Gráficos, Ejercicios 3D (II)

(PjPB, Escuela Politénica Superior, UAM)

1. **Aplicar el algoritmo del pintor al dibujo de las caras $\{A, B, C, D\}$ definidas por los siguientes vértices:**

   $A_1 \equiv (1, 1, -1)$, $A_2 \equiv (5, 5, -5)$, $A_3 \equiv (1, 5, -1)$

   $B_1 \equiv (1, 4, -4)$, $B_2 \equiv (3, 4, -4)$, $B_3 \equiv (3, 6, -4)$

   $C_1 \equiv (3, 2, -2)$, $C_2 \equiv (5, 2, -2)$, $C_3 \equiv (3, 4, -2)$

   $D_1 \equiv (3, 1, -1)$, $D_2 \equiv (3, 3, -1)$, $D_3 \equiv (1, 3, -3)$

   Solución:

   En las figuras 1 y 2 se muestra la disposición de las caras a pintar.

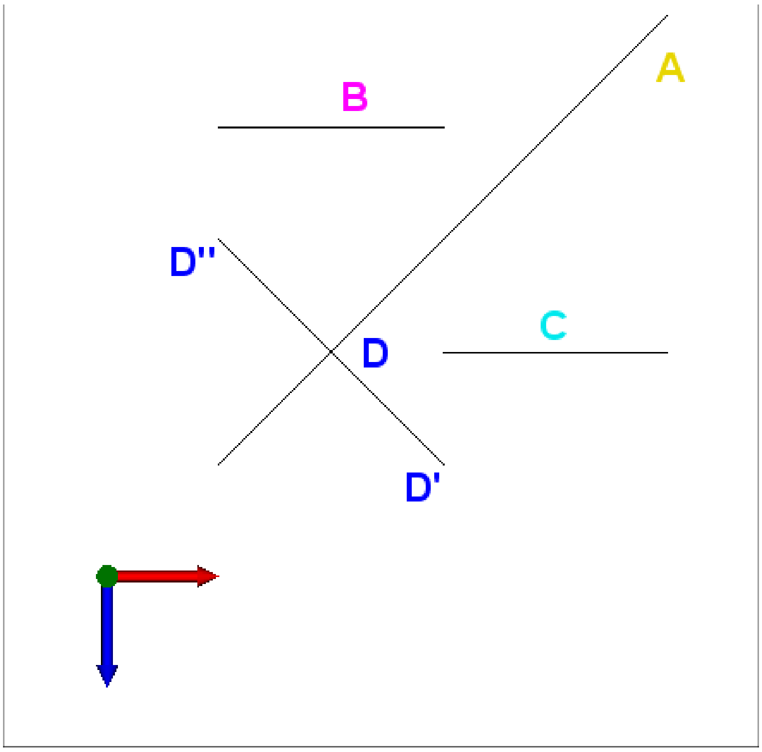

Figura 1: Algoritmo del pintor: Proyección sobre el plano XZ

Comenzamos con la lista de superficies ordenadas por su máxima profundidad (coordenada z mínima):

$\{A, B, D, C\}$

La superficie A se superpone en z, x e y con la B. Además ni la B está delante del plano definido por la A ni la A está detrás del plano definido por la B : basta sustituir las coordenadas de los vértices en la ecuación del plano obtenida a partir de la normal que apunta hacia afuera y comprobar el signo del valor resultante.

Intercambiamos entonces las dos superficies y marcamos B como intercambiada:

$\{\dot{B}, A, D, C\}$

La superficie B está detrás del plano de la A ; además, no se superpone en z con la D ni con la C , luego pintamos la B :

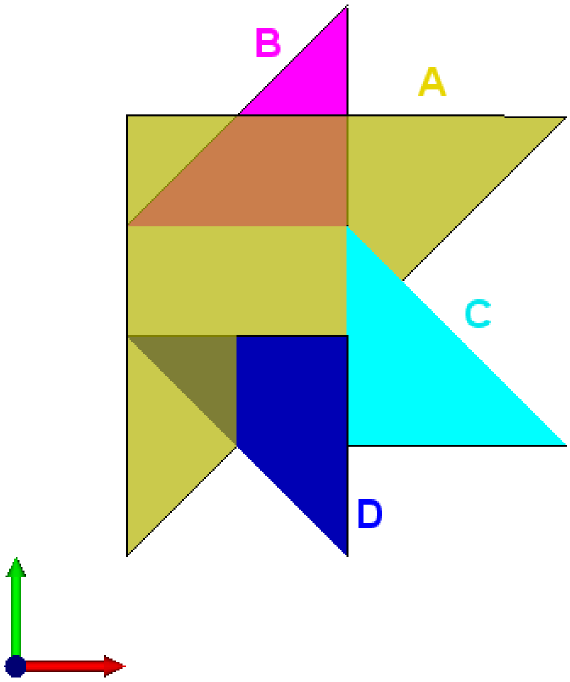

Figura 2: Algoritmo del pintor: Proyección sobre el plano XY

$\Longrightarrow B$

$\{A, D, C\}$

La superficie A se superpone con la D y ni la A está detrás de la D, ni la D detrás de la A, luego intercambiamos y marcamos D:

$\{\dot{D}, A, C\}$

La superficie D se superpone con la A y ni la D está detrás de la A, ni la A detrás de la D; como ya hemos intercambiado, dividimos la superficie D en D' y D'' por su intersección con el plano definido por la A:

$D' \equiv \{D_1, D_2, D_2'', D_1''\}$

$D'' \equiv \{D_1'', D_2'', D_3\}$

$D_1'' \equiv (2, 2, -2)$, $D_2'' \equiv (2, 3, -2)$

Dejamos la parte que está delante de A, D'', la primera de la lista, y la parte que está detrás, D', a continuación de A.

$\{D'', A, D', C\}$

Continuamos comparando la superficie D'' con la C; como no se superpone en x con la C, la pintamos:

$\Longrightarrow D''$

$\{A, D', C\}$

D' está delante de A (salvo una arista que toca), y C también, luego podemos pintar A:

$\Longrightarrow A$

$\{D', C\}$

Ahora D' se superpone en x en un punto con la C; como no sabemos si está detrás, seguimos con los tests, y ni D' está detrás de C ni C delante de D', así que intercambiamos y marcamos C:

$\{\dot{C}, D'\}$

C está ahora detrás de D' , así que la pintamos; sólo nos queda D' y terminamos pintándola:

$\Longrightarrow C$

$\{D'\}$

$\Longrightarrow D'$

Así, el orden de pintado de las superficies es:

$B \Longrightarrow D'' \Longrightarrow A \Longrightarrow C \Longrightarrow D'$

2. **Aplicar el algoritmo de Z-buffer y el de scan-line Z-buffer al dibujo de las caras rectangulares $\{A, B, C\}$ dadas por los vértices opuestos:**

   $A_1 \equiv (1, 1, -2)$, $A_2 \equiv (4, 4, -2)$

   $B_1 \equiv (0, 1, -3)$, $B_2 \equiv (2, 3, -3)$

   $C_1 \equiv (1, 0, -1)$, $C_2 \equiv (3, 2, -1)$

   Asumir una ventana que se ajusta a las caras, que se pasa a un viewport en pantalla de 4x4 píxeles.

   Solución:

   En las figuras 3 y 4 se muestra la disposición de las caras a pintar.

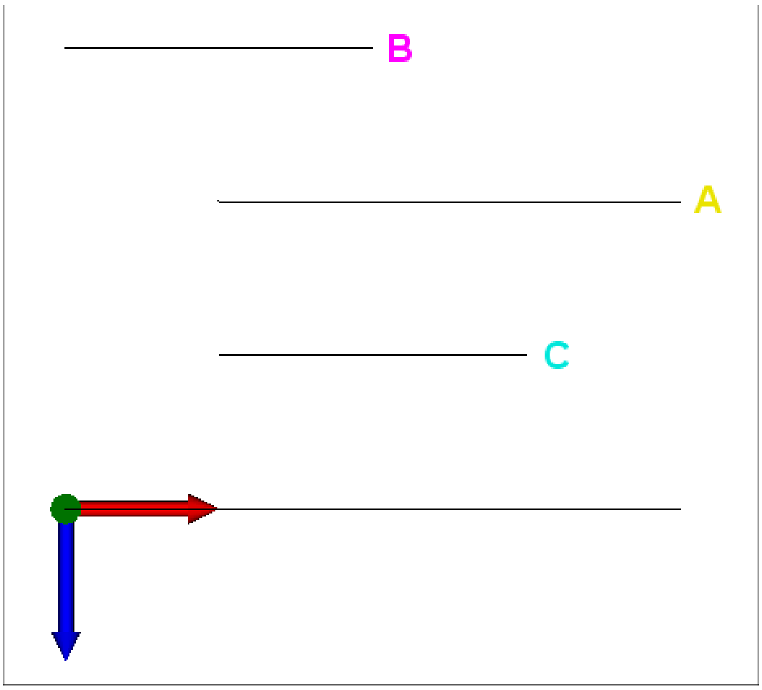

Figura 3: Algoritmo de Z-buffer: Proyección sobre el plano XZ

La ventana tiene por vértices opuestos: $(0, 0)$ y $(4, 4)$: el píxel inferior izquierdo corresponde a coordenadas de mundo real entre $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Algoritmo de Z-buffer:

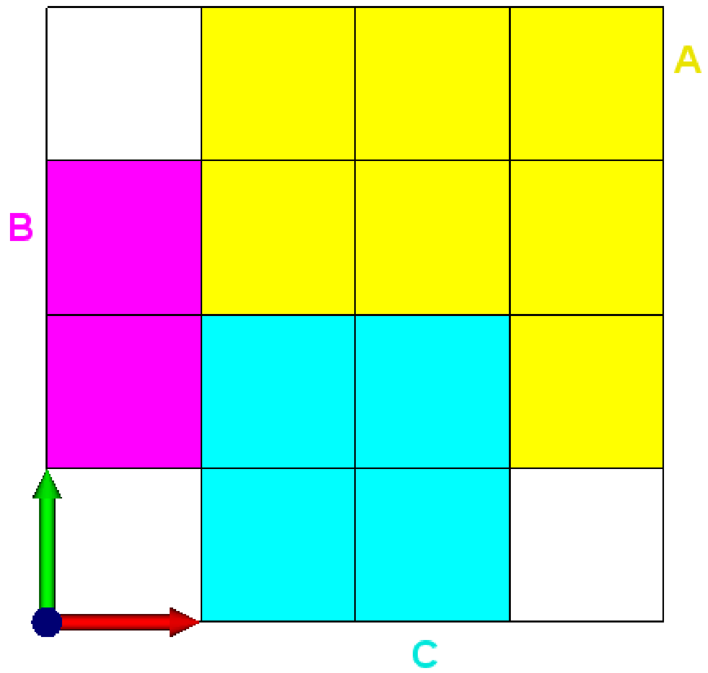

Figura 4: Algoritmo del pintor: Proyección sobre el plano XY

a) Estado inicial (FB = Frame Buffer, ZB = Z-buffer):

$$FB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline F & F & F & F \\ \hline F & F & F & F \\ \hline F & F & F & F \\ \hline F & F & F & F \\ \hline \end{array} \;,\; ZB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ \hline -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ \hline -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ \hline -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ \hline \end{array}$$

F indica color de fondo.

b) Pintamos la cara A :

Al comparar la profundidad de los píxeles correspondientes a A , se comprueba que están a menor profundidad (z mayor) que los del Z-buffer, luego se pinta la cara entera, y se actualizan los valores del Z-buffer:

$$FB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline F & A & A & A \\ \hline F & A & A & A \\ \hline F & A & A & A \\ \hline F & F & F & F \\ \hline \end{array} \;,\; ZB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -\infty & -2 & -2 & -2 \\ \hline -\infty & -2 & -2 & -2 \\ \hline -\infty & -2 & -2 & -2 \\ \hline -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ \hline \end{array}$$

c) Pintamos la cara B :

Al comparar la profundidad de los píxeles correspondientes a B , se comprueba que sólo la mitad están a menor profundidad (z mayor) que los del Z-buffer, luego se pinta la media cara izquierda (2 píxeles), y se actualizan los valores del Z-buffer:

$$FB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline F & A & A & A \\ \hline B & A & A & A \\ \hline B & A & A & A \\ \hline F & F & F & F \\ \hline \end{array} \;,\; ZB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -\infty & -2 & -2 & -2 \\ \hline -3 & -2 & -2 & -2 \\ \hline -3 & -2 & -2 & -2 \\ \hline -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ \hline \end{array}$$

d) Pintamos la cara C :

Al comparar la profundidad de los píxeles correspondientes a C , se comprueba que están a menor profundidad (z mayor) que los del Z-buffer, luego se pinta la cara entera, y se actualizan los valores del Z-buffer:

$$FB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline F & A & A & A \\ \hline B & A & A & A \\ \hline B & C & C & A \\ \hline F & C & C & F \\ \hline \end{array} \;,\; ZB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -\infty & -2 & -2 & -2 \\ \hline -3 & -2 & -2 & -2 \\ \hline -3 & -1 & -1 & -2 \\ \hline -\infty & -1 & -1 & -\infty \\ \hline \end{array}$$

Algoritmo de scan-line Z-buffer:

Se inicializa lista de polígonos, ordenados por su coordenada y mínima, y el puntero al primer polígono de no corta, p_{out}, al scan se inicializa apuntando al primer polígono:

$\{\dot{A}, B, C\}$

a) Scan número 1 (linea superior de píxeles):

Se comprueban los polígonos que pasan a cortar al scan, y se mueve p_{out} a la cara B:

$\{A, \dot{B}, C\}$

1) Estado inicial

$FB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline F & F & F & F \\ \hline \end{array}$, $ZB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ \hline \end{array}$

2) Pintamos la cara A

$FB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline F & A & A & A \\ \hline \end{array}$, $ZB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -\infty & -2 & -2 & -2 \\ \hline \end{array}$

3) Las caras B y C no son cortadas por este scan, luego no se consideran, y se termina el proceso para esta línea de píxeles.

b) Scan número 2 :

Se comprueban los polígonos que dejan de cortar, ninguno, y los que pasan a cortar al scan, y se mueve p_{out} a la cara C:

$\{A, B, \dot{C}\}$

1) Estado inicial

$FB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline F & F & F & F \\ \hline \end{array}$, $ZB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ \hline \end{array}$

2) Pintamos la cara A

$FB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline F & A & A & A \\ \hline \end{array}$, $ZB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -\infty & -2 & -2 & -2 \\ \hline \end{array}$

3) Pintamos la cara B

$FB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline B & A & A & A \\ \hline \end{array}$, $ZB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -3 & -2 & -2 & -2 \\ \hline \end{array}$

4) La cara C no es cortada por este scan, luego no se considera, y se termina el proceso para esta línea.

c) Scan número 3 :

Se comprueban los polígonos que dejan de cortar, ninguno, y los que pasan a cortar al scan, y se mueve p_{out} al final de la lista:

$\{A, B, C, \dot{}\}$

1) Estado inicial

$FB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline F & F & F & F \\ \hline \end{array}$, $ZB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ \hline \end{array}$

2) Pintamos la cara A

$FB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline F & A & A & A \\ \hline \end{array}$, $ZB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -\infty & -2 & -2 & -2 \\ \hline \end{array}$

3) Pintamos la cara B

$FB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline B & A & A & A \\ \hline \end{array}$, $ZB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -3 & -2 & -2 & -2 \\ \hline \end{array}$

4) Pintamos la cara C

$FB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline B & C & C & A \\ \hline \end{array}$, $ZB \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -3 & -1 & -1 & -2 \\ \hline \end{array}$

d) Scan número 4 :

Se comprueban los polígonos que dejan de cortar, A y B, y los que pasan a cortar al scan, ninguno:

$\{C, \dot{}\}$

1) Estado inicial
   $FB \equiv$ | F | F | F | F | , $ZB \equiv$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |

2) Las cara A y B no son cortadas. luego no se consideran.

3) Pintamos la cara C
   $FB \equiv$ | F | C | C | F | , $ZB \equiv$ | $-\infty$ | -1 | -1 | $-\infty$ |

3. **Sea el cubo definido por sus vértices opuestos $(0,0,0)$ y $(2,2,-2)$. Encontrar la iluminación mediante los métodos de Gouraud y Phong en el centro de su cara frontal A (vértices opuestos $A_1 = (0,0,0,1)$ y $A_3 = (2,2,0,1)$).**

   Sólo existe una fuente de luz puntual de intensidad $I_p = 1$, situada en el punto $S \equiv (1,1,1,1)$ y sólo consideraremos reflexión difusa; el coeficiente de reflexión difusa del cubo es: $k_d = \frac{1}{2}$.

   No considerar efectos de la distancia. Solución:

   En la figuras 5 se muestra la disposición de la escena.

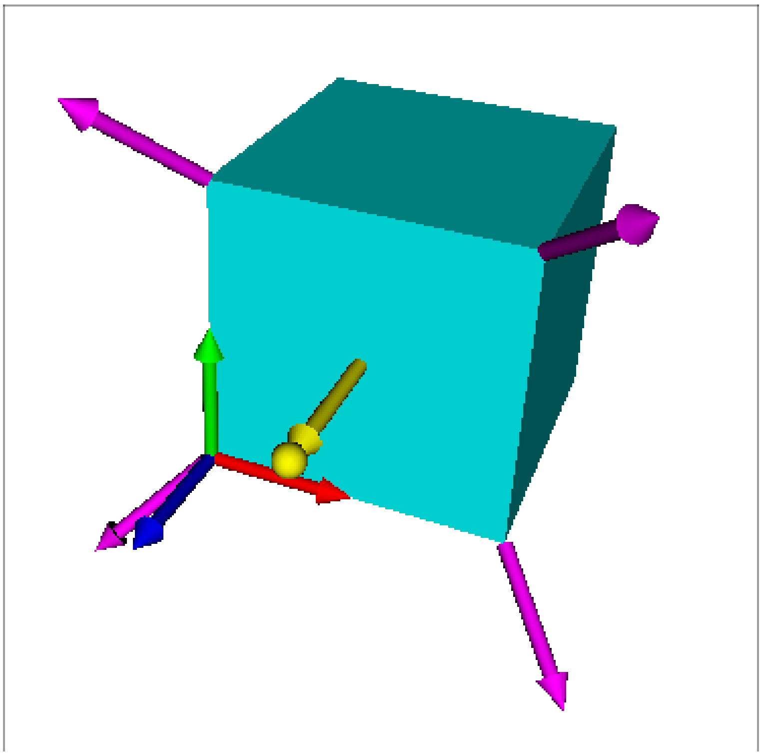

Figura 5: Iluminación de Gouraud y Phong

La normal a la cara es $\overrightarrow{N_{cara}} = (0,0,1,0)$ y el producto escalar de esta normal con el vector que va de un punto de la cara (por ejemplo, su centro $A_c \equiv (1,1,0,1)$) a la fuente de luz ($\overrightarrow{L_c} = \overrightarrow{A_cS} = (0,0,1,0)$) es mayor que cero ($\overrightarrow{N_{cara}} \cdot \overrightarrow{L_c} = 1$), luego esta fuente de luz ilumina la cara, y se ha de considerar su contribución a la iluminación de la cara.

Las normales a las caras son paralelas a los ejes coordenados. Es fácil ver que las normales a los vértices de A , que son promedio de las normales a las caras a las que pertenece cada vértice, son las siguientes:

$A_1 \equiv (0,0,0,1)$, $\overrightarrow{N_1} = \sqrt{\frac{1}{3}}(-1,-1,1,0)$

$A_2 \equiv (2,0,0,1)$, $\overrightarrow{N_2} = \sqrt{\frac{1}{3}}(1,-1,1,0)$

$A_3 \equiv (2,2,0,1)$, $\overrightarrow{N_3} = \sqrt{\frac{1}{3}}(1,1,1,0)$

$A_4 \equiv (0,2,0,1)$, $\overrightarrow{N_4} = \sqrt{\frac{1}{3}}(-1,1,1,0)$

Iluminación de Gouraud:

La iluminación en el centro A_c es el promedio de las iluminaciones en los vértices.

a) Iluminación en A_1 :
$\overrightarrow{L_1} = (\overrightarrow{A_1S})_{normalizado} = \sqrt{\frac{1}{3}}(1,1,1,0)$
$\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{L_1} = -\frac{1}{3} < 0$, luego esta fuente de luz no contribuye con iluminación difusa a este vértice.
$I_1 = I_p \cdot k_d \cdot \left(\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{L_1}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

b) Iluminación en A_2 :
$\overrightarrow{L_2} = (\overrightarrow{A_2S})_{normalizado} = \sqrt{\frac{1}{3}}(-1,1,1,0)$
$\overrightarrow{N_2} \cdot \overrightarrow{L_2} = -\frac{1}{3} < 0$, luego esta fuente de luz no contribuye con iluminación difusa a este vértice.
$I_2 = I_p \cdot k_d \cdot \left(\overrightarrow{N_2} \cdot \overrightarrow{L_2}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

c) Iluminación en A_3 :
$\overrightarrow{L_3} = (\overrightarrow{A_3S})_{normalizado} = \sqrt{\frac{1}{3}}(-1,-1,1,0)$
$\overrightarrow{N_3} \cdot \overrightarrow{L_3} = -\frac{1}{3} < 0$, luego esta fuente de luz no contribuye con iluminación difusa a este vértice.
$I_3 = I_p \cdot k_d \cdot \left(\overrightarrow{N_3} \cdot \overrightarrow{L_3}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

d) Iluminación en A_4:
$\overrightarrow{L_4} = (\overrightarrow{A_4S})_{normalizado} = \sqrt{\frac{1}{3}}(1,-1,1,0)$
$\overrightarrow{N_4} \cdot \overrightarrow{L_4} = -\frac{1}{3} < 0$, luego esta fuente de luz no contribuye con iluminación difusa a este vértice.
$I_4 = I_p \cdot k_d \cdot \left(\overrightarrow{N_4} \cdot \overrightarrow{L_4}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

La iluminación en el centro de A será el valor medio de las iluminaciones de los centros de las aristas $\overline{A_1A_4}$ y $\overline{A_2A_3}$, que a su vez son el valor medio de las intensidades de los vértices que las definen:
$I_c = \frac{\frac{I_1+I_4}{2}+\frac{I_2+I_3}{2}}{2} = \frac{I_1+I_2+I_3+I_4}{4} = 0$
De hecho, dado que las iluminaciones de los vértices son iguales, la cara tiene una iluminación uniforme igual a 0; es decir, aparecerá negra, pese a que la fuente de luz está enfrente de la cara. Este efecto paradójico se debe a la forma de calcular iluminaciones del algoritmo de Gouraud, a que la fuente de luz está muy próxima a la cara, y a que el ángulo entre las caras, 90°, es muy elevado para hacer un sombreado suave.

Iluminación de Phong:

La iluminación en el centro A_c es la correspondiente a una normal promedio de las normales en los vértices. Según el argumento anterior para calcular el promedio de las iluminaciones:

$\overrightarrow{N_c} = \left(\frac{\overrightarrow{N_1}+\overrightarrow{N_2}+\overrightarrow{N_3}+\overrightarrow{N_4}}{4}\right)_{normalizado} = (0,0,1,0)$

$\overrightarrow{L_c} = (\overrightarrow{A_cS})_{normalizado} = (0,0,1,0)$

$\overrightarrow{N_c} \cdot \overrightarrow{L_c} = 1 > 0$, luego esta fuente de luz contribuye con iluminación difusa en este punto.

$I_c = I_p \cdot k_d \cdot \left(\overrightarrow{N_c} \cdot \overrightarrow{L_c}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

Vemos ahora como la iluminación Phong permite que la iluminación en el centro sea superior a la iluminación en los vértices, lo cual elimina el efecto paradójico de iluminación nula de Gouraud y da una iluminación más natural dada la disposición de la fuente de luz y el cubo. Además, la iluminación ahora no es uniforme en la cara, obviamente; esto produce una mayor naturalidad en el movimiento de los brillos al mover la fuente de luz.