Gráficos, Ejercicios 3D (I)

(PjPB, Escuela Politénica Superior, UAM)

1. **Encontrar la matriz correspondiente a la transformación que efectúa una reflexión respecto de un punto $R \equiv (R_x, R_y, R_z, 1)$.**

   Solución:

   Los pasos a seguir son:

   a) Trasladar el punto al origen:
   $$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -R_x & -R_y & -R_z & 1 \end{pmatrix}$$

   b) Reflejar respecto del origen:
   $$R_O = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   c) Volver a dejar el centro de reflexión en su posición original:
   $$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ R_x & R_y & R_z & 1 \end{pmatrix}$$

   La transformación total queda entonces:
   $$R_R = T \cdot R_O \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2R_x & 2R_y & 2R_z & 1 \end{pmatrix}$$

   Se puede comprobar que el centro de reflexión R queda invariante bajo la transformación.

2. **Calcular el punto de fuga del cubo unidad con vértices opuestos en el origen y en el punto $(1, 1, -1)$ bajo la proyección sobre el plano $\overline{\overline{XY}}$ con centro de proyección: $P \equiv (11, 0, 10, 1)$.**

   Solución:

   El punto de fuga es aquel en que convergen las líneas del cubo no paralelas (perpendiculares) al plano de proyección al ser proyectadas.

   Para calcularlo basta transformar el punto impropio, o ideal, donde estas líneas se unen: $I \equiv (0, 0, -1, 0)$.

   La matriz de proyección con prewarping es:

$$P_w = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Al aplicarle la matriz al punto I resulta:

$I' = I \cdot P_w = (-11, 0, 1, -1) \approx (11, 0, -1, 1)$

que al proyectar al plano $\overline{\overline{XY}}$ queda el punto $I' \equiv (11, 0)$.

También lo podíamos haber calculado directamente como la intersección de la recta paralela a la dirección $-\overrightarrow{OZ}$ (la de las rectas paralelas que van a converger al proyectarse) que pasa por el centro de proyección con el plano de proyección; es decir, la proyección del punto del infinito donde se unen las rectas del cubo no paralelas al plano de proyección. Esta recta pasa por $(11, 0, 10, 1)$ y tiene por vector director $(0, 0, -1, 0)$; es evidente que su intersección con el plano $\overline{\overline{XY}}$ $(z = 0)$ es el punto $(11, 0, 0, 1)$.

3. **Encontar el volumen de visión, antes y después del prewarping, correspondiente a una proyección sobre el plano $\overline{\overline{XY}}$ con centro de proyección en el punto $P \equiv (0, 0, 5, 1)$, ángulos de visión horizontal y vertical de $90°$, y planos de recorte delantero y trasero situados en $z = -1$ y $z = -5$.**

Solución:

Nótese que partimos de la situación en que se ha cambiado de sistema de ejes coordenados, justo antes de efectuar el prewarping.

El volumen de visión, antes de hacer prewarping, viene dado por la intersección de los planos:

a) Izquierdo (L): paralelo al eje $\overrightarrow{OY}$, forma un ángulo de $45°$ grados con el eje $\overrightarrow{OZ}$ (el vector normal es $(-1, 0, 1, 0)$), y pasa por $P : -x + z = 5$

b) Derecho (R): paralelo al eje $\overrightarrow{OY}$, forma un ángulo de $-45°$ grados con el eje $\overrightarrow{OZ}$ (el vector normal es $(1, 0, 1, 0)$), y pasa por $P : x + z = 5$

c) Superior (T): paralelo al eje $\overrightarrow{OX}$, forma un ángulo de $45°$ grados con el eje $\overrightarrow{OZ}$ (el vector normal es $(0, 1, 1, 0)$), y pasa por $P : y + z = 5$

d) Inferior (B): paralelo al eje $\overrightarrow{OX}$, forma un ángulo de $-45°$ grados con el eje $\overrightarrow{OZ}$ (el vector normal es $(0, -1, 1, 0)$), y pasa por $P : -y + z = 5$

e) Delantero (F): $z = -1$

f) Trasero (Bk): $z = -5$

La intersección de L con F es una recta paralela al eje $\overrightarrow{OY}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} -x + z = 5 \\ z = -1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -6 \\ z = -1 \end{array} \right\} \Longrightarrow (-6, y, -1, 1)$$

Análogamente, la de R con F es $(6, y, -1, 1)$ la de T con F $(x, 6, -1, 1)$ y la de B con F $(x, -6, -1, 1)$.

Las intersecciones con Bk son, en el mismo orden: $(-10, y, -5, 1)$, $(10, y, -5, 1)$, $(x, 10, -5, 1)$ y $(x, -10, -5, 1)$.

Hallando las intersecciones de estas rectas se hallan los vértices del paralelepípedo que define el volumen de visión:

$(-6,-6,-1,1)$, $(6,-6,-1,1)$, $(6,6,-1,1)$, $(-6,6,-1,1)$,

$(-10,-10,-5,1)$, $(10,-10,-5,1)$, $(10,10,-5,1)$, $(-10,10,-5,1)$.

La matriz de prewarping es:

$$P_w = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

y al aplicársela a los puntos anteriores quedan:

$(-6,-6,-1,1)P_w = (30,30,1,-6) \approx (-5,-5,-\frac{1}{6},1)$

$(-5,-5,-\frac{1}{6},1)$, $(5,-5,-\frac{1}{6},1)$,$(5,5,-\frac{1}{6},1)$,$(-5,5,-\frac{1}{6},1)$,

$(-5,-5,-\frac{1}{2},1)$, $(5,-5,-\frac{1}{2},1)$, $(5,5,-\frac{1}{2},1)$, $(-5,5,-\frac{1}{2},1)$,

que evidentemente forman una caja.

4. **Sea la pirámide con base $A \equiv (3,0,0,1)$, $B \equiv (0,0,-3,1)$, $C \equiv (6,0,-3,1)$, y vértice superior $D \equiv (3,6,-2,1)$. Encontrar el recorte con el volumen de visión (caja) dado por los vértices opuestos $LBF \equiv (1,0,-1,1)$ y $RTBk \equiv (5,4,-4,1)$.**

Solución:

Nótese que la situación corresponde a una vez hecho el prewarping.

Las intersecciones se pueden calcular por semejanza de triángulos, proyectando la figura sobre los planos coordenados (ver figura **??**).dvip

Intersecciones con el plano izquierdo (L):

$\overline{BC} \longrightarrow B' \equiv (1,0,-3,1)$, $\overline{BD} \longrightarrow B'' \equiv (1,2,-\frac{8}{3},1)$, $\overline{BA} \longrightarrow B''' \equiv (1,0,-2,1)$.

Intersecciones con el plano derecho (R):

$\overline{BC} \longrightarrow C' \equiv (5,0,-3,1)$, $\overline{CD} \longrightarrow C'' \equiv (5,2,-\frac{8}{3},1)$, $\overline{CA} \longrightarrow C''' \equiv (5,0,-2,1)$.

Intersecciones con el plano superior (T):

$\overline{BD} \longrightarrow D' \equiv (3,4,-\frac{7}{3},1)$, $\overline{CD} \longrightarrow D'' \equiv (4,4,-\frac{7}{3},1)$, $\overline{AD} \longrightarrow D''' \equiv (3,4,-\frac{4}{3},1)$.

Intersecciones con el plano inferior (B):

Todos los vértices están en la zona interior.

Intersecciones con el plano delantero (F):

$\overline{AB} \longrightarrow A' \equiv (2,0,-1,1)$, $\overline{AD} \longrightarrow A'' \equiv (3,3,-1,1)$, $\overline{AC} \longrightarrow A''' \equiv (4,0,-1,1)$.

Intersecciones con el plano trasero (Bk):

Todas los vértices están en la zona interior.

Recorte de la cara $\{A,B,C,A\}$:

a) L: $\overline{AB}(in,out) \longrightarrow B'''$, $\overline{BC}(out,in) \longrightarrow \{B',C\}$, $\overline{CA}(in,in) \longrightarrow A$, $\Longrightarrow \{B''',B',C,A,B'''\}$

b) R: $\overline{B'''B'}(in,in) \longrightarrow B'$, $\overline{B'C}(in,out) \longrightarrow C'$, $\overline{CA}(out,in) \longrightarrow \{C''',A\}$, $\overline{AB'''}(in,in) \longrightarrow B''' \Longrightarrow \{B',C',C''',A,B''',B'\}$

c) T,B,Bk: queda igual

d) F: $\overline{B'C'}(in,in) \longrightarrow C'$, $\overline{C'C'''}(in,in) \longrightarrow C'''$, $\overline{C'''A}(in,out) \longrightarrow A'''$, $\overline{AB'''}(out,in) \longrightarrow \{A',B'''\}$, $\overline{B'''B'}(in,in) \longrightarrow B' \Longrightarrow \{C',C''',A''',A',B''',B',C'\}$

Recorte de la cara $\{A,D,B,A\}$:

a) L: $\overline{AD}(in,in) \longrightarrow D$, $\overline{DB}(in,out) \longrightarrow B''$, $\overline{BA}(out,in) \longrightarrow \{B''',A\}$, $\Longrightarrow \{D,B'',B''',A\}$

b) R: queda igual

c) T: $\overline{DB''}(out,in) \longrightarrow \{D',B''\}$, $\overline{B''B'''}(in,in) \longrightarrow B'''$, $\overline{B'''A}(in,in) \longrightarrow A$, $\overline{AD}(in,out) \longrightarrow D''' \Longrightarrow \{D',B'',B''',A,D''',D'\}$

d) B,Bk: queda igual

e) F: $\overline{D'B''}(in,in) \longrightarrow B''$, $\overline{B''B'''}(in,in) \longrightarrow B'''$, $\overline{B'''A}(in,out) \longrightarrow A'$, $\overline{AD'''}(out,in) \longrightarrow \{A'',D'''\}$, $\overline{D'''D'}(in,in) \longrightarrow D' \Longrightarrow \{B'',B''',A',A'',D''',D',B''\}$

Análogamente, el recorte del resto de las caras es:

$\{A,C,D\} \Longrightarrow \{C'',D'',D''',A'',A''',C''',C''\}$

$\{C,B,D\} \Longrightarrow \{B'',D',D'',C'',C',B',B''\}$

Nótese que aparecen nuevas caras, incluso después de proyectar al plano $\overline{\overline{XY}}$, como es el caso de $\{A',A''',A'',A'\}$; esto genera dificultades adicionales a la hora de su representación, ya que hay que detectarlas.

En la práctica el proceso es:

a) Eliminar caras traseras y hacer prewarping

b) Recortar respecto de F y Bk

c) Proyectar

d) Recortar en 2D respecto de L,R,T,B

5. **Sea la pirámide con base $A \equiv (3,0,0,1)$, $B \equiv (0,0,-3,1)$, $C \equiv (6,0,-3,1)$, y vértice superior $D \equiv (3,6,-2,1)$.**

Llevar a cabo la eliminación de caras posteriores (*back-face removal*) para los centros de proyección $P_1 \equiv (0,0,2,0)$ y $P_2 \equiv (0,0,2,1)$.

Solución:

Las normales a las distintas caras son:

$$\overrightarrow{N_{ABC}} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,-18,0)$$

$$\overrightarrow{N_{ADB}} = \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{DB} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 6 & -2 \\ -3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = (-18,6,18)$$

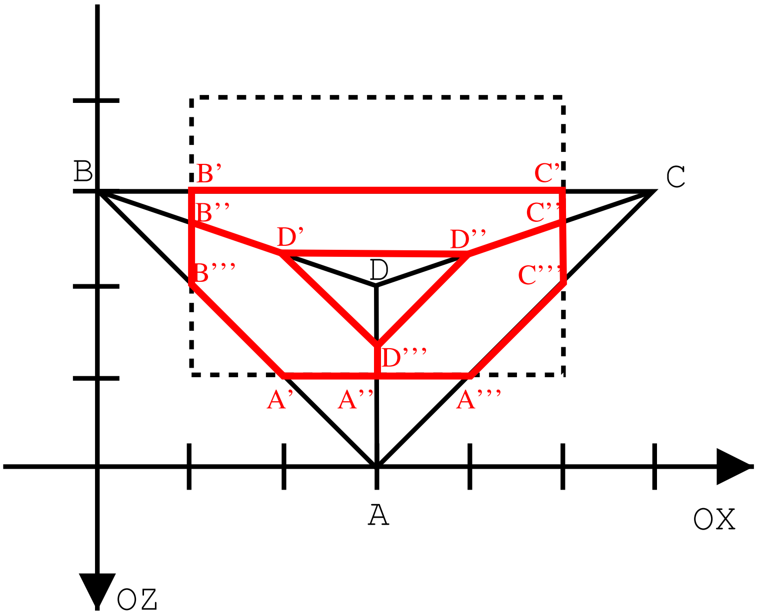

Figura 1: Recorte 3D de la pirámide

$$\overrightarrow{N_{DAC}} = \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -6 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (18, 6, 18)$$

$$\overrightarrow{N_{DCB}} = \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & -6 & -1 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 6, -36)$$

P_1 es una dirección, luego para averiguar si la cara es posterior basta hacer el producto escalar de su normal con esta dirección, $\overrightarrow{D_1} \equiv (0, 0, 2)$:

$\overrightarrow{D_1} \cdot \overrightarrow{N_{ABC}} = 0$: indiferente, invisible

$\overrightarrow{D_1} \cdot \overrightarrow{N_{ADB}} = 36 > 0$: visible

$\overrightarrow{D_1} \cdot \overrightarrow{N_{DAC}} = 36 > 0$: visible

$\overrightarrow{D_1} \cdot \overrightarrow{N_{DCB}} = -72 < 0$: invisible

En cuanto a P_2 , es un punto propio, luego hay que hacer el producto escalar de la normal a la cara con el vector que va de un vértice de la cara al centro de proyección, P_1 :

$\overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{N_{ABC}} = (-3, 0, 2) \cdot (0, -18, 0) = 0$: indiferente, invisible

$\overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{N_{ADB}} = (-3, 0, 2) \cdot (-18, 6, 18) = 90 > 0$: visible

$\overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{N_{DAC}} = (-3, 0, 2) \cdot (18, 6, 18) = -18 < 0$: invisible

$\overrightarrow{BP_1} \cdot \overrightarrow{N_{DCB}} = (0, 0, 5) \cdot (0, 6, -36) = -180 < 0$: invisible