

ET720 - Sistemas de Energia Elétrica I

Henrique Koji Miyamoto

1 Introdução aos sistemas de energia elétrica

2 Cálculo de fluxo de carga

Os componentes de um sistema de potência são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Componentes de um sistema de potência.

Componente	Função	Representação
Geração	fonte de suprimento de energia elétrica	fonte de tensão CA
Carga	consomem energia	resistência e reatância em derivação
Transmissão	condutores que levam energia da geração às cargas	resistência e reatância em série

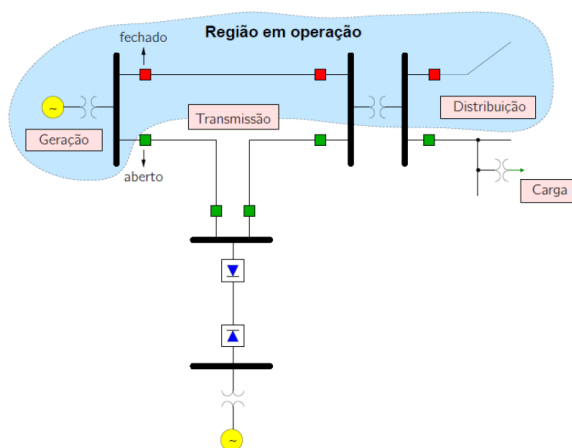


Figura 1: Sistema de potência.

Requisitos para operação em regime de um sistema trifásico:

- A potência de geração deve suprir o consumo das cargas e de perdas (ativa e reativa).
- Os módulos de tensão nas barras deve permanecer em torno do nominal (1 pu).
- Os geradores devem operar dentro dos limites de potência ativa e reativa. Linhas de transmissão e transformadores devem operar sem sobrecargas.

É desejável que as fases estejam em equilíbrio, i.e., $\|\hat{I}_a\| \approx \|\hat{I}_b\| \approx \|\hat{I}_c\|$ e $\|\hat{V}_a\| \approx \|\hat{V}_b\| \approx \|\hat{V}_c\|$, defasados de 120° . Isso ocorre principalmente em sistemas de alta e ultra-alta tensão na transmissão. Nesse caso, pode-se usar a representação monofásica e o diagrama unifilar. Mas, em redes de distribuição, pode ser necessário usar representação trifásica.

Revisão. Convenções para representações monofásica e unifilar.

1. Circuito monofásico:

- Geradores e cargas **em Y** (ou equivalente).
- Usam-se **tensões de fase e correntes de linha**.
- Bancos transformadores são representados por **Y-Y** (ou equivalente).

2. Diagrama unifilar:

- Indicam-se *tensões de linha e potências trifásicas*¹.
- *Correntes de linha e impedâncias Y (ou equivalente)*.

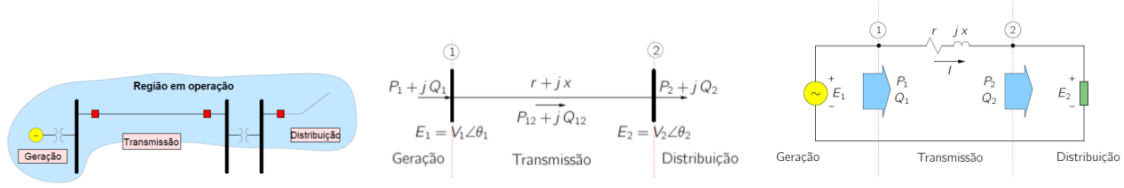


Figura 2: Representações unifilar e monofásico equivalente de um sistema de potência.

Revisão. Sistema P.U. (por unidade):

$$S_{base} = S_{3\phi} = 3V_f I_f, \quad V_{base} = V_l, \quad I_{base} = \frac{S_{base}}{\sqrt{3}V_{base}}, \quad Z_{base} = \frac{V_{base}^2}{S_{base}}$$

2.1 Formulação básica

O problema de *fluxo de carga* consiste em obter as condições de operação de uma rede elétrica em função de sua topologia e dos níveis de demanda e geração de potências. Faremos análise apenas estática, desconsiderando transitórios². Dessa maneira, a rede é representada por um conjunto de equações (e inequações) algébricas.

O sistema de energia é representado por circuitos equivalentes. Há dois tipos de componentes (Tabela 2). A geração e a distribuição são modeladas como injeções de potência no barramento. A linha de transmissão é modelada por um circuito RL em série.

Tabela 2: Componentes da rede elétrica.

Geradores (G) Cargas (L) Reatores <i>shunt</i> (RSh) Capacitores <i>shunt</i> (CSh)	Ligados entre um nó qualquer a o nó terra
Linhas de transmissão (LT) Transformadores (TR)	Ligados entre dois nós quaisquer

As equações do sistema são obtidas aplicando o princípio da conservação de energia em cada nó e a lei de Ohm nos componentes. A resolução do problema típico de sistemas de energia requer o uso de um procedimento algorítmico, pois ele se torna rapidamente difícil para redes maiores³.

Barras Os nós do sistema são representados por barras, caracterizadas por duas grandezas complexas: *tensão* ($E_k = V_k \angle \theta_k$) e *potência* ($S_k = P_k + jQ_k$)⁴. Podemos classificar as barras com relação às variáveis que são conhecidas/desconhecidas em cada uma delas (Tabela 3).

Tabela 3: Tipos de barras.

Tipo	Dados	Incógnitas	Características
PQ	P_k, Q_k	V_k, θ_k	Barras de carga
PV	P_k, V_k	Q_k, θ_k	Barras de geração
Vθ (referência ou <i>slack</i>)	V_k, θ_k	P_k, Q_k	Barras de geração

As barras de geração do tipo PV incluem condensadores síncronos. A barra de referência tem dupla função: (i) fornecer a referência angular do sistema e (ii) fechar o balanço de potência, levando em conta as perdas de transmissão não conhecidas no início do problema (por isso, costuma-se escolhê-la como uma unidade geradora de grande capacidade).

Cargas As cargas são modeladas como injeções de potências nas barras⁵. A convenção de sinais será a seguinte:

- $P_k > 0$ - potência entrando - geração
- $P_k < 0$ - potência saindo - consumo

¹Não obstante, nos cálculos, utilizam-se *tensões de fase e potências monofásicas*.

²Consideramos que a variação temporal é suficientemente lenta para que possamos desconsiderar o efeito transitório.

³Algumas ideias para resolvê-lo são: resolução analítica e por tentativa e erro.

⁴A potência líquida representa a diferença entre geração e consumo: $S_k = S_k^G - S_k^C$.

⁵Trataremos apenas de potências constantes

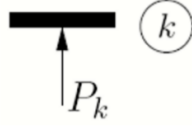


Figura 3: Representação de injeção de potência na barra k .

Linhas de transmissão Modelamos as linhas de transmissão com o modelo π , em que r é a resistência série, x é a reatância série e b é o carregamento total *charging* (o dobro da admitância *shunt*).

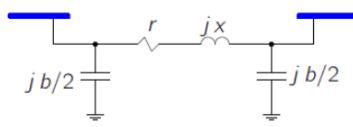


Figura 4: Modelo π para linhas de transmissão.

2.2 Formulação nodal

Considere a rede da Figura 2.2, em que foi aplicada a definição de potências e correntes líquidas e o modelo π equivalente para linhas de transmissão.

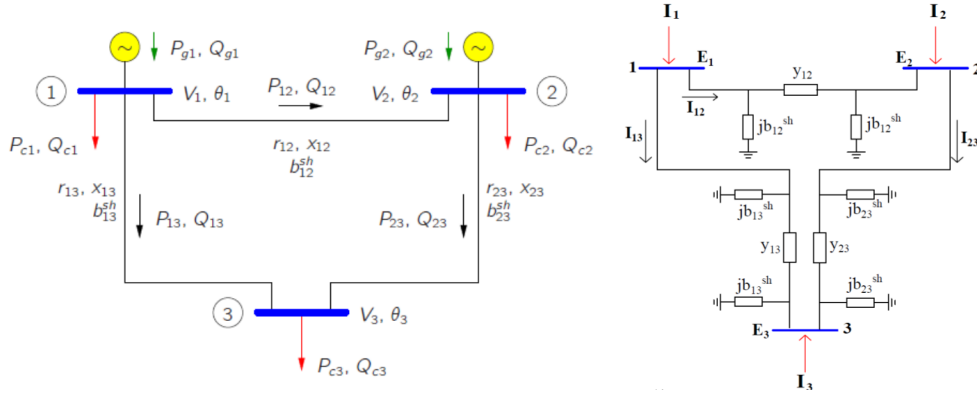


Figura 5: Exemplo de rede elétrica.

Aplicando a lei das correntes de Kirchhoff em todos os nós, obtemos, em notação matricial:

$$I = YE$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{12} + y_{13} + jb_{12}^{sh} + jb_{13}^{sh} & -y_{12} & -y_{13} \\ -y_{12} & y_{12} + y_{23} + jb_{12}^{sh} + jb_{23}^{sh} & -y_{23} \\ -y_{13} & -y_{23} & y_{13} + y_{23} + jb_{13}^{sh} + jb_{23}^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

onde $I_{n \times 1}$ é o vetor de injeções nodais de corrente, $E_{n \times 1}$ é o vetor de tensões nodais, $Y_{n \times n}$ é a matriz de admitância nodal e n é o número de barras na rede.

A matriz $Y_{n \times n}$ é formada da seguinte forma:

- Elementos fora da diagonal principal: $Y_{km} = -y_{km}$
- Elementos da diagonal principal: $Y_{kk} = \sum_{m \in \Omega_k} (y_{km} + jb_{km}^{sh})$ ⁶

A matriz de admitância pode ser separada em matriz condutância e matriz susceptância:

$$Y = \Re\{Y\} + j\Im\{Y\} = G + jB$$

A corrente em cada barra pode ser calculada como

$$I_k = \sum_{m \in K} Y_{km} E_m = Y_{kk} E_k + \sum_{m \in \Omega_k} Y_{km} E_m$$
⁷

⁶ Ω_k é o conjunto das barras conectadas diretamente à barra k .

⁷ K é o conjunto formado pela barra k e suas vizinhas.

Para deduzir as equações de potência, substituímos a equação para I_k acima em $S_k = E_k I_k^*$, obtendo:

$$P_k = V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km})$$

$$Q_k = V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km})$$

onde $\theta_{km} := \theta_k - \theta_m = \arg(E_k) - \arg(E_m)$ e $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$.

Comentário sobre a resolubilidade do problema Para as barras PQ e PV, é possível escrever as equações de P_k e, para as barras PQ, é possível escrever as equações de Q_k . Portanto, temos $N_{PQ} + N_{PV}$ equações de P_k e N_{PQ} equações de Q_k , totalizando $2N_{PQ} + N_{PV}$ equações.

As incógnitas são V_k e θ_k nas barras PQ e θ_k nas barras PV. No total, temos $2N_{PQ} + N_{PV}$ incógnitas, que é o mesmo número de equações. Portanto o sistema é possível e determinado.

Uma vez determinado o valor das incógnitas, pode-se calcular P_k, Q_k na barra de referência e Q_k nas barras PV.

Ideia da resolução A ideia da resolução é:

1. De alguma maneira, determinar os fasores de tensão.
2. A partir deles, calcular as potências P_k nas barras PQ e PV e Q_k nas barras PQ.
3. Comparar tais valores calculados (P_k^{calc}, Q_k^{calc}) com os especificados pelo problema (P_k^{esp}, Q_k^{esp}).

Para fazer a comparação, calculam-se $\Delta P_k, \Delta Q_k$, os erros de potência, resíduos de potência ou *mismatches* de potência.

$$\Delta P_k = P_k^{esp} - P_k^{calc}$$

$$\Delta Q_k = Q_k^{esp} - Q_k^{calc}$$

Idealmente, o problema está solucionado quando esses erros se anulam. Na prática, vamos aceitar uma solução que tenha ambos os erros abaixo de certa tolerância ϵ .

Método de Newton É o método usado para a resolução do problema de fluxo de carga. Apresentamos o algoritmo para o caso multidimensional, em que o objetivo é encontrar a solução para $g(x) = 0$, onde $g(x) = [g_1(x) \dots g_n(x)]^T$ é o vetor de *mismatches* e $x = [x_1 \dots x_n]^T$ é o vetor de incógnitas.

Algoritmo 1: Algoritmo do método de Newton para caso multidimensional.

Entrada: Ponto inicial x_0 e sistema de equações $g(x) = 0$

Saída: Solução x

```

1 início
2   Inicializar o contador de iterações  $v \leftarrow 0$  e fazer  $x^{(0)} \leftarrow x_0$ .
3   Calcular o valor de  $g(x^{(v)})$ .
4   Testar a convergência:
5   se  $|g_i(x^{(v)})| \leq \epsilon, \forall i = 1, 2, \dots, n$  então
6      $x \leftarrow x^{(v)}$  é a solução procurada com tolerância  $\pm\epsilon$ .
7     return  $x$ 
8   fim
9   Calcular a matriz jacobiana  $J(x^{(v)}) = \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} g_i \right]$ .
10  Calcular novo ponto  $\Delta x^{(v)} \leftarrow J^{-1} g(x^{(v)})$ ,  $x^{(v+1)} \leftarrow x^{(v)} + \Delta x^{(v)}$ 
11  Incrementar contador  $v \leftarrow v + 1$  e voltar para linha 3.
12 fim
```

No problema de fluxo de carga:

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ V \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{esp} - P^{calc} \\ Q^{esp} - Q^{calc} \end{bmatrix}, \quad J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta P & \frac{\partial}{\partial V} \Delta P \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta Q & \frac{\partial}{\partial V} \Delta Q \end{bmatrix}$$

Vantagens e desvantagens do método de Newton:

- É mais confiável (converge em casos que outros métodos divergem).
- O número de iterações necessárias para convergência independe da dimensão.
- Requer mais espaço de armazenamento (matriz jacobiana).
- O tempo computacional por iteração é maior (inversão e multiplicação com matriz jacobiana).
- Tem convergência rápida (quadrática).
- Não é sensível à escolha da barra de referência, mas o é à escolha do ponto inicial.

Cálculo da matriz jacobiana Como o cálculo dos *mismatches* envolve um termo constante (especificado), podemos simplificar a matriz jacobiana. Por exemplo:

$$\Delta P = P^{esp} - P^{calc}(V, \theta) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta P = -\frac{\partial}{\partial \theta} P^{calc}$$

É comum representar a matriz jacobiana em termos de submatrizes:

$$J(x) = - \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix}, \text{ onde } H = \frac{\partial P}{\partial \theta}, N = \frac{\partial P}{\partial V}, M = \frac{\partial Q}{\partial \theta}, L = \frac{\partial Q}{\partial V}$$

Assim:

$$g(x) = -J(x)\Delta x \Rightarrow \begin{bmatrix} P^{esp} - P^{calc} \\ Q^{esp} - Q^{calc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix}$$

As componentes das submatrizes são:

$$\begin{aligned} H & \begin{cases} H_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial \theta_m} = V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ H_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial \theta_k} = -B_{kk} V_k^2 - Q_k \end{cases} \\ N & \begin{cases} N_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \\ N_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial V_k} = V_k^{-1} (P_k + G_{kk} V_k^2) \end{cases} \\ M & \begin{cases} M_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_m} = -V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \\ M_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_k} = -G_{kk} V_k^2 + P_k \end{cases} \\ L & \begin{cases} L_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = V_k^{-1} (Q_k - B_{kk} V_k^2) \end{cases} \end{aligned}$$

Perdas O fluxo de potência na linha que liga a barra k a m é dado por

$$S_{km}^* = E_k^* I_{km}, \quad I_{km} = y_{km}(E_k - E_m) + j b_{km}^{sh} E_k$$

As perdas de potência na linha km são

$$\begin{aligned} P_{perdas} &= P_{km} + P_{mk} = g_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}) \\ &= g_{km}|E_k - E_m|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{perdas} &= Q_{km} + Q_{mk} = -b_{km}^{sh}(V_k^2 + V_m^2) - 2b_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}) \\ &= -b_{km}^{sh}(V_k^2 + V_m^2) - b_{km}|E_k - E_m|^2 \end{aligned}$$

Referências

- [1] MONTICELLI, Alcir e GARCIA, Arioaldo. *Introdução a sistemas de energia elétrica*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2003.

Algoritmo 2: Algoritmo do método de Newton para o problema de fluxo de potência.

Entrada: Ponto inicial (θ_k^0, V_k^0) e sistema de equações P_k, Q_k

Saída: Solução (θ_k, V_k)

1 **início**

2 Inicializar o contador de iterações $v \leftarrow 0$ e fazer $\theta_k^{(v)} \leftarrow \theta_k^0$ e $V_k^{(v)} \leftarrow V_k^0$

3 Calcular $P_k(\theta_k^{(v)}, V_k^{(v)})$ e $Q_k(\theta_k^{(v)}, V_k^{(v)})$ e os *mismatches* $\Delta P_k^{(v)}$ e $\Delta Q_k^{(v)}$.

4 Testar a convergência:

5 **se** $\max\{|\Delta P_k^{(v)}|\} \leq \epsilon$ e $\max\{|\Delta Q_k^{(v)}|\} \leq \epsilon$ **então**

6 $(\theta_k, V_k) \leftarrow (\theta_k^{(v)}, V_k^{(v)})$ é a solução procurada com tolerância $\pm\epsilon$.

7 Calcular P_k e Q_k na barra de referência e Q_k nas barras PV.

8 **fim**

9 Calcular a matriz jacobiana $J(\theta^{(v)}, V^{(v)}) = \begin{bmatrix} H(\theta^{(v)}, V^{(v)}) & N(\theta^{(v)}, V^{(v)}) \\ M(\theta^{(v)}, V^{(v)}) & L(\theta^{(v)}, V^{(v)}) \end{bmatrix}$

10 Calcular novos valores $\begin{cases} \theta^{(v+1)} = \theta^{(v)} + \Delta\theta^{(v)} \\ V^{(v+1)} = V^{(v)} + \Delta V^{(v)} \end{cases}$, onde $\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}$

11 Incrementar contador $v \leftarrow v + 1$ e voltar para linha 3.

12 **fim**
