Demostración de la NP-Completitud del problema CLIQUE

Alejandro León Fernández
Javier Esteban Pérez Rivas
Sara Revilla Báez

16 de enero de 2019

Índice

1. Introducción

1.1. ¿Qué es un clique?

El término se usó por primera vez en un trabajo Luce & Perry (1949) en referencia a los grupos de personas que se conocen entre todas ellas.

De manera informal, un ***clique*** es un subconjunto de vértices de un grafo no dirigido, tal que cada par de vértices sea adyacente. Es decir, que su subgrafo inducido es completo.

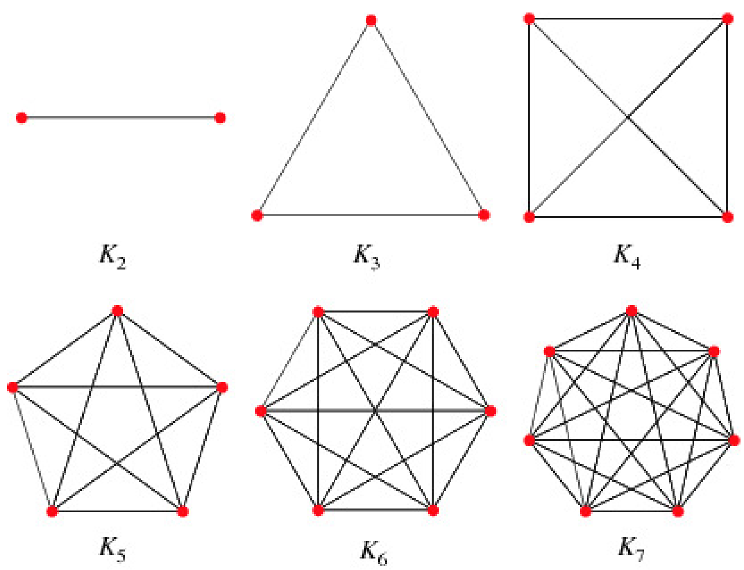

Figura 1: Distribución de cliques en función de su tamaño

1.2. Descripción del problema

Dado un grafo $G = (V, E)$ y un entero positivo k:

¿Existe un ***k-clique*** en G?

Es decir, que si existe un conjunto de vertices $V' \subseteq V$ tal que,

$$|V'| \geq k$$

$$\forall u, v \in S \implies \exists (u, v) \in E$$

2. Demostración de NP-Completitud

Para poder demostrar que un problema es ***NP-Completo***, debemos probar que:

- El problema pertenece a la clase ***NP***.
- Existe una transformación de cualquier problema de la clase ***NP*** a dicho problema o que, alternativamente, existe una transformación de un problema ***NP-Completo*** a este problema.

2.1. CLIQUE pertenece a NP

"Si encontramos un algoritmo no determinista que decida si para un grafo G = (V, E) existe un clique de tamaño mayor o igual que k, entonces podemos afirmar que el problema de CLIQUE ∈ NP"

Para ello, bastaría con probar con todos los $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \geq k$ y ver si existe un clique de tamaño mayor o igual a k. Esta comprobación se puede realizar en tiempo polinomial mirando que $(u, v) \in E$ para cada $u, v \in S$, lo cual tiene complejidad $O(n^2)$.

2.2. Transformación de un problema NP-Completo a CLIQUE

Existe una secuencia de transformaciones que permiten demostrar que el CLIQUE es reducible al SAT de manera prácticamente trivial (comparándolo con el ***Vertex Cover***). Sin embargo, vamos a plantear una transformación directa del 3-SAT al CLIQUE

2.3. Descripción del Problema 3-SAT

Dada una colección $C = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$ de cláusulas con un conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de variables, tal que $|c_i| = 3$ para $1 \geq i \geq m$

¿Existe alguna asignación de verdad para X que satisfaga todas las cláusulas en C?

2.4. Transformación del 3-SAT al CLIQUE

Sea ϕ una instancia de 3-SAT tal como hemos descrito, y cada cláusula $c_i = \{z_{i1}, z_{i2}, ..., z_{it}\}$ (con $t = 3$), necesitamos construir una instancia del CLIQUE (un grafo), que sea positiva si, y sólo si, ϕ también es positiva.

Construimos un grafo $G = (V, E)$ de la siguiente forma:

1. En primer lugar añadimos t nodos por cada cláusula. Este paso se hace en tiempo $O(t \cdot m)$ que es $O(m)$, ya que t es constante ($t = 3$).

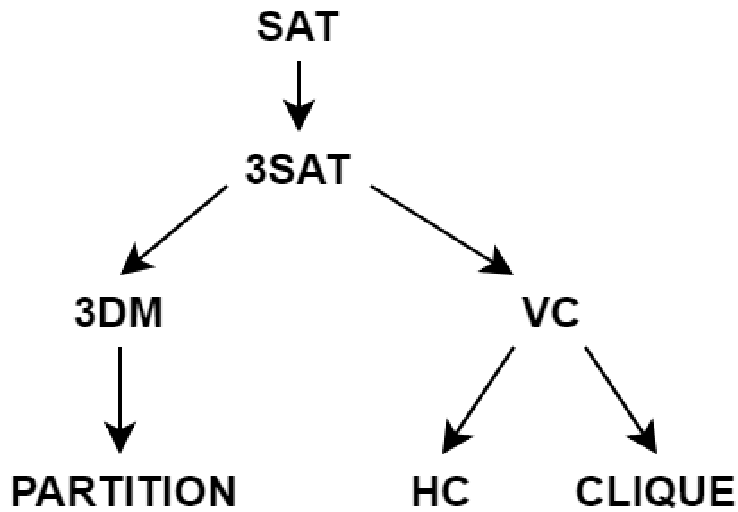

Figura 2: Diagrama de la secuencia de transformaciones de los 6 problemas básicos

2. Para cada par de nodos v_{ab}, v_{cd} en G, añadimos la arista (v_{ab}, v_{cd}) si, y sólo si:
   - $a \neq c$
   - $z_{ab} \neq \bar{z}_{cd}$

ϕ **es satisfactible si y solo si** G **tiene un clique de tamaño** $k \geq m$**.**

2.5. Demostración

Si ϕ es satisfactible, elegimos un literal satisfecho de cada cláusula obteniendo $\{z_1^*, z_2^*, ..., z_m^*\}$, siendo $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ los nodos correspondientes en G. Dicho conjunto de nodos forma un ***m-clique***, pues estarán conectados ya que:

- Hemos escogido los literales de diferentes cláusulas
- No puede haber contradicciones entre los literales escogidos porque ϕ es satisfactible

De manera inversa, supongamos que G tiene un clique de tamaño $m = k$ o mayor. Sea $\{v_1, v_2, ..., v_q\}$ un clique en G de tamaño $q \geq m$. Entonces los m primeros nodos $\{v_1, ..., v_m\}$ también forman un clique en G.

- Dado que no hay aristas conectando nodos que vengan de la misma cláusula, cada uno de los nodos corresponde a un literal de una cláusula.

- Además, no hay nodos que vengan de literales opuestos conectados debido a la construcción realizada

Así, para satisfacer ϕ basta con satisfacer $\{z_1, ..., z_m\}$ y asignar las variables restantes de forma arbitraria.

3. Ejemplo

Sea ϕ una instancia de 3-SAT, con variables x_i, para i en $1 \leq i \leq 3$, se obtiene el siguiente grafo aplicando la reducción comentada anteriormente.

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

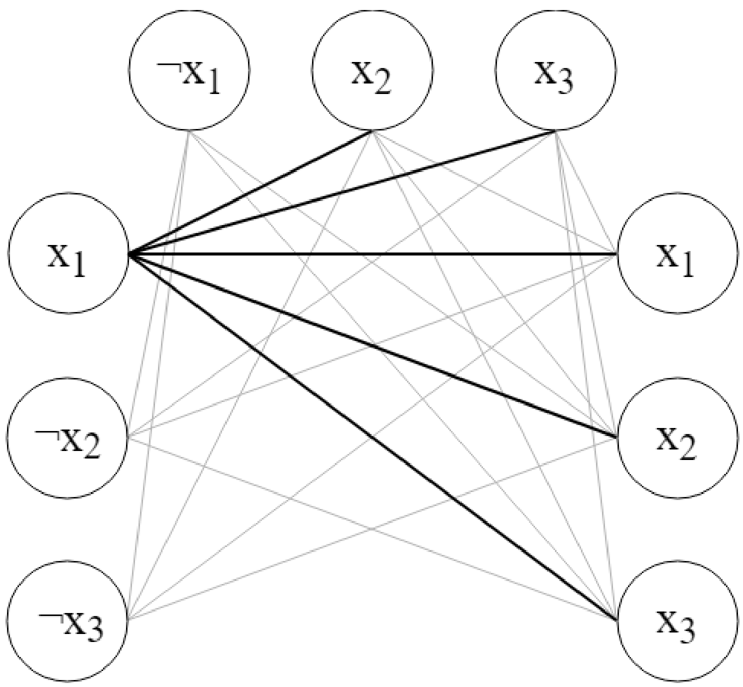

Figura 3: Grafo resultante de ϕ

En la figura 3, se puede observar como el grafo tiene 9 nodos, ya que ϕ tiene 3 cláusulas, y que no hay aristas entre nodos de la misma cláusula. Además, las aristas marcadas en negro corresponden con la uniones que habría entre el nodo x_1 de la primera cláusula, con el resto de nodos. Se aprecia que entre x_1 y $\bar{x}_1$ no se crea arista, pues se generarían contradicciones.

Elegimos una variable, z_i, dentro de cada cláusula y suponemos que es verdadera. Cada una se corresponde con un nodo dentro del grafo. ϕ se podrá satisfacer si, y sólo si, existe un **clique** para los nodos elegidos. Para este ejemplo, elegiremos x_1 como variable positiva de la primera cláusula, x_2, para la segunda, y x_3, para la tercera.

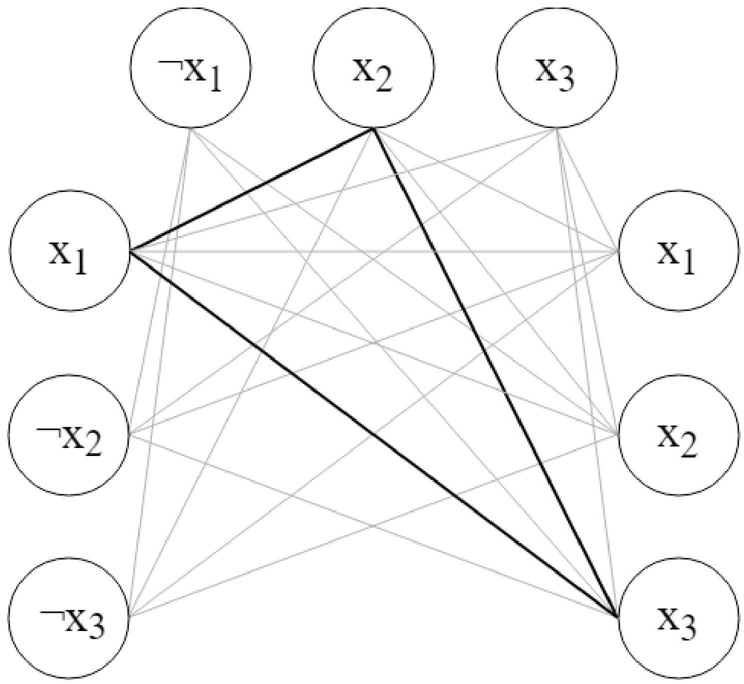

Figura 4: Clique obtenido con los nodos establecidos

Al elegir estos nodos, como se puede ver en la figura 4, existe un ***clique*** que conecta los tres nodos, por lo que, de este modo, ϕ se podría satisfacer.

Referencias

[1] Michael Garey, David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W. H. Freeman and Company, 1979.

[2] Lalla Mouatadid. *Introduction to Complexity Theory: CLIQUE is NP-complete.* CSC 373 - Algorithm Design, Analysis, and Complexity, Summer 2014.