

# ET520 - Princípios de Conversão de Energia

Henrique Koji Miyamoto

## 1 Circuitos magnéticos

### 1.1 Circuitos magnéticos

Lei de Ampère:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum i$$

Aplicação a um condutor no espaço. Escolha um caminho circular de raio  $r$ .

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Hl = H(2\pi r) = i \Rightarrow H = \frac{i}{2\pi r}$$

Força magnetomotriz ( $F_{mm}$ )<sup>1</sup>:

$$F_{mm} \equiv Ni$$

Lei de Faraday<sup>2</sup>:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Fluxo concatenado: fluxo envolvido por uma bobina (com  $N$  espiras).

$$\lambda(t) = N\phi(t)$$

Relação  $\mathbf{B} \times \mathbf{H}$ :

1. Materiais lineares:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = \mu_0 \mu_r, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

2. Materiais não-lineares:

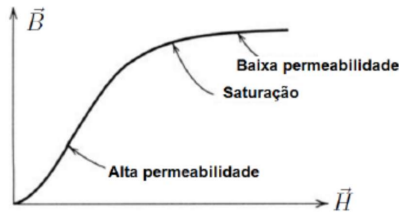


Figura 1: Curva de magnetização para material não-linear.

Exemplo: núcleo toroidal de material linear

$$H = \frac{Ni}{l}, \quad B = \mu H = \mu \frac{Ni}{l}, \quad \phi = BA$$

$$\phi = BA = \mu \frac{Ni}{l} A \Rightarrow F_{mm} = \frac{l}{\mu A} \phi$$

Relutância ( $\mathcal{R}$ ) e permeância ( $\mathcal{P}$ ):

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A} [H^{-1}], \quad \mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{\mu A}{l} [H]$$

<sup>1</sup>Unidade: Ampère-espira (Ae).

<sup>2</sup>O sinal negativo deve-se à lei de Lenz e é coerente com a convenção de fonte.

$$F_{mm} = \mathcal{R}\phi$$

Análise de circuitos magnéticos com entreferros (estrutura composta):

1. Considerações:

$\phi$  é constante ao longo do núcleo

$\mathbf{B}$  pode ser diferente em pontos do núcleo

$\mathbf{H}$  varia em função da permeabilidade do meio

$F_{mm}$  permanece constante para mesma corrente e número de espiras

2. Características do entreferro:

Permeabilidade do ar

Comprimento dado pelo seu tamanho

Área de passagem um pouco maior devido ao efeito de espraçamento (*fringing*)

Se o comprimento do entreferro for pequeno, essa diferença de área pode ser desprezada.

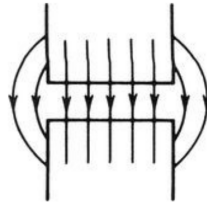


Figura 2: Efeito de espraçamento (*fringing*).

3. Conclusões:

No *gap*, a intensidade de campo magnético e a relutância são maiores que no núcleo.

Para materiais lineares, é possível fazer uma analogia com circuitos elétricos com relações do tipo

$$F_{mm} = \mathcal{R}\phi, \quad \mathcal{R} = \frac{l}{\mu A}$$

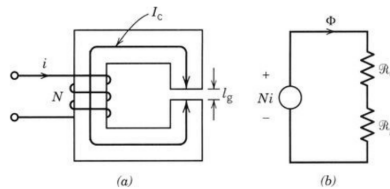


Figura 3: Circuito magnético análogo ao elétrico.

Análise de circuitos magnéticos não-lineares:

1. Se  $B$  ou  $H$  são conhecidos: consultar a curva  $B \times H$

2. Se  $B$  e  $H$  são desconhecidos: determinar uma relação entre  $B$  e  $H$  a partir dos dados do problema e identificar sua interseção com a curva do material.

Indutância:

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda}{i} [H]$$

Relação entre indutância e relutância<sup>3</sup>:

$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{(N\phi)}{i} = \frac{N(BA)}{i} = \frac{N(\mu H)A}{i} = \frac{N\mu A}{i} \left( \frac{Ni}{l} \right) = N^2 \frac{\mu A}{l} \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$$

Em circuitos magnéticos com mais de uma bobina, é possível diferenciar:

<sup>3</sup>Válido para materiais lineares. Em materiais não-lineares, é possível definir duas indutâncias: saturada e não-saturada.

- *Indutância própria ou autoindutância*: razão entre fluxo concatenado em uma bobina e a corrente aplicada a ela para gerar o fluxo.
- *Indutância mútua*: razão entre o fluxo concatenado em uma bobina, que foi gerado por outra bobina, e a corrente, fornecida pela outra bobina, que gerou tal fluxo.

Circuito elétrico equivalente:

- A tensão em uma bobina é dada por<sup>45</sup>

$$e = -\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li) = -\left(L\frac{di}{dt} + i\frac{dL}{dt}\right) = -L\frac{di}{dt}$$

- O condutor da bobina tem uma resistividade. A resistência da bobina deve ser considerada no circuito equivalente.

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Portanto a tensão no circuito equivalente da bobina é

$$e = Ri + L\frac{di}{dt}$$



Figura 4: Circuito elétrico equivalente da bobina.

## 1.2 Histerese

Detalhes sobre magnetização:

- Momentos magnéticos são gerados por fenômenos de nível atômico: movimento orbital de elétrons e spin de elétrons.
- Poucos materiais são *ferromagnéticos*, i.e., o arranjo dos átomos permite haver momento magnético resultante. Ex.: Fe, Ni, Co, Dy, Gd.
- Os átomos de mesma orientação se agrupam em regiões chamadas *domínios magnéticos*. A aplicação de um campo magnético tende a aumentar os domínios em sua direção.
- Com o alinhamento dos domínios magnéticos, os elétrons dos domínios geram campo na mesma direção, aumentando o efeito do campo.
- Quanto maior a intensidade do campo, menos domínios ficam disponíveis para se alinhar. No limite, todos os domínios estarão alinhados (saturação magnética) e o material se comporta como espaço livre.

Histerese é o fenômeno de que a densidade de fluxo magnético tem um “atraso” na resposta em relação à aplicação de campo magnético. Se um campo magnético que varia periodicamente (de  $H_1$  a  $-H_1$ ) é aplicado a um material, após alguns ciclos, o sistema atinge um regime e a curva  $B \times H$  passa a seguir um padrão (*laço de histerese*).

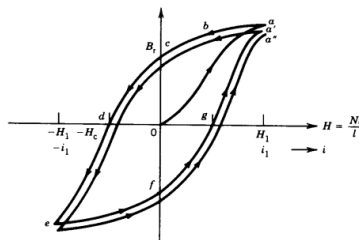


Figura 5: Laço de histerese.

<sup>4</sup>Em materiais lineares,  $L$  é constante.

<sup>5</sup>O sinal negativo deve-se à convenção de gerador.

- A curva de magnetização é definida como a ponta do laço de histerese em regime para vários valores de  $H_{max}$ .
- $B_r$ : densidade de fluxo residual.
- $H_c$ : campo magnético coercitivo.
- Curvas de histerese diferentes podem ser adequadas para aplicações específicas (ex.: liga Deltamax - relés).

A magnetização/desmagnetização envolve transferência de energia entre uma fonte externa e o núcleo magnético. Essa energia é dada por:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} e(t)i(t)dt, \quad e(t) = \frac{d\lambda}{dt}, \quad i(t) = \frac{Hl}{N} \rightarrow \boxed{W = Vw, \quad w = \int_{B_1}^{B_2} H(B)dB}.$$

Em um ciclo de histerese, existem etapas em que a energia é absorvida e dissipada. A *energia líquida é absorvida* é calculada como

$$w = \oint_{\text{laço}} H(B)dB.$$

A *potência dissipada devido à histerese*  $P_h$  depende da frequência de alimentação elétrica  $f$  segundo

$$\boxed{P_h = Vwf}.$$

Uma relação empírica válida é

$$\boxed{P_h = VK_h B_{max}^n f},$$

em que  $K_h$  e  $n$  dependem do material.

Perdas por correntes de Foucault (correntes parasitas) ocorrem da seguinte maneira: uma variação no fluxo magnético induz tensões entre pontos internos do material; como a resistividade não é nula, surgem correntes internas. Essa perda pode ser calculada como

$$\boxed{P_f = VK_f B_{max}^2 f^2},$$

em que  $K_f$  depende do material. Para reduzir essas perdas, pode-se: usar ligas com resistividade alta (acréscimo de Si); usar um núcleo formado por lâminas finas, isoladas eletricamente.

As perdas totais aquecem o núcleo e são calculadas como

$$P_t = P_h + P_f.$$

A FMM das correntes de Foucault se opõe à FMM do núcleo. Para a fonte manter o fluxo magnético, a corrente no núcleo deve ser aumentada, o que aumenta a área do laço de histerese (laço dinâmico).

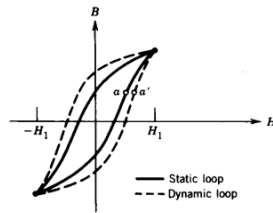


Figura 6: Laço de histerese.

### 1.3 Excitação senoidal

Considere um fluxo magnético senoidal em um núcleo magnético. Vejamos a relação com a tensão induzida.

$$\phi(t) = \phi_{max} \sin(\omega t) = \phi_{max} \sin(2\pi f t)$$

$$e(t) = N \frac{d\phi}{dt} = N \phi_{max} \omega \cos(\omega t)$$

$$e_{max} := N \phi_{max} \omega \rightarrow e(t) = e_{max} \cos(\omega t)$$

$$e_{rms} = \frac{e_{max}}{\sqrt{2}} = \pi \sqrt{2} N \phi_{max} f \approx 4,44 N f \phi_{max}$$

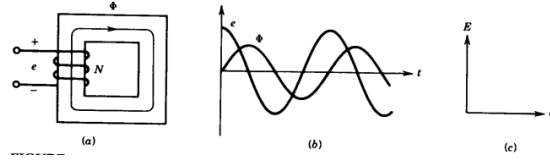


Figura 7: Excitação senoidal. (a) Montagem bobina-núcleo. (b) Formas de onda. (c) Diagrama fasorial.

- Em materiais lineares, a corrente está em fase com o fluxo.

$$e(t) = N \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \phi(t) = \frac{\int e(t) dt}{N} = \frac{\int e_{max} \sin(\omega t) dt}{N} = \frac{-e_{max} \cos(\omega t)}{N\omega}$$

$$H = \frac{Ni}{l} \Rightarrow i(t) = \frac{H(t)l}{N} = \frac{B(t)l}{\mu N} = \frac{\phi(t)l}{\mu NA} = \frac{-e_{max} \cos(\omega t) \mathcal{R}}{\omega N^2} \Rightarrow i(t) = -\frac{e_{max} \cos(\omega t)}{L\omega}$$

- A corrente está atrasada de 90° em relação à tensão, na notação de receptor (comportamento indutivo).

Uma mudança de eixos na curva de magnetização ( $B \rightarrow \phi = BA$  e  $H \rightarrow i = Hl/N$ ) transforma a curva de saturação do material na curva de saturação de um núcleo magnético específico.

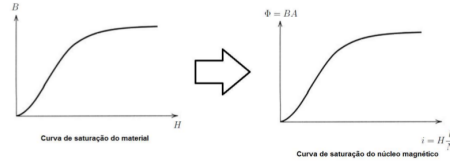


Figura 8: Mudança de eixos na curva de magnetização.

Corrente de excitação **sem** perdas no núcleo:

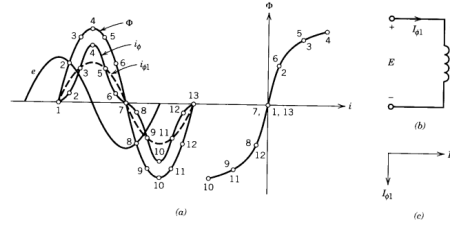


Figura 9: Corrente de excitação sem perdas no núcleo.

- O laço de histerese tem área nula.
- A corrente de excitação  $i_\phi$  é não puramente senoidal, mas está em fase com  $\phi$ .
- A componente fundamental de  $i_\phi$  está atrasada de 90° em relação à tensão.
- O circuito equivalente é puramente indutivo.

Corrente de excitação **com** perdas no núcleo:

- Devemos considerar o laço de histerese.
- A corrente de excitação  $i_\phi$  é não puramente senoidal e tem componente defasado.
- $i_\phi$  pode ser dividida em duas componentes:  $i_c$ , em fase com a tensão, e  $i_m$ , em fase com o fluxo (atrasada 90° da tensão).
- O circuito equivalente tem uma resistência  $R_c$  em paralelo com uma indutância  $L_m$ .

O fluxo disperso (*leakage flux*) pode ser modelado como relutância em paralelo com a relutância do núcleo. A modelagem elétrica disso é feita por indutâncias em série.

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}_l} + \frac{1}{\mathcal{R}_m}$$

$$L = L_l + L_m$$

Circuito elétrico equivalente completo:

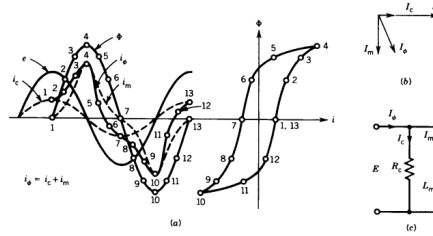


Figura 10: Corrente de excitação sem perdas no núcleo.

1. Resistência do fio da bobina: resistência  $R_w$  em série com as indutâncias.
2. Fluxo disperso: indutância de dispersão  $L_l$  em série com a indutância do núcleo.
3. Perdas no núcleo: resistência  $R_c$  em paralelo com a indutância do núcleo.
4. Magnetização do material magnético: indutor ideal  $L_m$

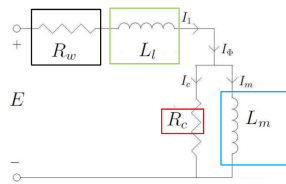


Figura 11: Circuito equivalente completo para o núcleo-bobina.

## 1.4 Ímãs permanentes

Ímã permanente: capaz de manter um campo magnético sem que lhe seja fornecida excitação ou FMM. Entre suas características, estão:

- Campo magnético coercitivo  $H_c$  alto.
- Densidade de fluxo remanescente  $B_r$  disponível para utilização, dependendo do circuito magnético e se não houve desmagnetização.
- A densidade de fluxo remanescente pode ser perdida por temperatura, vibração ou campo magnético reverso.

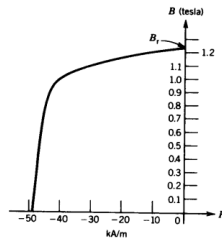


Figura 12: Exemplo de curva de desmagnetização para ímã permanente.

Definições:

- *Material magnético mole*: material com campo coercitivo baixo (  $50A/m$  ).
- *Material magnético duro*: material com campo coercitivo alto (  $150kA/m$  ) - ímãs permanentes.

Tipos de ímãs permanentes:

- Cerâmicos - ferrites de bário e estrôncio.
- AlNiCo - ligas de Fe, Al, Ni, Co
- Terras raras - ligas SmCo ou NeFeB

Funcionamento de dispositivos com ímãs permanentes:

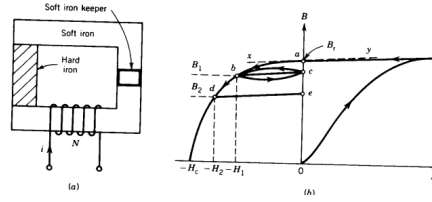


Figura 13: Ímã permanente e curva  $B \times H$ .

- A densidade de fluxo residual é obtida aplicando um campo magnético durante a fabricação.
- Se o ímã permanente for sujeito a um campo desmagnetizante (na direção contrária),  $B$  diminuirá seguindo o laço de histerese.
- Se esse campo for retirado e reaplicado, o dispositivo seguirá um laço fino de histerese. Esse laço pode ser aproximado por um segmento de reta (*recoil line*).
- Para diferentes campos desmagnetizantes, diferentes *recoil lines* são seguidas.
- A permeabilidade de *recoil* é definida como a inclinação da recoil line.

Funcionamento de dispositivos com ímãs permanentes:

- Em geral, ímãs permanentes são usados em circuitos magnéticos em que são a única fonte de fluxo magnético.
- Em geral, os dispositivos operam somente na fase de desmagnetização (2º quadrante).
- O aumento da relutância do circuito magnético causa desmagnetização do ímã permanente.

Análise:

1. Corrente alternada aplicada a um laço de histerese.
2. Corrente é desligada  $\rightarrow H = 0$ .
3. O material magnético mole é retirado, aumentando a impedância do circuito.
4. Considerando permeabilidade magnética do material mole infinita, o ponto de operação do material é definido pelo cruzamento da curva de magnetização com a reta dada pela *shear line*.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Ni \Rightarrow H_m l_m + H_g l_g = 0 \Rightarrow H_g = -\frac{H_m l_m}{l_g}$$

Para considerar o efeito da dispersão, define-se  $q = \frac{\phi_m}{\phi_g} \geq 1$ .

$$q\phi_g = \phi_m \Rightarrow qB_g A_g = B_m A_m \Rightarrow B_m = \frac{qB_g A_g}{A_m} \Rightarrow B_m = \frac{q\mu_0 H_g A_g}{A_m}$$

$$\therefore B_m = -q\mu_0 \frac{A_g}{A_m} \frac{l_m}{l_g} H_m$$

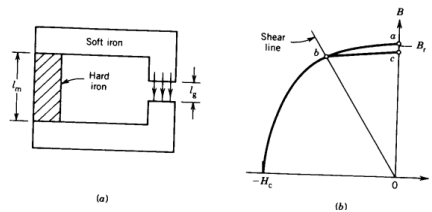


Figura 14: Ímã permanente e curva  $B \times H$ .

5. Se a relutância for diminuída, o dispositivo operará sobre a *recoil line*.

Estabilização de materiais com ímãs permanentes: para simular o uso do dispositivo, são aplicados campos desmagnetizantes até o valor da intensidade de campo mais negativa em que o dispositivo vai operar.

Podemos calcular o volume de material magnético  $V_m$  necessário para impor uma densidade de fluxo  $B_g$  em um entreferro de volume  $B_g$ :

$$H_m l_m + H_g l_g = 0 \Rightarrow l_m = -\frac{H_g l_g}{H_m}$$

$$q\phi_g = \phi_m \Rightarrow qB_g A_g = B_m A_m \Rightarrow A_m = \frac{qB_g A_g}{B_m}$$

$$V_m = |l_m| |A_m| = \left( \frac{H_g l_g}{H_m} \right) \left( \frac{qB_g A_g}{B_m} \right) \Rightarrow V_m = \frac{qB_g^2}{\mu_0 H_m B_m} V_g$$

Quanto maior o produto  $H_m B_m$ , menor o volume  $V_m$  necessário. O valor máximo de  $H_m B_m$  é definido como **produto de energia** do material magnético.

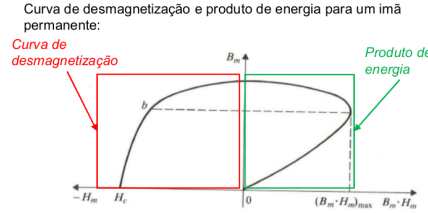


Figura 15: Curva  $B \times H$  para ímã permanente.

## 2 Transformadores

Um transformador é uma máquina estática que consiste de dois ou mais enrolamentos acoplados magneticamente. Sua principal função é aumentar ou diminuir níveis de tensão e corrente. Entre suas aplicações estão: sistemas de transmissão e distribuição de energia elétrica, alimentação de equipamentos eletrônicos, transdutores de sinais, isolamento elétrico de circuitos, casamento de impedâncias.

Transformadores com *núcleo de ferro* são usados em aplicações de alta potência, por permitir grandes densidades de fluxo. Transformadores de *núcleo de ar* têm baixo acoplamento magnético e são usados em circuitos eletrônicos de baixa potência.

Quanto ao tipo de construção, podemos ter: *core type* (formato retangular), *shell type* (formato retangular com uma perna central), *cut core* (lâminas dobradas em formato de C), *núcleo contínuo* (lâminas enroladas ao redor de si mesmas).

Quanto à construção dos núcleos *core type* e *shell type*, podemos ter: *camadas topadas* (lâminas empilhadas na mesma direção - possibilita transporte individual das peças, mas há maior entreferro nas faces em contato) ou *camadas de núcleo sobrelapadas* (lâminas em posições invertidas - diminui entreferro).

Em relação aos enrolamentos, temos: *primário* - ligado à fonte que fornece potência ao transformador; *secundário* - ligado à carga que absorve potência do transformador. *Lado de alta* - ligado à tensão mais alta; *lado de baixa* - ligado à tensão mais baixa. Temos transformadores elevadores e abaixadores.

Os valores nominais (rated) se referem aos valores máximos suportados por cada enrolamento de um transformador<sup>6</sup>.

### 2.1 Transformadores ideais

Hipóteses:

1. As resistências dos enrolamentos são desprezíveis.
2. Não há dispersão de fluxo (está todo confinado no núcleo).
3. Permeabilidade do núcleo infinita (relutância nula).
4. Perdas por histerese e correntes de Foucault nulas.

Relação de tensões:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} = a$$

<sup>6</sup>São sinônimos potência nominal (*rated power*) e plena carga (*full load*).



Relação de correntes:

$$\boxed{\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a}}$$

Relação de potência instantânea:

$$\boxed{p_1 = v_1 i_1 = v_2 i_2 = p_2}$$

As relações também são válidas para fasores:

$$\frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_2} = \frac{N_1}{N_2} = a$$

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a}$$

$$|S_1| = V_1 I_1 = V_2 I_2 = |S_2|$$

Reflexão de impedância (impedância conectada no secundário vista pelo primário):

$$\boxed{Z'_2 = a^2 Z_2 = Z_1}$$

A maneira como os condutores são enrolados influencia no sentido das correntes. A polaridade de um terminal está associada ao sentido da FMM gerada pela corrente que entra por ele. Terminais com a mesma polaridade são identificados para indicar as conexões corretas.

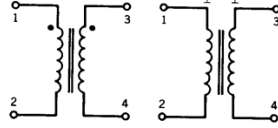


Figura 16: Identificação da polaridade.

## 2.2 Transformadores reais

Descartaremos as hipóteses do transformador ideal:

1. Um resistor em série representa resistência  $R$  do enrolamento.
2. Relutância do fluxo disperso modelada por indutância em série  $X_l = \omega L_l$ .
3. Relutância do núcleo representada com uma indutância de magnetização  $X_m = \omega L_m$ .
4. Efeitos de histerese e correntes de Foucault representados por resistência  $R_c$ .

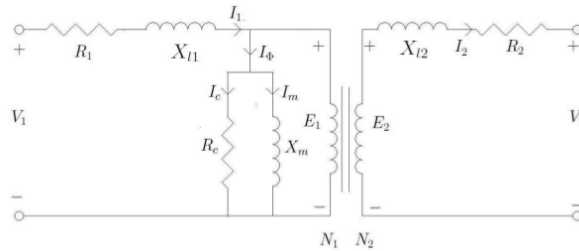


Figura 17: Modelo do transformador real.

É usual refletir todas as grandezas para o primário. Ao refletir a impedância ligada ao secundário, tem-se o circuito completo a ser analisado.

Simplificações de circuito equivalente:

1. Se

$$R_1 + X_{l1} \ll \left( \frac{1}{R_c} + \frac{1}{X_m} + \frac{1}{X'_{l2} + R'_2 + Z'_{l2}} \right)^{-1},$$

então  $V_1 \approx E_1$  e é possível inverter a posição dos ramos de magnetização e do núcleo.

2. Se a corrente de magnetização e a de perdas forem desprezíveis, podemos desconsiderar esses ramos.

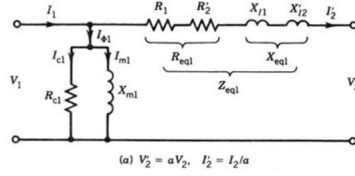


Figura 18: Primeira simplificação.

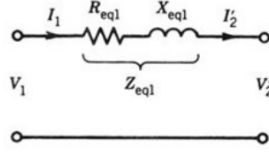


Figura 19: Segunda simplificação.

## 2.3 Determinação dos parâmetros de transformadores

Para determinar resistências e reatâncias do circuito, podemos usar dois ensaios:

1. Ensaio em aberto (*open-circuit*): determina resistência de perdas no núcleo e reatância de magnetização.
2. Ensaio em curto (*short-circuit*): determina as resistências AC das bobinas e das indutâncias de dispersão.

Hipótese fundamental:  $R_1, X_{l1}, R_2, X_{l2} \ll R_c, X_m$ . Deve ser verificada após obter os resultados.

### Ensaio em aberto

Procedimento:

1. Aplica-se tensão nominal a um enrolamento (normalmente o lado de baixa) e o outro é mantido em aberto.
2. Mede-se: valor RMS da tensão  $V_{ocRMS}$  e da corrente  $I_{ocRMS}$  e potência ativa  $P_{oc}$ <sup>7</sup>.

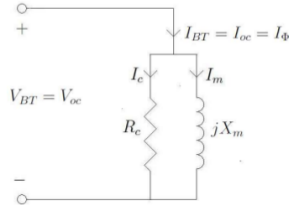


Figura 20: Circuito do ensaio aberto.

- Pela hipótese, pode-se considerar  $R_{BT} \approx X_{lBT} \approx 0$ .
- Toda a potência  $P_{oc}$  é dissipada no núcleo e a tensão sobre  $R_c$  é  $V_{ocRMS}$ , então

$$R_c \approx \frac{V_{ocRMS}^2}{P_{oc}}$$

- A corrente  $I_{oc}$  medida é composta por  $I_c$  e  $I_m$ , ortogonais. Temos:

$$I_{cRMS} \approx \frac{V_{ocRMS}}{R_c}$$

$$I_{mRMS} = \sqrt{I_{ocRMS}^2 - I_{cRMS}^2}$$

- Do valor de  $I_m$ , temos

$$X_m \approx \frac{V_{ocRMS}}{I_{mRMS}}$$

<sup>7</sup>Opcionalmente, mede-se valor RMS da tensão no enrolamento em aberto.

*Procedimento alternativo:*

- A partir dos valores de tensão, corrente e potência aparente medidos, obtém-se o fator de potência e o ângulo entre tensão e corrente:

$$f_p = \frac{S}{P} = \frac{V_{ocRMS} I_{ocRMS}}{P_{oc}}$$

$$\theta = \arccos(f_p)$$

- Como  $I_{ocRMS} = I_m + I_c$ , temos que

$$I_{mRMS} = I_{ocRMS} \sin \theta$$

$$I_{cRMS} = I_{ocRMS} \cos \theta$$

- Por fim, calcula-se  $R_c$  e  $X_m$  como

$$R_c \approx \frac{V_{ocRMS}}{I_{cRMS}}, \quad X_m \approx \frac{V_{ocRMS}}{I_{mRMS}}$$

## Ensaio em curto

Procedimento:

1. Aplica-se corrente nominal a um dos enrolamentos (normalmente lado de alta) e deixa-se o outro em curto.
2. Mede-se: corrente RMS que é aplicada  $I_{scRMS}$ , tensão aplicada  $V_{scRMS}$  e potência ativa  $P_{sc}$ .

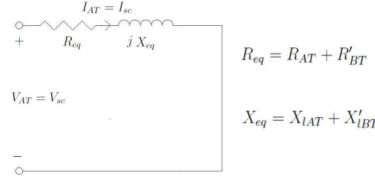


Figura 21: Circuito do ensaio em curto.

- Toda a potência  $P_{sc}$  é dissipada na resistência equivalente e a corrente  $I_{sc}$  é medida. Portanto,

$$R_{eq} = \frac{P_{sc}}{I_{sc}^2}$$

- Para calcular a reatância equivalente:

$$|Z_{eq}| = \frac{|V_{sc}|}{I_{sc}} = \frac{V_{scRMS}}{I_{scRMS}}$$

$$X_{eq} = \sqrt{|Z_{eq}|^2 - R_{eq}^2}$$

- Para estimar os valores individuais das resistências AC, mede-se os valores das resistências DC com um ohmímetro.

$$R_{eqDC} = R_{ATDC} + R'_{BTDC}$$

$$R_{AT} = \frac{R_{ATDC}}{R_{eqDC}} R_{eq}, \quad R'_{BT} = \frac{R'_{BTDC}}{R_{eqDC}} R_{eq}$$

- Por construção, podemos aproximar as relutâncias de dispersão como iguais nos dois enrolamentos. Nesse caso,

$$X'_{lBT} = X_{lAT} = \frac{X_{eq}}{2}$$

## 2.4 Regulação de tensão

É uma medida da diferença entre tensão no secundário em aberta e com carga, dividida pela tensão no secundário com carga.

$$Reg = \frac{|V_2|_{aberto} - |V_2|_{carga}}{|V_2|_{carga}}$$

Podemos refletir tensões para o primário e considerar  $|V'_2|_{carga} = |V'_2|_{nom}$  e  $|V'_2|_{aberto} = |V_1|$ . Então temos:

$$Reg = \frac{|V_1| - |V_2'|_{nom}}{|V_2'|_{nom}}$$

Procedimento para determinação:

1. Calcular o fasor de corrente de uma carga:  $|I| = \%_{carga} \times I_{nom}$  e  $\theta_I = \arccos(f_p)$
2. Calcular  $V_1$  tal que a tensão no secundário seja nominal para aquela corrente.

Diagrama fasorial:

$$V_1 = V_2' + (R_{eq} + jX_{eq})I_2'$$

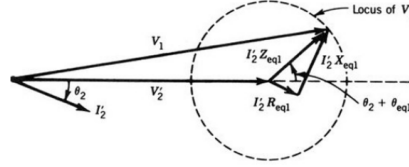


Figura 22: Lugar geométrico da regulação de tensão.

O tensão no primário será máxima quando  $I_2'Z_{eq1}$  estiver em fase com  $V_2'$ , i.e.,  $\theta_2 + \theta_{eq1} = 0$ .

## 2.5 Rendimento

Rendimento definido como

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P_{out}}{P_{out} + P_{perdas}}$$

Perdas no transformador:

$$P_{perdas} = P_{Cu} + P_c$$

$$P_{Cu} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = R_{eq1} I_1^2 = R_{eq2} I_2^2$$

$$P_c = R_c I_c^2 = P_{oc}$$

Potência ativa no secundário:

$$P_{out} = V_2 I_2 \cos \theta_2$$

Rendimento máximo:

$$\frac{\partial \eta}{\partial I_2} = 0 \Rightarrow P_c = R_{eq2} I_2^2$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} = 0 \Rightarrow \cos \theta_2 = 1$$

Rendimento ao longo do dia:

$$\eta_{dia} = \frac{E_{out24h}}{E_{in24h}} = \frac{E_{out24h}}{E_{out24h} + E_{perdas24h}}$$

## 2.6 Autotransformadores

São uma montagem especial de transformadores. Vantagens: maior tensão no lado de alta, maior corrente no lado de baixa, maior potência suportada. Desvantagem: ligação elétrica entre primário e secundário.

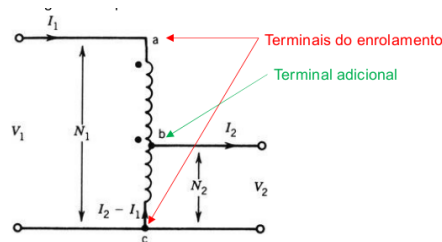


Figura 23: Autotransformador.

Relações de tensão e corrente:

$$\frac{V_1}{V_2} = a, \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{a}$$

## 2.7 Transformadores trifásicos

Tipos de associação:

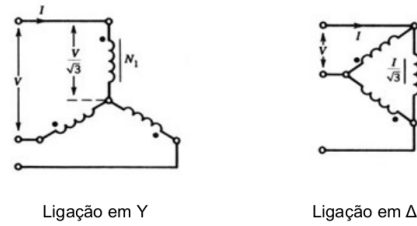


Figura 24: Associação Y e  $\Delta$ .

Tipos de banco de transformadores:

- $\Delta - \Delta$  - permite retirar um transformador para manutenção
- $\Delta - Y$  - vantajosa para transformadores elevadores
- $Y - \Delta$  - vantajosa para transformadores abaixadores
- $Y - Y$  - pouco usada. Não filtra harmônicas e necessita de neutro comum

Hipótese para análise: cargas balanceadas. Estratégia: estabelecer relações duas a duas entre terminais do primário / enrolamentos do primário / enrolamentos do secundário / terminais do secundário.

Convenções:

- Correntes entram no primário e saem no secundário.
- Convenção de receptor no primário e fonte no secundário.
- Terminais do primário em minúsculas ( $a, b, c$ ) e do secundário em maiúsculas ( $A, B, C$ ).

Relações de correntes e tensões:

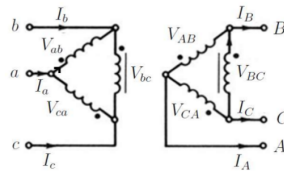


Figura 25: Relações  $\Delta - \Delta$ .

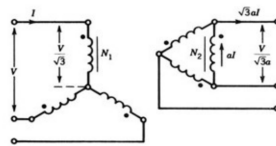


Figura 26: Relações Y -  $\Delta$ .

Mudança de fase:

- Ligação  $\Delta - \Delta$  e  $Y - Y$  não apresenta defasagem.
- Ligação  $Y - \Delta$  e  $\Delta - Y$  apresenta defasagem das grandezas.

Monofásico equivalente:

- Grandezas em Y.
- Cargas em  $\Delta$  substituídas pelo Y equivalente.

$$\frac{Z_{\Delta}}{Z_Y} = 3$$

- Tensão de fase e corrente de linha.

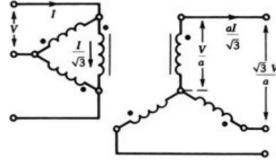


Figura 27: Relações  $\Delta - Y$ .

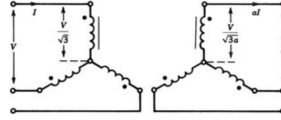


Figura 28: Relações  $Y - Y$ .

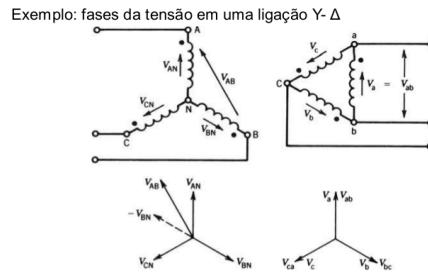


Figura 29: Exemplo de defasagem.

- Trafo  $Y - Y$  equivalente.

Ligação em  $V$ :

As potências são:

$$P_{ab} = V_{ab} I_a \cos(30^\circ + \phi)$$

$$P_{bc} = V_{bc} I_c \cos(30^\circ - \phi)$$

Mas usando  $|V_{ab}| = |V_{bc}| = V$  e  $|I_a| = |I_c| = I$ , concluímos que a potência fica limitada a

$$\frac{P_V}{P_\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$$

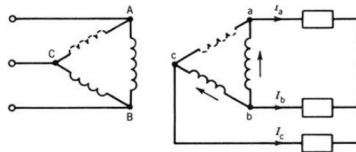


Figura 30: Esquema da ligação  $V$ .

## 2.8 Harmônicas em bancos de transformadores

- Efeitos da saturação deformam as formas de onda de tensão/corrente.
- As harmônicas de ordens múltiplas de 3 das três fases estão em fase.
- Caso 1 - SW1 fechada e SW2 aberta: há corrente de 3ª harmônica no neutro. Não há tensão resultante no  $\Delta$ .
- Caso 2 - SW1 e SW2 abertas: há componente de 3ª harmônica de tensão nos enrolamentos de fase, mas não nos de linha. *Ligação Y é filtro de 3ª harmônica de tensão.*
- Caso 3 - SW1 aberta e SW2 fechada: *Ligação  $\Delta$  é filtro de 3ª harmônica de corrente.*

Ligação  $Y - Y$  com terciário: Para altas tensões, pode ser desejável fazer uma ligação  $Y - Y$ . Usa-se um enrolamento terciário para que as correntes de 3ª harmônica fluam por ele. Ele também pode ser ligado a alguma carga.

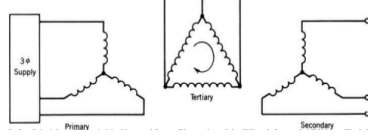


Figura 31: Ligação Y – Y com terciário.

## 2.9 Sistema PU

O sistema PU (por unidade) permite simplificar cálculos. Em transformadores, os valores físicos das grandezas são diferentes nos enrolamentos, mas em PU eles são iguais.

$$X_{fisico} = X_{PU} X_{base}$$

Escolhem-se como bases:

$$S_{base} = S_{nominal}$$

$$V_{1base} = V_{1nomnal}, V_{2base} = V_{2nomnal}$$

Como consequência:

$$I_{base} = \frac{S_{base}}{V_{base}}$$

$$Z_{base} = \frac{(V_{base})^2}{S_{base}}$$

Obs.: As perdas ôhmicas no cobre a plena carga em PU é numericamente igual à resistência equivalente em PU.

$$P_{CuPU_{FL}} = R_{eqPU}$$

## 3 Conversão eletromecânica de energia

### 3.1 Processo de conversão de energia

Conversão eletromecânica de energia é a conversão de energia elétrica em mecânica e vice-versa. Nesse processo há sempre três sistemas: elétrico, mecânico e magnético. Em todos eles há perda de energia (perdas ôhmicas  $Ri^2$ , perdas por atrito e perdas por histerese e corrente de Foucault), que é dissipada na forma de calor.

Vamos usar o princípio da conservação de energia e supor que não há transformação entre massa e energia. Podemos escrever a conservação de duas formas:

$$\text{Energia fornecida} = \text{Energia mecânica} + \text{Variação da energia no campo magnético} + \text{Perdas (calor)}$$

$\underbrace{dW_e}_{\text{Energia elétrica - perdas}}$	=	$\underbrace{dW_m}_{\text{Energia mecânica + perdas}}$	+	$\underbrace{dW_f}_{\text{Energia no campo magnético + perdas}}$
--	---	--	---	--

Conforme visto na seção 1.2, a energia em um material magnético pode ser dada por

$$W_f = V w_f, \text{ em que } w_f = \int_{B_1}^{B_2} H(B) dB$$

Essa energia pode ser calculada como uma área na curva  $B \times H$  do material.

Para um dispositivo magnético (desprezando energia mecânica e perdas):

$$W_f = W_e = \int_{t_1}^{t_2} e(t) i(t) dt$$

Da relação entre tensão e fluxo concatenado, temos  $d\lambda = edt$ , portanto:

$$W_f = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i d\lambda$$

Essa energia pode ser calculada como uma área na curva  $\lambda \times i$  específica do dispositivo estudado.

Considere o dispositivo eletromecânico a seguir, cuja parte móvel é mantida fixa.

Para ele, temos:

$$Ni = H_c l_c + H_g l_g \Rightarrow i(t) = \frac{H_c l_c + (B_g / \mu_0) l_g}{N}$$

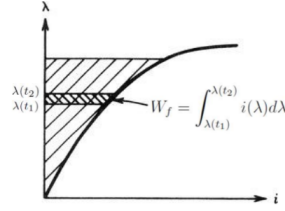


Figura 32: Energia calculada na curva  $\lambda \times i$ .

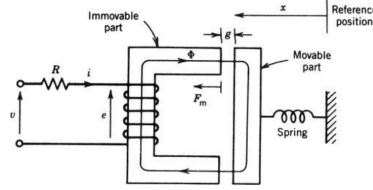


Figura 33: Dispositivo eletromecânico.

$$\lambda = N\phi = NBA$$

Substituindo na equação de energia, temos:

$$W_f = V_c \underbrace{\int_{B_1}^{B_2} H_c(t) dB}_{w_{fc}} + V_g \underbrace{\frac{B_g^2}{2\mu_0}}_{w_{fg}}$$

em que  $w_{fc}$  é a densidade volumétrica de energia no núcleo e  $w_{fg}$  no entreferro; e os volumes são tais que  $V_c = Al_c$  e  $V_g = Al_g$ <sup>8</sup>.

Se o material é linear,  $H_c = \frac{B_c}{\mu_c}$  e  $w_{fc} = \frac{B_c^2}{2\mu_c}$ .

A característica  $\lambda \times i$  de um dispositivo depende do tamanho do entreferro e da curva  $B \times H$ .

A energia  $W_f$  armazenada no campo magnético é dada pela área entre a curva e o eixo  $\lambda$ . A área entre a curva e o eixo  $i$  é definida como *coenergia*  $W'_f$  e não tem significado físico. Valem as relações:

$$W'_f = \int_{i_1}^{i_2} i d\lambda$$

$$W_f + W'_f = \lambda i$$

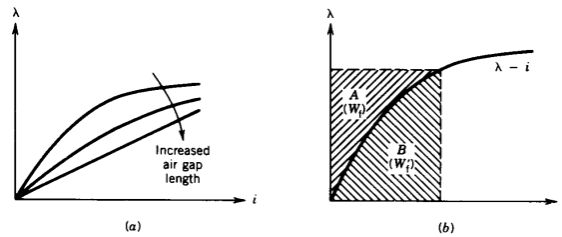


Figura 34: (a) Variação da curva com comprimento do entreferro (b) Representação da energia e coenergia.

### 3.2 Força mecânica em um dispositivo eletromagnético

Consideramos o mesmo dispositivo da Figura 33. Para calcular a força, basta avaliar a derivada da energia mecânica no espaço.

$$f_m = \frac{dW_m}{dx}$$

A curva no gráfico  $\lambda \times i$  descrita pela movimentação da parte móvel do dispositivo é  $apb$ :

1. No caminho  $ap$ , ocorre diminuição do entreferro, aumentando o fluxo concatenado. Isso induz tensão na bobina, de forma a diminuir a corrente no circuito elétrico.

<sup>8</sup>Em geral, a energia armazenada no entreferro é muito maior que a armazenada no núcleo ( $W_{fg} \gg W_{fc}$ ).



2. No trecho  $pb$ , não há mais movimentação do dispositivo. A taxa de variação do fluxo diminui, a tensão induzida diminui e a corrente no circuito aumenta.
3. No ponto  $b$ , não há tensão induzida na bobina e a corrente nela volta ao valor inicial.

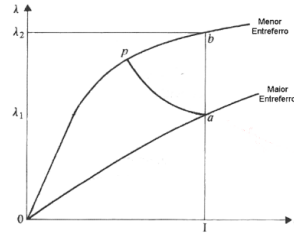


Figura 35: Curva descrita pela movimentação da parte móvel.

Conclusões:

- A variação de energia mecânica é igual à variação de coenergia durante a movimentação.

$$\Delta W_m = \Delta W'_f$$

- Para uma movimentação infinitesimal  $dx$ , a variação de coenergia é a mesma, independente da velocidade do movimento. Assim, temos duas maneiras de calcular a força:

$$f_m(x) = \frac{\partial W'_f}{\partial x} = -\frac{\partial W_f}{\partial x}$$

- A força magnética tende a aumentar a coenergia (diminuir a energia). Isso corresponde a diminuir a relutância do circuito magnético.

### 3.2.1 Dispositivos lineares

Em dispositivos lineares, pode-se definir uma indutância, que varia com a movimentação da parte móvel, isto é, com o comprimento do circuito magnético.

$$L = L(x) = \frac{\lambda}{i} = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$$

A energia no campo pode ser calculada como

$$W_f = \int_0^\Lambda i d\lambda' = \int_0^\Lambda \frac{\lambda}{L} d\lambda = \frac{\Lambda^2}{2L} = \frac{(Li)^2}{2L}$$

$$\therefore W_f = \frac{1}{2} L(x) i^2$$

Em um sistema linear, a variação da coenergia é numericamente igual à variação de energia magnética.

$$W'_f = W_f = \frac{1}{2} L(x) i^2$$

Para o cálculo da força, temos:

$$f_m = -\frac{\partial W_f}{\partial x} = \frac{\partial W'_f}{\partial x} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(x)}{dx}$$

*Relação entre força e densidade de fluxo no dispositivo a seguir:*

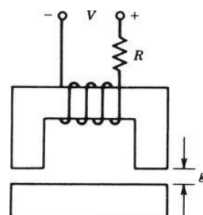


Figura 36: Dispositivo eletromecânico.

1. Considerando a relutância dos entreferros muito maior que no núcleo:

$$Ni = H_g l_g = \frac{B_g l_g}{\mu_0}$$

2. Energia armazenada no circuito:

$$W_f = V_g \int_0^{B_g} \frac{B}{\mu_0} dB = A_g l_g \frac{B_g^2}{2\mu_0}$$

3. Força mecânica:

$$f_m = -\frac{\partial W_f}{\partial g}$$

Nesse caso  $l_g = 2g$ , então  $f_m = -\frac{B_g^2}{2\mu_0} 2A_g$ .

*Pressão magnética*: razão entre força e área.

$$F_m = \frac{f_m}{A}$$

Efeito da alimentação CA:

A impedância do circuito elétrico terá um termo resistivo e outro indutivo  $Z = R + j\omega L$ . Assim, o valor da corrente será menor ( $i_{CC} > i_{CA}$ ). Portanto fluxo e campo magnéticos serão menores. *A energia e a força serão menores.*

### 3.3 Introdução às máquinas elétricas rotativas

Máquinas elétricas fazem a conversão eletromecânica de energia. Podem atuar como motor (elétrica  $\rightarrow$  mecânica) ou gerador (mecânica  $\rightarrow$  elétrica).

Princípios básicos de funcionamento:

1. Quando um condutor que carrega corrente elétrica se movimenta em um campo magnético, surge uma força sobre o condutor.

$$\mathbf{F} = i(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

2. Quando um condutor se move em campo magnético com uma velocidade, uma tensão é induzida no condutor.

$$e = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}$$

Partes das máquinas elétricas rotativas:

- Estator - parte fixa
- Rotor - parte livre para girar
- Enrolamento de campo
- Enrolamento de armadura
- Entreferro
- Polos

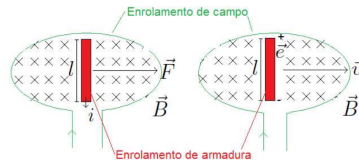


Figura 37: Enrolamentos de uma máquina elétrica rotativa.

Campo girante:

- É um campo magnético que gira.
- Fundamental para máquinas CA (de indução, síncronas, de relutância variável).
- Pode ser obtido com um ímã permanente que gira.

- Pode ser obtido com enrolamento trifásico. Dispõem-se as bobinas geometricamente afastadas de  $120^\circ$ . Aplicam-se tensões defasadas de  $120^\circ$  elétricos (as fases podem estar em  $\Delta$  ou  $Y$ ). A contribuição do fluxo magnético de cada bobina faz surgir um campo resultante que gira no tempo na mesma frequência de alimentação das bobinas.

Velocidade  $n_s$  (RPM) em uma máquina de  $p$  polos alimentada com frequência  $f$ :

$$n_s = \frac{120f}{p}$$

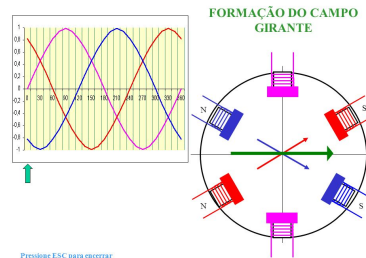


Figura 38: Campo girante por alimentação trifásica.

### Máquinas CC:

- Enrolamento de campo no estator e de armadura no rotor.
- Armadura e campo CC (visto dos terminais).
- Aplicações: controle de velocidade, ferramentas industriais, alimentação por bateria, servomotores, sensores de posicionamento.
- Anel comutador e escovas.

### Máquinas de indução:

- Enrolamento de armadura e campo no estator.
- Todos enrolamentos CA.
- Aplicações: eletrodomésticos, geradores eólicos, bombas, compressores, ventiladores etc.
- Estator formado por: carcaça, núcleo e enrolamento.
- Tipos de estator: gaiola de esquilo e rotor bobinado.

### Máquinas síncrona:

- Enrolamento de campo no rotor e de armadura no estator.
- Armadura CA e campo CC.
- Aplicações: geradores de hidrelétricas e termelétricas, compensadores síncronos, motores, alternadores de automóveis etc.
- Estator formado por: carcaça, núcleo e enrolamento.
- Dois tipos de rotor: polos lisos (máquinas de alta velocidade e pequeno diâmetro) e polos salientes (máquinas de baixa velocidade e grande diâmetro).

## 3.4 Energia e conjugado em máquinas elétricas rotativas

O estudo de máquinas rotativas é análogo ao de máquinas translacionais, fazendo analogia entre grandezas lineares e angulares. Estudaremos uma máquina de polos salientes elementar.

Cálculo da energia e conjugado:

1. Considerando o rotor fixo,  $W_m = 0$  e a energia magnética depende da energia elétrica no rotor e no estator:

$$dW_f = e_s i_s dt + e_r i_r dt = i_s d\lambda_s + i_r d\lambda_r$$

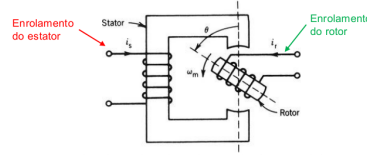


Figura 39: Máquina elétrica rotativa.

2. Supondo o sistema linear,  $\lambda = Li$  e:

$$\begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{sr} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$

A indutância mútua é simétrica:  $L_{rs} = L_{sr}$ . Substituindo na expressão para energia:

$$dW_f = L_{ss}i_s di_s + L_{rr}i_r di_r + L_{sr}d(i_s i_r)$$

$$W_f = \int dW_f = \frac{L_{ss}i_s^2}{2} + \frac{L_{rr}i_r^2}{2} + L_{sr}i_s i_r$$

3. O torque pode ser calculado de maneira análoga ao caso translacional:

$$T = \frac{\partial W'_f}{\partial \theta} = \frac{\partial W_f}{\partial \theta} = \underbrace{\frac{i_s^2}{2} \frac{dL_{ss}}{d\theta} + \frac{i_r^2}{2} \frac{dL_{rr}}{d\theta}}_{\text{conjugado de relutância}} + \underbrace{i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\theta}}_{\text{devido à variação de } L_{sr}}$$

### 3.4.1 Máquinas de rotor cilíndrico

Vamos estudar uma máquina monofásica de dois polos e rotor cilíndrico.

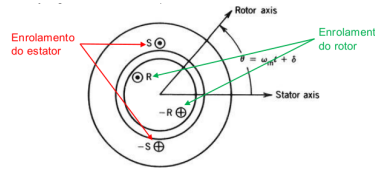


Figura 40: Máquina de rotor cilíndrico.

Condições:

- Não há variação de relutância do caminho magnético com a rotação do rotor.
- As indutâncias próprias se mantêm constante, logo elas não geram torque.
- A indutância mútua varia com a posição do rotor.

O torque produzido é

$$T = i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\theta}$$

Sejam  $L_{sr} = M \cos \theta^9$ ,  $i_s = I_{sm} \cos(\omega_s t)$ ,  $i_r = I_{rm} \cos(\omega_r t + \alpha)$  e  $\theta = \omega_m t + \delta^{10}$ . Temos:

$$T = -\frac{I_{sm} I_{rm} M}{4} \{ \sin[(\omega_m + \omega_s + \omega_r)t + \alpha + \delta] + \sin[(\omega_m - \omega_s - \omega_r)t - \alpha + \delta] + \sin[(\omega_m + \omega_s - \omega_r)t - \alpha + \delta] + \sin[(\omega_m - \omega_s + \omega_r)t + \alpha + \delta] \}$$

O valor médio do torque será zero, a não ser que o coeficiente de  $t$  seja não-nulo em algum termo. Portanto, haverá torque se

$$\omega_m = \pm(\omega_s \pm \omega_r).$$

*Caso especial: máquina síncrona monofásica de polos lisos*

$$\omega_r = 0, \omega_m = \omega_s, \alpha = 0$$

Os valores instantâneo e médio do torque são:

$$T = -\frac{I_{sm} I_{rm} M}{2} [\sin(2\omega_s t + \delta) + \sin(\delta)]$$

<sup>9</sup> $\theta$  é o ângulo entre estator e rotor.

<sup>10</sup> $\omega_m$  é a velocidade angular de rotação do rotor.

$$T_{avg} = -\frac{I_{sm}I_{rm}M}{2} \sin(\delta)$$

Para  $\omega_m = 0$ , não há torque médio, portanto a máquina não desenvolve conjugado de partida. Para máquina de uma fase, o torque é pulsante, o que pode causar vibração, variação de velocidade, ruído etc. Especialmente em máquinas maiores, isso é evitado usando várias fases.

*Caso especial: máquina de indução monofásica*<sup>11</sup>

$$\omega_m = \omega_s - \omega_r$$

Os torques instantâneo e médio são:

$$T = -\frac{I_{sm}I_{rm}M}{4} [\sin(2\omega_s t + \alpha + \delta) + \sin(-2\omega_r t - \alpha + \delta) + \sin(2\omega_s t - \alpha + \delta) + \sin(\alpha + \delta)]$$

$$T_{avg} = -\frac{I_{sm}I_{rm}M}{4} \sin(\alpha + \delta)$$

Para  $\omega_m = 0$ , não há torque médio, logo não há conjugado de partida.

## Referências

- [1] SEN, P. C. *Principles of Electric Machines and Power Electronics*. 2. ed. rev. New York, NY: John Wiley & Sons, 1997.

---

<sup>11</sup>A máquina é assíncrona.