データ構造とアルゴリズム
第11週

掛下　哲郎
kake@is.saga-u.ac.jp

前回のまとめ

グラフアルゴリズム

- グラフの定義
  - 無向グラフ，有向グラフ，重み付きグラフ
- グラフの表現
  - 隣接行列，隣接リスト
- グラフの探索
  - 幅優先探索（BFS），深さ優先探索（DFS）
- 探索の応用
  - 探索木
  - 前置記法，中置記法，後置記法

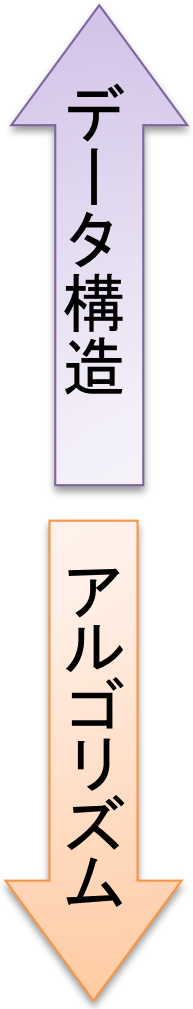
深さ優先探索 vs 幅優先探索

- 幅優先探索
  - 完全性：解が存在するならば，必ず発見できる．
  - 最適性：長さが最も短い経路を返す
  - 規模の大きな探索においては効率が悪い
- 深さ優先探索
  - 完全性や最適性は保証されない
  - 平均的なケースでは，幅優先探索と比較して記憶領域の使用量が少ない
  - 再帰アルゴリズムにより，簡単に記述できる
  - 後置記法を求める場合にも使用

要書き込み

講義スケジュール

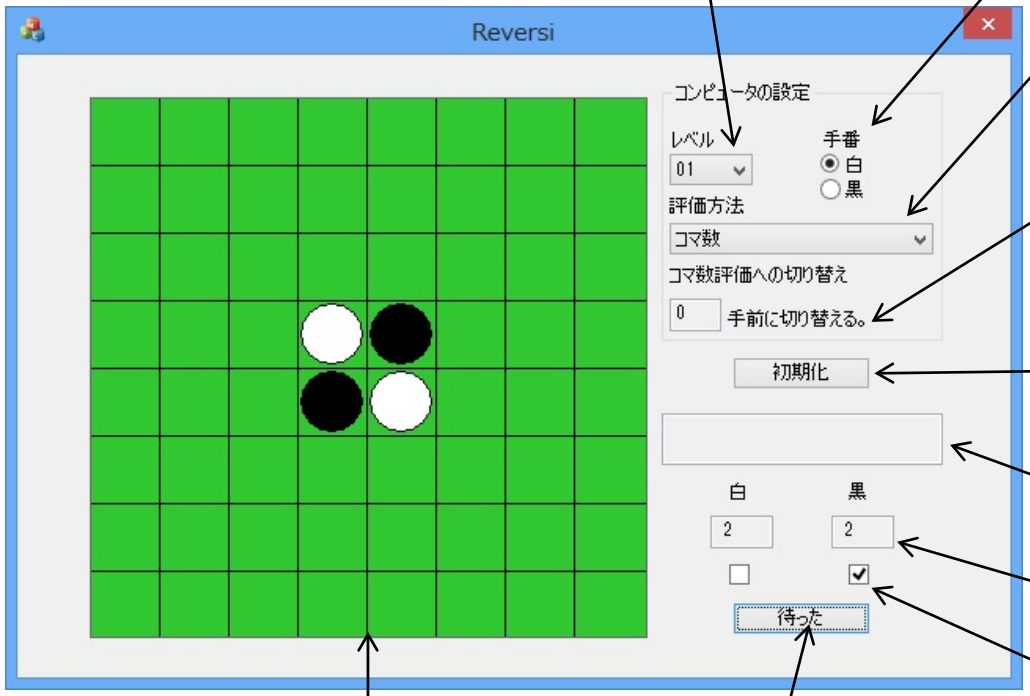
週	講義計画
1－2	導入
3	探索問題
4－5	基本的なデータ構造
6	動的探索問題とデータ構造
7	アルゴリズム演習（第1回）
8－9	データの整列
10－11	グラフアルゴリズム
12	文字列照合のアルゴリズム
13	アルゴリズム演習（第2回）
14	アルゴリズムの設計手法
15	計算困難な問題への対応



今日の内容

- 探索問題（続き）
  - Minimax法
- 最短経路問題（shortest path problem）
- ネットワークフロー（network flow）

コンピュータ対戦型リバーシ



コンピュータの手番を設定

何手先まで読むかを設定

局面の評価方法を設定

途中で評価方法を「コマ数評価」へ切り替える場合は、最後から何手前に切り替えるかを入力

盤面、設定をリセット

局面に応じてメッセージを表示

各プレイヤーのコマ数

現在の手番を示す

2手前に戻る

コマを打つ

局面の評価方法

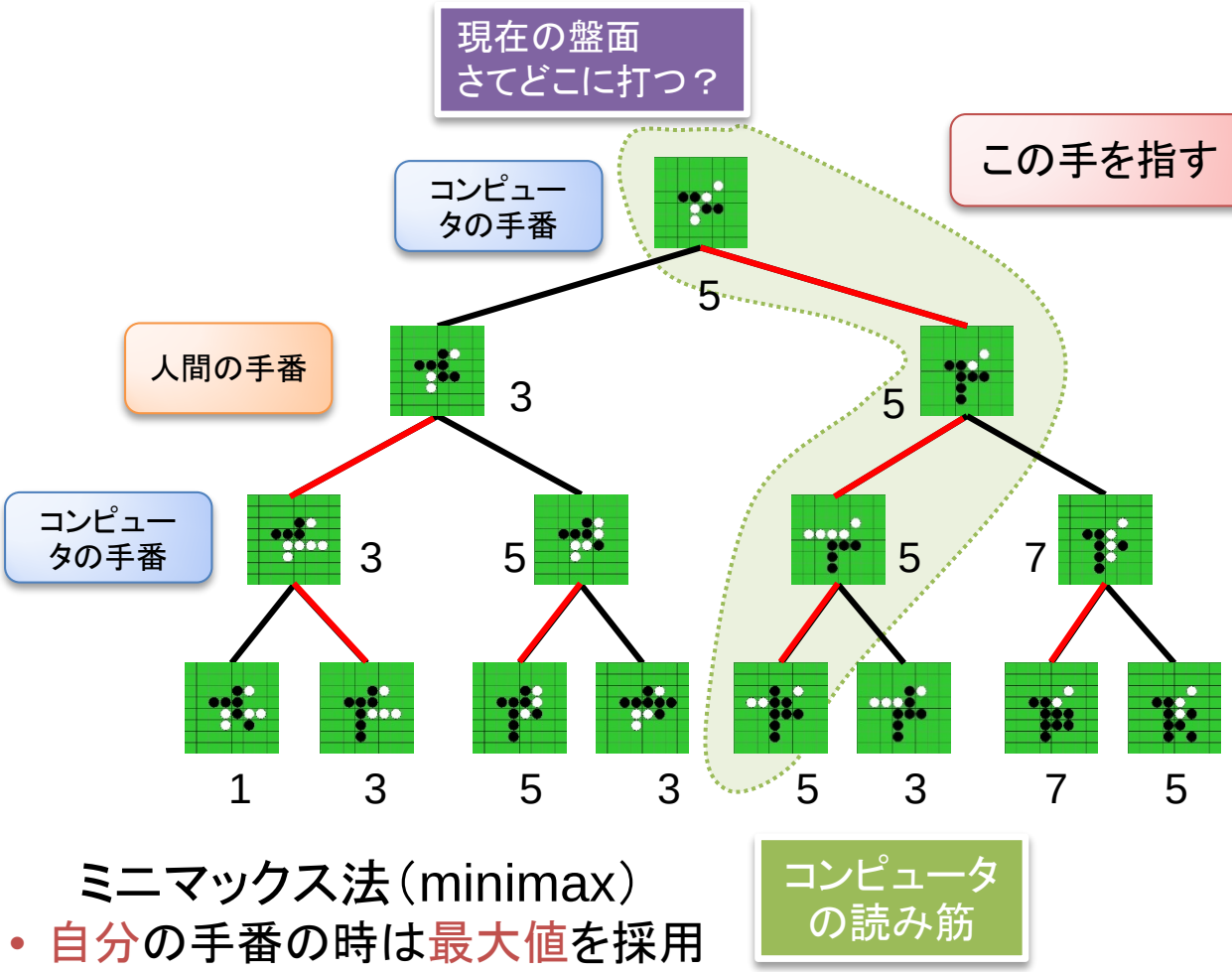
コマ数による評価	コマの位置による重み付け評価	着手可能数による評価
自分のコマ数から敵のコマ数を引いた値を評価値とする。	盤面の各マスに評価値を設け、自分のコマがあればその評価値を加算し、敵のコマがあれば減算します。そしてその合計値を評価値とする。	自分のコマが置けるマスの数を評価値とする。

同じ局面でも，評価方法を変えると，評価値は大きく変化

30	-12	0	-1	-1	0	-12	30
-12	-15	-3	-3	-3	-3	-15	-12
0	-3	0	-1	-1	0	-3	1
-1	-3	-1	-1	-1	-1	-3	-1
-1	-3	-1	-1	-1	-1	-3	-1
0	-3	0	-1	-1	0	-3	1
-12	-15	-3	-3	-3	-3	-15	-12
30	-12	0	-1	-1	0	-12	30

要書き込み

Minimax法による最善手の探索



4. 自分にとって一番有利な手を採用！
⇒ 評価値が最大の手

3. 相手は自分にとって一番不利な手を採用
⇒ 評価値が最小の手

2. 自分にとって一番有利な手を採用
⇒ 評価値が最大の手

1. 3手先の評価値を求める

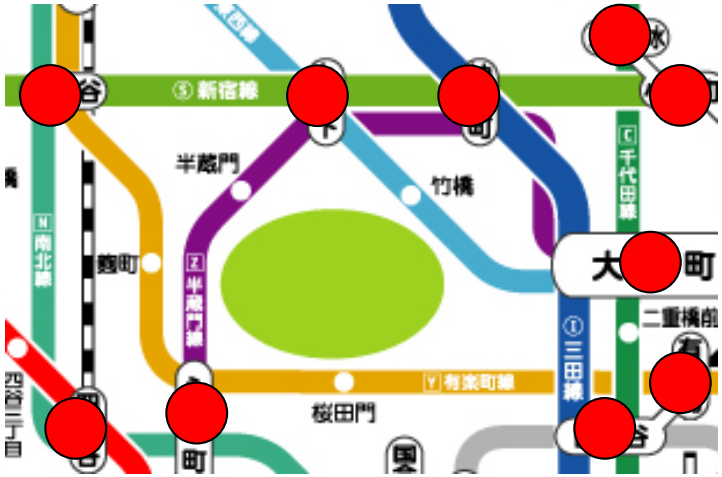
ミニマックス法（minimax）

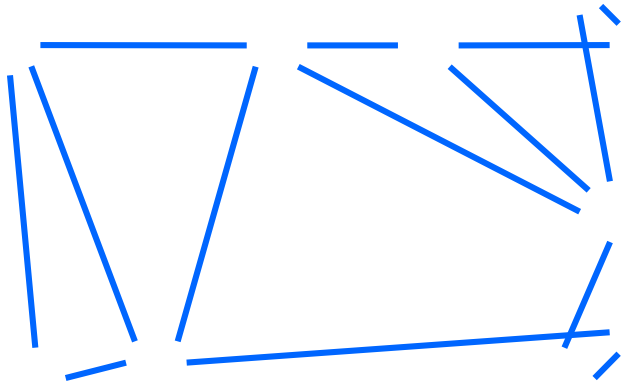
- 自分の手番の時は最大値を採用
- 相手の手番の時は最小値を採用

要書き込み

最短経路問題

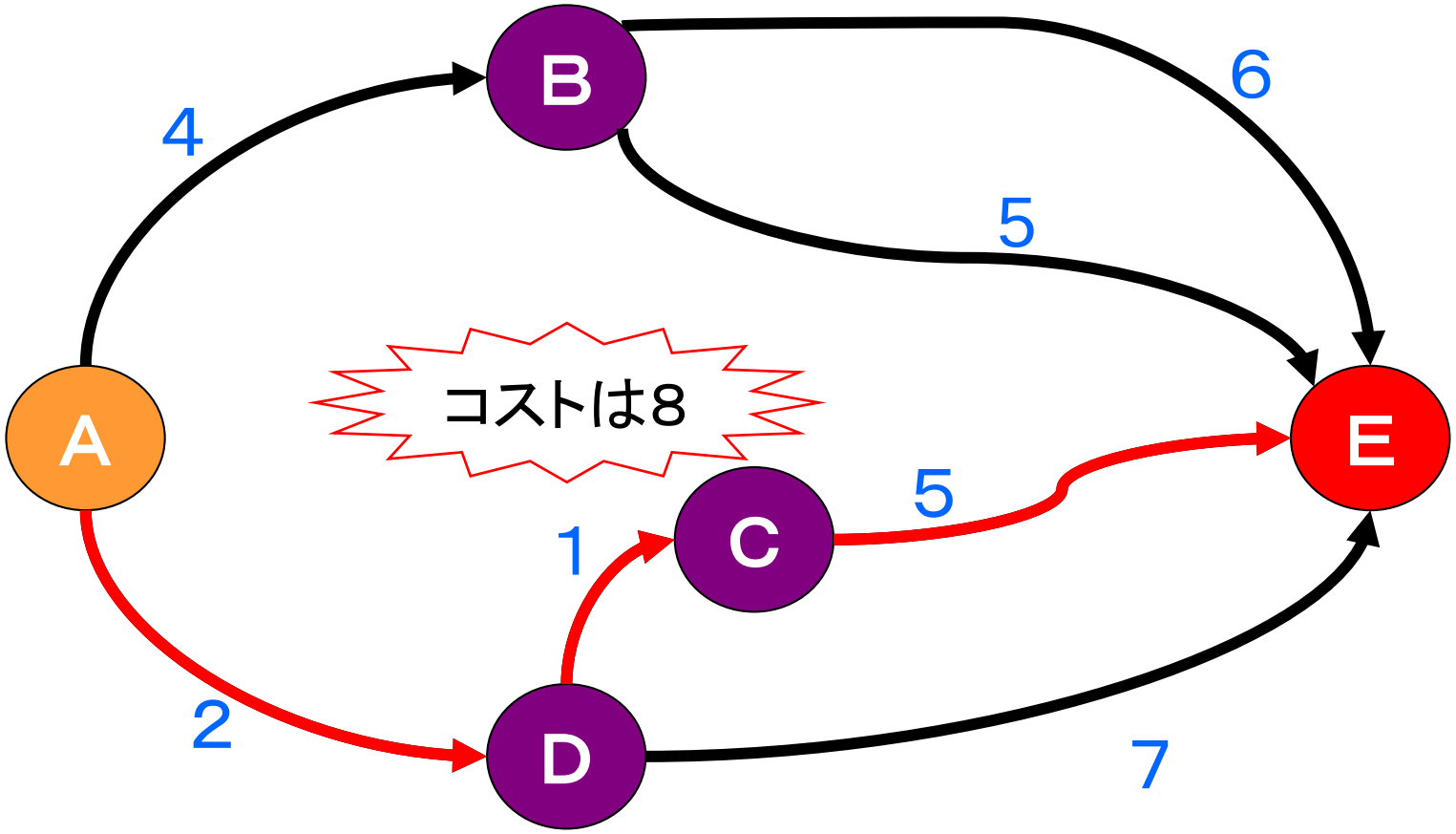
- 最もコスト（運賃，時間，距離など）の少ないルートを調べる





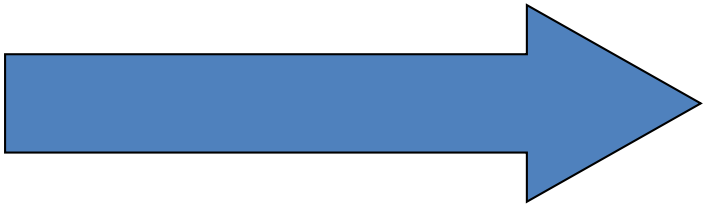
重み付き有向グラフで考える

Q1: 都市Aから都市Eへの，最短経路は？



グラフが複雑になると．．．

- 目で見ても分からない
- 全てのルートを調べると，非常に時間がかかる

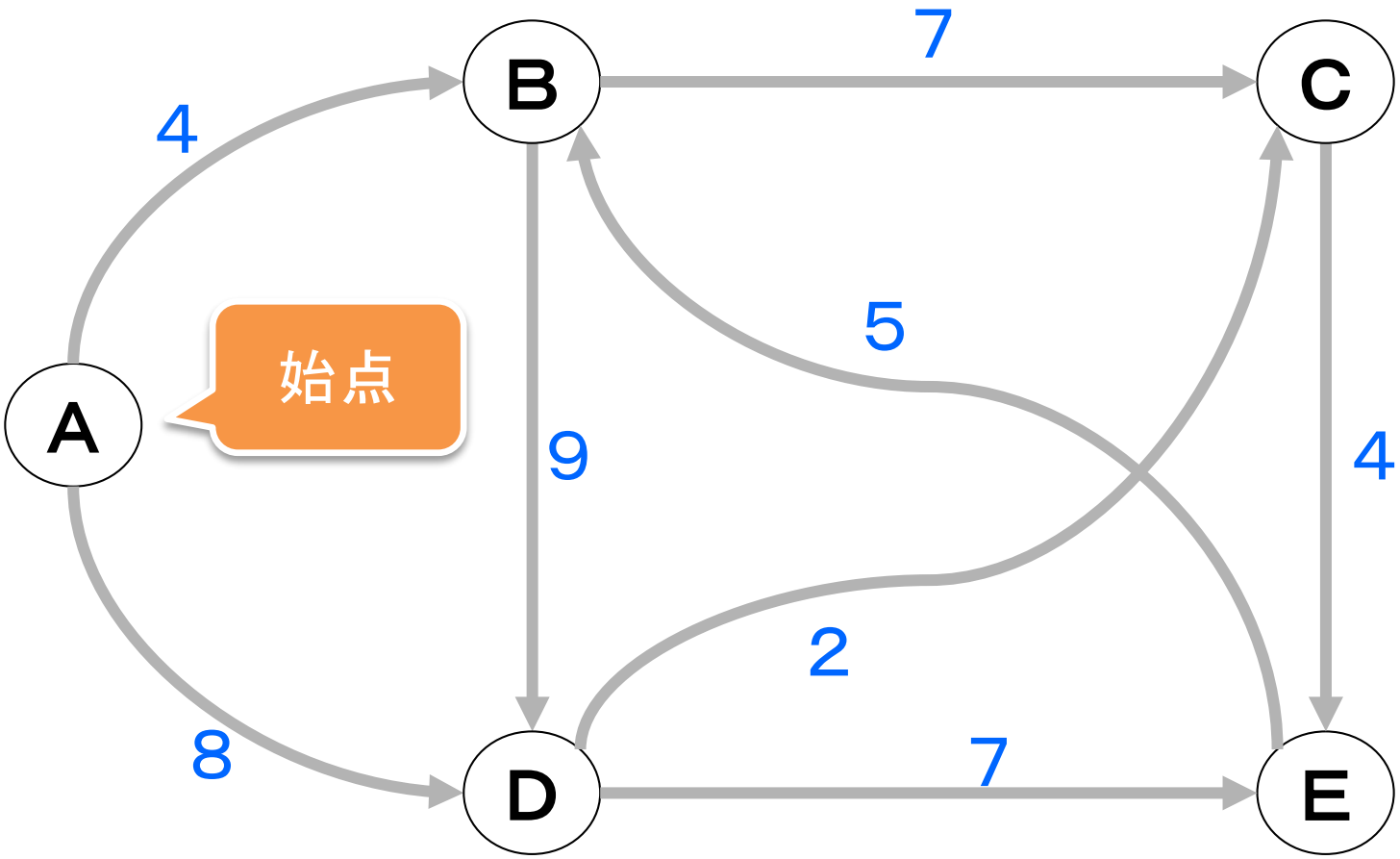


最短経路問題

- 入力：重み付き有向グラフ G=(V, E, c)
  - 頂点数n，辺数m
- 出力：2つの頂点間の最小距離
- いくつかのバリエーション
  - 「ある1頂点」から「他の1頂点」への距離
  - 「ある1頂点」から「他の全ての頂点」への距離
  - 「全ての頂点」から「全ての頂点」への距離

ダイクストラ法

始点から，調べる範囲をジワジワと広げながら距離を求めていく



要書き込み

ダイクストラの最短経路アルゴリズム

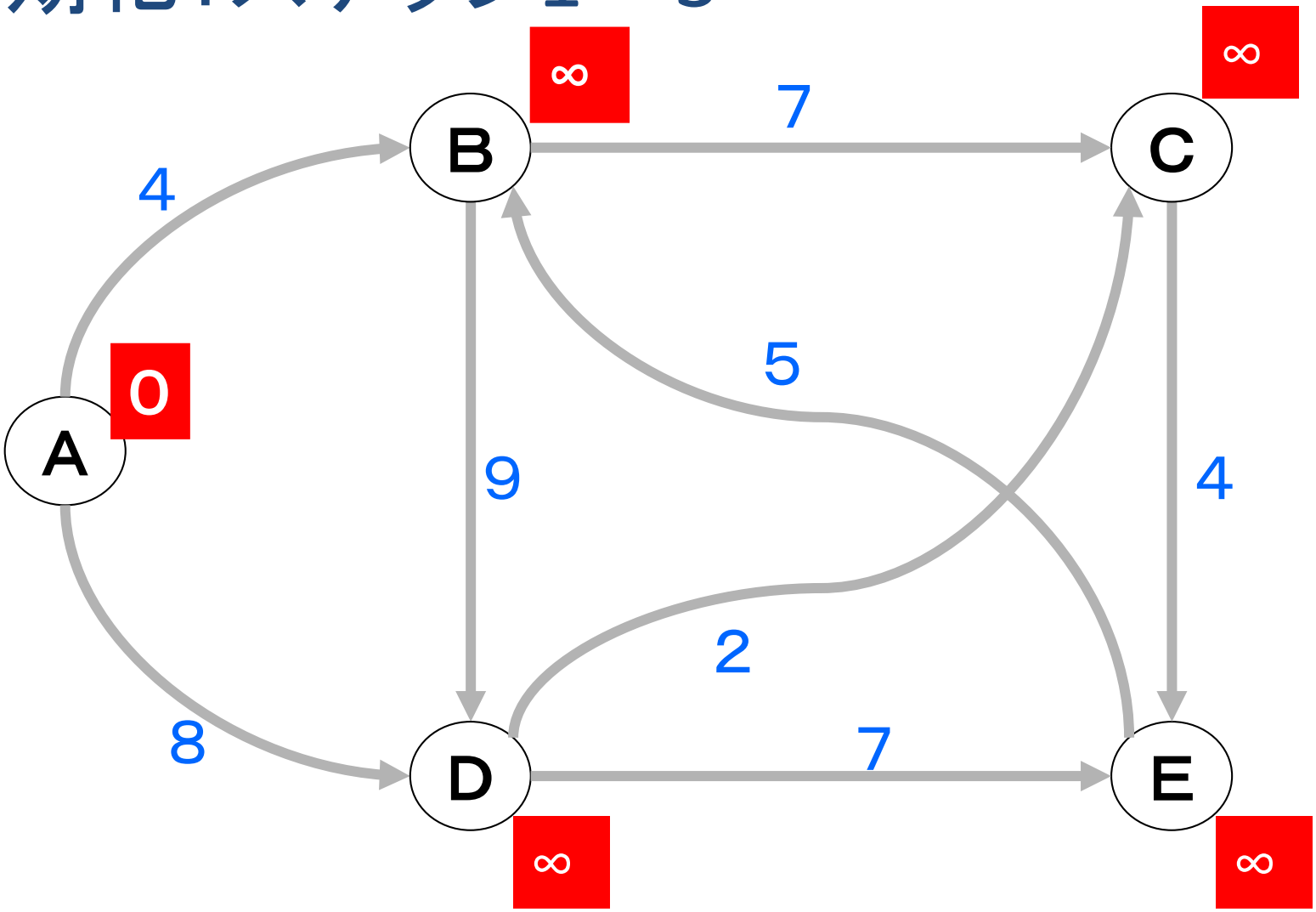
1. Gの各頂点vについて，vが保持する距離を∞とする.
2. 始点が保持する距離を0とする.
3. チェック済みの頂点集合Xを空とする.
4. すべての頂点がチェック済みになるまで，以下の処理を繰り返す.

   4-1 チェック済みでない頂点の中で，保持する距離が最小の頂点をuとする.

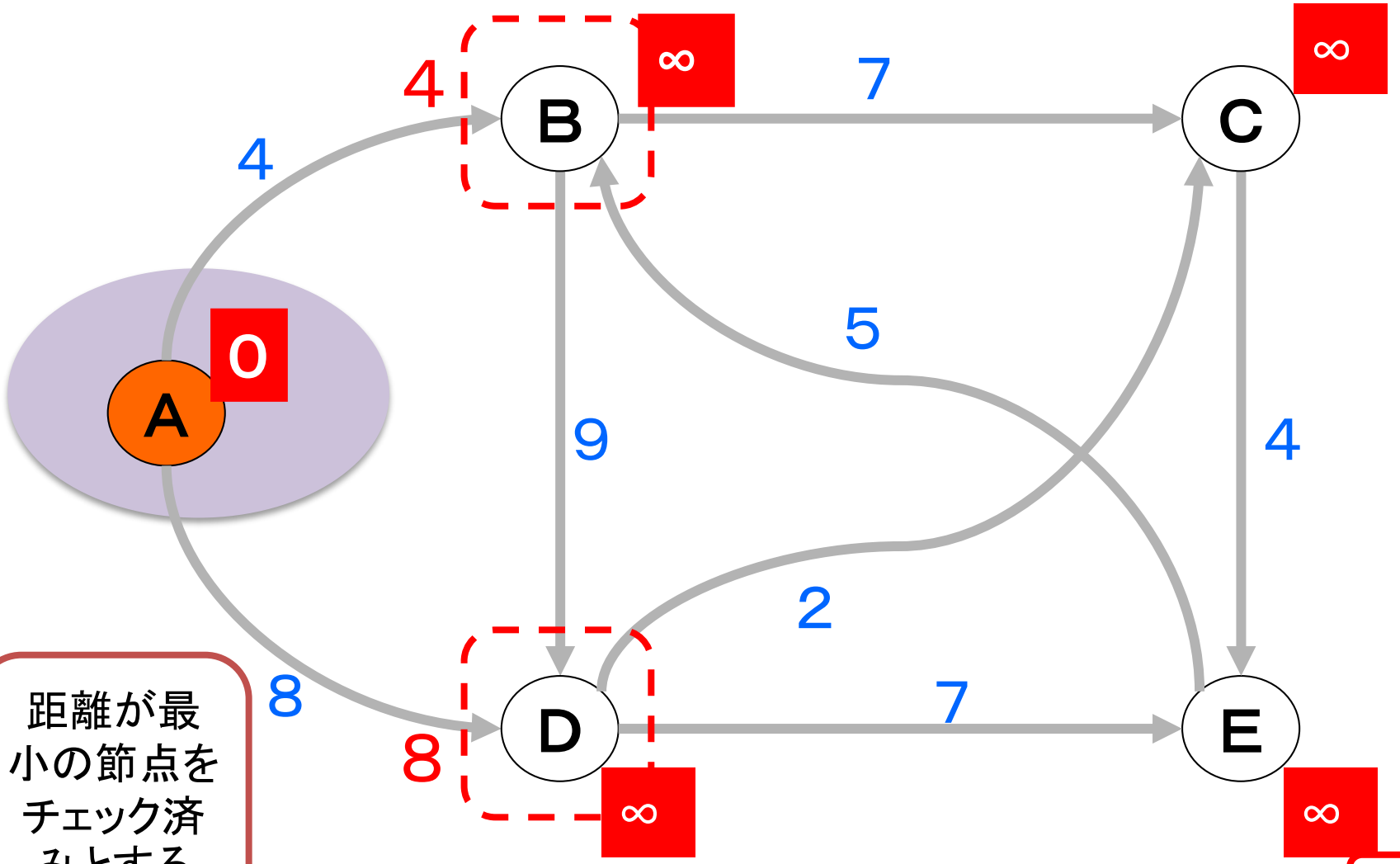
   4-2 頂点uをチェック済みとし，Xに追加する.

   4-3 頂点uから未チェック頂点vに向かう各辺について，uが保持する距離＋辺の重みが，vが保持する距離よりも小さいならば，vが保持する距離を更新する.

初期化：ステップ1～3



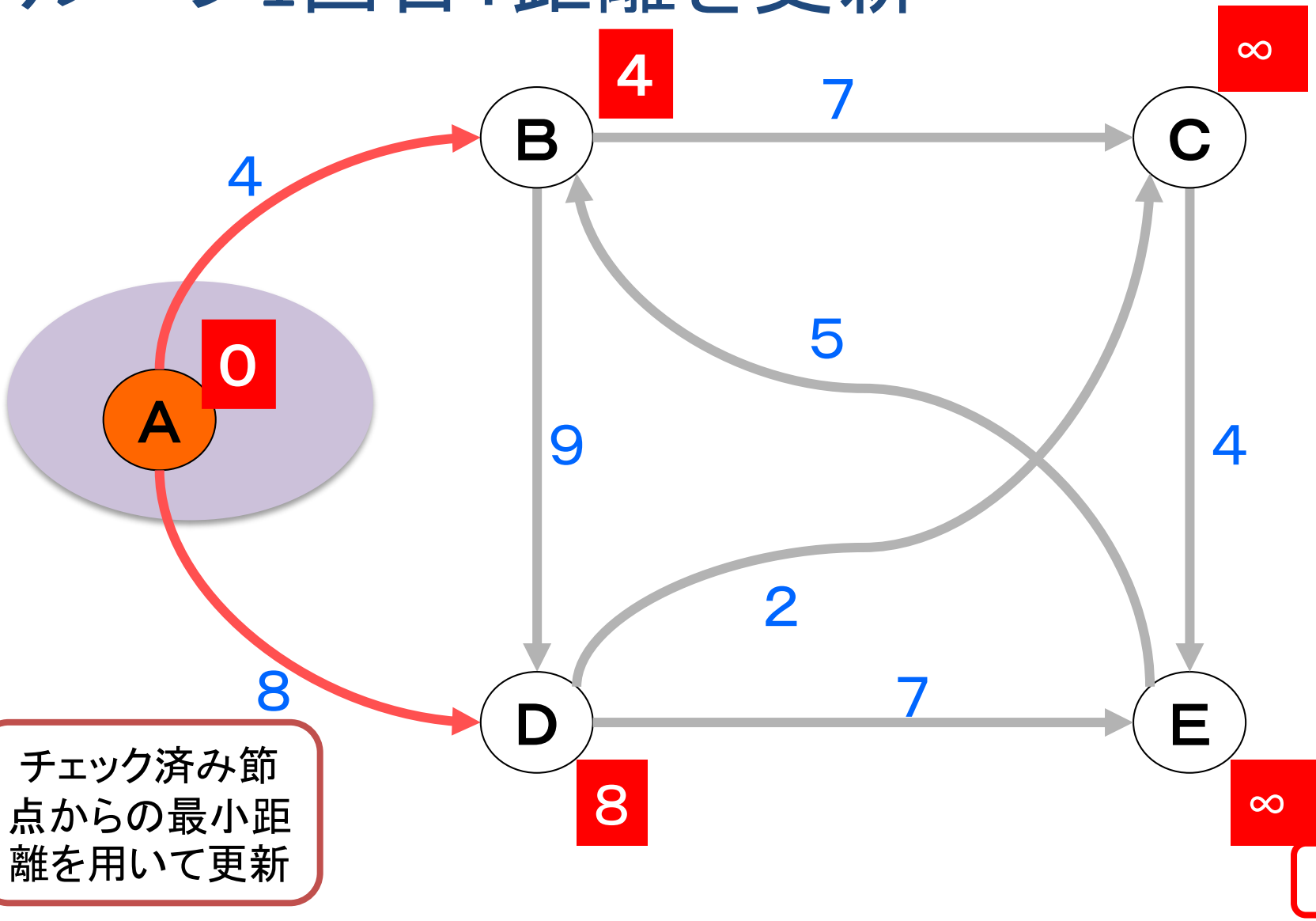
ループ1回目：Aをチェック済みとする



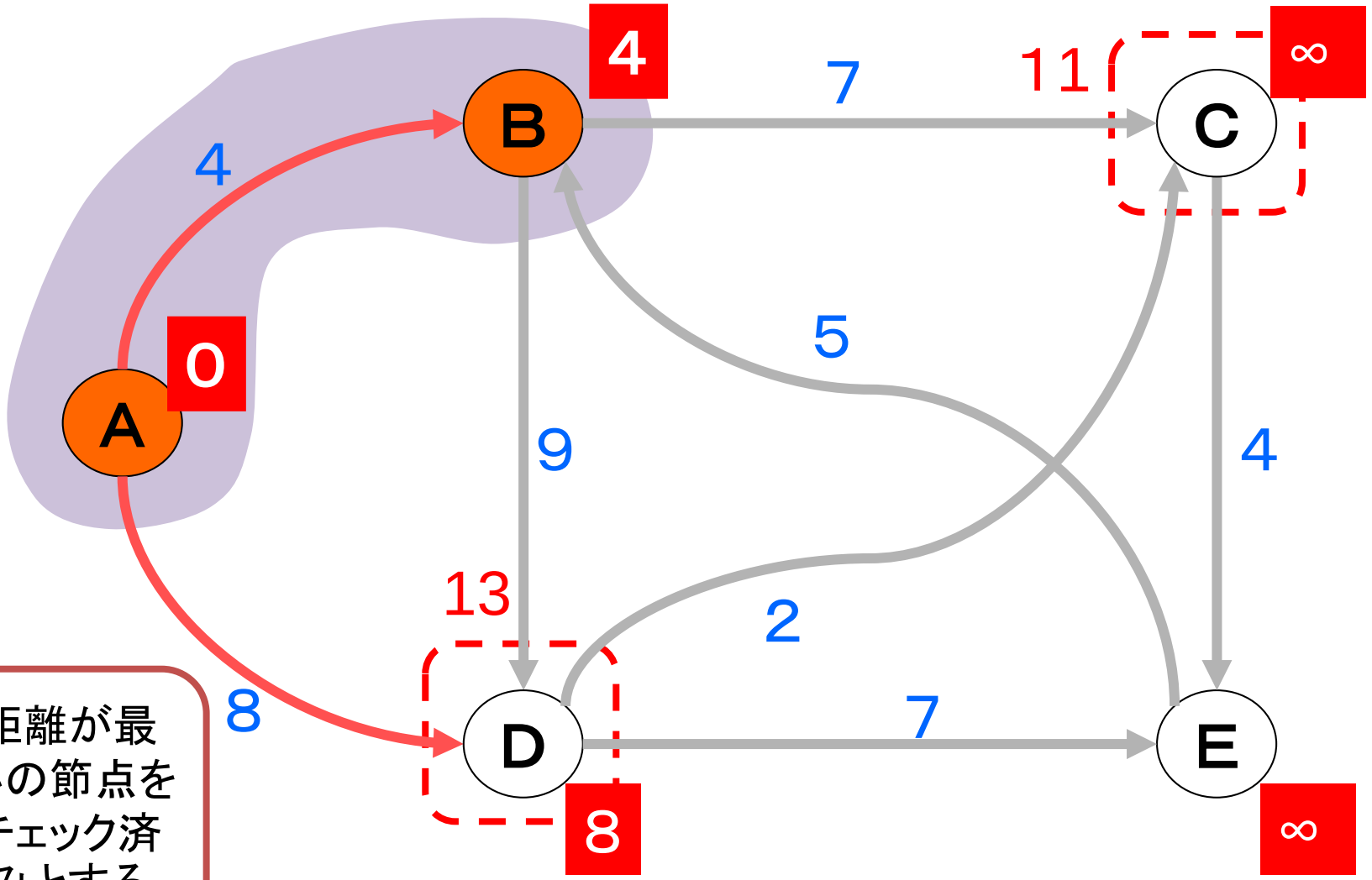
距離が最小の節点をチェック済みとする

要書き込み

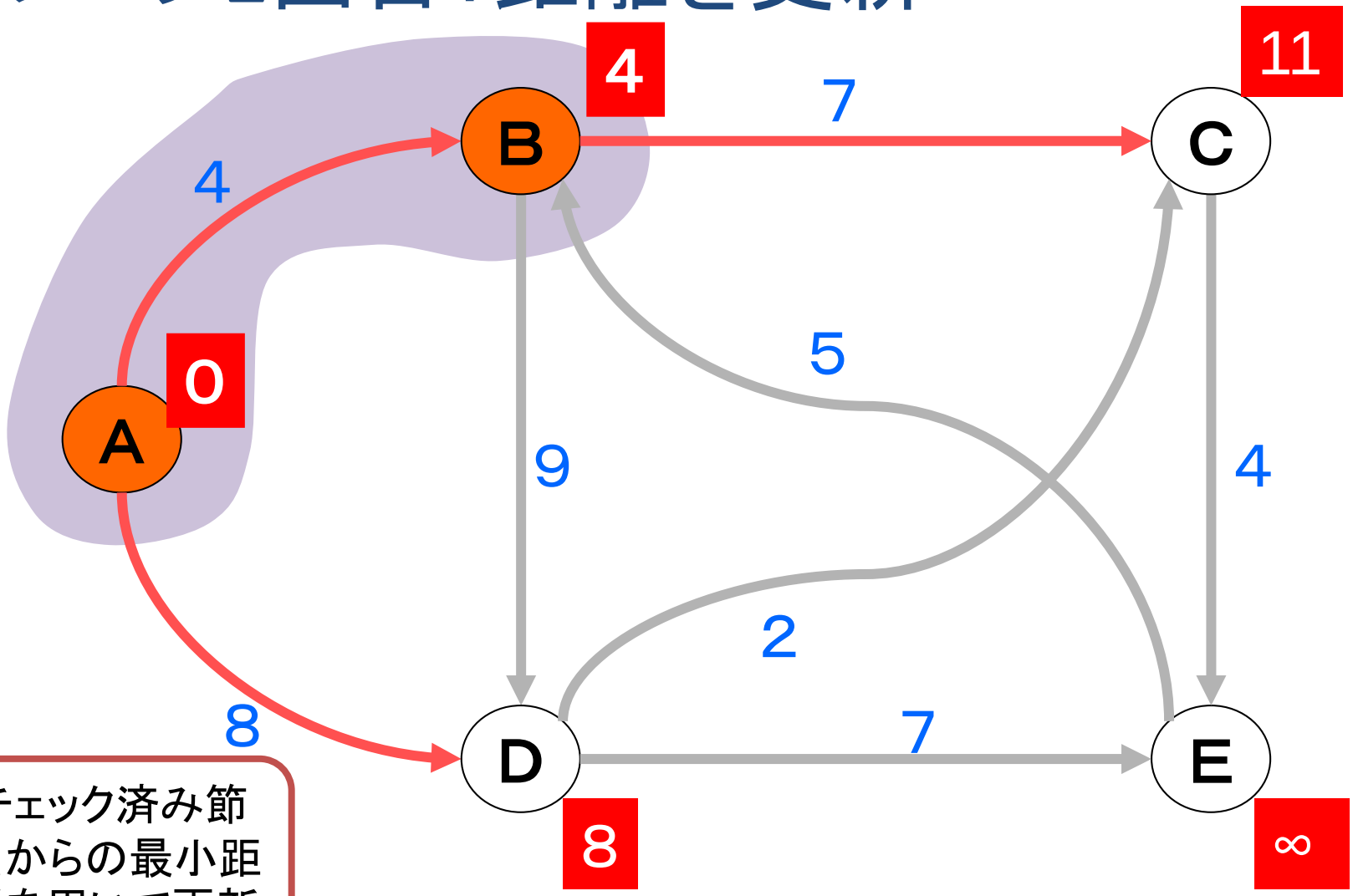
ループ1回目：距離を更新



ループ2回目：Bをチェック済みとする

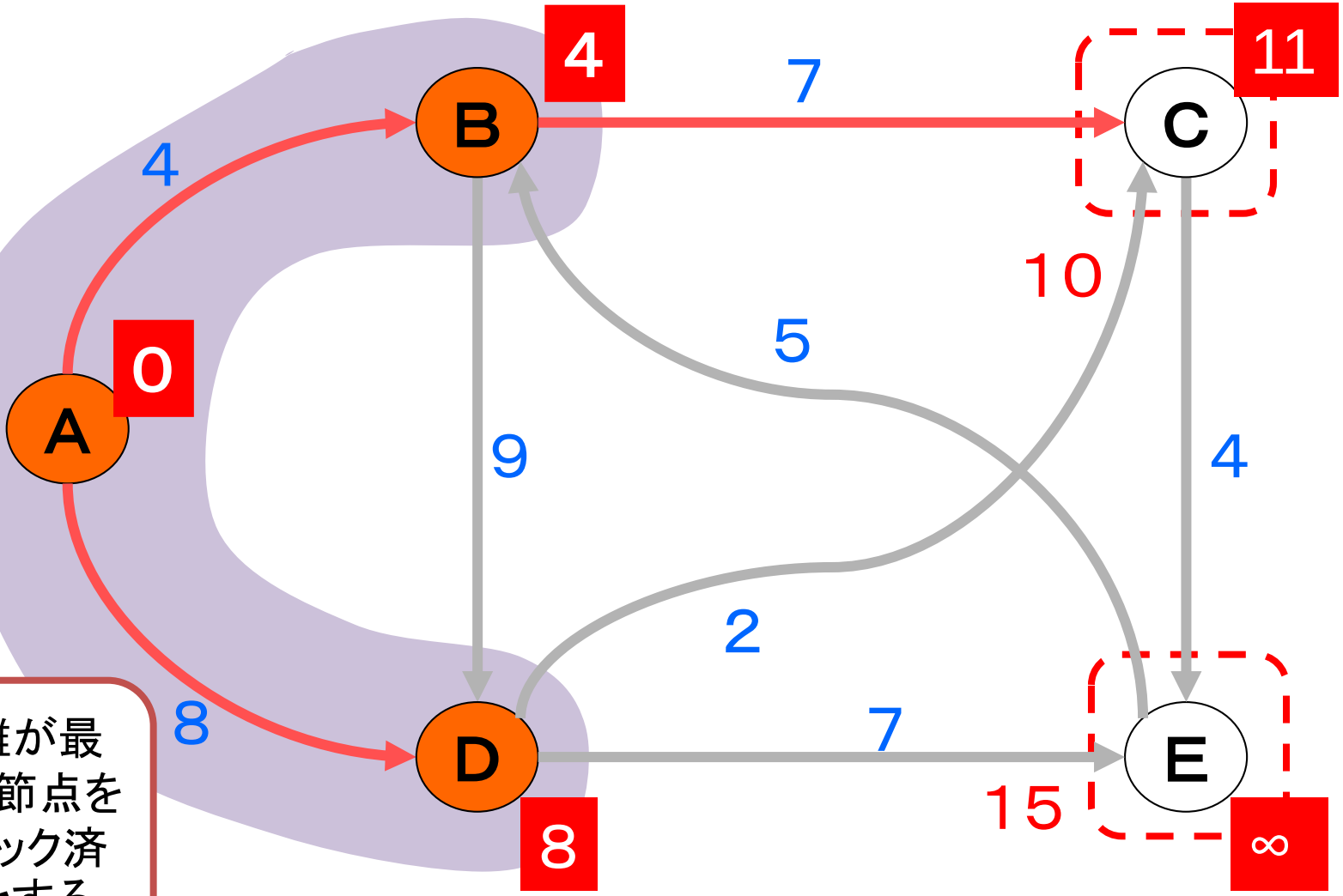


ループ2回目：距離を更新

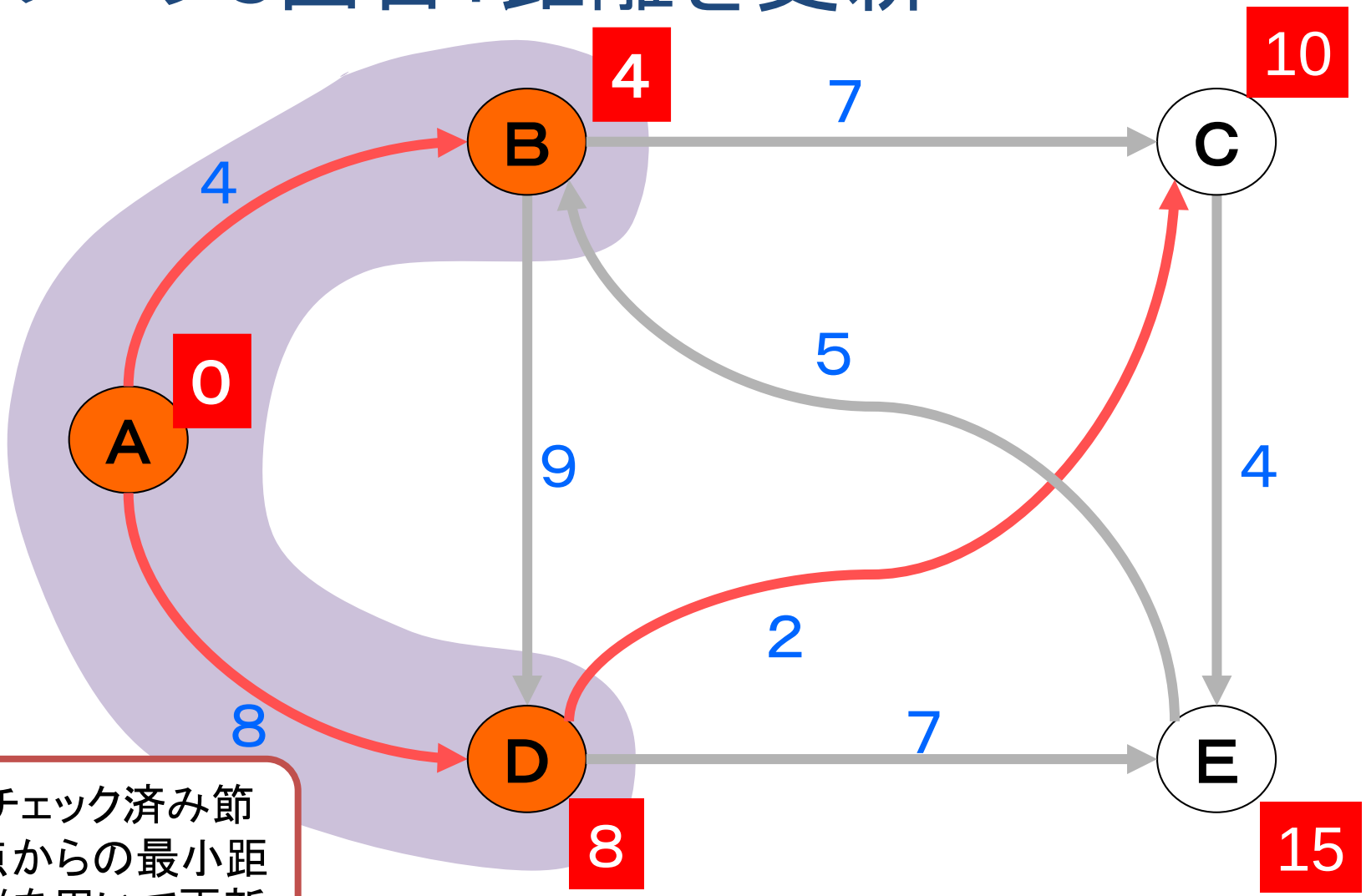


チェック済み節点からの最小距離を用いて更新

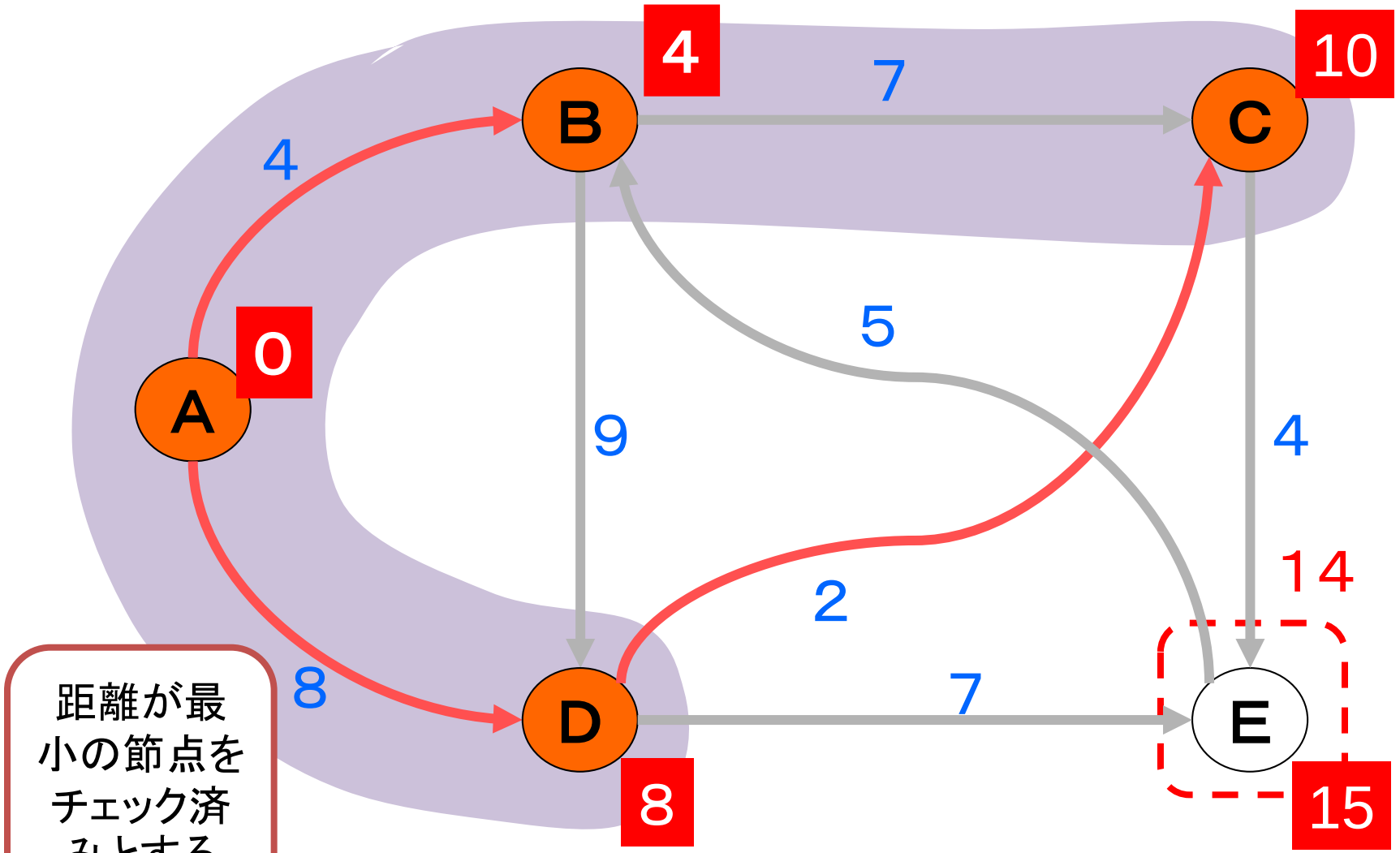
ループ3回目：Dをチェック済みとする



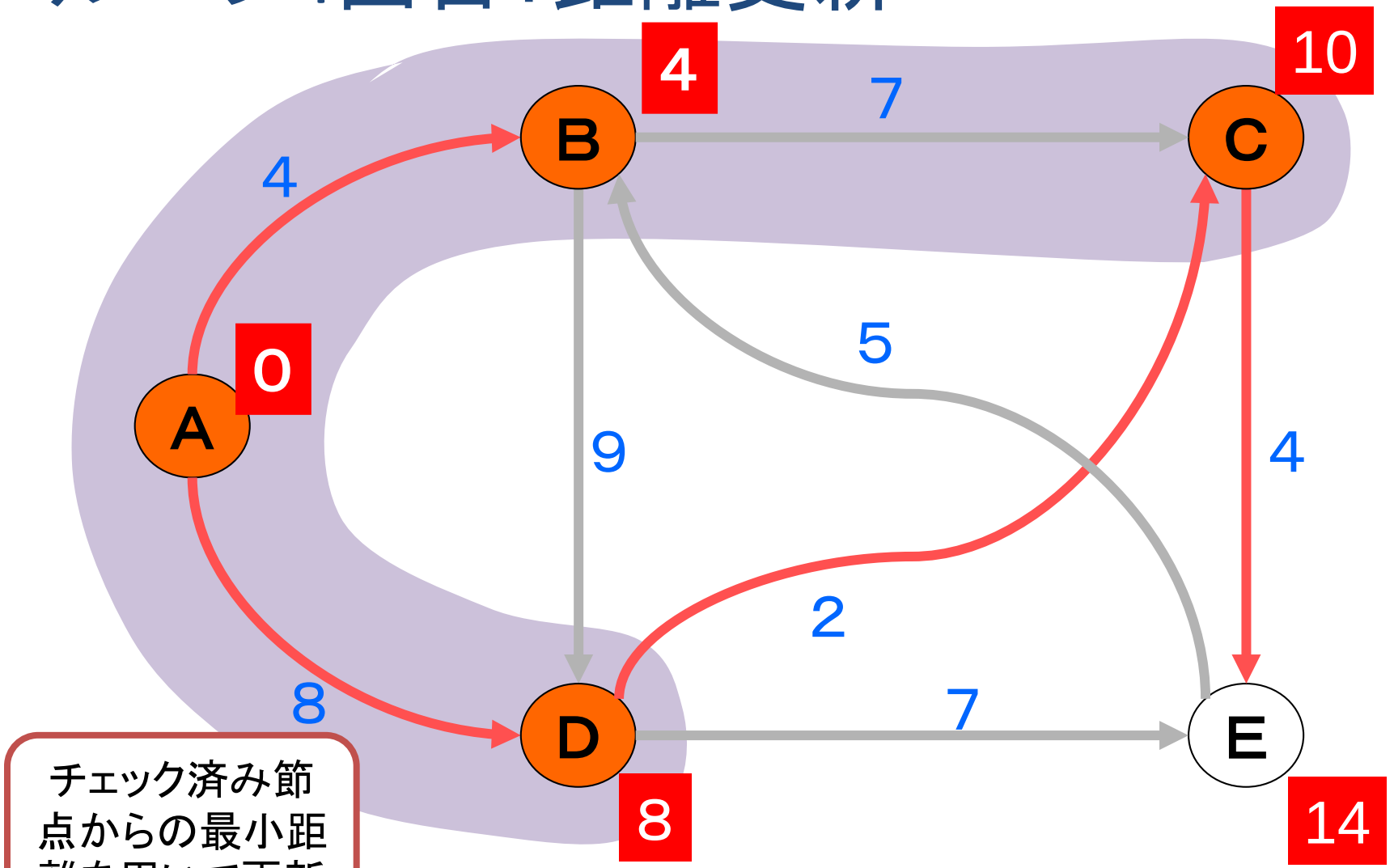
ループ3回目：距離を更新



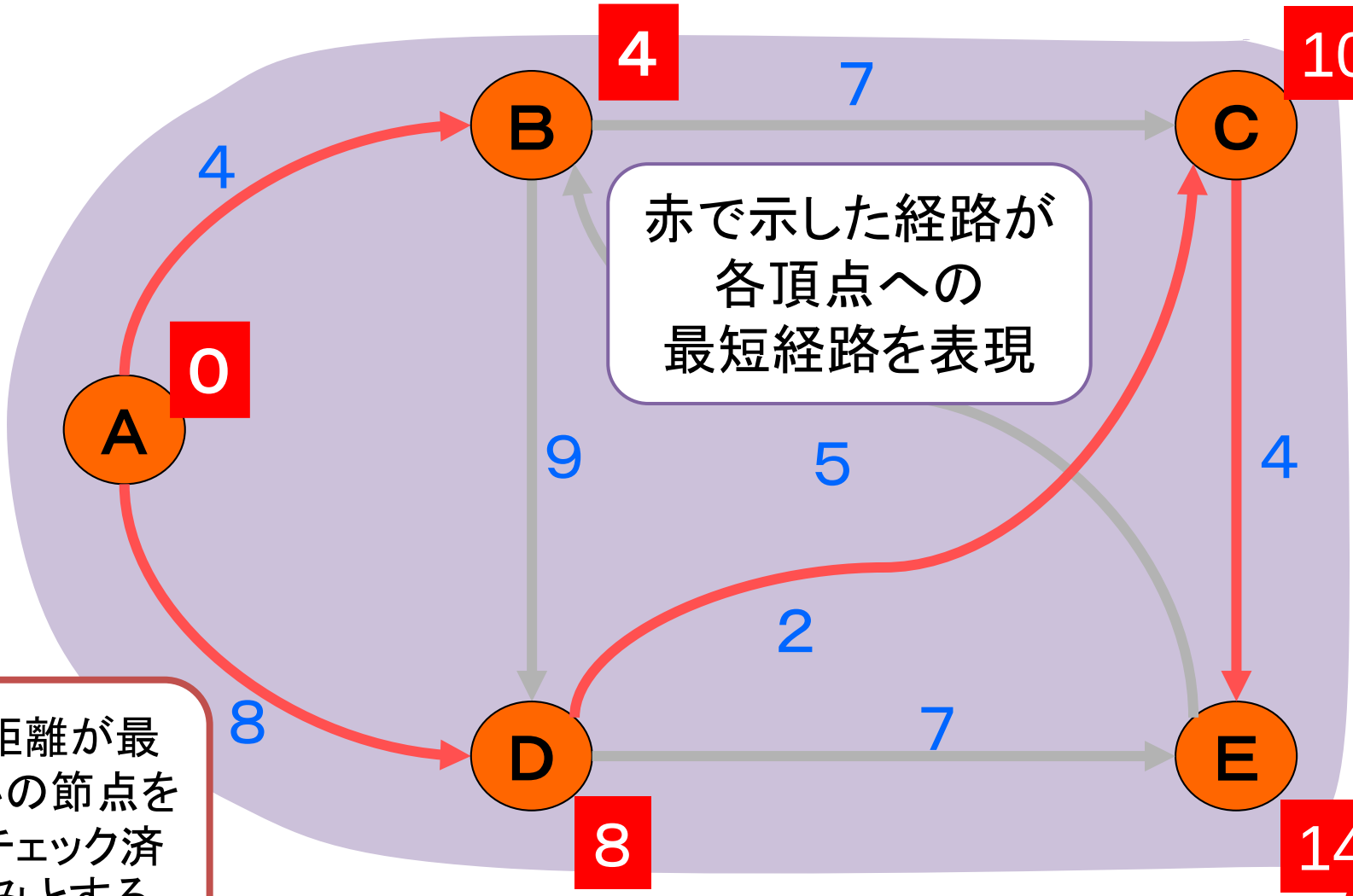
ループ4回目：Cをチェック済みとする



ループ4回目：距離更新



ループ5回目：Eをチェック済みとする



距離が最小の節点をチェック済みとする

要書き込み

整理

- ダイクストラの最短経路アルゴリズム
  - 命題
    - チェック済み頂点は，始点からの最短距離を保持する.
  - 各頂点への最短経路も同時に計算できる.
  - 計算時間
    - ステップ1，3：O(n)
    - ステップ2：O(1)
    - ステップ4：繰り返し回数 n回
    - ステップ4-1：総実行回数 $O(n^2)$，$O(m \log n)$
    - ステップ4-3：総実行回数 O(m)
  - 総計算時間 $O(n^2+m)$ または $O(m \log n)$

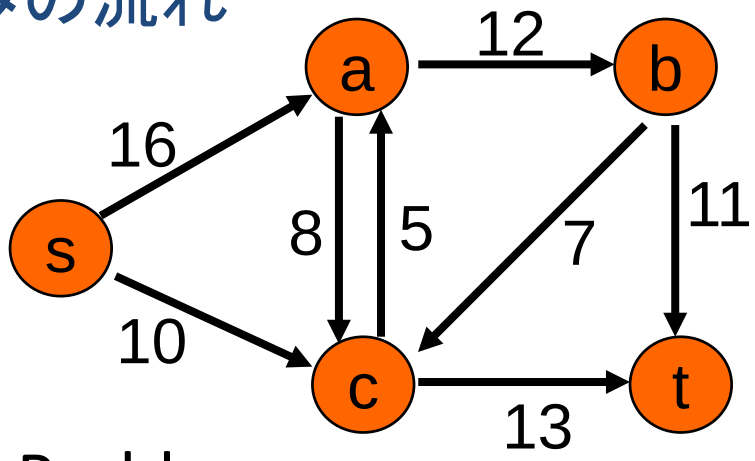
隣接リストを用いた場合

ヒープを用いた場合

用いるデータ構造に依存

ネットワークフロー

- ネットワーク上の流れ(flow)をモデル化
  - 水道網における実際の水の流れ
  - インターネットにおけるデータの流れ
  - 道路網における交通の流れ



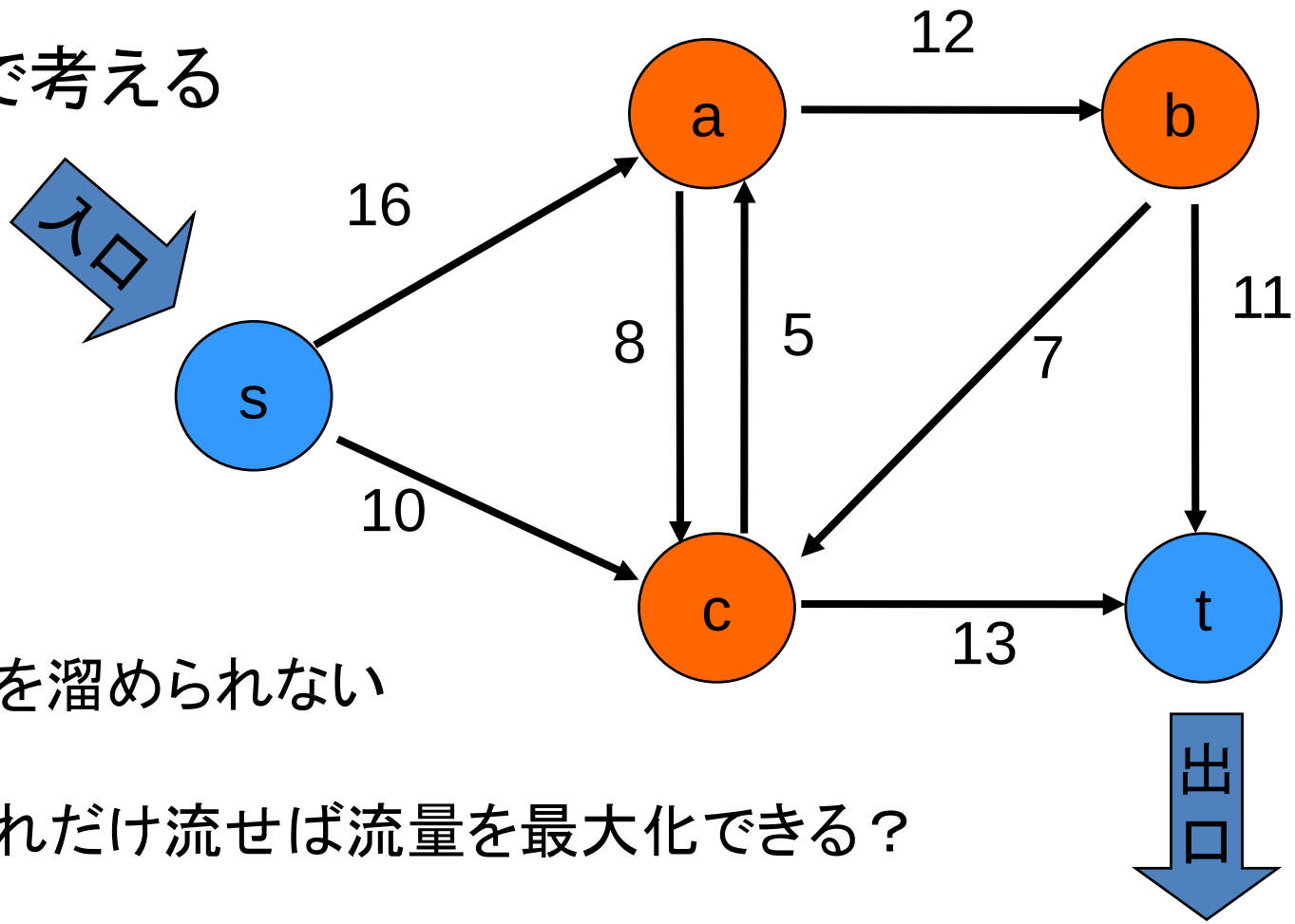
- 最大流問題 : Maximum Flow Problem

  s から t まで流すことができる流量の最大値と，その最大の流量を与える流し方 f を求める

  s: ソース，t: シンク

ネットワークフロー

- 水道網で考える



s: 入口

t: 出口

途中で水を溜められない

各辺にどれだけ流せば流量を最大化できる？

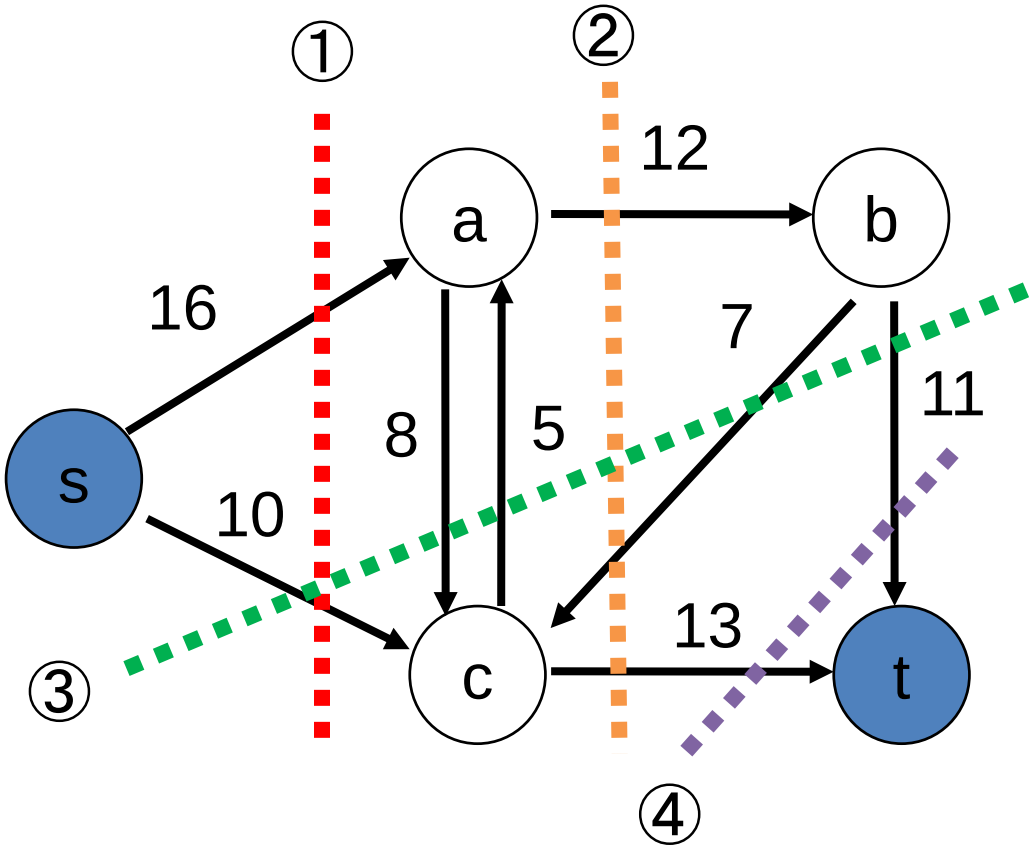
要書き込み

フロー fが満たす性質

- f(u, v) : 辺(u,v)に流す水の量(フロー)
- 歪(ひずみ)対称性: 任意の頂点u,vに対し、
  $f(u,v) = - f(v,u)$
  ※ 逆方向のフローはマイナスとする
- フロー保存則: s,t以外の任意の頂点uに対し、
  $\Sigma_{v \in V} f(u,v) = 0$
  ※ uに流れ込む量 = uから出る量
- 容量制約： 任意の頂点u,vに対し、
  $f(u,v) \leqq c(u,v)$
  ※ 各辺の容量c(u,v)を超えない

カット(cut)

- s,t-カット：sとtとを分離する線



カットの容量

カット上をs側からt側に流せる流量の最大値

① 16+10 = 26
② 12+13 = 25
③ 10+8+7+11 = 36
④ 11+13 = 24

要書き込み

最大流量-最小カット定理

- 任意のカットC、任意のフローfに対し、

  fの流量 ≦ カットCの容量

  が成立。また、等号が成り立つようなカットとフローが存在する。

- 「最大流量 = カットの容量の最小値」がいえる

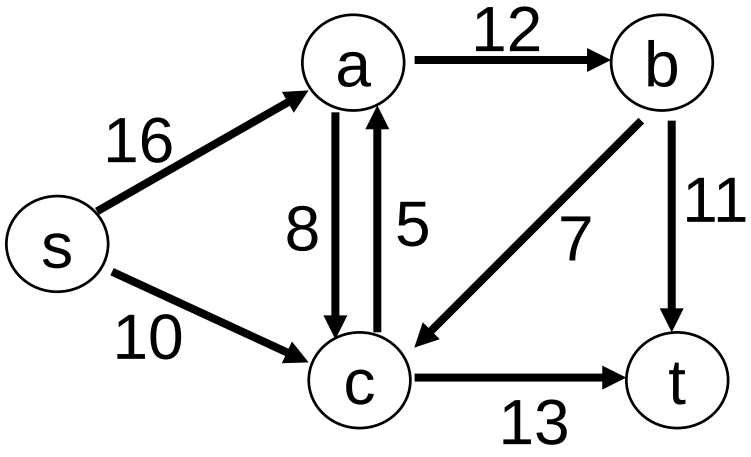
最大流アルゴリズム

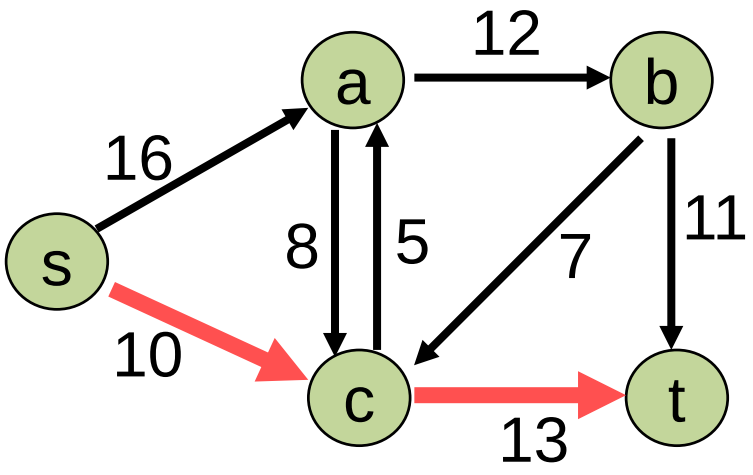
- 適当なフローからスタートし，「追加できる」流量を順次追加していくやり方
- 以下を計算しながら、フロー f を順次更新
  - 残余容量 r(u,v) = c(u,v) - f(u,v)
    現時点でのフローと、容量との差。この分だけまだ余裕がある。
  - 残余グラフ：残余容量を重みにしたグラフ
  - 拡張可能経路：残余グラフにおける s から t への経路

最大流アルゴリズム

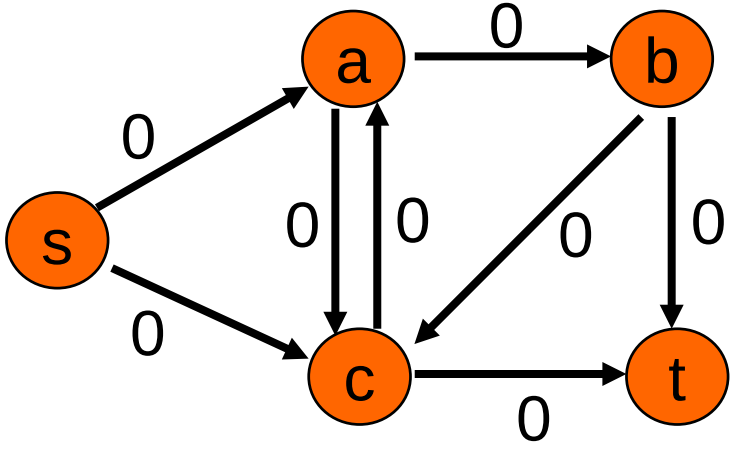
1. fをゼロフローとする.
2. fに対する残余グラフをG_fとする.
3. G_fに拡張可能経路がある限り，以下の処理を繰り返す.
   3-1 G_fにおいて拡張可能経路pを求める.
   3-2 p上の辺の最小残余容量の分だけフローfを増やす.
   3-3 残余グラフG_fを計算し直す.
4. fを最大フローとして出力する.

ループ1回目

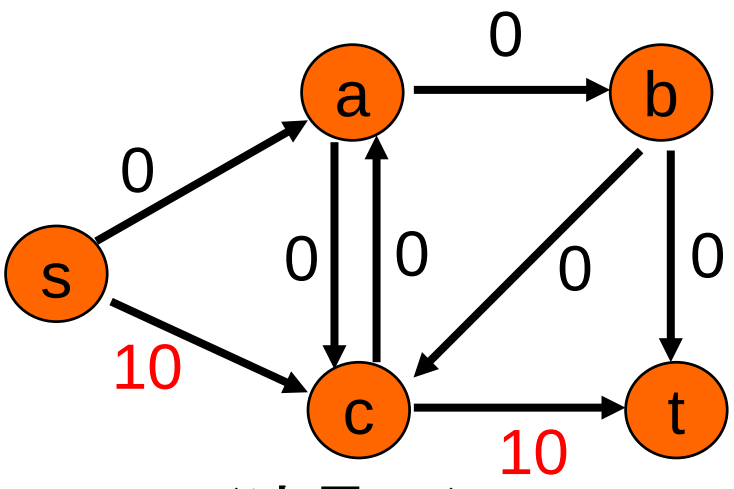




残余グラフと拡張可能経路

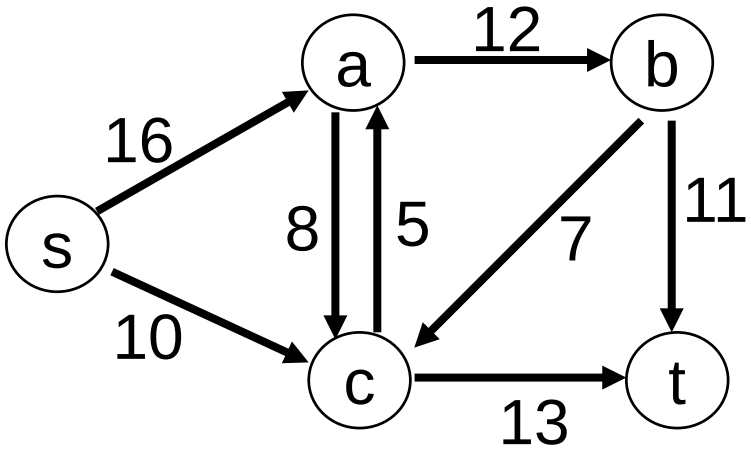


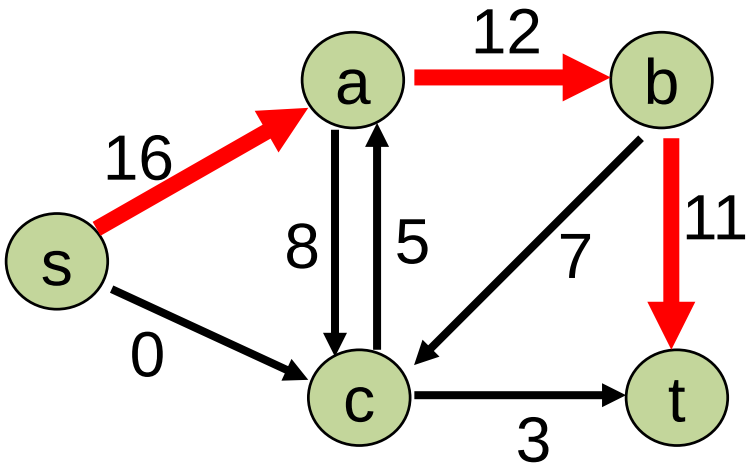
フローf(流量0)



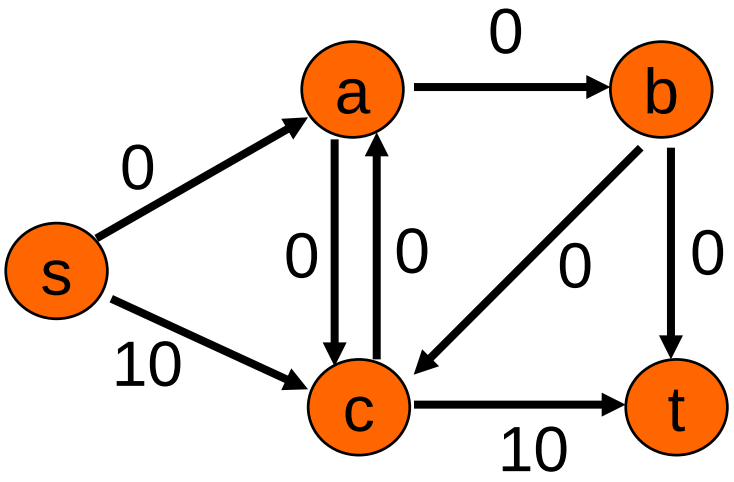
フローf(流量10)

ループ2回目

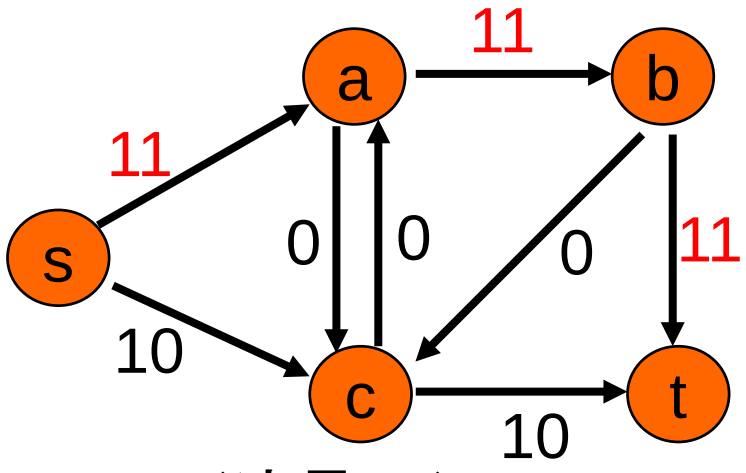




残余グラフと拡張可能経路

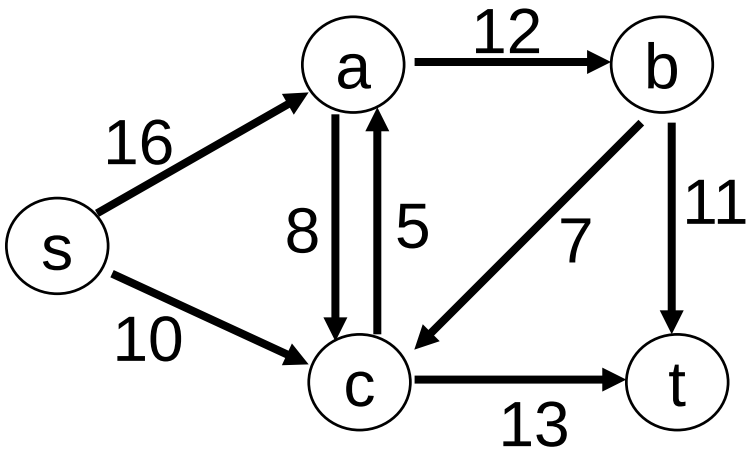


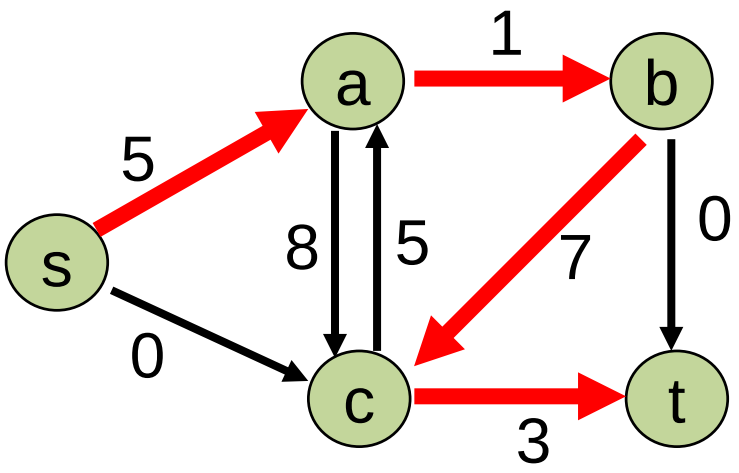
フローf（流量10）



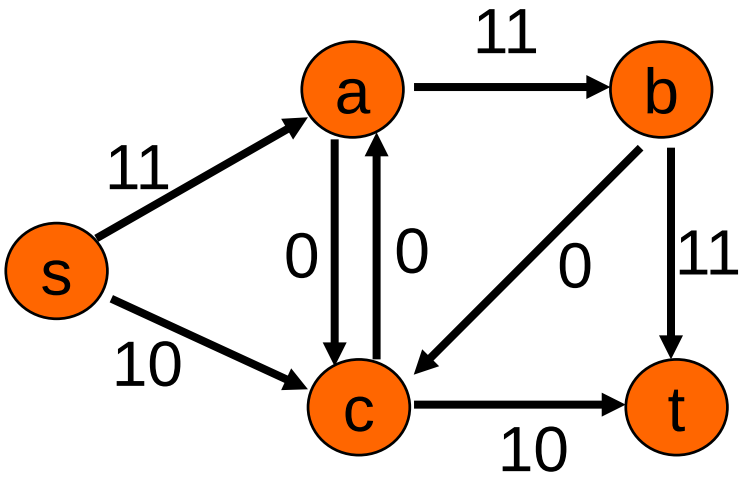
フローf（流量21）

ループ3回目

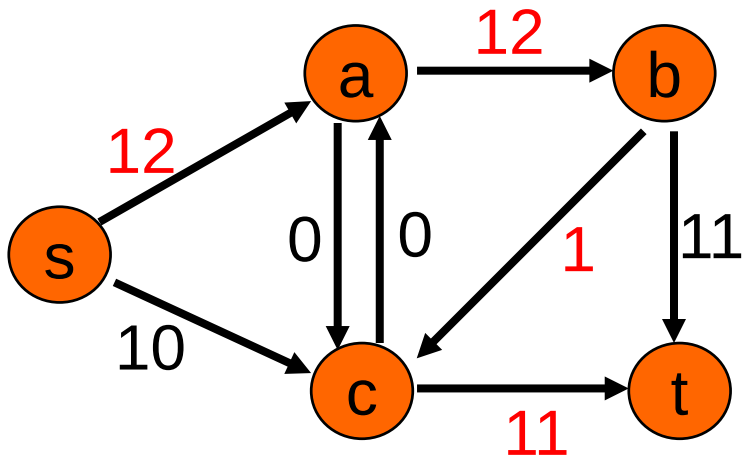




残余グラフと拡張可能経路

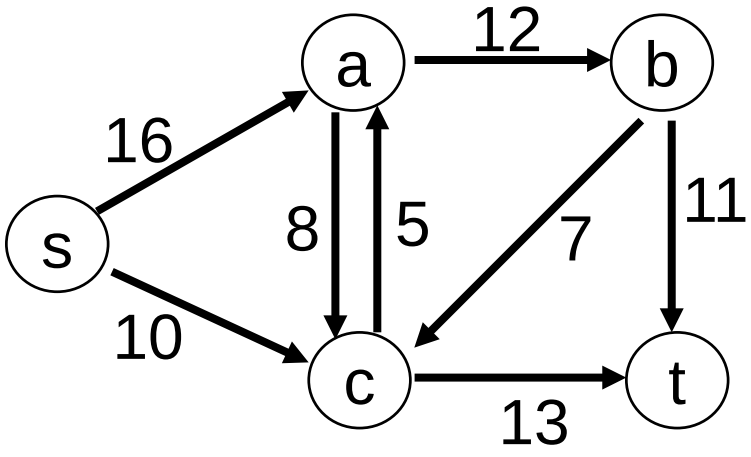


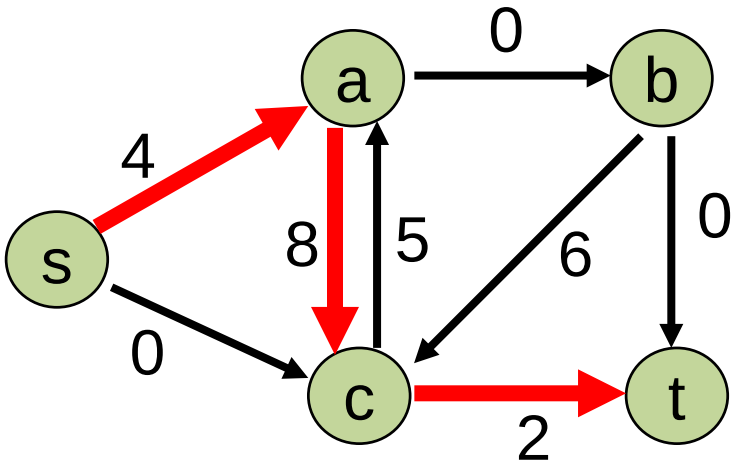
フローf（流量21）



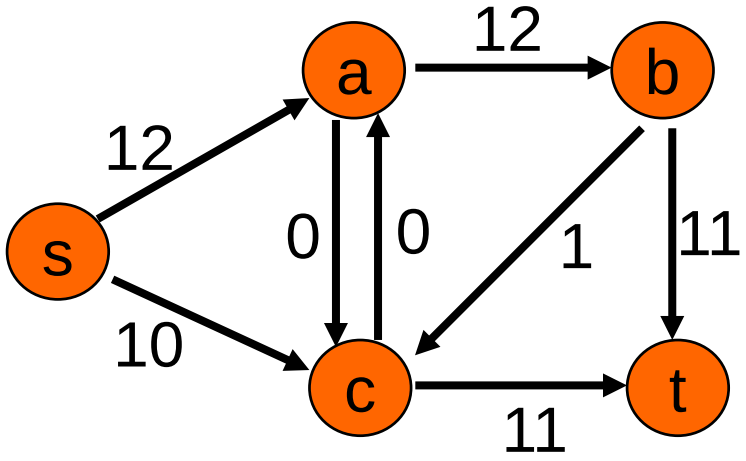
フローf（流量22）

ループ4回目

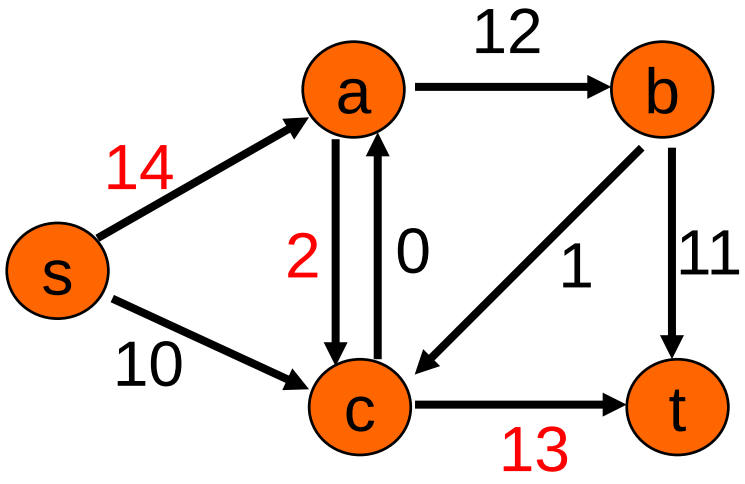




残余グラフと拡張可能経路

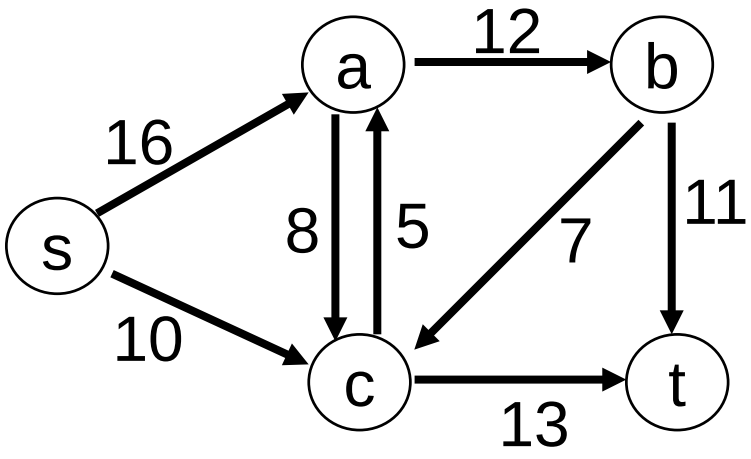


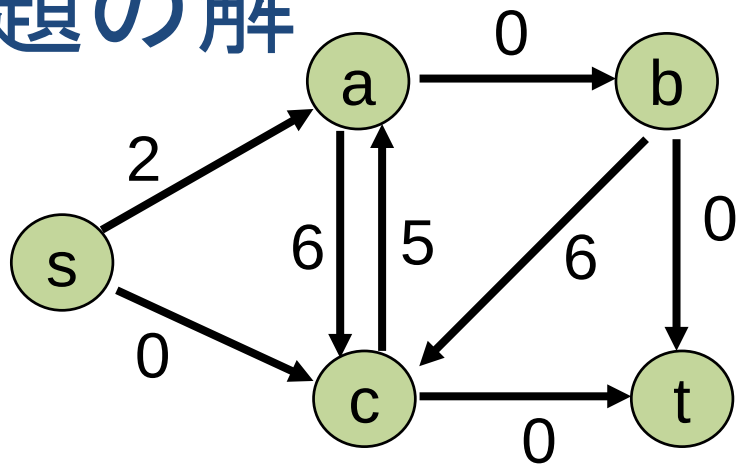
フローf（流量22）



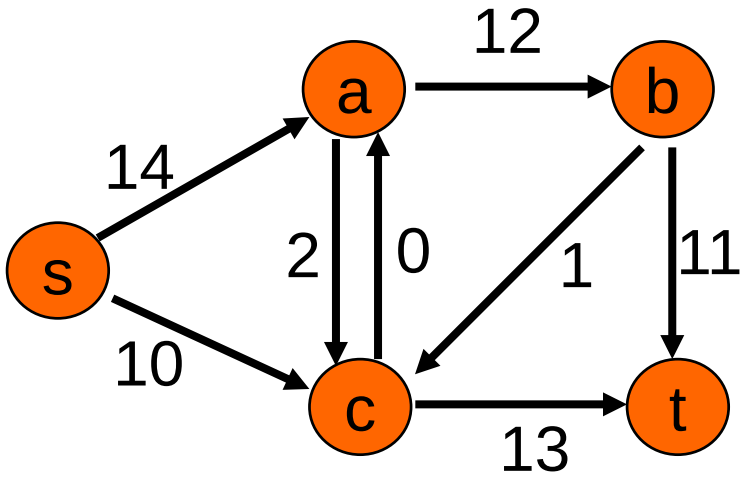
フローf（流量24）

ネットワークフロー問題の解





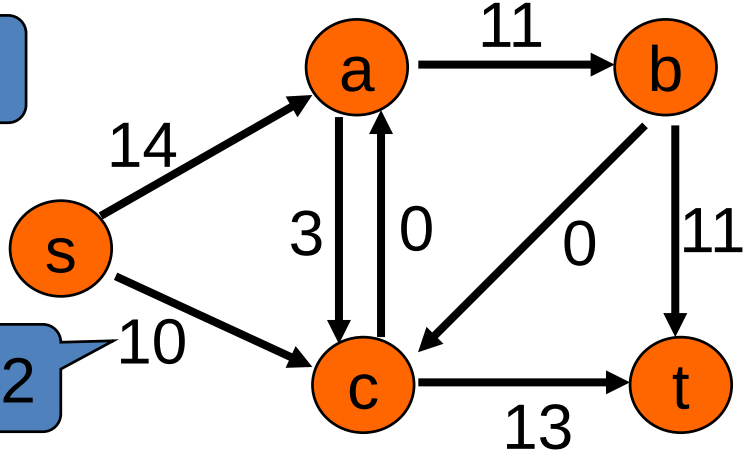
残余グラフと拡張可能経路



フローf(流量24)

解1

解2



フローf(流量24)

まとめ

- ダイクストラ法による最短経路アルゴリズム
  - チェック済み頂点は，始点からの最短距離を保持する.
  - 各頂点への最短経路も同時に計算できる.
  - 計算時間 $O(n^2+m)$ または $O(m \log n)$
    - 頂点数n, 辺数m
- ネットワークフローの計算時間
  - ネットワークの容量が整数値の場合：$O(m \times f_{max})$
    - ネットワークの容量が整数値の場合
    - 最大流の値 f_{max}
  - 一般の場合：$O(n^3)$, $O(nm^2)$

用いるデータ構造に依存

確認テスト（第11回）

- Minimax法
- ダイクストラの最短経路問題
- ネットワークフロー