

# EE881 - Princípios de Comunicações I

Henrique Koji Miyamoto

## 1 Introdução e objetivos

### 1.1 A imagem geral através do modelo OSI

O modelo OSI (*Open System Interconnection*) em camadas descreve uma estrutura para a definição de protocolos de fluxos de dados. As modernas redes de comunicação usam esse modelo para lidar com desafios como: roteamento, controle de tráfego, confiabilidade, privacidade e autenticidade. Além disso, a divisão em camadas facilita a tarefa de projetar e desenvolver infraestruturas de comunicação.

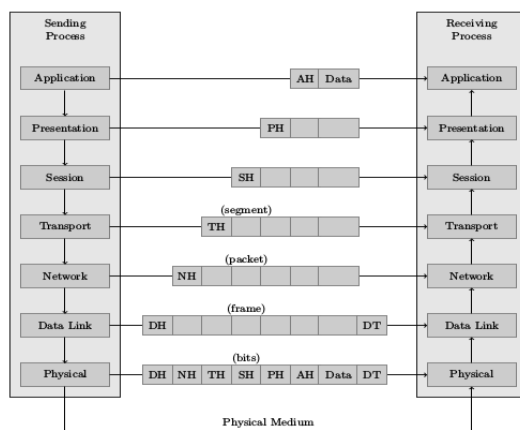


Figura 1: Modelo OSI em camadas.

As camadas do modelo OSI:

1. Camada de aplicação: reservada para programas que implementam protocolos relacionados à aplicação. Os dados são precedidos por um cabeçalho de aplicação (*application header* - AH).
2. Camada de apresentação: lida com encriptação, compressão e tradução de/para uma linguagem universal. O protocolo de representação é implementado pelo cabeçalho de apresentação (PH).
3. Camada de sessão: estabelece, mantém e encerra a comunicação entre dispositivos físicos. Também gerencia direitos de acesso. Tem protocolo implementado pelo cabeçalho de sessão (SH).
4. Camada de transporte: garante que a ligação (*link*) seja confiável de ponta a ponta. Verifica se a comunicação não tem erros através de bits de paridade e, se não, solicita retransmissão. Realiza controle de tráfego se a rede está congestionada ou se o receptor não consegue absorver dados suficientemente rápido. O cabeçalho de transporte (TH) seguido dos dados vindos da camada de sessão formam um *segmento*.
5. Camada de rede: provê o direcionamento (roteamento) dos dados. Essa camada e as seguintes atuam nos processos entre nós intermediários da rede. O cabeçalho de rede seguido do segmento (da camada de transporte) formam um *pacote*.
6. Camada de enlace de dados: adiciona um cabeçalho e uma rabeira em cada pacote (da camada de rede), formando um quadro (*frame*). Alguns dos bits adicionais são verificadores de paridade para detectar erros na ligação entre nós. Caso haja erros, essa camada pode solicitar retransmissão de dados ou descartar todo o quadro.
7. Camada física: cria um “tubo de bits” mais ou menos confiável a partir do canal físico entre dois nós. Para isso, usa um par transmissor/receptor (*modem*) em cada lado do canal físico.

## 1.2 O t3pico desse texto e alguma perspectiva hist3rica

Esse texto trata da teoria que governa o projeto da camada f3sica, a chamada teoria da comunica33o<sup>1</sup>.

Geralmente, a comunica33o por um canal se d3 com a escolha de  $n$  par3metros que descrevem o sinal portador com respeito a uma base ortonormal. Nyquist (1924) percebeu que um sinal confinado a um intervalo de tempo de dura33o  $T$  e a um intervalo de frequ3ncia de largura  $B$  pode ter  $n$  pr3ximo a  $\eta BT$ , em que  $\eta$  3 um n3mero positivo que depende da dura33o e da largura de banda. Um bom valor 3  $\eta = 2$ . O resultado de Nyquist implica que pode-se encaixar  $2BT$  pulsos n3o interferentes em um intervalo de tempo  $T$  se a largura de banda n3o exceder  $B$ .

Hartley (1928) introduziu duas limita33es pr3ticas: os s3mbolos n3o podem assumir valores arbitrariamente grandes em  $\mathbb{R}$  e o receptor n3o pode estimar um s3mbolo com precis3o infinita. Isso quer dizer que os s3mbolos devem tomar valores em um alfabeto discreto  $\{a_0, \dots, a_{m-1}\} \subset [-A, A]$  de tal forma que  $|a_i - a_{j \neq i}| \geq 2\Delta$ , em que  $\pm\Delta$  3 a precis3o do receptor para determinar a amplitude do pulso. Isso implica que o tamanho m3ximo do alfabeto 3  $m = 1 + \frac{A}{\Delta}$ .

Existe  $m^n$  seq3ncias distintas de tamanho  $n$  formadas com s3mbolos de um alfabeto  $m$ . Se quisermos comunicar uma seq3ncia de  $k$  bits, existem  $2^k$  tais seq3ncias de forma que  $2^k \leq m^n$ .

Johnson (1926) percebeu que os condutores s3o afetados por ru3do. Shannon (1948) provou que o ru3do pode limitar a taxa de bits transmitidos por segundo com confian3a. Mas se a comunica33o for feita abaixo desse limite, a probabilidade de erro pode se tornar t3o pequena quanto se queira. Tal limite 3 chamado capacidade do canal. Nesse caso,  $\frac{k}{T} \leq B \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_0 B} \right)$ , em que  $P$  3 a pot3ncia do sinal e  $N_0/2$  3 a densidade de pot3ncia espectral do ru3do.

Shannon tamb3m lan3ou quest3es e respostas sobre fontes de transmiss3o. Sobre isso, devemos saber que:

- A ess3ncia de uma fonte 3 a aleatoriedade: uma fonte 3 modelada como uma vari3vel aleat3ria, pois o receptor n3o sabe de antem3o qual a mensagem transmitida. Trataremos de fontes digitais.
- Para cada fonte, existe um codificador que converte a sa3da da fonte no menor vetor de bits (em m3dia) e um decodificador que reconstr3i o sinal da fonte a partir da sa3da do decodificador.

A Teoria da Informa33o se preocupa em distinguir o que 3 poss3vel de ser feito do que n3o 3, independente da complexidade, e levou 3 cria33o da Teoria de C3digos, que trata de modos de implementa33o daquilo que a Teoria da Informa33o mostrou ser alcan33vel.

## 1.3 Formula33o do problema e pr3via

Esse estudo 3 voltado para os *aspectos de sistema da comunica33o digital ponto a ponto*, em que:

- *Aspectos de sistema* significa uso do n3vel de diagrama de blocos (em vez de entrar em detalhes eletr3nicos).
- *Digital* significa a mensagem vem de um conjunto finito de possibilidades.
- *Ponto a ponto* 3 o bloco fundamental de todos os sistemas de comunica33o.

Um *canal gaussiano limitado em banda* tem o seguinte funcionamento:

1. A fonte escolhe uma mensagem  $i$ , que 3 a realiza33o de uma vari3vel aleat3ria  $H \in \mathcal{H} = \{0, 1, \dots, m-1\}$ .
2. O transmissor mapeia a mensagem  $i$  em um sinal  $w_i(t) \in \mathcal{W}$ , em que  $\#\mathcal{W} = \#\mathcal{H}$ .
3. O canal filtra o sinal e adiciona um ru3do gaussiano  $N(t)$ .
4. O receptor tenta recuperar a mensagem com base na sa3da do canal  $R(t)$ .  $\hat{H}$  3 o palpite do receptor para  $H$ .

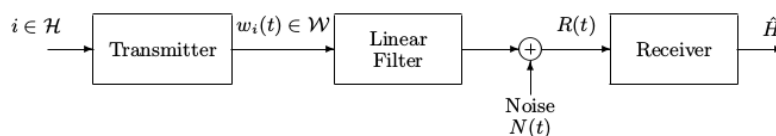


Figura 2: Canal gaussiano limitado em banda.

Podemos dividir o par transmissor/receptor para um tal canal em m3dulos, como apresentado na Figura 3.

<sup>1</sup>Apesar de as outras camadas tamb3m participarem do processo de comunica33o, este nome permaneceu por motivos hist3ricos.

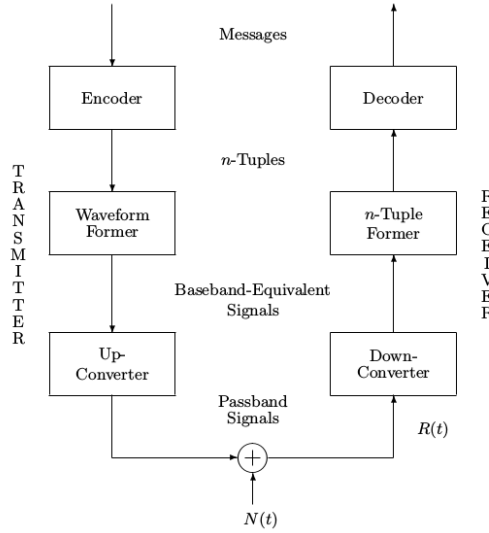


Figura 3: Divisão do par receptor/transmissor em módulos.

## 1.4 Comunicação analógica *versus* digital

Falamos de comunicação *digital* quando o emissor envia um sinal de um conjunto finito de possibilidades. Usam-se sinais apropriados para cada canal disponível. Por outro lado, a comunicação é *analógica* quando o emissor envia um sinal de um conjunto contínuo de possibilidades. O sinal da fonte é usado para variar um parâmetro do sinal portador.

A diferença básica é que, na comunicação digital, o receptor tem a chance de construir exatamente o sinal enviado, pois há um conjunto finito de possibilidades. Já na comunicação analógica, como o conjunto de sinais possíveis é contínuo, não há chance de o receptor reconstruir o exato sinal da fonte.

É possível transformar uma fonte de sinais contínuos no tempo em uma fonte de sinais discretos, de forma a transformar uma comunicação analógica em digital.

## 1.5 Notação

Uma função genérica é representada por  $g : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B}$ , em que  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  é o domínio e  $\mathcal{B}$  o codomínio. Tipicamente, essas funções serão funções do tempo  $g(t)$  ou da frequência  $g(f)$ .

A transformada de Fourier de  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é denotada por

$$g_{\mathcal{F}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

em que  $j = \sqrt{-1}$ .

Escrevemos  $\mathbb{1}\{S\}$  como indicador da sentença  $S$ . O indicador terá valor 1 se  $S$  for verdadeira e 0 se for falsa.

A convolução entre  $u(t)$  e  $v(t)$  será denotada  $(u \star v)(t)$  ou  $u(t) \star v(t)$

## 1.6 Fontes e codificação da fonte

É comum assumir que a mensagem a ser comunicada é a realização de uma sequência de símbolos binários independentes e identicamente distribuídos.

# 2 Projeto do receptor para observações no tempo discreto: primeira camada

## 2.1 Introdução

O sistema de comunicação considerado nessa seção é composto pelas seguintes partes:

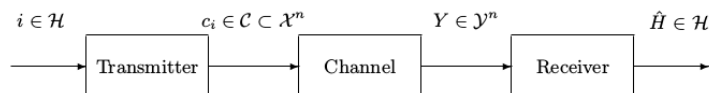


Figura 4: Sistema de comunicação considerado nessa análise.

- A **fonte** produz mensagens a serem transmitidas. É modelada como uma variável aleatória  $H$  que assume valores no conjunto de índices  $\mathcal{H} = \{0, 1, \dots, m-1\}$ , cada um com probabilidade  $P_H(i)$ .
- O **canal** é descrito por um alfabeto de entrada  $\mathcal{X}$ , um alfabeto de saída  $\mathcal{Y}$  (assumiremos  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ ) e uma descrição estatística da saída dada a entrada (verossimilhança). Se  $Y \in \mathcal{Y}$  é uma variável aleatória discreta, descrevemos a distribuição de probabilidade  $P_{Y|X}(\cdot|x)$ ; se é uma variável aleatória contínua, descrevemos a função densidade de probabilidade  $f_{Y|X}(\cdot|x)^2$ .
- O **transmissor** é modelado como uma aplicação do conjunto de mensagens  $\mathcal{H} = \{0, \dots, m-1\}$  no conjunto de sinais (constelação de sinais)  $\mathcal{C} = \{c_0, \dots, c_{m-1}\}$ , em que  $c_i \in \mathcal{X}^n$  para algum  $n$ .
- A tarefa do **receptor** é “adivinhar” a realização da hipótese  $H$  a partir da realização da saída do canal. O palpite do receptor é denotado  $\hat{i}$  e a variável aleatória associada a esse processo aleatório é  $\hat{H} \in \mathcal{H}$ .

## 2.2 Teste de hipóteses

*Teste de hipóteses* é o problema de “adivinhar” a realização da variável aleatória  $H \in \mathcal{H}$  com base na realização da variável aleatória  $Y$  (observação). É o mesmo que *decodificação* ou *tomada de decisão*. Em comunicações, a hipótese  $H$  é a mensagem transmitida e a observação  $Y$  é a saída do canal.

**Objetivo:** Queremos estabelecer uma estratégia de decisão que maximiza a probabilidade de acerto  $P_c = \Pr\{\hat{H} = H\}$ , ou, equivalentemente, minimiza a probabilidade de erro  $P_e = \Pr\{\hat{H} \neq H\} = 1 - P_c$ .

Da regra de Bayes, temos

$$P_{H|Y}(i|y) = \frac{P_H(i)f_{Y|H}(y|i)}{f_Y(y)}$$

em que  $f_Y(y) = \sum_i P_H(i)f_{Y|H}(y|i)$ . Ao observar  $Y = y$ , a probabilidade de  $H = i$  vai do *prior* (probabilidade *a priori*)  $P_H(i)$  para o *posterior* (probabilidade *a posteriori*)  $P_{H|Y}(i|y)$ .

**Regra MAP (máximo a posteriori):** A decisão ótima para  $\hat{H} = i$ , que maximiza a probabilidade de acerto, é a que maximiza a probabilidade a posteriori  $P_{H|Y}(i|y)^3$ .

$$\hat{H}(y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} P_{H|Y}(i|y)$$

A probabilidade de acerto da variável aleatória  $P_{H|Y}(\hat{H}(Y)|Y)$  é

$$P_c = \mathbb{E}[P_{H|Y}(\hat{H}(Y)|Y)] = \int_y P_{H|Y}(\hat{H}(Y)|Y) f_Y(y) dy$$

**Regra ML (máxima verossimilhança):** É uma regra de decisão subótima que maximiza a verossimilhança  $f_{Y|H}(y|i)$ . Pode ser usada quando os *priors* são uniformes (neste caso, MAP  $\equiv$  ML) ou quando são desconhecidos.

$$\hat{H}(y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i)$$

### 2.2.1 Teste de hipóteses binário

Trata-se do caso particular em que  $\mathcal{H} = \{0, 1\}$ .

**Regra MAP:**

$$P_{H|Y}(1|y) = \frac{f_{Y|H}(y|1)P_H(1)}{f_Y(y)} \stackrel{\hat{H}=1}{\underset{\hat{H}=0}{\geq}} \frac{f_{Y|H}(y|0)P_H(0)}{f_Y(y)} = P_{H|Y}(0|y)$$

$$f_{Y|H}(y|1)P_H(1) \stackrel{\hat{H}=1}{\underset{\hat{H}=0}{\geq}} f_{Y|H}(y|0)P_H(0)$$

$$\underbrace{\Lambda(y)}_{\text{razão de verossimilhança}} := \frac{f_{Y|H}(y|1)}{f_{Y|H}(y|0)} \stackrel{\hat{H}=1}{\underset{\hat{H}=0}{\geq}} \frac{P_H(0)}{P_H(1)} =: \underbrace{\eta}_{\text{limiar}}$$

**Regra ML:**

$$f_{Y|H}(y|1) \stackrel{\hat{H}=1}{\underset{\hat{H}=0}{\geq}} f_{Y|H}(y|0)$$

<sup>2</sup>Em geral, o canal não tem memória, i.e., a probabilidade da ocorrência de uma sequência de variáveis aleatórias na saída é o produto das probabilidades de ocorrência de cada variável.

<sup>3</sup>Se ocorre um empate, não faz diferença por qual hipótese escolhemos, já que elas têm a mesma probabilidade de erro.

Uma função  $\hat{H} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{H}$  é chamada *função de decisão* ou *função de decodificação*. Podemos descrevê-las em função de *regiões de decisão*:

$$\mathcal{R}_i = \{y \in \mathcal{Y} : \hat{H}(y) = i\}$$

Dessa forma, a probabilidade de erro pode ser computada:

$$P_e(0) = Pr\{Y \in \mathcal{R}_1 | H = 0\} = \int_{\mathcal{R}_1} f_{Y|H}(y|0) dy$$

$$P_e(1) = Pr\{Y \in \mathcal{R}_0 | H = 1\} = \int_{\mathcal{R}_0} f_{Y|H}(y|1) dy$$

$$P_e = P_e(1)P_H(1) + P_e(0)P_H(0)$$

### 2.2.2 Teste de hipóteses $m$ -ário

Esse é o caso mais geral, em que  $\mathcal{H} = \{0, 1, \dots, m-1\}$ .

**Regra MAP:**

$$\hat{H}_{MAP}(y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} P_{H|Y}(i|y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i) P_H(i)$$

**Regra ML:**

$$\hat{H}_{ML}(y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i)$$

Regiões de decodificação e probabilidade de erro:

$$\mathcal{R}_i := \{y : \hat{H}(y) = i\}$$

$$P_e(i) := Pr\{\hat{H} \neq H | H = i\} = \int_{\mathcal{R}_i^c} f_{Y|H}(y|i) dy = 1 - \underbrace{\int_{\mathcal{R}_i} f_{Y|H}(y|i) dy}_{P_c(i)}$$

$$P_e := Pr\{\hat{H} \neq H\} = \sum_{i=0}^{m-1} P_H(i) P_e(i)$$

## 2.3 A função $Q$

A função  $Q$  é definida como

$$Q(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

**Propriedade básica:** Se  $Z$  é uma variável aleatória com distribuição normal de média nula e variância unitária,  $Z \sim N(0, 1)$ , então  $Pr\{Z \geq x\} = Q(x)$ . Se  $Z$  tem média  $m$  e variância  $\sigma^2$ ,  $Z \sim N(m, \sigma^2)$ , então  $Pr\{Z \geq x\} = Q(\frac{x-m}{\sigma})$ .

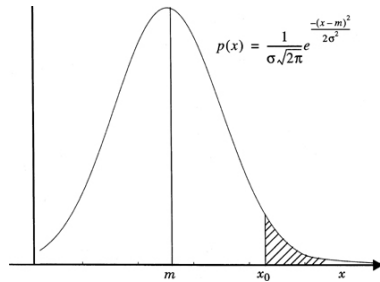


Figura 5: Distribuição normal de média  $m$  e variância  $\sigma^2$ .

Outras propriedades da função  $Q$ :

- Se  $Z \sim N(0, 1)$ ,  $F_Z := Pr\{Z \leq z\} = 1 - Q(z)$ .
- $Q(0) = 1/2$ ,  $Q(-\infty) = 1$ ,  $Q(\infty) = 0$ .
- $Q(-x) + Q(x) = 1$

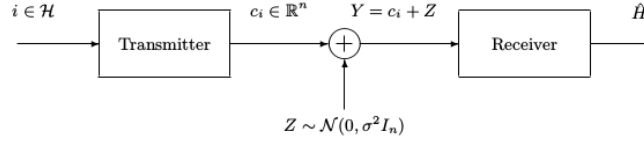


Figura 6: Diagrama de comunicação por um canal ruidoso.

## 2.4 Projeto de receptor para canal AWGN no tempo-discreto

Considere comunicação por um canal ruidoso no tempo-discreto. A hipótese  $H \in \mathcal{H}$  representa uma mensagem gerada aleatoriamente. O transmissor mapeia  $H = i$  em uma  $n$ -upla  $c_i \in \mathbb{R}^n$ . O canal adiciona um vetor ruído aleatório  $Z$  com média nula e componentes de distribuição gaussiana independentes e identicamente distribuídas de variância  $\sigma^2$ , i.e.,  $Z \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ . A observação é  $Y = c_i + Z$ .

### 2.4.1 Decisão binária para observação escalar

Seja a mensagem  $H \in \{0, 1\}$  com um transmissor que mapeia  $H = 0 \mapsto c_0 \in \mathbb{R}$  e  $H = 1 \mapsto c_1 \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} H = 0: & Y \sim N(c_0, \sigma^2) \rightarrow f_{Y|H}(y|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(y-c_0)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ H = 1: & Y \sim N(c_1, \sigma^2) \rightarrow f_{Y|H}(y|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(y-c_1)^2}{2\sigma^2} \right\} \end{cases}$$

**Regra MAP:**

$$\Lambda(y) = \frac{f_{Y|H}(y|1)}{f_{Y|H}(y|0)} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \eta \Rightarrow \ln \Lambda(y) = \frac{(y-c_0)^2 - (y-c_1)^2}{2\sigma^2} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \ln \eta \Rightarrow y \frac{c_1 - c_0}{\sigma^2} + \frac{c_0^2 - c_1^2}{2\sigma^2} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \ln \eta$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir  $c_1 > c_0$  e escrever:

$$y \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{c_1 - c_0} \ln \eta + \frac{c_0 + c_1}{2} =: \theta$$

**Regra ML:**

Se  $P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$ , então MAP  $\equiv$  ML. A regra é de *distância mínima*:

$$y \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \frac{c_0 + c_1}{2}$$

**Probabilidade de erro**

$$P_e = P_H(0)P_e(0) + P_H(1)P_e(1) = P_H(0)Q\left(\frac{\theta - c_0}{\sigma}\right) + P_H(1)Q\left(\frac{\theta - c_1}{\sigma}\right)$$

No caso  $P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$ , temos  $\frac{\theta - c_0}{\sigma} = \frac{c_1 - \theta}{\sigma}$ , logo:

$$P_e = Q\left(\frac{c_1 - c_0}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

### 2.4.2 Decisão binária para observação de $n$ -uplas

Nesse caso,  $H \in \{0, 1\}$  e  $c_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0, 1$ . O ruído adicionado pelo canal é  $Z \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ .

$$\begin{cases} H = 0: & Y = c_0 + Z \sim N(c_0, \sigma^2 I_n) \rightarrow f_{Y|H}(y|0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{\|y-c_0\|^2}{2\sigma^2} \right\} \\ H = 1: & Y = c_1 + Z \sim N(c_1, \sigma^2 I_n) \rightarrow f_{Y|H}(y|1) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{\|y-c_1\|^2}{2\sigma^2} \right\} \end{cases}$$

**Regra MAP:**

$$\Lambda(y) = \frac{f_{Y|H}(y|1)}{f_{Y|H}(y|0)} = \exp \left\{ \frac{\|y-c_0\|^2 - \|y-c_1\|^2}{2\sigma^2} \right\} \Rightarrow \ln \Lambda(y) = \langle y, \frac{c_1 - c_0}{\sigma^2} \rangle + \frac{\|c_0\|^2 - \|c_1\|^2}{2\sigma^2}$$

$$\ln \Lambda(y) \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \ln \eta \Rightarrow \langle y, \frac{c_1 - c_0}{\sigma^2} \rangle + \frac{\|c_0\|^2 - \|c_1\|^2}{2\sigma^2} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \ln \eta \Rightarrow \underbrace{\langle y, \frac{c_1 - c_0}{d} \rangle}_{\psi} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{d} \ln \eta + \frac{\|c_1\|^2 - \|c_0\|^2}{2d} =: \theta$$

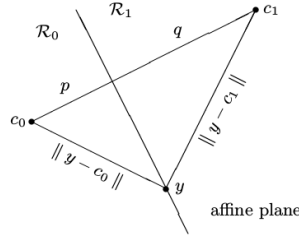


Figura 7: Visualização geométrica das regiões de decodificação.

As regiões de decisão  $\mathcal{R}_0$  e  $\mathcal{R}_1$  são delimitadas pelo plano afim  $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, \psi \rangle = \theta\}$ . É possível mostrar que as distâncias  $p$  e  $q$  (Figura 7) são tais que

$$p = \frac{d}{2} + \frac{\sigma^2 \ln \eta}{d} \text{ e } q = \frac{d}{2} - \frac{\sigma^2 \ln \eta}{d}$$

**Regra ML:** Se  $P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$ , então MAP  $\equiv$  ML. A regra é de *distância mínima*:

$$\boxed{\begin{array}{c} \hat{H}=1 \\ \|y - c_0\| \geq \|y - c_1\| \\ \hat{H}=0 \end{array}}$$

Observações:

- Quando  $P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$ , temos  $p = q$  e o plano afim é equidistante de  $c_0$  e  $c_1$ .
- O vetor  $\psi$  não é afetado pelos priors, mas o limiar  $\theta$  é, i.e., os priors afetam a posição, mas não a orientação do plano afim.
- O efeito anterior é aumentado quando a variância  $\sigma^2$  aumenta.

#### Probabilidade de erro

Podemos deduzir as probabilidades de erro geometricamente a partir da Figura 7. Lembrando que  $\langle Z, \psi \rangle \sim N(0, \sigma^2)$ .

$$P_e(0) = Pr\{\langle Z, \psi \rangle \geq p\} = Q\left(\frac{p}{\sigma}\right)$$

$$P_e(1) = Pr\{\langle Z, \psi \rangle \geq q\} = Q\left(\frac{q}{\sigma}\right)$$

$$P_e = P_H(0) \left(\frac{p}{\sigma}\right) + P_H(1) \left(\frac{q}{\sigma}\right)$$

Para o caso  $P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$ :

$$P_e = P_e(0) = P_e(1) = Pr\{\langle Z, \psi \rangle \geq \frac{d}{2}\} = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

## 2.5 Decisão $m$ -ária para observação de $n$ -uplas

Nesse caso,  $H = i$ ,  $i \in \{0, \dots, m-1\}$  e  $c_i \in \mathbb{R}^n$ . Assumiremos a simplificação  $P_H(i) = \frac{1}{m}$ .

**Receptor ML:**

$$\hat{H}_{ML} = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\|y - c_i\|^2}{2\sigma^2}\right\} = \boxed{\arg \min_{i \in \mathcal{H}} \|y - c_i\|}$$

Mais uma vez, a regra de decisão para o receptor ML é de distância mínima. A menos de empates, a região de decisão  $\mathcal{R}_i$  é a região de Voronoi<sup>4</sup>.

**Exemplo 2.1.** *Modulação  $m$ -PAM (pulse amplitude modulation): a constelação de sinais é  $\{c_0, c_1, \dots, c_{m-1}\} \in \mathbb{R}$ . Para canal AWGN e receptor ML, a regra de decodificação é de distância mínima. A decodificação é errada se o ruído for maior que  $d = c_i - c_{i-1}$ .*

*Para os pontos da ponta,  $c_0$  e  $c_{m-1}$ :*

$$P(i) = Pr\left\{Z > \frac{d}{2}\right\} = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right), \quad i = 0, m-1$$

<sup>4</sup>A região de Voronoi do ponto  $c_i \in \mathbb{R}^n$  é o conjunto  $R(c_i) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|c_i - x\| \leq \|c_i - y\| \forall y \in \mathbb{R}^n\}$ .

Para os demais pontos:

$$P(i) = Pr \left\{ \left\{ Z \geq \frac{d}{2} \right\} \cup \left\{ Z < -\frac{d}{2} \right\} \right\} = 2Pr \left\{ Z \geq \frac{d}{2} \right\} = 2Q \left( \frac{d}{2\sigma} \right), \quad i = 1, \dots, m-2$$

Assim:

$$P_e = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m} P_e(i) = \frac{2}{m} Q \left( \frac{d}{2\sigma} \right) + \frac{m-2}{2} 2Q \left( \frac{d}{2\sigma} \right) = \left( 2 - \frac{2}{m} \right) Q \left( \frac{d}{2\sigma} \right)$$

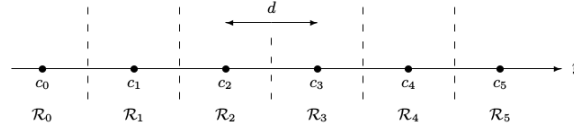


Figura 8: Exemplo de modulação 6-PAM, com regiões de decodificação.

**Exemplo 2.2.** Modulação **m-QAM** (quadrature amplitude modulation): a constelação de sinais é formada por conjuntos de  $(2n)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  pontos em quadratura no  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ .

Para o caso simples 4-QAM (Figura 9), a probabilidade de acerto de cada ponto é

$$P_c(i) = Pr \left\{ \left\{ Z_1 \leq -\frac{d}{2} \right\} \cap \left\{ Z_2 \geq -\frac{d}{2} \right\} \right\} = \left[ 1 - Q \left( \frac{d}{2\sigma} \right) \right]^2, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

$$P_e = P_e(i) = 1 - P_c(i) = 2Q \left( \frac{d}{2\sigma} \right) - Q^2 \left( \frac{d}{2\sigma} \right)$$

Também seria possível calcular a probabilidade de erro como:

$$P_e = Pr \left\{ Z_1 \leq -\frac{d}{2} \right\} + Pr \left\{ Z_2 \leq -\frac{d}{2} \right\} - Pr \left\{ \left\{ Z_1 \leq -\frac{d}{2} \right\} \cap \left\{ Z_2 \geq -\frac{d}{2} \right\} \right\}$$

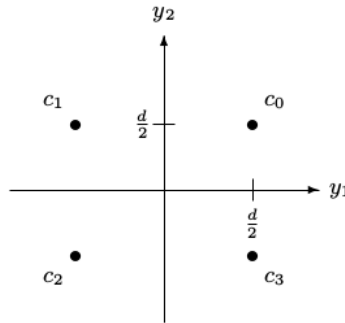


Figura 9: Exemplo de modulação 4-QAM.

## 2.6 Irrelevância e estatística suficiente

**Definição 2.1.** Três variáveis aleatórias  $U, V, W$  formam uma **cadeia de Markov** nessa ordem,  $U \rightarrow V \rightarrow W$ , se a distribuição de  $W$ , dados  $U$  e  $V$ , é independente de  $U$ , i.e.,  $P_{W|U,V}(w|u,v) = P_{W|V}(w|v)$ .

Seja  $Y$  a observação e  $T(Y)$  uma função de  $Y$ . Note que  $H \rightarrow Y \rightarrow T(Y)$  é sempre verdade, mas  $H \rightarrow T(Y) \rightarrow Y$  não é.

**Definição 2.2.** Seja  $T(Y)$  uma variável aleatória obtida do processamento da observação  $Y$ . Se  $H \rightarrow T(Y) \rightarrow Y$  forma uma cadeia de Markov, então  $T(Y)$  é uma **estatística suficiente** para a hipótese  $H$ .

**Teorema 2.1.** Se  $T(Y)$  é uma estatística suficiente para  $H$ , então um decodificador MAP que estima  $H$  a partir de  $T(Y)$  obtém a mesma probabilidade de erro que um que estima  $H$  a partir de  $Y$ , i.e.,

$$P_{H|Y}(i|y) = P_{H|Y,T}(i|y,t) = P_{H|T}(i|t)^5, \quad t = T(y)$$



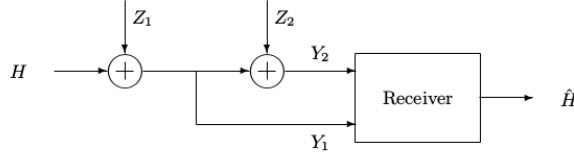


Figura 10: Esquema de comunicação com estatísticas suficiente e irrelevante.

**Exemplo 2.3.** Considere o esquema de comunicação mostrado a seguir, em que  $H$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  são variáveis aleatórias independentes. Um receptor MAP que observa  $Y_1$  obtém a mesma probabilidade de erro que um que observa  $Y_1$  e  $Y_2$ . Nesse caso,  $Y_1$  é uma estatística suficiente e  $Y_2$  é uma estatística irrelevante.

Seja um decodificador MAP que, observando  $Y$ , sempre realiza a mesma decisão que se observasse apenas  $T(Y)$ . Isso não implica que  $H \rightarrow T(Y) \rightarrow Y$ , pois, para termos cadeia de Markov, é necessário que  $P_{H|Y,T(Y)}(i|y,t) = P_{H|T(Y)}(i|t)$  para todos os valores de  $i, y, t$ . Por outro lado, para que  $y$  não tenha efeito na decisão MAP, basta que, para todo  $y, t$ , o máximo de  $P_{H|Y,T(Y)}(\cdot|y,t)$  e de  $P_{H|T(Y)}(\cdot|t)$  sejam atingidos para o mesmo  $i$ .

**Teorema 2.2.** (Teorema da fatoração de Fisher-Neyman) Suponha que  $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$  e  $h$  são funções tais que, para cada  $i \in \mathcal{H}$ , vale

$$f_{Y|H}(y|i) = g_i(T(Y))h(y).$$

Então  $T$  é uma estatística suficiente.

## 2.7 Limitantes de probabilidade de erro

### 2.7.1 Limitante da união

Usaremos o limitante da união para aproximar cálculos de probabilidade de erro em testes de várias hipóteses.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m \mathcal{A}_i\right) \leq \sum_{i=1}^m P(\mathcal{A}_i).$$

A probabilidade de erro exata é dada pela avaliação da integral abaixo para todo  $i$ . No entanto, nem sempre é fácil avaliar a integral.

$$P_e(i) = \Pr\{Y \in \mathcal{R}_i^c | H = i\} = \int_{\mathcal{R}_i^c} f_{Y|H}(y|i) dy.$$

Defina

$$\mathcal{B}_{i,j} := \{y : P_H(j)f_{Y|H}(y|j) \geq P_H(i)f_{Y|H}(y|i)\}, \quad i \neq j$$

o conjunto de  $y$  para os quais a decodificação MAP escolhe  $j$  sobre  $i$ .

Usaremos o fato de que

$$\mathcal{R}_i^c \subseteq \bigcup_{j \neq i} \mathcal{B}_{i,j}.$$

Então podemos escrever o limitante da união:

$$P_e(i) = \Pr\{Y \in \mathcal{R}_i^c | H = i\} \leq \Pr\{Y \in \bigcup_{j \neq i} \mathcal{B}_{i,j} | H = i\} \leq \sum_{j \neq i} \Pr\{Y \in \mathcal{B}_{i,j} | H = i\} = \sum_{j \neq i} \int_{\mathcal{B}_{i,j}} f_{Y|H}(y|i) dy$$

O ganho é que é tipicamente mais fácil integrar sobre  $\mathcal{B}_{i,j}$  que sobre  $\mathcal{R}_i^c$ .

**Exemplo 2.4.** Modulação  $m$ -PSK (phase-shift keying): os pontos distribuídos em um círculo, de tal forma que  $c_i = \sqrt{\mathcal{E}} \left( \cos\left(\frac{2\pi i}{m}\right), \sin\left(\frac{2\pi i}{m}\right) \right)$  para  $m \geq 2$ .

Seja o caso 8-PSK (Figura 11). Para o canal AWGN,  $H = i$ :  $Y \sim N(c_i, \sigma^2 I_2)$ .

A probabilidade de erro exata é dada por

$$P_e(i) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi - \frac{\pi}{m}} \exp\left\{-\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)\mathcal{E}}{\sin^2(\theta)2\sigma^2}\right\} d\theta.$$

Usando o limitante da união, temos

$$P_e(i) = \Pr\{Y \in \mathcal{B}_{i,i-1} \cup \mathcal{B}_{i,i+1} | H = i\} \leq \Pr\{Y \in \mathcal{B}_{i,i-1} | H = i\} + \Pr\{Y \in \mathcal{B}_{i,i+1} | H = i\} = 2Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{\sigma} \sin \frac{\pi}{m}\right).$$

<sup>5</sup>A primeira igualdade vale, pois  $T$  é função de  $Y$ . A segunda vale, pois  $H \rightarrow T(Y) \rightarrow Y$ .

<sup>6</sup>A igualdade só vale se todos os empates forem decididos contra  $i$ .

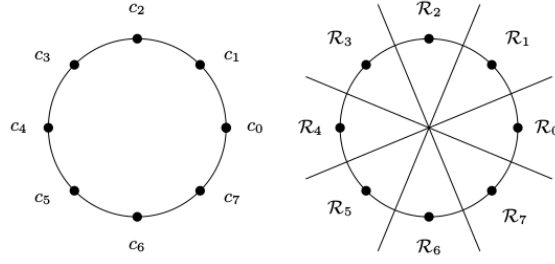


Figura 11: Exemplo de modulação 8-PSK com regiões de decodificação.

### 2.7.2 Limitante da união de Bhattacharyya

Ver [1], p. 48-51.

## 3 Projeto de receptor para canal AWGN no tempo contínuo: segunda camada

### 3.1 Introdução

Nesse capítulo, tratamos do mesmo problema do capítulo anterior, mas para o canal AWGN no tempo *contínuo*.

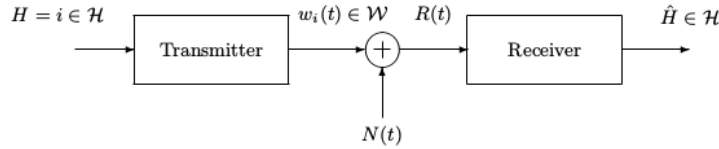


Figura 12: Esquema de comunicação por um canal AWGN no tempo contínuo.

Seja o conjunto de sinais  $\mathcal{W} = \{w_0(t), \dots, w_{m-1}(t)\}$ . São feitas duas exigências sobre esse conjunto:

1. A norma quadrática de um sinal  $w_i(t)$  é associada à sua energia. Segue que qualquer vetor do espaço vetorial  $\mathcal{V}$  gerado por  $\mathcal{W}$  é uma função com quadrado integrável.
2. Se  $v \in \mathcal{V}$  tem norma nula, então  $v(t)$  é nulo para todo  $t$ .

Juntas, essas condições implicam que  $\mathcal{V}$  é um espaço vetorial com produto interno de funções com quadrado integrável. Os sinais de comunicação do mundo real são desse tipo: têm energia finita e são contínuos.

Motivos para nos preocuparmos com a energia (ou potência) de um sinal:

- Regulações que limitam a potência dos sinais transmitidos, por motivos de segurança e reusabilidade de espectro.
- Gasto de energia para transmitir sinais (ex.: bateria).
- Seria injusto comparar métodos de transmissão de sinais que não usam a mesma potência.

Trabalharemos com uma decomposição do transmissor e receptor. Consideraremos o transmissor como formado por um *codificador* que mapeia a mensagem  $i \in \mathcal{H}$  em uma  $n$ -upla  $c_i$  e por um *gerador de forma de onda* que mapeia  $c_i$  em  $w_i(t)$ . Analogamente, o receptor consiste de um *formador de  $n$ -uplas* e de um *decodificador*, que funciona como estudado no capítulo anterior.

### 3.2 Ruído gaussiano branco

**Definição 3.1.**  $N(t)$  é um ruído gaussiano branco de densidade espectral de potência  $\frac{N_0}{2}$  se, para qualquer coleção finita de funções reais  $\mathcal{L}_2$   $g_1(\alpha), \dots, g_k(\alpha)$ ,

$$Z_i = \int N(\alpha) g_i(\alpha) d\alpha \quad i = 1, 2, \dots, k$$

é uma coleção de variáveis aleatórias gaussianas de distribuição conjunta de média nula e covariância

$$\text{cov}(Z_i, Z_j) = \mathbb{E}[Z_i Z_j^*] = \frac{N_0}{2} \int g_i(t) g_j^*(t) dt = \frac{N_0}{2} \langle g_i, g_j \rangle.$$

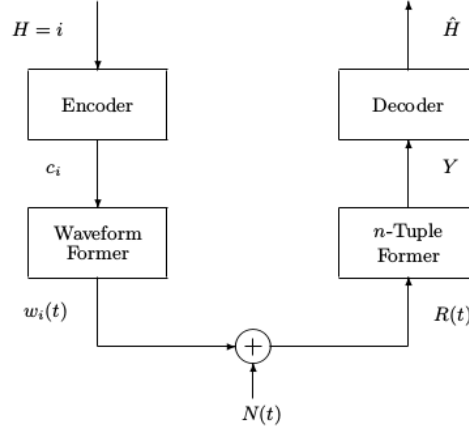


Figura 13: Decomposição do transmissor e receptor.

**Lema 3.1.** *Seja  $\{g_1(t), \dots, g_k(t)\}$  um conjunto ortonormal de funções reais. Então  $Z = (Z_1, \dots, Z_k)^T$ , com  $Z_i$  da definição anterior, é um vetor aleatório de distribuição gaussiana, com média nula, componentes i.i.d. e variância  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ .*

O ruído é dito *branco*, pois, como luz branca, o ruído branco gaussiano tem potência igualmente distribuída em todas as frequências. Os ruídos podem ser naturais (térmico, solar, cósmico) ou produzidos pelo homem (rupidos de motores elétricos, linhas de transmissão).

### 3.3 Observações e estatística suficiente

A saída do canal  $R(t)$  (Figuras 12, 13) não pode ser observável, mas sim  $k$ -uplas  $V = (V_1, \dots, V_k)^T$  tais que

$$V_i = \int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha) g_i^*(\alpha) d\alpha \quad i = 1, \dots, k$$

em que  $k$  é um inteiro positivo arbitrário e  $g_1(t), \dots, g_k(t)$  são formas de onda de energia finita arbitrárias.

Seja  $\mathcal{V}$  o espaço vetorial com produto interno gerado pelo conjunto de sinais  $\mathcal{W}$  e seja  $\{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$  uma base ortonormal de  $\mathcal{V}$ . A  $n$ -upla  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ , com  $i$ -ésima componente

$$Y_i = \int R(\alpha) \psi_i^* d\alpha$$

é uma estatística suficiente para a hipótese  $H$  em uma coleção de medidas que contém  $Y$ .

De fato,  $Y = c_i + Z_{\parallel \mathcal{V}}$  é uma projeção de  $R(t)$  no espaço de sinais  $\mathcal{V}$  e  $U_{\perp \mathcal{V}}$  é irrelevante e contém somente ruído independente.

### 3.4 Arquitetura do transmissor e do receptor

O transmissor tem um módulo *codificador* que produz o conjunto de palavras-código  $c_i = (c_{i,1}, \dots, c_{i,n})^T$  e um *gerador de forma de onda*, que produz sinais  $w_i(t) \in \mathcal{W}$  a partir de  $c_i$ , usando uma base ortonormal  $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ <sup>7</sup>, de forma que o sinal no canal contínuo é  $w_i(t) = \sum_j c_{i,j} \psi_j(t)$ .

O canal adiciona ruído gaussiano branco  $N(t)$  de variância  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} I_n$ .

A parte do receptor mais próxima do canal é o *gerador de  $n$ -uplas*, que realiza uma redução de dados ao calcular  $Y \in \mathbb{R}^n$  a partir de  $R(t) = w_i(t) + N(t)$ . Para isso, projeta cada componente do sinal no espaço de sinais  $\mathcal{V}$   $Y_i = \langle R, \psi_i \rangle$ . O *decodificador* realiza o teste de hipóteses baseado na observação  $Y$ :

$$H = i : \quad Y = c_i + Z$$

em que  $Z \sim N(0, \frac{N_0}{2} I_n)$  é independente de  $H$ , decodificando o vetor  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ . Esse é o mesmo teste de hipóteses estudado no capítulo anterior, para um canal AWGN no tempo discreto.

A decomposição do sistema transmissor/receptor apresentada é completamente geral e permite reduzir o problema ao tempo discreto, conforme já estudado. Além disso, a relação entre tempo discreto e contínuo permite calcular energias e distâncias em qualquer domínio, i.e.:

$$\mathcal{E}_i = \sum_{j=1}^n |c_{i,j}|^2 = \|c_i\|^2 = \|w_i(t)\|^2 = \int |w_i(t)|^2 dt$$

<sup>7</sup>Como a base é ortonormal,  $\langle \psi_i(t), \psi_j(t) \rangle = \delta_{ij}$  e  $\|\psi_i(t)\| = 1$ .

<sup>8</sup>Para produzir uma base ortonormal, podemos usar o método de Gram-Schmidt.

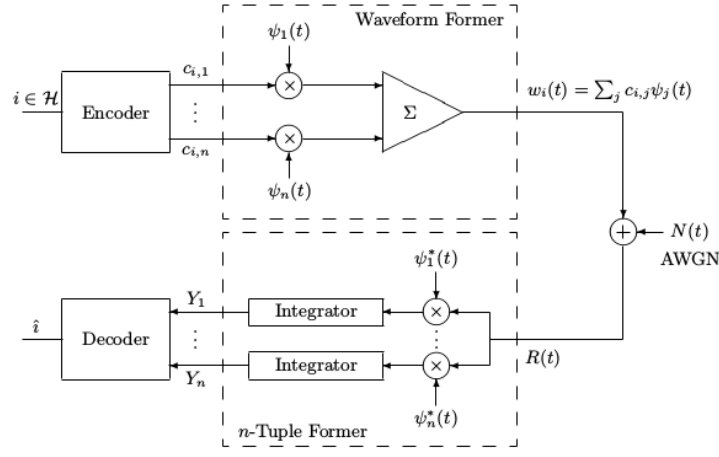


Figura 14: Decomposição detalhada do transmissor e receptor.

$$d_{i,j} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{i,j} - c_{k,j})^2} = \|c_i - c_k\| = \|w_i(t) - w_k(t)\| = \sqrt{\int [w_i(t) - w_k(t)]^2 dt}$$

Observações:

- Conjuntos de sinais no tempo contínuo podem parecer diferentes, mas compartilhar do mesmo livro de códigos, o que é suficiente para garantir que a probabilidade de erro é a mesma.
- Para constelações binárias, o que importa para a probabilidade de erro é a distância entre dois sinais e nada mais.

**Exemplo 3.1. Single-shot PAM:** Seja o pulso de energia unitária  $\psi(t)$ . O sinal transmitido é da forma

$$w_i(t) = c_i \psi(t),$$

em que  $c_i$  assume valores em um subconjunto discreto de  $\mathbb{R}$  da forma  $\{\pm a, \pm 3a, \dots, \pm(m-1)a\}$  para um inteiro positivo  $a$ .

**Exemplo 3.2. Single-shot PSK:** Sejam  $T$  e  $f_c$  números positivos e  $m$  inteiro positivo e assuma  $2f_c T$  inteiro. O sinal é da forma

$$w_i(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T}} \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi i}{m}\right) \mathbf{1}\{t \in [0, T]\}, \quad i = 1, \dots, m-1$$

Podemos reescrever como

$$w_i(t) = c_{i,1} \psi_1(t) + c_{i,2} \psi_2(t)$$

onde

$$\begin{aligned} c_{i,1} &= \sqrt{\mathcal{E}} \cos\left(\frac{2\pi i}{m}\right), & \psi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t) \mathbf{1}\{t \in [0, T]\} \\ c_{i,2} &= \sqrt{\mathcal{E}} \sin\left(\frac{2\pi i}{m}\right), & \psi_2(t) &= -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t) \mathbf{1}\{t \in [0, T]\} \end{aligned}$$

**Exemplo 3.3. Single-shot QAM:** Sejam  $T$  e  $f_c$  números positivos tais que  $2f_c T$  seja inteiro e  $m$  inteiro positivo par. O sinal é da forma

$$w_i(t) = c_{i,1} \psi_1(t) + c_{i,2} \psi_2(t),$$

em que

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t) \mathbf{1}\{t \in [0, T]\} \\ \psi_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t) \mathbf{1}\{t \in [0, T]\} \end{aligned}$$

e  $c_i = (c_{i,1}, c_{i,2})^T$ ,  $i = 0, \dots, m^2 - 1$  assume valores discretos da forma  $\{\pm a, \pm 3a, \dots, \pm(m-1)a\}$ , para  $a$  positivo.

### 3.5 Generalização e estruturas alternativas de recepção

O teste de hipóteses tem como entradas os priors  $P_H(i)$  e a observação  $Y$  com distribuição

$$f_{Y|H}(y|i) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{(n/2)}} \exp\left(-\frac{\|y - c_i\|^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{(\pi N_0)^{(n/2)}} \exp\left(-\frac{\|y - c_i\|^2}{N_0}\right).$$

A regra de decodificação MAP pode ser escrita de três maneiras distintas e equivalentes:

$$\hat{H} = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} P_H(i) f_{Y|H}(y|i) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} P_H(i) \exp\left(-\frac{\|y - c_i\|^2}{N_0}\right) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} \ln P_H(i) - \frac{\|y - c_i\|^2}{N_0}$$

$$\boxed{\hat{H} = \arg \min_{i \in \mathcal{H}} \|y - c_i\|^2 - N_0 \ln P_H(i)}$$

Usando que  $\|y - c_i\|^2 = \|y\|^2 + \|c_i\|^2 - 2\Re\{\langle y, c_i \rangle\}$ , temos:

$$\boxed{\hat{H} = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} \langle y, c_i \rangle - \frac{\|c_i\|^2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln P_H(i)}$$

Usando equivalência entre tempo discreto e tempo contínuo, temos:

$$\boxed{\hat{H} = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} \int R(t) w_i^*(t) dt - \frac{\|w_i(t)\|^2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln P_H(i)}$$

A regra MAP nas três formas acima requer uma operação do tipo

$$\int R(t) b^*(t) dt$$

onde  $b(t)$  é uma função  $\psi_i(t)$  ou  $w_i(t)$ . Há duas maneiras de fazer isso:

1. Através de um *correlator*, um dispositivo que multiplica e integra dois sinais de entrada (realiza o produto interno entre eles). A saída é  $y(t) = \int R(t) b^*(t) dt$ .
2. Através de um *filtro casado*, i.e., um filtro que recebe  $R(t)$  na entrada e tem resposta ao impulso  $h(t) = b^*(T-t)$  ( $T$  é um parâmetro que garante que o  $h(t)$  é causal). Nesse caso, a saída em  $t = T$  será  $y(T) = \int R(\alpha) b^*(\alpha) d\alpha$ .

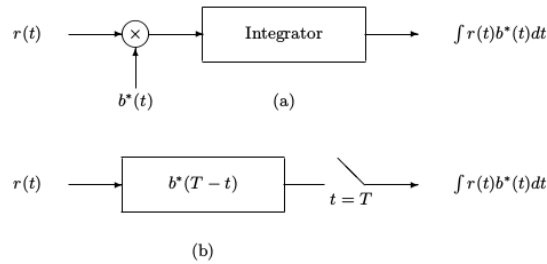


Figura 15: Implementação com correlador (a) e com filtro casado (b).

A preferência pelo uso de uma das duas formas depende da tecnologia e das formas de onda empregadas. A Figura 16 mostra duas formas de implementação do decodificador, usando filtros casados (a implementação poderia ser feita com correladores). Na segunda forma, não são necessários uma base ortonormal nem conhecimento do livro-código. Porém ela requer  $m$  filtros em vez de  $n$  ( $m \geq n$ ).

### 3.6 Canais em tempo contínuo revisitados

Além do ruído, os canais de comunicação estão sujeitos a outras imperfeições, descritas a seguir.

**Atenuação e amplificação** Os canais de comunicação passivos, sejam cabeados ou sem-fio, estão sujeitos a atenuação. Grande parte da atenuação pode ser compensada por uma cascata de amplificadores no primeiro estágio do receptor. Mas estes amplificam tanto o sinal como o ruído, além de introduzir um ruído próprio. Apesar disso, essa amplificação é necessária, pois os aparelhos eletrônicos são projetados para operar em uma faixa de amplitudes. Por isso, o primeiro estágio de amplificação é o amplificador de baixo ruído. A seguir, usa-se um filtro de redução de ruído que remove ruído fora da banda. Para evitar que o sinal sature, é usado um amplificador controle de ganho automático.

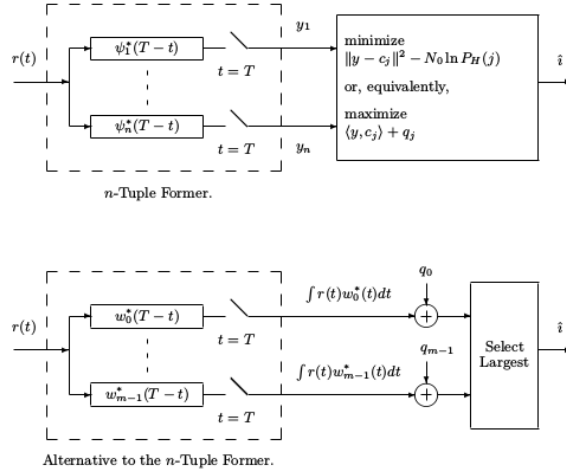


Figura 16: Implementação com correlador (a) e com filtro casado (b).

**Atraso de propagação e dessincronização de *clock*** Atraso de propagação se refere ao tempo que o sinal demora para chegar no receptor. Se o conjunto de sinais é  $\mathcal{W} = \{w_i(t)\}$  e o atraso é  $\tau$ , então o receptor enxerga o conjunto de sinal como  $\tilde{\mathcal{W}} = \{w_i(t - \tau)\}$ . Assumimos que o receptor não conhece o atraso  $\tau$ . O problema de dessincronização de *clock* leva ao mesmo cenário. Por isso, esses dois problemas são genericamente tratados como *sincronização de clock*.

**Filtragem** Quer na comunicação por cabos, quer na comunicação sem-fio<sup>9</sup>, o sinal que chega ao receptor pode ser modelado como sendo da forma  $R = \int w_i(t - \tau)d(\tau)d\tau$ <sup>10</sup>. Isso corresponde a dizer que o sinal contém um filtro de resposta ao impulso  $h(t)$ . O tratamento desse problema depende de quem, entre emissor e receptor, conhece a resposta ao impulso  $h$ . É comum que o receptor possa medir a resposta ao impulso e enviá-la pelo canal de comunicação reverso ao emissor. Se o transmissor envia o conjunto de sinais  $\mathcal{W} = \{w_i(t)\}$  e o receptor conhece  $h(t)$ , basta calcular os sinais recebidos  $\tilde{\mathcal{W}} = \{w_i(t) \star h(t)\}$ . Se transmissor ou receptor estão em movimento, o canal ainda é linear, mas variante no tempo.

**Ruído gaussiano colorido** Podemos pensar o ruído colorido como ruído branco filtrado. Nesse caso, podemos modificar o filtro de redução de ruído mencionado anteriormente para ter resposta inversa ao filtro que colore o ruído, usando um ruído branqueador. Dessa forma, estaremos de volta ao caso familiar em que temos ruído branco, gaussiano e de média nula.

## 4 Soluções de compromisso no projeto de sinal

### 4.1 Introdução

Esse capítulo trata do projeto de sinais. O problema de escolher uma constelação de sinais não é tão direto quanto o de projetar o receptor, pois não tem um objetivo único definido; pelo contrário, consiste em uma solução de compromisso entre objetivos conflitantes.

### 4.2 Transformações isométricas aplicadas ao livro de códigos

Uma *isometria* é transformação que preserva distâncias. Em um espaço métrico com produto interno  $\mathcal{V}$  e distância  $d$ , a aplicação  $t : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  é uma isometria se, e somente se, dados  $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ ,  $d(v_1, v_2) = d(t(v_1), t(v_2))$ . Todas as isometrias de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$  podem ser obtidas por composição de reflexão, rotação e translação.

Ao aplicar uma isometria a um livro de códigos e suas regiões de decisão, a probabilidade de erro permanece inalterada. Reflexões e rotações não mudam a energia média de um código, mas translações, em geral, sim.

Seja uma constelação de sinais  $\{c_i\}$  com média nula  $m = \mathbb{E}[c_i] = 0$  e energia  $\mathcal{E} = \mathbb{E}[\|c_i\|^2]$ . Propomos uma translação  $\tilde{c}_i = c_i + \tilde{m}$ . A energia de um sinal da constelação transladada será

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathbb{E}[\|\tilde{c}_i\|^2] = \mathbb{E}[\|c_i + \tilde{m}\|^2] = \mathbb{E}[\|c_i\|^2] + \mathbb{E}[\|\tilde{m}\|^2] + 2\mathbb{E}[\langle c_i, \tilde{m} \rangle] = \mathcal{E} + \|\tilde{m}\|^2.$$

Portanto, a translação de um sinal com média nula só aumenta sua energia. Para diminuir a energia de uma constelação, deve-se transladá-la para que tenha média nula.

<sup>9</sup>Nesse caso, isso ocorre pois o sinal eletromagnético sofre reflexões e difrações que fazem com que o sinal chegue ao receptor por diversos caminhos.

<sup>10</sup>Essa é a soma contínua de  $R(t) = \sum_{l=1}^L w_i(t - \tau_l)h_l$ , em que  $\tau_l$  e  $h_l$  modelam o atraso e a atenuação do  $l$ -ésimo sinal.

### 4.3 Transformações isométricas aplicadas ao conjunto de formas de onda

Podemos aplicar uma isometria diretamente ao conjunto de formas de onda. Seja  $\mathcal{V}$  o espaço com produto interno gerado por  $\mathcal{W} = \{w_i(t)\}$  e  $t : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  uma isometria. Se aplicarmos a isometria a  $\mathcal{W}$ , teremos  $\tilde{\mathcal{W}} = \{\tilde{w}_i(t)\}$ .

- Podemos obter  $\tilde{\mathcal{W}}$  aplicando a isometria ao livro de códigos  $\mathcal{C}$  através da composição  $c_i \rightarrow w_i \rightarrow \tilde{w}_i \rightarrow \tilde{c}_i$ .
- Há isometrias aplicadas a  $\mathcal{W}$  que não poderiam ser obtidas aplicando a  $\mathcal{C}$ . Exemplo: manter o livro de códigos e substituir a base  $\mathcal{B} = \{\psi_i(t)\}$  por  $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\psi}_i(t)\}$ . As distâncias entre as palavras códigos são preservadas, pois o livro de códigos se manteve, mas trocamos o espaço das funções  $\mathcal{V}$  por  $\tilde{\mathcal{V}}$ .

### 4.4 Construindo intuição sobre escalabilidade: $n$ versus $k$

Queremos considerar o que acontece com a probabilidade de erro quando usamos um código com  $m$  grande, i.e., o livro de códigos contém muitas palavras-código. Mediremos essa quantidade através de  $k = \log_2 m$  (bits) e aumentaremos a energia linearmente com  $k$  para manter a energia por bit  $\mathcal{E}_b$  constante. A dimensão do espaço das palavras-código ou das formas de onda é denotada  $n$ .

#### 4.4.1 Mantendo $n$ constante com o aumento de $k$

**Single-shot PAM** Nesse caso,  $n = 1$  e a forma de onda associada à  $i$ -ésima mensagem é

$$w_i(t) = c_i \psi(t).$$

A probabilidade de erro da modulação PAM é

$$P_e = \left(2 - \frac{2}{m}\right) Q\left(\frac{a}{\sigma}\right).$$

Além disso,

$$a = \sqrt{\frac{3\mathcal{E}_b \log_2 m}{(m^2 - 1)}}.$$

Portanto, quando  $m \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$  e  $P_e \rightarrow 1$ .

**Single-shot PSK** Nesse caso,  $n = 2$  e a probabilidade de erro é limitada inferiormente por

$$P_e \geq 2Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\sigma^2} \sin \frac{\pi}{m}}\right) \frac{m-1}{m}.$$

Logo  $P_e \rightarrow 1$  quando  $k \rightarrow \infty$ . De fato, o raio da circunferência da constelação PSK cresce com  $\sqrt{k}$ , enquanto a quantidade de pontos cresce com  $2^k$ : a distância mínima vai a zero exponencialmente.

Nesses dois exemplos, o problema é que a quantidade de pontos cresce mais rápido que o tamanho do espaço que os contém. Eles não são adequados para transmitir uma quantidade grande  $k$  bits com o aumento exponencial  $m = 2^k$ .

#### 4.4.2 Aumentando $n$ linearmente com $k$

**Bit a bit em trem de pulsos** A ideia é ter uma dimensão diferente para cada bit. Seja  $(b_{i,1}, \dots, b_{i,k})$  a sequência binária correspondente à mensagem  $i$ , com bits  $\{\pm 1\}$ . A palavra-código associada  $c_i = (c_{i,1}, \dots, c_{i,k})^T$  é tal que  $c_{i,j} = b_{i,j} \sqrt{\mathcal{E}_b}$ , onde  $\mathcal{E}_b = \frac{\mathcal{E}}{k}$  é a energia por bit. Podemos escolher a forma  $\psi_j(t) = \psi(t - jT_s)$  que simplifica o formador de ondas. Assim,

$$w_i(t) = \sum_{j=1}^k c_{i,j} \psi(t - jT_s), \quad t \in \mathbb{R}.$$

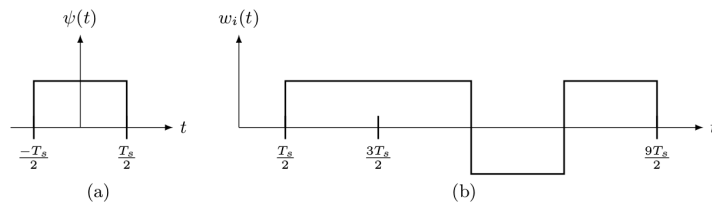


Figura 17: Exemplo de forma de onda para  $k = 4$  e  $c_i = \sqrt{\mathcal{E}_b}(1, 1, -1, 1)^T$ .

Nesse caso, as palavras-código  $c_0, \dots, c_{m-1}$  são os vértices de um hipercubo  $k$ -dimensional.

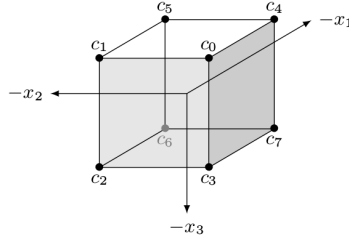


Figura 18: Exemplo de livro de códigos para  $k = 3$ .

O receptor ML decide pela palavra-código  $c_i \in \{\pm\sqrt{\mathcal{E}_b}\}^k$  que maximiza  $\langle y, c_i \rangle - \frac{\|c_i\|^2}{2}$ . Mas  $\|c_i\|$  é o mesmo e  $\langle y, c_i \rangle = \sum y_j c_{i,j}$ , então escolhe-se  $i$  tal que  $c_{i,j} = \pm\sqrt{\mathcal{E}_b}$ ,  $y_j \gtrless 0$ .

A probabilidade de erro de um bit é  $1 - Q(\frac{\sqrt{\mathcal{E}_b}}{\sigma})$ . Portanto a probabilidade de todos os  $k$  bits serem decodificados corretamente é

$$P_c(i) = \left[ 1 - Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}_b}}{\sigma}\right) \right]^k.$$

Essa probabilidade é tal que  $P_c \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Nesse exemplo, escolhemos transmitir um bit por dimensão, mas poderíamos ter transmitido mais, usando uma constelação  $m$ -PAM. Nesse caso, o esquema de sinalização é chamado símbolo a símbolo em um trem de pulsos.

#### 4.4.3 Aumentando $n$ exponencialmente com $k$

**Sinalização bloco a bloco ortogonal** Seja  $n = m = 2^k$ , i.e., no espaço de palavras-código, cada dimensão possui apenas um ponto. Escolhemos  $n$  formas de onda ortogonais  $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ , de forma que

$$w_i(t) = \sqrt{\mathcal{E}}\psi_i(t).$$

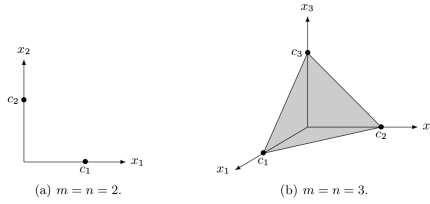


Figura 19: Exemplos de livros de códigos para 2 e 3.

As formas de onda podem ser escolhidas de diferentes formas. Exemplos:

- Modulação por posição do pulso:  $\psi_i(t) = \psi(t - iT)$  para um pulso normalizado  $\psi_t$  que obedece ao critério de ortogonalidade.
- $m$ -FSK (*frequency shift keying*):  $w_i(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T}} \cos(2\pi f_i t) \mathbb{1}\{t \in [0, T]\}$ , com  $k_i = 2f_i T$ .

A decodificação ML é feita de maneira tal que

$$\hat{H}_{ML}(y) = \arg \max_i \langle y, c_i \rangle - \frac{\mathcal{E}}{2} = \arg \max_i y_i.$$

Um limitante para a probabilidade de erro pode ser calculado da seguinte maneira<sup>11</sup>:

$$P_e = P_e(i) \leq (m-1)Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = (m-1)Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{N_0}}\right) < 2^k \exp\left[-\frac{\mathcal{E}}{N_0}\right] = \exp\left[-k\left(\frac{\mathcal{E}/k}{2N_0} - \ln 2\right)\right],$$

onde em cada passo foi usado que:

- $\sigma^2 = N_0/2$  e  $d^2 = 2\mathcal{E}$ .
- $Q(x) \leq \exp(-x^2/2)$ ,  $x \geq 0$  e  $m-1 < 2^k$ .

<sup>11</sup>A probabilidade de acerto pode ser calculada analiticamente como  $P_c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left\{-\frac{(a-\sqrt{\mathcal{E}})^2}{N_0}\right\} \left[1 - Q\left(\frac{\alpha}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]^{m-1} d\alpha$ .



Portanto,  $P_e \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , desde que  $\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} > 2 \ln 2$ , i.e., quanto mais bits são enviados, maior a probabilidade de decodificar todos eles corretamente! Ao usar palavras-código com apenas uma coordenada não nula, essa componente pode ser tão grande quanto  $\sqrt{k\mathcal{E}_b}$  e a distância mínima entre duas palavras do livro de códigos aumenta. Como a variância do ruído é a mesma em todas as componentes e não aumenta com  $k$ , à medida que  $k$  aumenta, mais difícil é que o ruído altere sua posição.

## 4.5 Duração, largura de banda e dimensionalidade

Quais são as implicações de usar intervalos limitados de tempo e frequência? Para responder a isso, precisamos antes definir o que significam sinais limitados em tempo e em frequência. Essas definições não são únicas e usaremos aqui a abordagem de David Slepian na sua *Shannon Lecture*.

**Definição 4.1.** Dado um número  $0 < \eta < 1$  que se relaciona com a precisão do instrumento, dizemos que dois sinais são indistinguíveis em nível  $\eta$  se a diferença entre suas normas for menor que  $\eta$ .

**Definição 4.2.** Dizemos que um sinal  $s(t)$  é limitado no tempo ao intervalo  $(a, b)$  se é indistinguível em nível  $\eta$  de  $s(t)\mathbb{1}\{t \in (a, b)\}$ . O comprimento do menor tal intervalo  $(a, b)$  é a sua duração  $T$  (em nível  $\eta$ ).

**Definição 4.3.** Analogamente, dizemos que um sinal  $s(t)$  é limitado em frequência ao intervalo  $(c, d)$  se  $s_{\mathcal{F}}(f)$  e  $s_{\mathcal{F}}(f)\mathbb{1}\{f \in (c, d)\}$  são indistinguíveis em nível  $\eta$ . A largura de banda  $W$  do sinal é o menor tal intervalo  $(c, d)$ .

Adotando dessas definições temos que, ao aumentar a potência de um sinal, sua duração e largura de banda podem ser aumentadas. Além disso, todos os sinais de energia finita têm duração e largura de banda finitas.

**Definição 4.4.** Um conjunto  $\mathcal{G}$  de sinais tem dimensão aproximada  $n$  em nível  $\epsilon$  durante o intervalo  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  se existir uma coleção fixa de  $n = n(T, \epsilon)$ , digamos  $\{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$  tal que sobre o intervalo  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  todo sinal em  $\mathcal{G}$  seja indistinguível em nível  $\epsilon$  de outro sinal da forma  $\sum_{i=1}^n a_i \psi_i(t)$ . Isto é, para cada  $g(t) \in \mathcal{G}$  devem existir  $a_1, \dots, a_n$  tais que  $g(t)$  e  $\sum_{i=1}^n a_i \psi_i(t)$  sejam indistinguíveis em nível  $\epsilon$  no intervalo  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ .

**Teorema 4.1.** (Slepian) Seja  $\mathcal{G}_\eta$  o conjunto de todos os sinais limitados em frequência a  $(-\frac{W}{2}, \frac{W}{2})$  e no tempo a  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ , em nível  $\eta$ . Seja  $n = n(W, T, \eta, \epsilon)$  a dimensão aproximada de  $\mathcal{G}_\eta$  em nível  $\epsilon$  durante o intervalo  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ . Então, para cada  $\epsilon > \eta$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n}{T} = W \text{ e } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n}{W} = T.$$

O que o Teorema acima diz é que para um intervalo de tempo  $(a, b)$  de duração  $T$  e um de frequência  $(c, d)$  de largura  $W$ , no limite para  $T$  e  $W$  “grandes”, o conjunto dos sinais de energia finita limitados a esses intervalos é gerado por  $TW$  funções ortonormais. Vamos resumir esse resultado como<sup>1213</sup>

$$n \doteq TW.$$

**Exemplo 4.1.** Sejam  $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \text{sinc}(t/T_s)$  e  $\psi_{\mathcal{F}}(f) = \sqrt{T_s} \mathbb{1}\{f \in [-\frac{1}{2T_s}, \frac{1}{2T_s}]\}$ . O conjunto  $\mathcal{B} = \{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$  é ortogonal. O conjunto  $\mathcal{G}$  gerado pela base  $\mathcal{B}$  tem dimensão  $n$ . Seus sinais são estritamente limitados em frequência a  $(-\frac{1}{2T_s}, \frac{1}{2T_s})$  e são limitados no tempo a  $(0, T_s)$  para algum  $\eta$ . Nesse caso,  $WT = n$ .

A relação entre  $n$  e  $WT$  é linear. Em geral,  $W$  é fixado por restrição regulatória e  $T$  cresce linearmente com  $k$  (é basicamente o tempo que se leva para enviar  $k$  bits). Isso significa que a sinalização bloco ortogonal não é escalável ( $n \propto 2^k$ ), mas bit a bit em um trem de pulsos pode ser ( $n \propto k$ ).

## 4.6 Bit a bit *versus* bloco ortogonal

Para comparar as duas formas de sinalização, é útil analisar a probabilidade de erro dada pelo limitante da união. Nesse cálculo, para cada mensagem  $i$ , há um termo para  $j \neq i$ . Vamos considerar apenas os termos dominantes, isto é, aqueles relacionados aos  $c_j$  mais perto de  $c_i$ . Assim:

$$P_e(i) \approx N_d Q\left(\frac{d_m}{2\sigma}\right),$$

onde  $N_d$  é o número de termos dominantes (vizinhos mais próximos) e  $d_m$  a distância mínima (distância até o vizinho mais próximo).

- Para sinalização *bit a bit em um trem de pulsos*, cada ponto tem  $k = \log_2 m$  vizinhos, cada um a uma distância  $2\sqrt{\mathcal{E}_b}$ . Com o aumento de  $k$ ,  $N_d$  aumenta e  $Q(\frac{d_m}{2\sigma})$  permanece constante. O aumento de  $N_d$  leva ao aumento de  $P_e(i)$ .
- Na sinalização *bloco ortogonal*, cada sinal tem  $N_d = 2^k - 1$  vizinhos mais próximos, cada um a  $d_m = \sqrt{2\mathcal{E}} = \sqrt{2\mathcal{E}_b}$ . Assim,  $Q(\frac{d_m}{2\sigma}) \leq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{d_m^2}{8\sigma^2}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{k\mathcal{E}_b}{4\sigma^2}\right)$  diminui com  $\exp\left(-\frac{k\mathcal{E}_b}{4\sigma^2}\right)$  e  $N_d = 2^k - 1 = \exp(k \ln 2) - 1$  aumenta com  $\exp(k \ln 2)$ . Para  $\frac{\mathcal{E}_b}{4\sigma^2} > \ln 2$  a probabilidade de erro diminui.

<sup>12</sup>O símbolo  $\doteq$  indica que a relação ocorre no limite para  $T \rightarrow \infty$  e  $W \rightarrow \infty$ .

<sup>13</sup>Grosso modo, cabem  $n \doteq TW$  sinais ortogonais em um canal de banda  $W$  durante tempo  $T$ .

## 5 Símbolo a símbolo em trem de pulsos: segunda camada revisitada

### 5.1 Introdução

Esse capítulo trata do projeto do par formador de onda/formador de  $n$ -uplas. Nesse contexto, a técnica de sinalização símbolo a símbolo em um trem de pulsos surgirá naturalmente:

$$w(t) = \sum_{j=1}^n s_j \psi(t - jT).$$

A sinalização PAM é da forma símbolo a símbolo em um trem de pulsos, em que os símbolos assumem valores em um alfabeto PAM.

### Referências

- [1] RIMOLDI, Bixio. *Principles of Digital Communication: A Top-Down Approach*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.