Demostración de NP-Completitud del problema de CLIQUE

Alejandro León Fernández
Javier Esteban Pérez Rivas
Sara Revilla Báez

Universidad de La Laguna

16 de enero de 2019

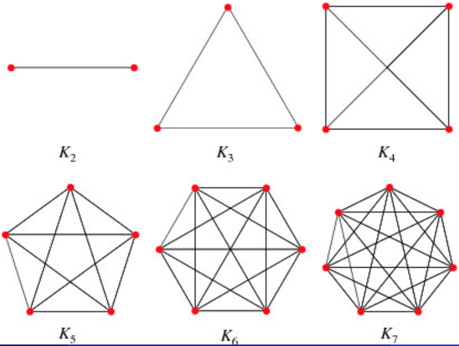
Índice

¿Qué es un clique?

Definición

Un clique es un subconjunto de vértices de un grafo no dirigido, tal que cada par de vértices sea adyacente. Es decir, que su subgrafo inducido es completo.

El término se usó por primera vez en un trabajo Luce & Perry (1949) en referencia a los grupos de personas que se conocen entre todas ellas.



Descripción del problema

INSTANCIA

Se tiene un grafo $G = (V, E)$ y un entero positivo k.

PREGUNTA

¿Existe un k-clique en G?
Es decir, que si existe un conjunto de vertices $V' \subseteq V$ tal que,

$$|V'| \geq k$$

$$\forall u, v \in S \implies \exists (u, v) \in E$$

Demostración de NP-completitud

Definición

Para demostrar que el problema de CLIQUE es NP-completo, debemos probar que:

I. CLIQUE está en NP
II. Existe una transformación de cualquier problema de la clase NP a CLIQUE o, alternativamente, que existe una transformación de un problema NP-completo a CLIQUE

CLIQUE está en NP

Theorem

Si encontramos un algoritmo no determinista que decida si para un grafo $G = (V, E)$ existe un clique de tamaño mayor o igual que k, entonces podemos afirmar que el problema de $CLIQUE \in NP$.

Demostración.

Para ello, basta con probar con todos los $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \geq k$ y ver si alguno de ellos es un clique.
Esta comprobación se puede realizar en tiempo polinomial mirando que $(u, v) \in E$ para cada $u, v \in S$, lo cual tiene complejidad $O(n^2)$. $\square$

Inciso

Existe una secuencia de transformaciones que permiten demostrar que el CLIQUE es reducible al SAT de manera prácticamente trivial (comparándolo con el VC). Sin embargo, vamos a plantear una transformación directa del 3-SAT al CLIQUE.

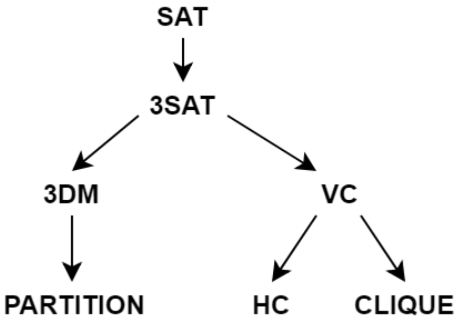


Figura: Diagrama de la secuencia de transformaciones de los 6 problemas básicos

Transformación del 3-SAT al CLIQUE

3-SAT

- INSTANCIA: Dada una colección $C = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$ de cláusulas con un conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de variables, tal que $|c_i| = 3$ para $1 \geq i \geq m$
- PREGUNTA: ¿Existe alguna asignación de verdad para X que satisfaga todas las cláusulas en C?

Transformación del 3-SAT al CLIQUE (II)

Transformación

Dada ϕ una instancia de 3-SAT tal como hemos descrito, y cada cláusula $c_i = \{z_{i1}, z_{i2}, ..., z_{it}\}$ (con $t = 3$), necesitamos construir una instancia del CLIQUE (un grafo), que sea positiva si y solo si ϕ también es positiva.

Transformación del 3-SAT al CLIQUE (III)

Grafo

Construimos un grafo $G = (V, E)$ de la siguiente forma:

1. En primer lugar añadimos t nodos por cada cláusula. Este paso se hace en tiempo $O(t \cdot m)$ que es $O(m)$ ya que $t = 3$.
2. Para cada par de nodos v_{ab}, v_{cd} en G, añadimos la arista (v_{ab}, v_{cd}) si y solo si:
   - $a \neq c$
   - $z_{ab} \neq \bar{z}_{cd}$

ϕ es satisfactible si y solo si G tiene un clique de tamaño $k \geq m$.

Transformación del 3-SAT al CLIQUE (IV)

Demostración.

Si ϕ es satisfactible, elegimos un literal satisfecho de cada cláusula obteniendo $\{z_1^*, z_2^*, ..., z_m^*\}$, siendo $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ los nodos correspondientes en G. Dicho conjunto de nodos forma un m-clique, pues estarán conectados ya que:

- Hemos escogido los literales de diferentes cláusulas
- No puede haber contradicciones entre los literales escogidos porque ϕ es satisfactible

$\square$

Transformación del 3-SAT al CLIQUE (V)

Demostración.

Viceversa, supongamos que G tiene un clique de tamaño $m = k$ o mayor. Sea $\{v_1, v_2, ..., v_q\}$ un clique en G de tamaño $q \geq m$. Entonces los m primeros nodos $\{v_1, ..., v_m\}$ también forman un clique en G.

- Dado que no hay aristas conectando nodos que vengan de la misma cláusula, cada uno de los nodos corresponde a un literal de una cláusula.
- Además, no hay nodos que vengan de literales opuestos conectados debido a la construcción realizada

Así, para satisfacer ϕ basta con satisfacer $\{z_1, ..., z_m\}$ y asignar las variables restantes de forma arbitraria. □

Ejemplo (I)

Sea ϕ una instancia de 3-SAT, con variables x_i, para i en $1 \leq i \leq 3$, se obtiene el siguiente grafo aplicando la reducción comentada anteriormente.

Problema

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

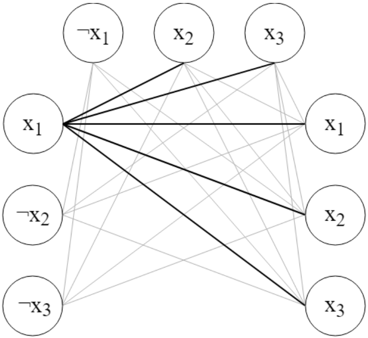


Figura: Grafo resultante

Ejemplo (II)

Elegimos una variable, z_i, dentro de cada cláusula y suponemos que son verdaderas. Cada una se corresponde con un nodo dentro del grafo. ϕ se podrá satisfacer si, y solo si, existe un **clique** para los nodos elegidos. Para este ejemplo, elegiremos x_1 como variable positiva de la primera cláusula, x_2, para la segunda, y x_3, para la tercera.

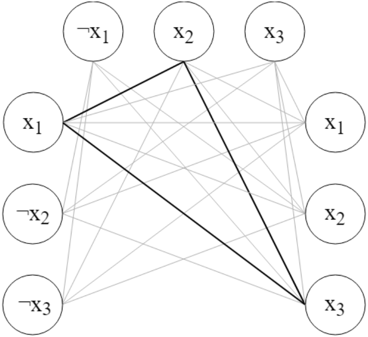


Figura: Clique

Bibliografía

Michael Garey, David S. Johnson.
Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.
W. H. Freeman and Company, 1979.

Lalla Mouatadid.
Introduction to Complexity Theory: CLIQUE is NP-complete.
CSC 373 - Algorithm Design, Analysis, and Complexity, Summer 2014.

Gracias

Alejandro León Fernández
Javier Esteban Pérez Rivas
Sara Revilla Báez