de um trecho de linha de transmissão de comprimento Δz.

1.2 Equações gerais de linhas de transmissão

A seguir, apresentamos a representação circuital para linhas de transmissão.

Aplicando as leis de Kirchhoff das tensões e das correntes e fazendo o limite $\Delta z \to 0$, obtemos as *equaçõs gerais de linhas de transmissão*[2]:

$$-\frac{\partial}{\partial z}v(z,t) = Ri(z,t) + L\frac{\partial}{\partial}i(z,t)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}i(z,t) = Gv(z,t) + C\frac{\partial}{\partial}v(z,t)$$

Para dependência temporal harmônica, podemos usar notação fasorial com referência cossenoidal

$$v(z,t) = \Re[V(z)e^{j\omega t}], \quad i(z,t) = \Re[I(z)e^{j\omega t}]$$

e obter *equaçõs de linhas de transmissão com variação temporal harmônica*:

$$-\frac{d}{dz}V(z) = (R + j\omega L)I(z)$$

$$-\frac{d}{dz}I(z) = (G + j\omega C)V(z)$$

1.2.1 Características de onda em linha de transmissão infinita

As equaçõs de linhas de transmissão com variação temporal harmônica acopladas podem ser combinadas e resolvidas para $V(z)$ e $I(z)$, obtendo:

$$\frac{d^2}{dz^2}V(z) = \gamma^2 V(z)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}I(z) = \gamma^2 I(z)$$

em que a *constante de propagação* γ é formada por uma constante de atenuação real α (Np/m)[3] e uma constante de fase β imaginária (rad/m):

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \ (\mathrm{m}^{-1})}$$

As soluções dessas equações são

$$V(z) = V^+(z) + V^-(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z}$$

$$I(z) = I^+(z) + I^-(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}$$

Em uma linha de transmissão semi-infinita com a fonte à esquerda, não há reflexão, portanto consideramos apenas os termos $V^+(z)$ e $I^+(z)$.

A razão entre tensão e corrente é constante ao longo de uma linha infinitamente longa e é definida como *impedância característica*:

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}, \ (\Omega)}$$

As grandezas γ e Z_0 são propriedades características de uma linha de transmissão e dependem de R, L, G, C, ω, mas não de z. O caso é análogo ao de ondas planas.

[1] A demonstração desse resultado está em [1], p. 433-434.

[2] Também conhecidas como equações do telegrafista.

[3] Conversão de Np/m para dB/m: $\alpha_{dB/m} = 20(\log e)\alpha_{Np/m} \approx (8,686)\alpha_{Np/m}$.

Casos especiais:

1. Linhas de transmissão sem perdas ($R = G = 0$):

    Constante de propagação: $\alpha = 0,\ \beta = \omega\sqrt{LC} \rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{LC}$

    Velocidade de fase: $u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

    Impedância característica: $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}},\ X_0 = 0 \rightarrow Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

2. Linhas de transmissão de baixas perdas ($R \ll \omega L,\ G \ll \omega C$):

    Constante de propagação: $\alpha \approx \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}\right) \approx \frac{R}{2R_0}$[4], $\beta \approx \omega\sqrt{LC}$

    Velocidade de fase: $u_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$

    Impedância característica: $R_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}},\ X_0 \approx -\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{1}{2\omega}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right) \approx 0$

3. Linhas de transmissão sem distorção $\left(\frac{R}{L} = \frac{G}{C}\right)$[5]:

    Constante de propagação: $\alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}} \neq 0,\ \beta = \omega\sqrt{LC}$

    Velocidade de propagação: $u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

    Impedância característica: $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}},\ X_0 = 0$

Exceto pela constante de atenuação não nula, a linha sem distorção se comporta igual à linha sem perdas. Para evitar distorção, diferentes frequências de um sinal devem viajar à mesma velocidade (u_p = cte.), o que é satisfeito nos casos 1 e 3, e aproximadamente no caso 2. No caso geral, uma linha tem perdas e sofre *dispersão*.

Referências

[1] CHENG, David K. *Field and Wave Electromagnetics*. 2nd ed., Addison-Wesley, 1989.

[4] Pois $\frac{R}{L} \gg \frac{G}{C}$.

[5] Para obter a relação, deve-se diminuir C ou aumentar L. O segundo é mais conveniente e possível através da *pupinização*.