Generowanie cyfr pisanych odręcznie na bazie sieci neuronowej o architekturze autoencodera

Analiza i implementacja różnych modeli generatywnych

Prowadzący: Adam Świtoński

Politechnika Śląska

Maj 2025

Plan prezentacji

Opis projektu

Cel projektu

Zastosowanie sieci neuronowej o architekturze autoencodera do generowania niskorozdzielczych obrazów cyfr pisanych odręcznie.

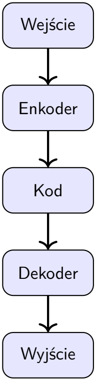
- Trenowanie różnych wariantów autoencoder'a
- Generowanie nowych cyfr poprzez podawanie losowych wartości na wejście dekodera
- Badanie wpływu struktury sieci (liczba warstw, liczba neuronów) oraz parametrów uczenia
- Wykorzystanie zbioru danych MNIST

Rozważane warianty

Klasyczny autoencoder, wariacyjny autoencoder (VAE), GAN, Diffusion, VQ-VAE, Conditional VAE

Autoencoder

Autoencoder to rodzaj sieci neuronowej, która uczy się kompresować dane wejściowe do reprezentacji o niższym wymiarze (kod), a następnie rekonstruować oryginalne dane z tej reprezentacji.

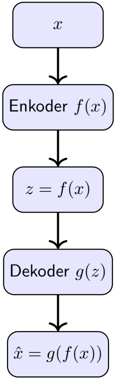


Zastosowania:

- Redukcja wymiarowości
- Denoising (odszumianie)
- Generowanie nowych danych

Zalety: prostota, szybki trening, interpretowalność
Wady: ograniczona zdolność generatywna, brak kontroli nad rozkładem latentnym
Bibliografia: [2]

Autoencoder - Funkcja straty (1/2)



Struktura Autoencodera:
Autoencoder składa się z enkodera,

który kompresuje dane wejściowe do reprezentacji latentnej, oraz dekodera, który rekonstruuje dane z tej reprezentacji.

Kluczowe elementy to dane wejściowe x, reprezentacja latentna z, oraz rekonstrukcja $\hat{x}$.

Autoencoder - Funkcja straty (2/2)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{AE} &= \|x - \hat{x}\|^2 \\ &= \|x - g(f(x))\|^2\end{aligned}$$

Objaśnienie funkcji straty: gdzie:

- x - dane wejściowe (obraz)
- $f(x)$ - funkcja enkodera
- $z = f(x)$ - reprezentacja latentna
- $g(z)$ - funkcja dekodera
- $\hat{x} = g(f(x))$ - rekonstrukcja

Funkcja straty to typowo błąd średniokwadratowy (MSE) lub binary cross-entropy dla obrazów.

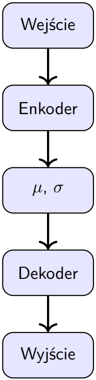
Wariacyjny Autoencoder (VAE)

VAE to probabilistyczne rozszerzenie autoencodera, które modeluje rozkład latentny danych.

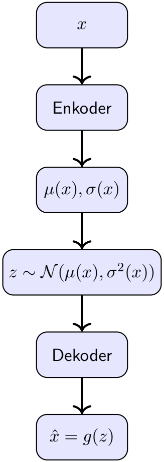
Kluczowe cechy:

- Modelowanie rozkładu latentnego (μ, σ)
- Regularyzacja poprzez KL-dywergencję
- Generowanie nowych próbek przez próbkowanie

Zalety: generatywność, ciągła przestrzeń latentna, możliwość interpolacji
Wady: rozmyte próbki, trudność w trenowaniu
Bibliografia: [4]



Wariacyjny Autoencoder (VAE) - Funkcja straty (1/2)



Struktura VAE: Wariacyjny

Autoencoder modeluje rozkład latentny poprzez parametry μ i σ, co pozwala na próbkowanie z z rozkładu normalnego.

Proces obejmuje kodowanie danych wejściowych x do przestrzeni latentnej oraz dekodowanie do rekonstrukcji $\hat{x}$.

Wariacyjny Autoencoder (VAE) - Funkcja straty (2/2)

$$\mathcal{L}_{VAE} = \underbrace{\|x - \hat{x}\|^2}_{\text{Rekonstrukcja}} + \underbrace{\beta \cdot D_{KL}(q(z|x)\|p(z))}_{\text{Regularyzacja KL}}$$

Objaśnienie funkcji straty: gdzie:

- $q(z|x) = \mathcal{N}(z; \mu(x), \sigma^2(x))$ - kodowanie
- $p(z) = \mathcal{N}(z; 0, I)$ - rozkład a priori
- β - waga regularyzacji KL

Dla rozkładu normalnego, dywergencja KL wynosi:

$$D_{KL} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}(1 + \log \sigma_j^2 - \mu_j^2 - \sigma_j^2)$$

Conditional VAE

Conditional VAE (CVAE) to wariacyjny autoencoder, który dodatkowo warunkuje generowanie na zadanej klasie (np. cyfra).

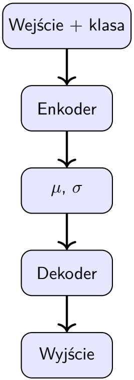
Kluczowe cechy:

- Warunkowanie generowania na etykietach
- Możliwość sterowania procesem generacji
- Łączenie etykiet z danymi wejściowymi

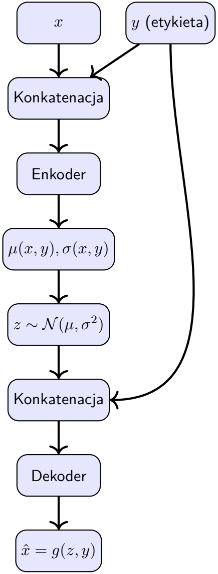
Zalety: kontrola nad generowanymi danymi, elastyczność

Wady: większa złożoność, wymaga etykiet

Bibliografia: [6]



Conditional VAE - Funkcja straty (1/2)



Struktura Conditional VAE:
Conditional VAE uwzględnia etykietę

y (np. klasę cyfry) podczas kodowania i dekodowania, co pozwala na kontrolowanie generowanych danych.

Etykieta jest konkatenowana zarówno z danymi wejściowymi, jak i z próbkowaną reprezentacją latentną z.

Conditional VAE - Funkcja straty (2/2)

$$\mathcal{L}_{CVAE} = \underbrace{\|x - \hat{x}\|^2}_{\text{Rekonstrukcja}} + \underbrace{\beta \cdot D_{KL}(q(z|x,y) \| p(z|y))}_{\text{Regularyzacja KL}}$$

Objaśnienie funkcji straty: gdzie:

- $q(z|x,y) = \mathcal{N}(z; \mu(x,y), \sigma^2(x,y))$
- $p(z|y)$ - warunkowy rozkład a priori
- y - etykieta klasy (np. cyfra 0-9)

Podczas generowania:

- Wybierz etykietę y (np. "3")
- Próbkuj $z \sim \mathcal{N}(0, I)$
- Wygeneruj $\hat{x} = g(z, y)$

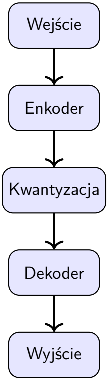
VQ-VAE

VQ-VAE to autoencoder, w którym przestrzeń latentna jest kwantyzowana do skończonego zbioru wektorów (słownik kodów).

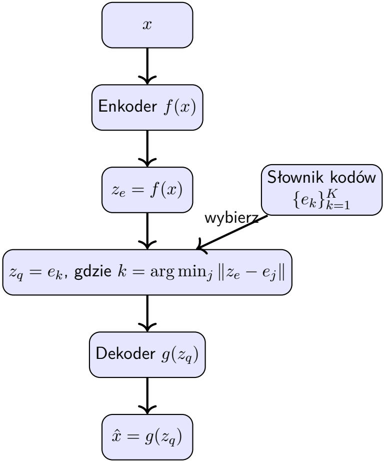
Kluczowe cechy:

- Dyskretna przestrzeń latentna
- Kwantyzacja wektorowa
- Słownik kodowy

Zalety: dyskretna reprezentacja, dobre wyniki w generowaniu sekwencji
Wady: trudność w trenowaniu, konieczność doboru rozmiaru słownika
Bibliografia: [5]



VQ-VAE - Funkcja straty (1/2)



Struktura VQ-VAE: VQ-VAE

kwantyzuje wyjście enkodera z_e do najbliższego wektora z_q ze słownika kodów, co prowadzi do dyskretnej reprezentacji latentnej.

Słownik kodów jest kluczowym elementem, który pozwala na wybór odpowiedniego wektora podczas procesu kwantyzacji.

VQ-VAE - Funkcja straty (2/2)

$$\mathcal{L}_{VQ-VAE} = \underbrace{\|x - \hat{x}\|^2}_{\text{Rekonstrukcja}} + \underbrace{\|sg[z_e] - e\|^2}_{\text{Uaktualnienie słownika}} + \underbrace{\beta\|z_e - sg[e]\|^2}_{\text{Commitment loss}}$$

Objaśnienie funkcji straty: gdzie:

- $z_e = f(x)$ - wyjście enkodera
- e - wybrany wektor ze słownika
- z_q - kwantyzowany wektor
- $sg[]$ - operacja "stop gradient"
- β - współczynnik commitment loss

Słownik kodów jest aktualizowany poprzez:

$$e_j = \text{MA}(z_e), \text{ dla } j = \arg\min_k \|z_e - e_k\|$$

gdzie MA to średnia krocząca.

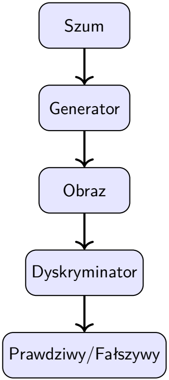
Generative Adversarial Network (GAN)

GAN to model generatywny składający się z dwóch sieci: generatora (tworzy próbki) i dyskryminatora (odróżnia próbki prawdziwe od fałszywych).

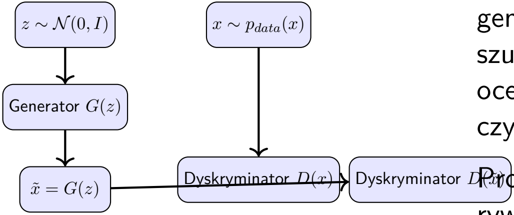
Kluczowe cechy:

- Układ rywalizujący (gra dwuosobowa)
- Generator tworzy coraz lepsze próbki
- Dyskryminator staje się coraz trudniejszy do oszukania

Zalety: realistyczne próbki, duża elastyczność
Wady: trudność w trenowaniu, niestabilność, mode collapse
Bibliografia: [1]



GAN - Funkcja straty (1/2)



Struktura GAN: GAN składa się z

generatora, który tworzy próbki $\tilde{x}$ z szumu z, oraz dyskryminatora, który ocenia, czy dane są prawdziwe (x) czy wygenerowane $(\tilde{x})$.

Proces treningu opiera się na rywalizacji między tymi dwoma sieciami.

GAN - Funkcja straty (2/2)

$$\min_G \max_D V(D,G) = \mathbb{E}_{x\sim p_{data}(x)}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z\sim p_z(z)}[\log(1 - D(G(z)))]$$

Objaśnienie funkcji straty: Trening dyskryminatora D:

$$\max_D \mathbb{E}_x[\log D(x)] + \mathbb{E}_z[\log(1 - D(G(z)))]$$

Trening generatora G:

$$\min_G \mathbb{E}_z[\log(1 - D(G(z)))]$$

W praktyce często używa się:

$$\max_G \mathbb{E}_z[\log D(G(z))]$$

Proces treningu:

- Naprzemienne aktualizacje D i G
- Balansowanie pomiędzy jakością a różnorodnością

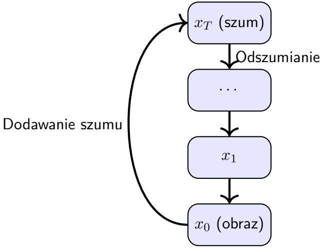
Diffusion Model

Model dyfuzji to nowoczesny model generatywny, który uczy się odszumiania danych przez odwracanie procesu stopniowego dodawania szumu.

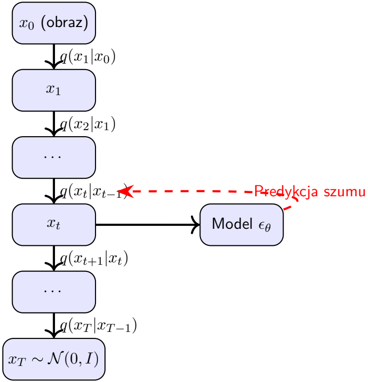
Kluczowe cechy:

- Proces forward (dodawanie szumu)
- Proces reverse (przewidywanie i usuwanie szumu)
- Iteracyjne próbkowanie

Zalety: wysoka jakość generowanych próbek, stabilność treningu
Wady: długi czas generowania, złożoność obliczeniowa
Bibliografia: [3]



Diffusion Model - Funkcje straty (1/2)



Struktura modelu dyfuzji: Model dyfuzji opiera się na procesie forward, który stopniowo dodaje szum do danych, oraz na modelu ϵ_θ, który przewiduje szum w procesie reverse.

Proces obejmuje wiele kroków, od czystego obrazu x_0 do czystego szumu x_T.

Diffusion Model - Funkcje straty (2/2)

Proces forward (dodawanie szumu):

$$q(x_t|x_{t-1}) = \mathcal{N}(x_t; \sqrt{1-\beta_t}x_{t-1}, \beta_t$$
$$q(x_t|x_0) = \mathcal{N}(x_t; \sqrt{\bar{\alpha}_t}x_0, (1-\bar{\alpha}_t)\mathbf{I})$$

Parametryzacja:

$$x_t = \sqrt{\bar{\alpha}_t}x_0 + \sqrt{1-\bar{\alpha}_t}\epsilon$$

gdzie $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$

Funkcja straty:

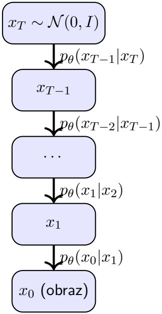
$$\mathcal{L}_{simple} = \mathbb{E}_{t,x_0,\epsilon}\left[\|\epsilon - \epsilon_\theta(x_t, t)\|^2\right]$$

gdzie:

- β_t - harmonogram szumu
- $\bar{\alpha}_t = \prod_{s=1}^{t}(1-\beta_s)$
- ϵ_θ - model predykcji szumu

Diffusion Model - Próbkowanie

$$p_\theta(x_{t-1}|x_t) = \mathcal{N}(x_{t-1}; \mu_\theta(x_t, t), \Sigma_\theta(x_t, t))$$



Algorytm próbkowania:

1. $x_T \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$
2. dla $t = T, T-1, \ldots, 1$:
    - Oblicz $\mu_\theta(x_t, t)$
    - $z \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$ jeśli $t > 1$, inaczej $z = 0$
    - $x_{t-1} = \mu_\theta(x_t, t) + \sigma_t z$
3. Zwróć x_0

Kluczowe równanie:

$$\mu_\theta(x_t, t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_t}}\left(x_t - \frac{\beta_t}{\sqrt{1-\bar{\alpha}_t}}\epsilon_\theta(x_t, t)\right)$$

Porównanie modeli generatywnych - tabela

Model	Zalety	Wady
Autoencoder (2006)	Prostota implementacji, szybki trening	Słaba generatywność, rozmyte obrazy
VAE (2013)	Solidne podstawy teoretyczne, ciągła przestrzeń latentna	Rozmyte obrazy, trudność balansowania rekonstrukcji i KL divergencji
GAN (2014)	Ostre, realistyczne próbki	Niestabilność treningu, mode collapse
Conditional VAE (2015)	Kontrola nad procesem generacji, warunkowanie na klasach	Większa złożoność implementacji, wymaga etykiet
VQ-VAE (2017)	Ostrzejsze obrazy, dobra kompresja	Trudniejszy do trenowania, problemy z kwantyzacją
Diffusion (2020)	Najlepsza jakość obrazów, stabilny trening	Powolne próbkowanie, wysoka złożoność obliczeniowa

Porównanie funkcji strat modeli generatywnych

Autoencoder:

$$\mathcal{L}_{AE} = \|x - g(f(x))\|^2$$

VAE:

$$\mathcal{L}_{VAE} = \|x - \hat{x}\|^2 + \beta D$$

Conditional VAE:

$$\mathcal{L}_{CVAE} = \|x - \hat{x}\|^2 + \ldots))$$

VQ-VAE:

$$\mathcal{L}_{VQ} = \|x - \hat{x}\|^2 + \|sg[z_e] - e\|^2 + \beta\|z_e - sg[e]\|^2$$

GAN:

$$\min_G \max_D V(D, G) = \mathbb{E}_x[\log D(x)] + \mathbb{E}_z[\log(1 - D(G(z)))]$$

Diffusion:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_{t,x_0,\epsilon}\left[\|\epsilon - \epsilon_\theta(x_t, t)\|^2\right]$$

Złożoność obliczeniowa:

- **Trening:** Diffusion > GAN > VQ-VAE > CVAE > VAE > AE
- **Próbkowanie:** Diffusion ≫ VQ-VAE > GAN > CVAE ≈ VAE ≈ AE

Jakość generowanych próbek:

- Diffusion > GAN > VQ-VAE > CVAE > VAE > AE

Wyzwania implementacyjne

- **Dobór architektury:** Liczba warstw, liczba neuronów, funkcje aktywacji
- **Dobór wymiarowości przestrzeni latentnej:** Zbyt mała - utrata informacji, zbyt duża - brak generalizacji
- **Balansowanie funkcji straty:** Np. w VAE balans między rekonstrukcją a regularyzacją KL

$$\mathcal{L}_{VAE}(\beta) = \|x - \hat{x}\|^2 + \beta \cdot D_{KL}$$

- **Stabilność treningu:** Szczególnie w przypadku GAN-ów

$$\mathcal{L}_D = -\mathbb{E}_x[\log D(x)] - \mathbb{E}_z[\log(1 - D(G(z)))]$$
$$\mathcal{L}_G = -\mathbb{E}_z[\log D(G(z))]$$

- **Efektywność obliczeniowa:** Modele dyfuzji wymagają wielu kroków podczas generowania
- **Ocena jakości wygenerowanych próbek:** Metody ilościowe vs jakościowe

Kompromisy w modelowaniu

Rekonstrukcja vs różnorodność:

- W VAE: β-VAE

$$\mathcal{L}_{\beta\text{-VAE}} = \|x - \hat{x}\|^2 + \beta \cdot D_{KL}$$

- $\beta < 1$: lepsza rekonstrukcja
- $\beta > 1$: większa regularyzacja, lepsze generowanie

Rate-distortion trade-off:

$$\mathcal{L} = \text{Rate} + \beta \cdot \text{Distortion}$$

Wymiar przestrzeni latentnej:

- Mały wymiar $\rightarrow$ silna kompresja, ale utrata szczegółów
- Duży wymiar $\rightarrow$ lepsza rekonstrukcja, ale słabsza generalizacja

Harmonogram szumu w Diffusion:

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_T$$

- Liniowy vs nieliniowy
- Wpływ na jakość generowania

Przykłady zastosowań

Generowanie danych syntetycznych:

- Augmentacja danych w uczeniu maszynowym

$$\mathcal{D}_{aug} = \mathcal{D} \cup \{G(z_i) | z_i \sim p(z)\}_{i=1}^{N}$$

- Syntetyczne dane dla trenowania innych modeli
- Generowanie przykładów do zastosowań edukacyjnych

Matematycznie:

$$p_{model}(x) \approx p_{data}(x)$$

Zastosowania praktyczne:

- Transfer stylu pisma

$$\hat{x} = g(f(x_{style}), y_{content})$$

- Uzupełnianie brakujących fragmentów

$$\hat{x}_{full} = \arg\max_{x} p(x | x_{observed})$$

- Korekta i poprawa pisma odręcznego
- Konwersja cyfr między różnymi stylami

$$x_{target} = g(f(x_{source}), y_{target})$$

Bibliografia I

[1] Ian Goodfellow i in. "Generative adversarial nets". W: *Advances in neural information processing systems*. 2014, s. 2672–2680.

[2] Geoffrey E Hinton i Ruslan R Salakhutdinov. "Reducing the dimensionality of data with neural networks". W: *Science* 313.5786 (2006), s. 504–507.

[3] Jonathan Ho, Ajay Jain i Pieter Abbeel. "Denoising diffusion probabilistic models". W: *Advances in neural information processing systems*. T. 33. 2020, s. 6840–6851.

[4] Diederik P Kingma i Max Welling. "Auto-encoding variational bayes". W: *arXiv preprint arXiv:1312.6114* (2013).

[5] Aaron van den Oord, Oriol Vinyals i Koray Kavukcuoglu. "Neural discrete representation learning". W: *Advances in neural information processing systems*. 2017, s. 6306–6315.

Bibliografia II

[6] Kihyuk Sohn, Xinchen Yan i Honglak Lee. “Learning structured output representation using deep conditional generative models”. W: *Advances in neural information processing systems*. 2015, s. 3483–3491.