信号処理システム特論

川村新

Contents

- z変換

z変換 $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

片側z変換 $$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

逆z変換 $$x(n) = \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

zは複素数．振幅 r，位相(偏角) ω とすると $\underline{z = re^{j\omega}}$

- 遅延要素のz変換

$x(-1),\ x(-2),\ \cdots$
は存在しないとする

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\boxed{m = n - 1}$$

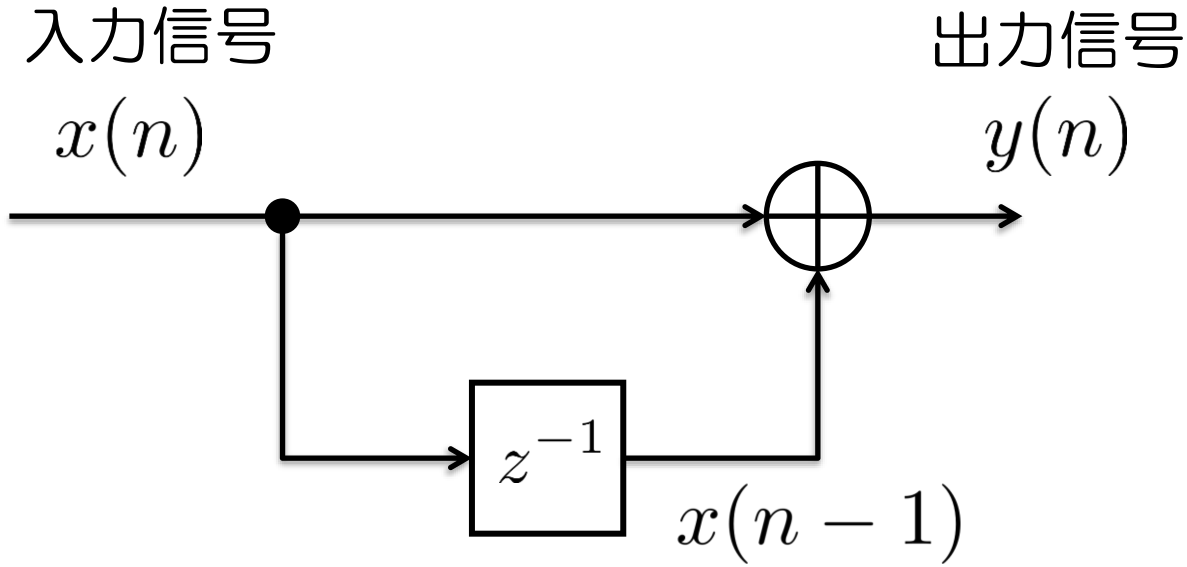
n ： 0→∞
m ：-1→∞

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underline{x(n-1)} z^{-n} = \sum_{m=-1}^{\infty} x(m) z^{-m-1}$$

$$= z^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m} = z^{-1} X(z)$$

遅延要素は z^{-1} として現れる

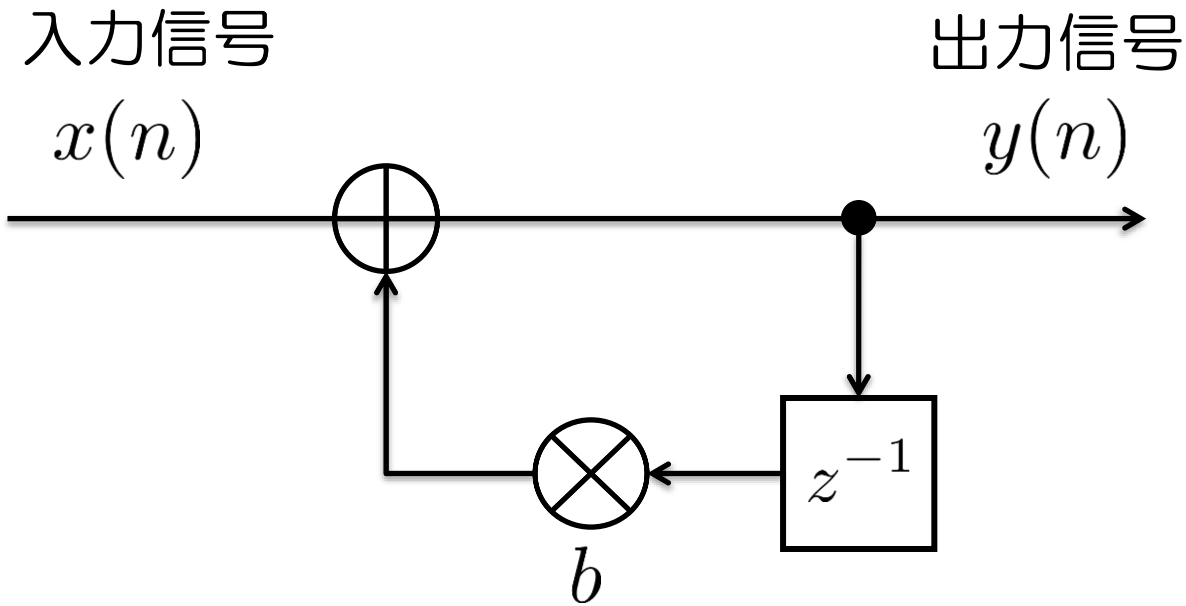
• 入出力関係のz変換（FIR型）



入出力関係　$y(n) = x(n) + x(n-1)$

両辺をz変換　$Y(z) = X(z) + X(z)z^{-1}$

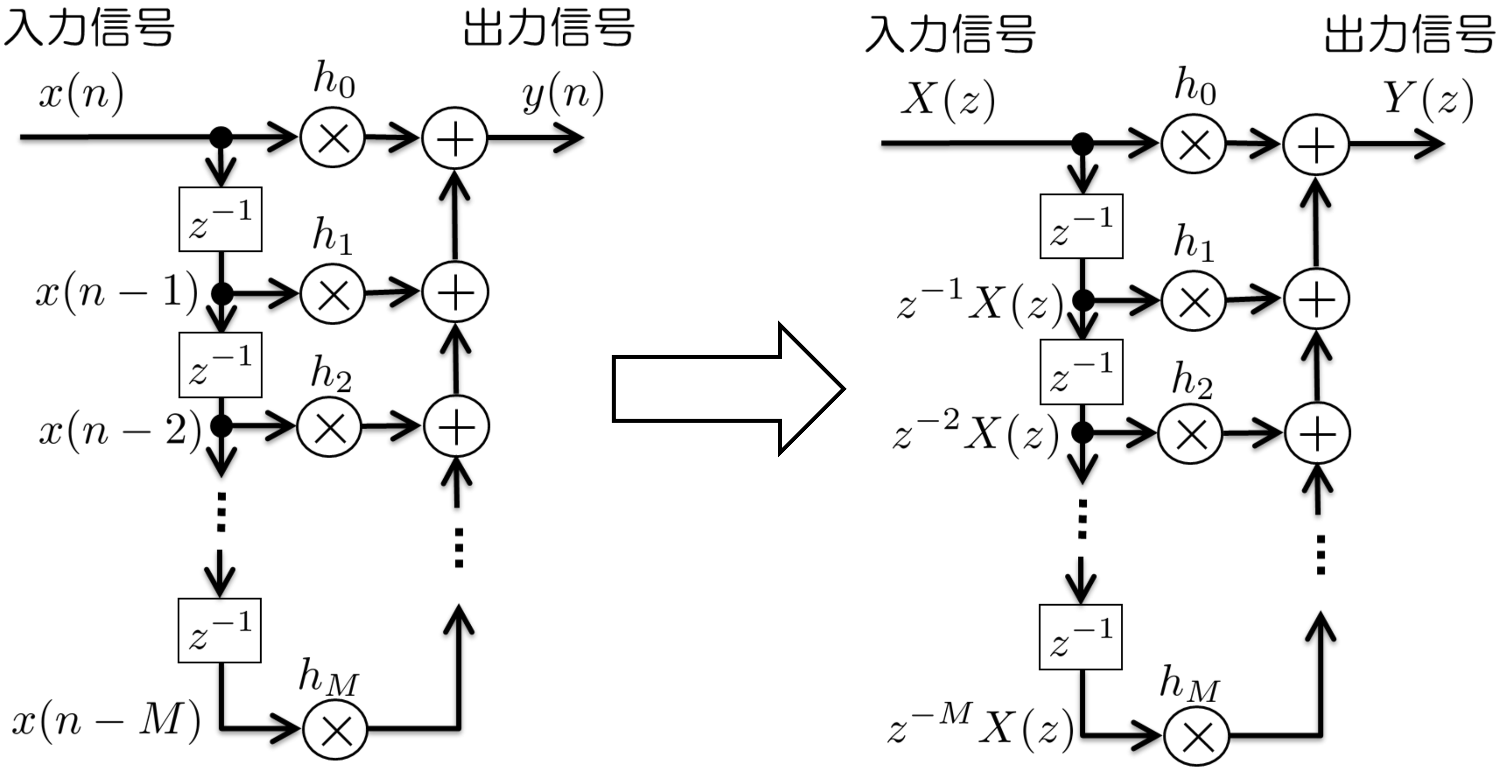
• 入出力関係のz変換（IIR型）



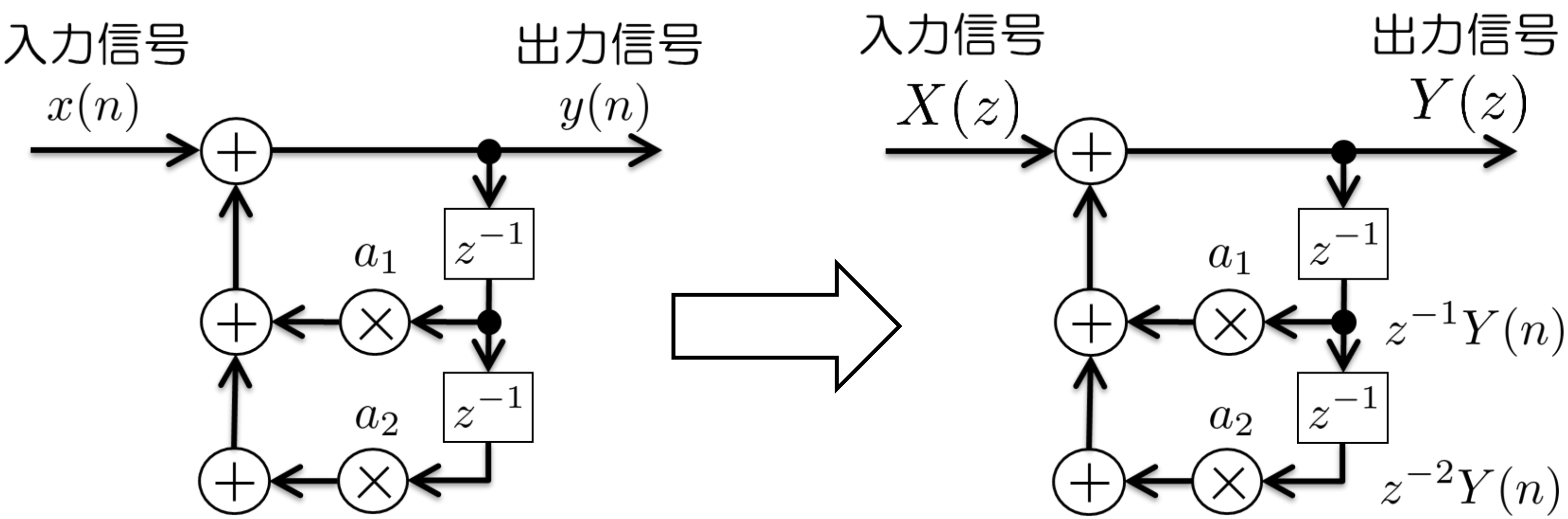
入出力関係　$y(n) = x(n) + by(n-1)$

両辺をz変換　$Y(z) = X(z) + bY(z)z^{-1}$

FIR型


入力信号
出力信号
$x(n)$
$y(n)$
h_0
h_1
h_2
h_M
z^{-1}
$x(n-1)$
$x(n-2)$
$x(n-M)$
入力信号
出力信号
$X(z)$
$Y(z)$
$z^{-1}X(z)$
$z^{-2}X(z)$
$z^{-M}X(z)$

IIR型


入力信号
出力信号
$x(n)$
$y(n)$
a_1
a_2
z^{-1}
入力信号
出力信号
$X(z)$
$Y(z)$
$z^{-1}Y(n)$
$z^{-2}Y(n)$

- 伝達関数

伝達関数は出力のz変換を入力のz変換で除したもの

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

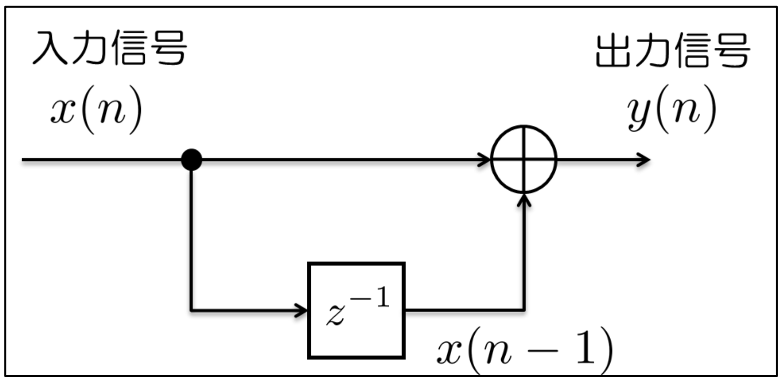
$$Y(z) = X(z) + X(z)z^{-1} \quad \Rightarrow \quad H(z) = 1 + z^{-1}$$

$$Y(z) = X(z) + bY(z)z^{-1} \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

- 周波数特性

フィルタの周波数特性 $H(\omega)$ は,

伝達関数で $z = e^{j\omega}$ とおいたもの（ $j = \sqrt{-1}$ ）

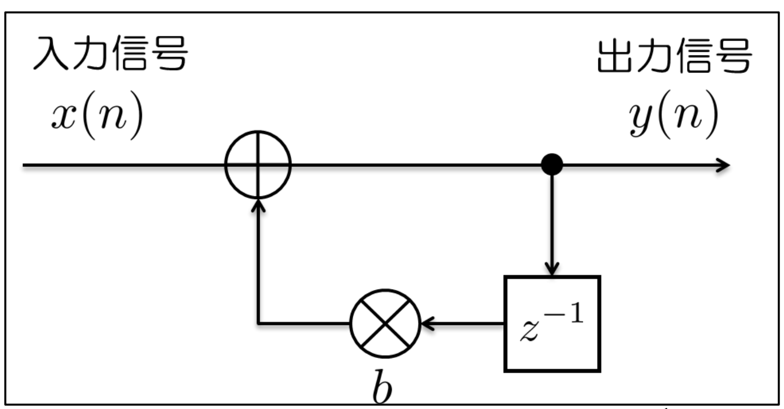


$$Y(z) = X(z) + X(z)z^{-1}$$

$$H(z) = 1 + z^{-1}$$

⇩

周波数特性 $H(\omega) = 1 + e^{-j\omega}$



$$Y(z) = X(z) + bY(z)z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

⇩

周波数特性 $H(\omega) = \dfrac{1}{1 - be^{-j\omega}}$

• 周波数振幅特性と周波数位相特性

周波数特性は複素数なので，振幅（絶対値）と位相（偏角）による極座標で表示できる．

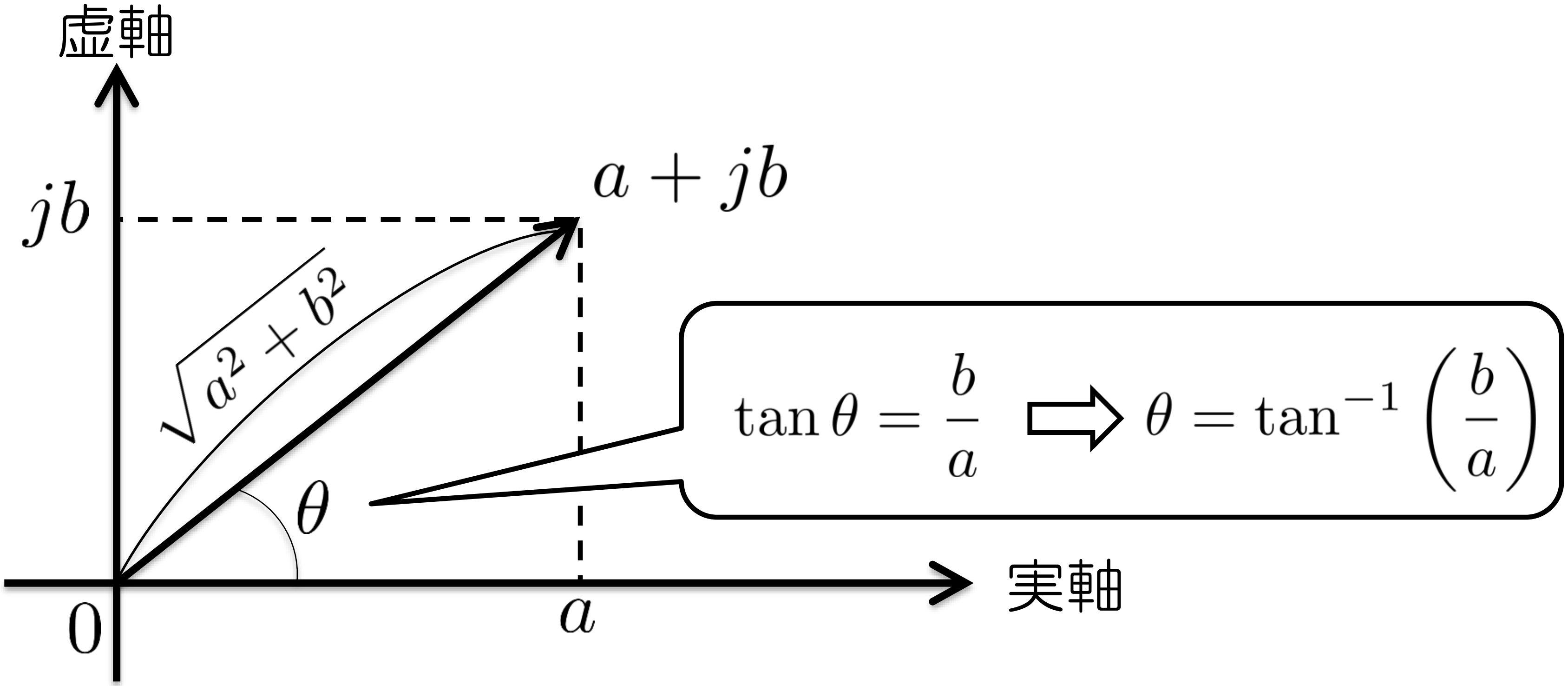
$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)}$$

ここで，$|H(\omega)|$ を周波数振幅特性

$\angle H(\omega)$ を周波数位相特性

と呼ぶ

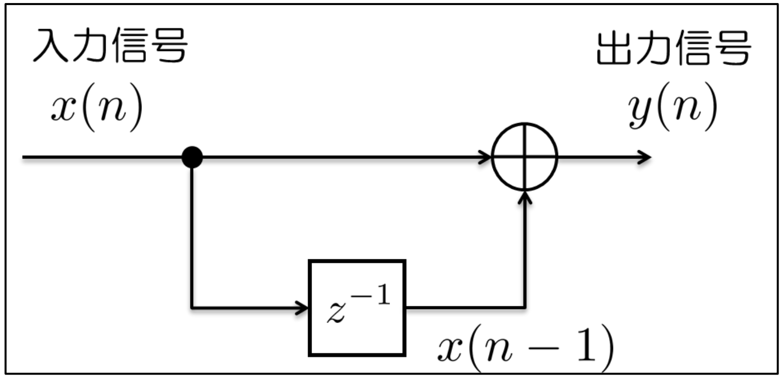
複素数と極座標



$$a = \sqrt{a^2+b^2}\cos\theta, \quad b = \sqrt{a^2+b^2}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad a + jb = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta + j\sin\theta)$$

- 周波数振幅特性と位相特性の例

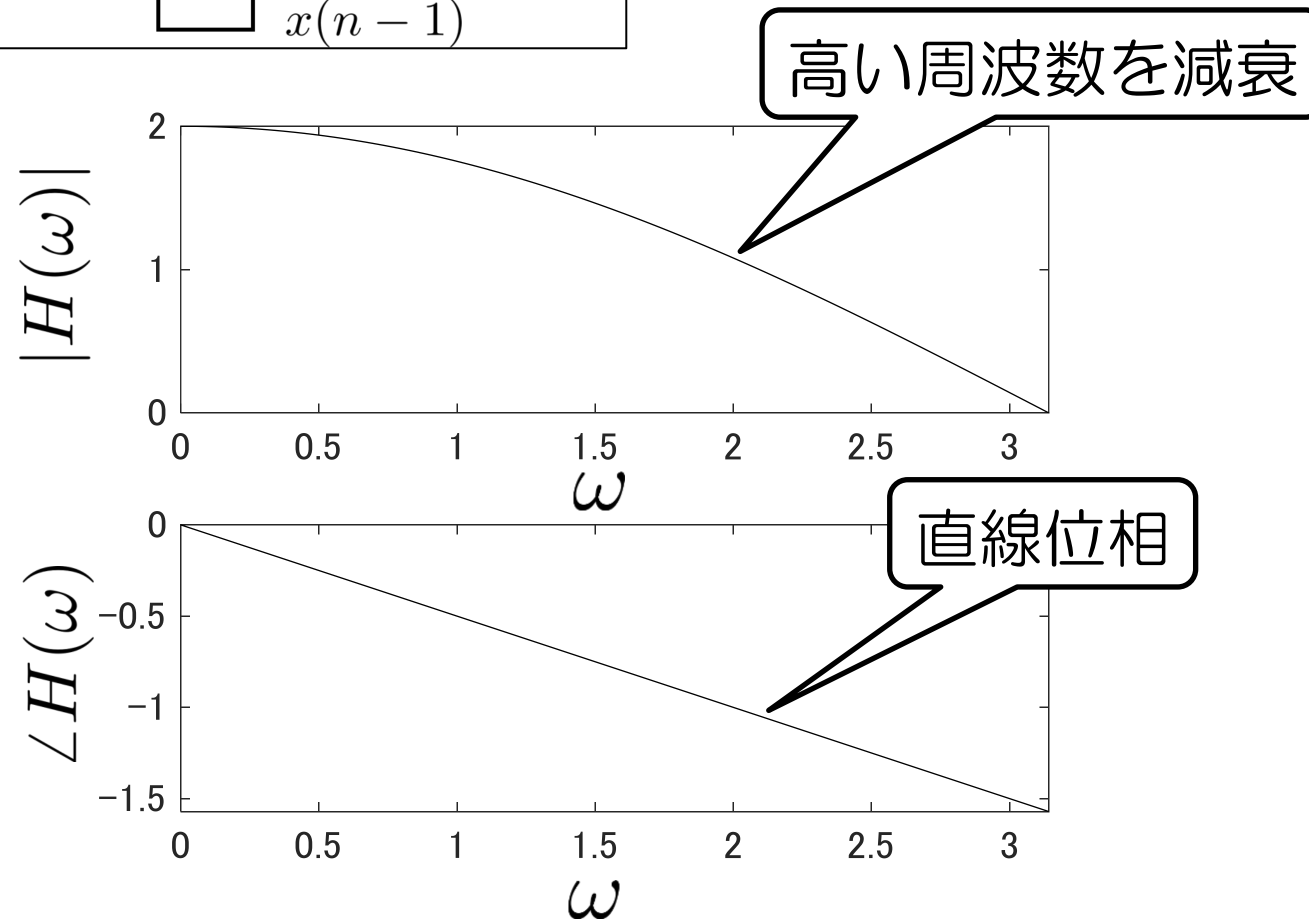


周波数特性

$$H(\omega) = 1 + e^{-j\omega}$$

周波数振幅特性

周波数位相特性



振幅スペクトルと位相スペクトル

- 離散時間フーリエ変換（DTFT: Discrete-Time Fourier Transform）

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$z = e^{j\omega}$の
z変換と同じ

- 逆離散時間フーリエ変換（IDTFT: Inverse DTFT）

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

⇒ $X(\omega)$ を(複素)スペクトルと呼ぶ

- DTFTとIDTFTの確認

DTFT

$$X(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)e^{-j\omega l}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underline{X(\omega)}e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)e^{-j\omega l} \right) e^{j\omega n}d\omega$$

$l = n$ 以外では積分結果が0

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-l)}d\omega$$

IDTFTにより $x(n)$ が得られた

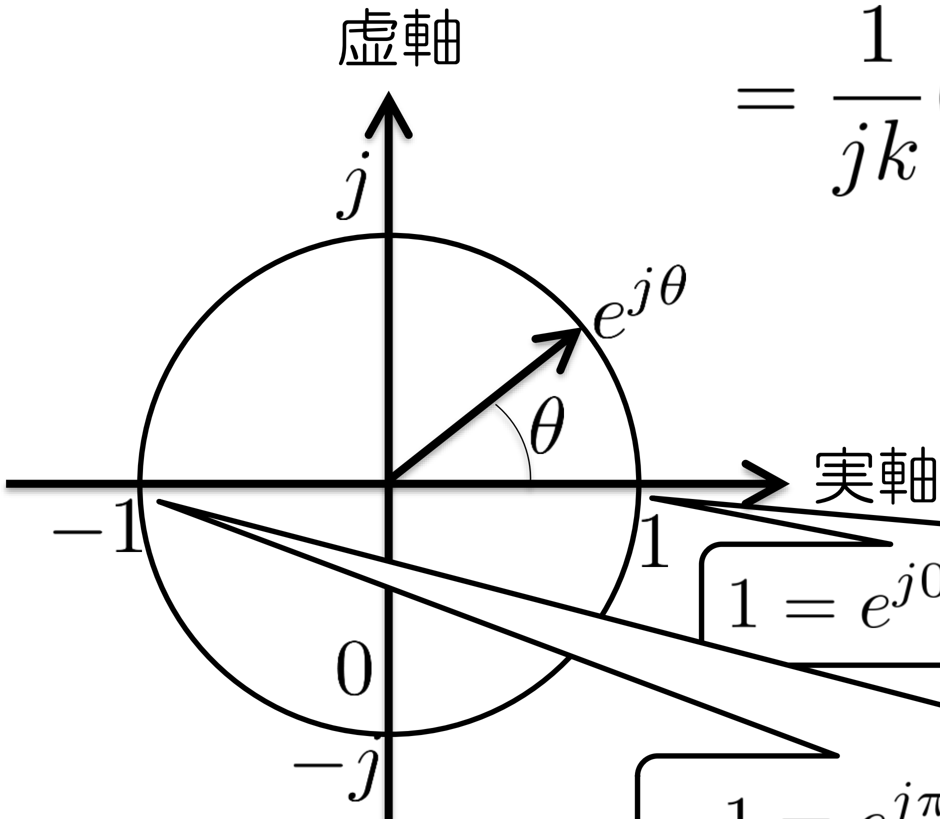
$$= \frac{1}{2\pi}x(n)\int_{-\pi}^{\pi} d\omega = \underline{x(n)}$$

補足資料：複素周期信号の積分

$k = n - l \neq 0$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega k} d\omega = \frac{1}{jk}\left[e^{j\omega k}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{jk}((-1)^k - (-1)^k) = 0$$



$1 = e^{j0} = e^{j2\pi} = e^{j4\pi} = e^{j6\pi} = \cdots$

$-1 = e^{j\pi} = e^{j3\pi} = e^{j5\pi} = e^{j7\pi} = \cdots$

- DTFTのスペクトル

$\boxed{\text{複素スペクトル}}$ $X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)}$

$\boxed{\text{振幅スペクトル}}$ $|X(\omega)|$

$\boxed{\text{位相スペクトル}}$ $\angle X(\omega)$

DTFTではスペクトルX(ω)がωの数だけある

$\Rightarrow$ ωは実数 $\Rightarrow$ 無限個のスペクトルがある

$\Rightarrow$ 計算機で扱えない

使用する信号とスペクトルをN個に限定する

N個の信号	$x(0),\ x(1),\ \cdots,\ x(N-1)$
N個のスペクトル	$X(0),\ X(1),\ \cdots,\ X(N-1)$

- 離散フーリエ変換（DFT: Discrete Fourier Transform）

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

- 逆離散フーリエ変換（IDFT: Inverse DFT）

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

※ FFTはDFTの高速算法。結果は同じ

- DFTとIDFTの確認

DFT

$$X(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) e^{-j\frac{2\pi k}{N}l}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \underline{X(k)} e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l) e^{-j\frac{2\pi k}{N}l}\right) e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k}{N}(n-l)}$$

$l = n$ 以外では積和演算が0

$$= \frac{1}{N} x(n) \sum_{k=0}^{N-1} 1 = \underline{x(n)}$$

IDFTにより $x(n)$ が得られた

- DFTのスペクトル

$\boxed{\text{複素スペクトル}}$ $X(k) = |X(k)|e^{j\angle X(k)}$

$\boxed{\text{振幅スペクトル}}$ $|X(k)|$

$\boxed{\text{位相スペクトル}}$ $\angle X(k)$

ここで, $k = 0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$

⇒ 計算機で扱えるので，通常はDFT（FFT）が使用される
⇒ Scilabでは「fft」コマンドが利用できる

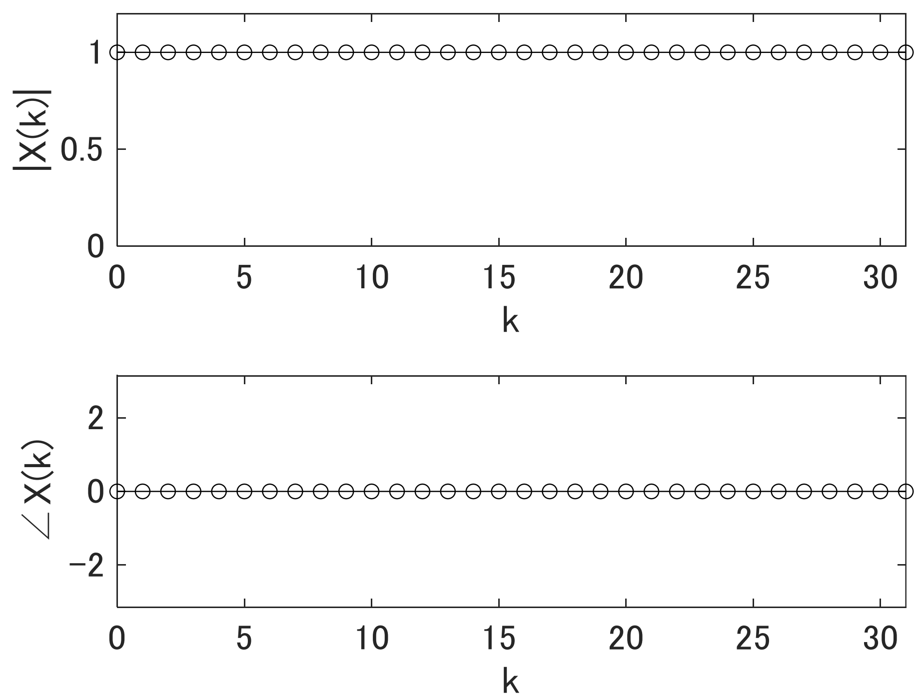
例）インパルス信号に対するDFT

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$|X(k)| = 1$$

$$\angle X(k) = 0$$



（N=32のとき）

[Scilab演習]
インパルスに対するFFTを実行し，結果を確認せよ．

Scilabコマンド：fft, abs, angle (atan), plot

[Scilab演習]
正弦波に対するFFTを実行し，結果を確認せよ．

Scilabコマンド：sin, cos

例）正弦波信号に対するDFT

オイラーの公式より

$$e^{j\theta} = \cos\theta + \sin\theta$$

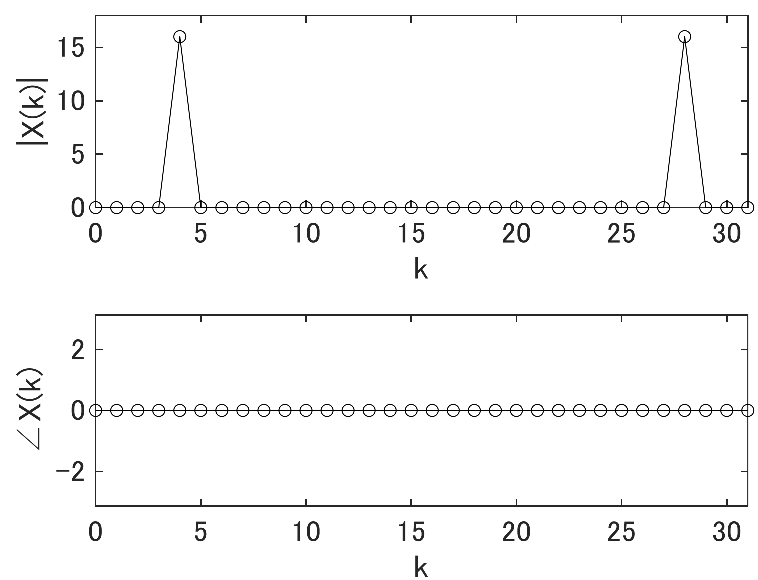
$$e^{-j\theta} = \cos\theta - \sin\theta$$

$$x(n) = \cos\left(2\pi\frac{4}{N}n\right) = \frac{1}{2}e^{j2\pi\frac{4}{N}n} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi\frac{4}{N}n}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j2\pi\frac{4-k}{N}n} + e^{j2\pi\frac{-4-k}{N}n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j2\pi\frac{4-k}{N}n} + e^{j2\pi\frac{N-4-k}{N}n}\right)$$

$$= \begin{cases} N/2, & k = 4 \\ N/2, & k = N-4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



（N=32のとき）

ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$= \int_0^\infty f(t)\underline{e^{-\sigma t}}e^{-j\omega t}dt$$

z変換

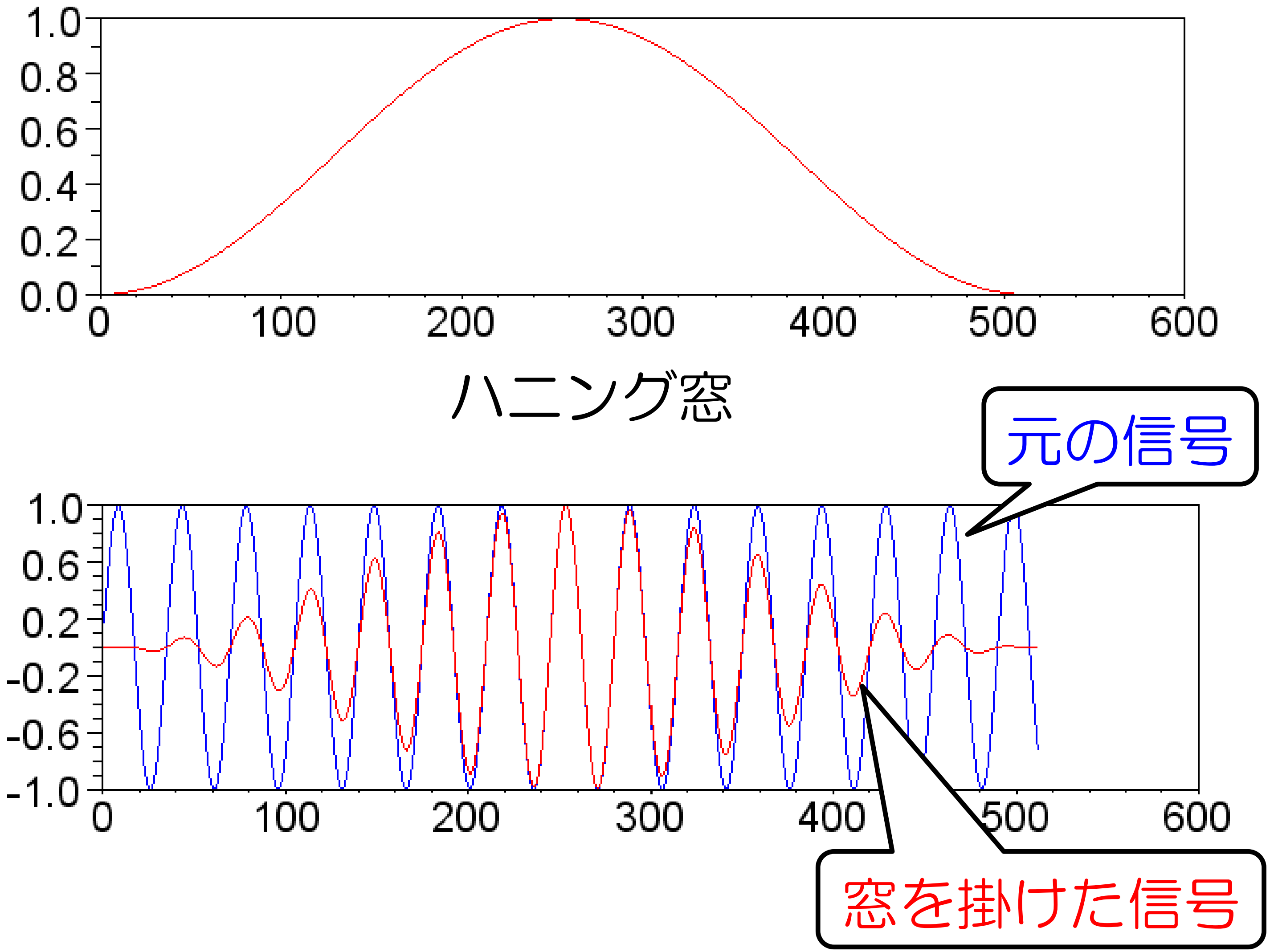
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$z = re^{j\omega}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\underline{r^{-n}}e^{-j\omega n}$$

ラプラス変換		z変換
連続時間 t	$\Longleftrightarrow$	離散時間 n
e^{σ}	$\Longleftrightarrow$	r

- 窓関数



窓関数は，信号の端を0に減衰させる⇒フィルタ設計，信号解析

- 窓関数の種類

ハニング窓

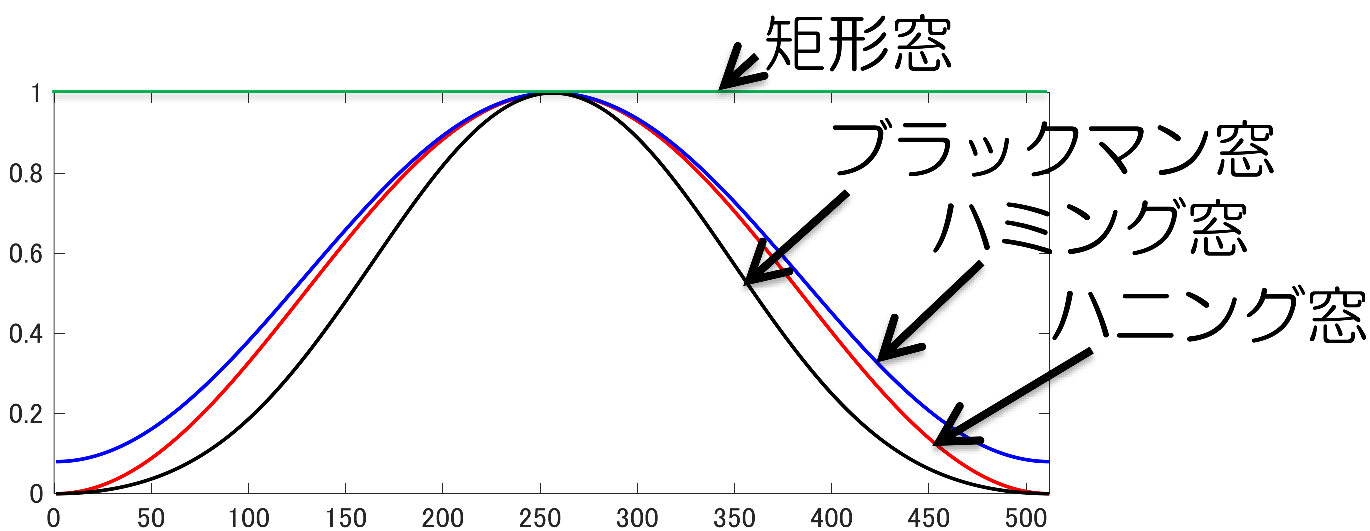
$$w_{\mathrm{hn}}(n) = 0.5 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

ハミング窓

$$w_{\mathrm{hm}}(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

ブラックマン窓

$$w(n)_{\mathrm{bm}} = 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$$



[Scilab演習]
正弦波に窓関数を掛けてからFFTを実行し，結果を確認せよ．

課題）前回作成したフィルタ(LPF, HPF, BPF, NF)の周波数振幅特性を示せ.

LPF, HPF, BPF $\quad |H(\omega)| = \left| \sum_{m=0}^{M} h_m e^{-j\omega m} \right|$

$$(\omega : \ 0 \rightarrow \pi)$$