

Małgorzata Jakubik 262279, Kinga Jesionek 262328

Sprawozdanie 2

13 marca 2023

1. Wstęp

1.1. Cel pracy

Celem poniższego raportu jest modelowanie wybranych danych rzeczywistych przy pomocy modelu ARMA i ocena jego dopasowania. Do przeprowadzenia analizy wykorzystaliśmy pakiet R.

1.2. Informacje o danych

Zbiór danych użyty w poniższym raporcie zawiera informacje o miesięcznej liczbie pasażerów pewnej linii lotniczej na przestrzeni lat 1949 - 1960. W tym czasie zebrano 144 obserwacje. Dane dostępne są na platformie Kaggle.

1.3. Wczytanie danych

	Month	X.Passengers
1	1949-01	112
2	1949-02	118
3	1949-03	132
4	1949-04	129
5	1949-05	121
6	1949-06	135

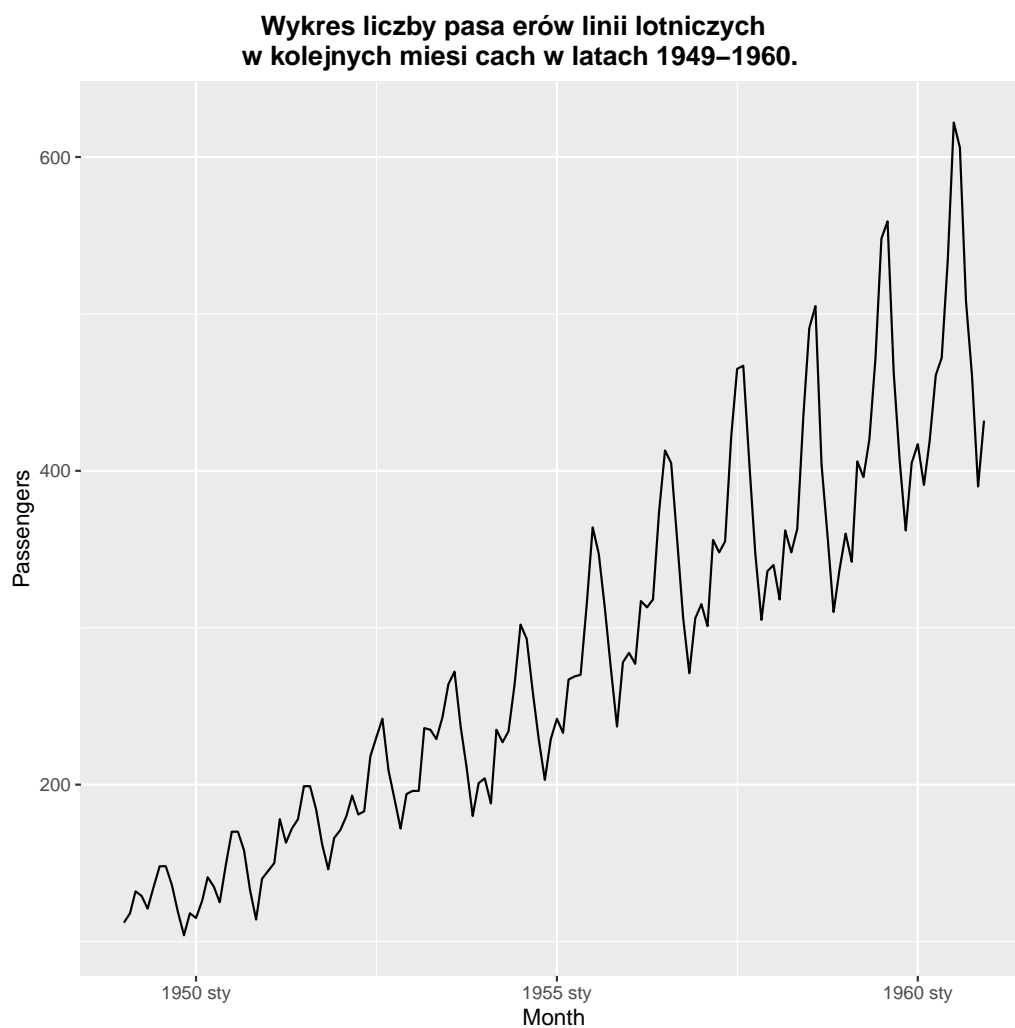
Tabela 1. Wycinek sześciu pierwszych obserwacji w zbiorze danych wczytanym z pliku.

Przykładowe dane wczytane prosto z pliku przedstawiliśmy w tabeli (1). Możemy zauważyć, że oznaczenie miesiąca prezentowane jako napis jest niepoprawne w koncepcji zapisu dat w języku R (YYYY-MM-DD). Dodamy więc do każdego oznaczenia dzień, następnie przekonwertujemy typ na datę i finalnie na typ `yearmonth` z pakietu `tsibble`. Ze względu na to, że dane przedstawiają szereg czasowy, zapiszemy je w postaci obiektu danych `tsibble` z tego samego pakietu oraz dostosujemy nazwy zmiennych.

	Month	Passengers
1	1949 sty	112
2	1949 lut	118
3	1949 mar	132
4	1949 kwi	129
5	1949 maj	121
6	1949 cze	135

Tabela 2. Wycinek sześciu pierwszych obserwacji w zbiorze danych wczytanym z pliku po wstępnym dostosowaniu.

Efekt został przedstawiony w tabeli (2) w postaci wycinka z danych.



Rysunek 1. Wykres liczby pasażerów linii lotniczych w kolejnych miesiącach w latach 1949-1960.

1.4. Wizualizacja danych

Na wykresie (1) przedstawiliśmy krzywą łączącą obserwacje z analizowanych danych. Na pierwszy rzut oka widzimy, że wśród danych występuje zarówno sezonowość, jak i trend. Możliwe jest również, że wśród danych wariancja nie jest stała. Wszystkie te obserwacje będą sprawdzane w dalszej części sprawozdania.

2. Przygotowanie danych do analizy

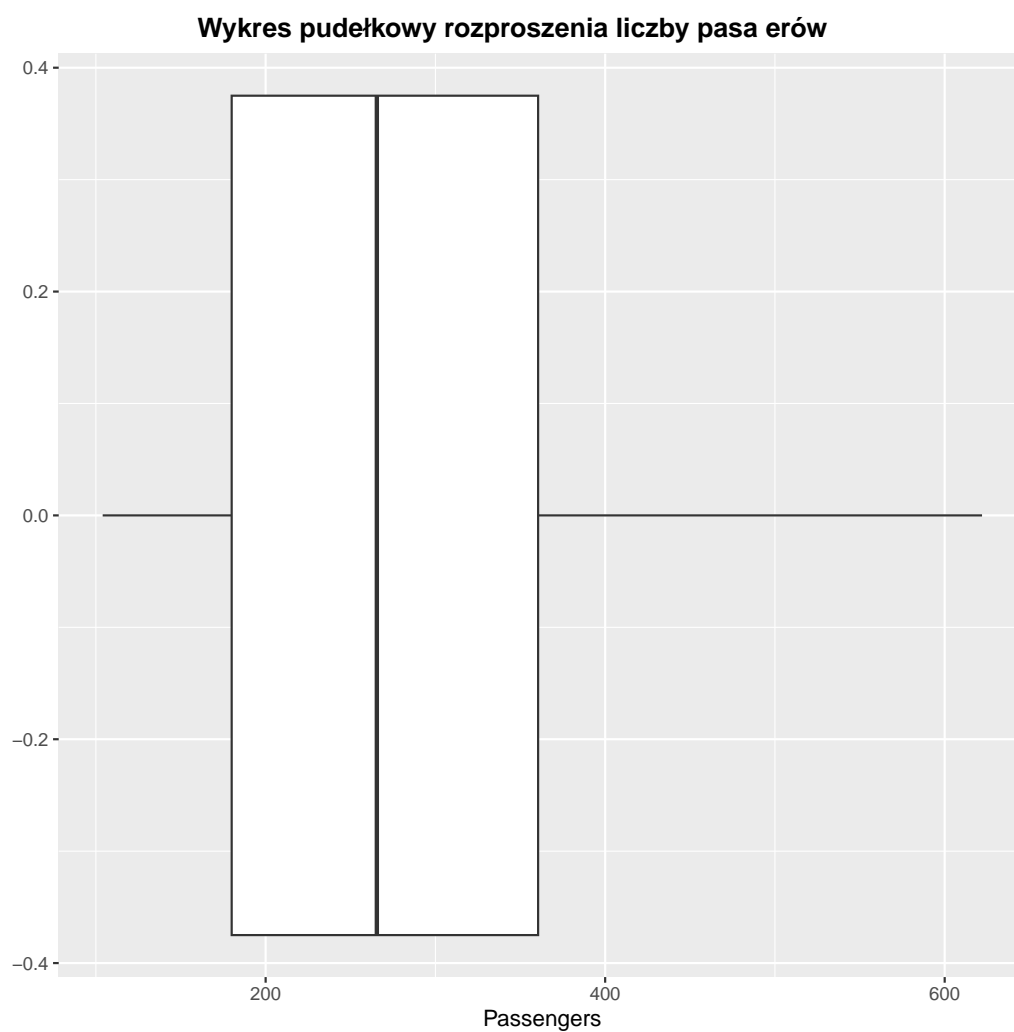
2.1. Zbadanie jakości danych

W zbiorze danych dotyczącym miesięcznej liczby pasażerów linii lotniczej spodziewamy się, że nie uzyskamy wartości ujemnych ani niecałkowitych. Spodziewamy się również, że dostarczone dane będą o interwale miesięcznym. Przed spojrzeniem na dane trudnym do określenia jest, jakie wartości można potraktować jako podejrzenie duże. Biorąc pod uwagę, że dane dotyczą okresu po II wojnie światowej oraz, że pierwsze linie lotnicze powstawały na przestrzeni lat 20-tych XX wieku jesteśmy w stanie uwierzyć, że rozważana linia mogła istnieć. Natomiast biorąc pod uwagę statystyki teraźniejszych linii lotniczych, górną granicę wiarygodnej liczby jej pasażerów mogłybyśmy ustalić na liczbę rzędu kilkudziesięciu tysięcy.

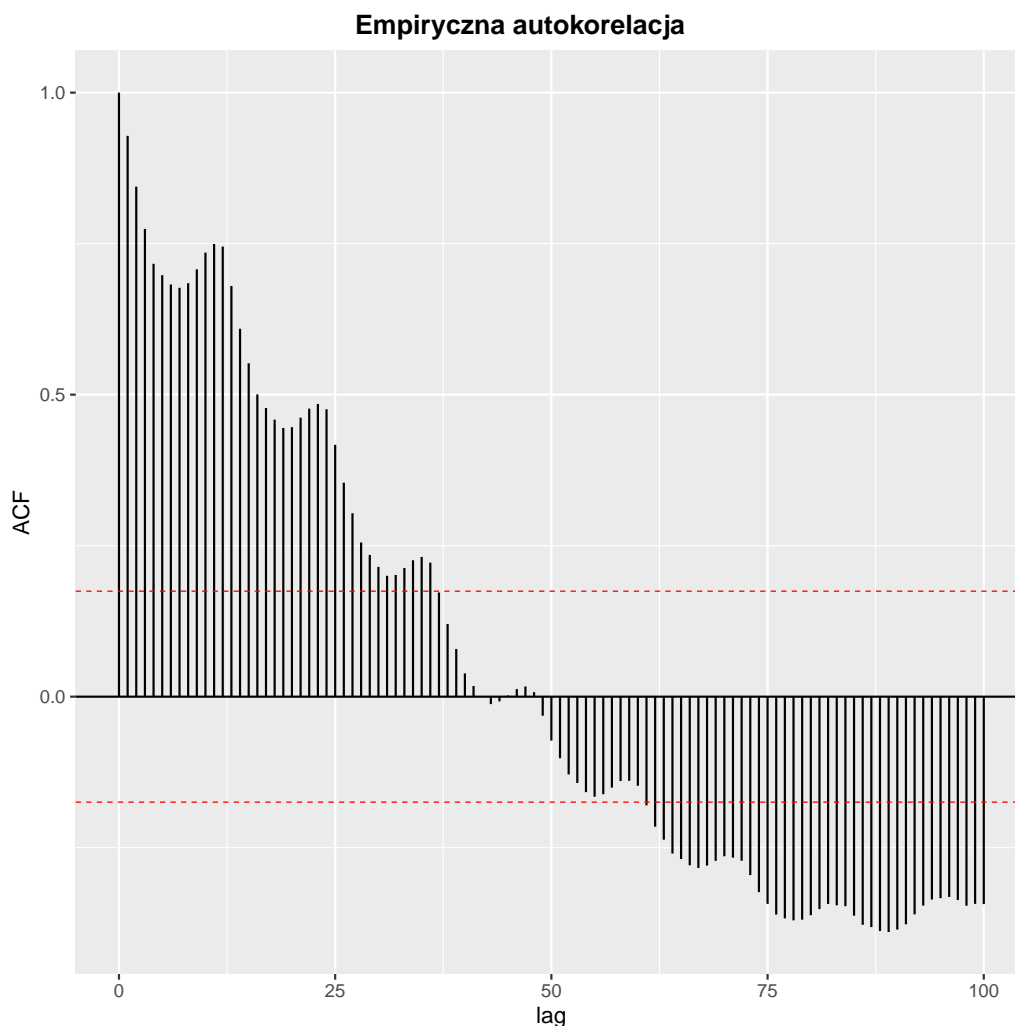
	x
Liczba obserwacji	144.00
Wartość średnia	280.30
Odchylenie standardowe	119.97
Wartość największa	622.00
Mediana	265.50
Wartość najmniejsza	104.00
Liczba braków danych pasażerów	0.00
Liczba pominiętych miesięcy	0.00
Liczba ujemnych lub niecałkowitych wartości pasażerów	0.00

Tabela 3. Wartości wyliczone w celu sprawdzenia jakości analizowanych danych.

Żaden z opisanych wcześniej rodzajów błędów nie występuje w analizowanych przez nas danych. W zbiorze danych nie występują ujemne ani niecałkowite liczności pasażerów, nie ma braków danych ani pominiętych miesięcy oraz wszystkie miesiące ułożone są chronologicznie. Zakres wartości liczby pasażerów oraz jej odchylenie standardowe również są liczbami, w których prawdziwość jesteśmy w stanie uwierzyć. Wyniki wyliczeń, które posłużyły badaniu jakości analizowanych danych zestawiliśmy w tabeli (3). Wygenerowałyśmy również wykres pudełkowy (2) rozproszenia wartości obserwacji, jednak obserwując wspomniany wykres nie znajdujemy obserwacji, które są istotnie odstające.



Rysunek 2. Wykres pudełkowy rozproszenia liczby pasażerów pewnych linii lotniczych z analizowanych danych.



Rysunek 3. Wykres autokorelacji szeregu czasowego liczby pasażerów pewnych linii lotniczych przed dekompozycją.

2.2. Wyodrębnienie obserwacji do zbioru testowego

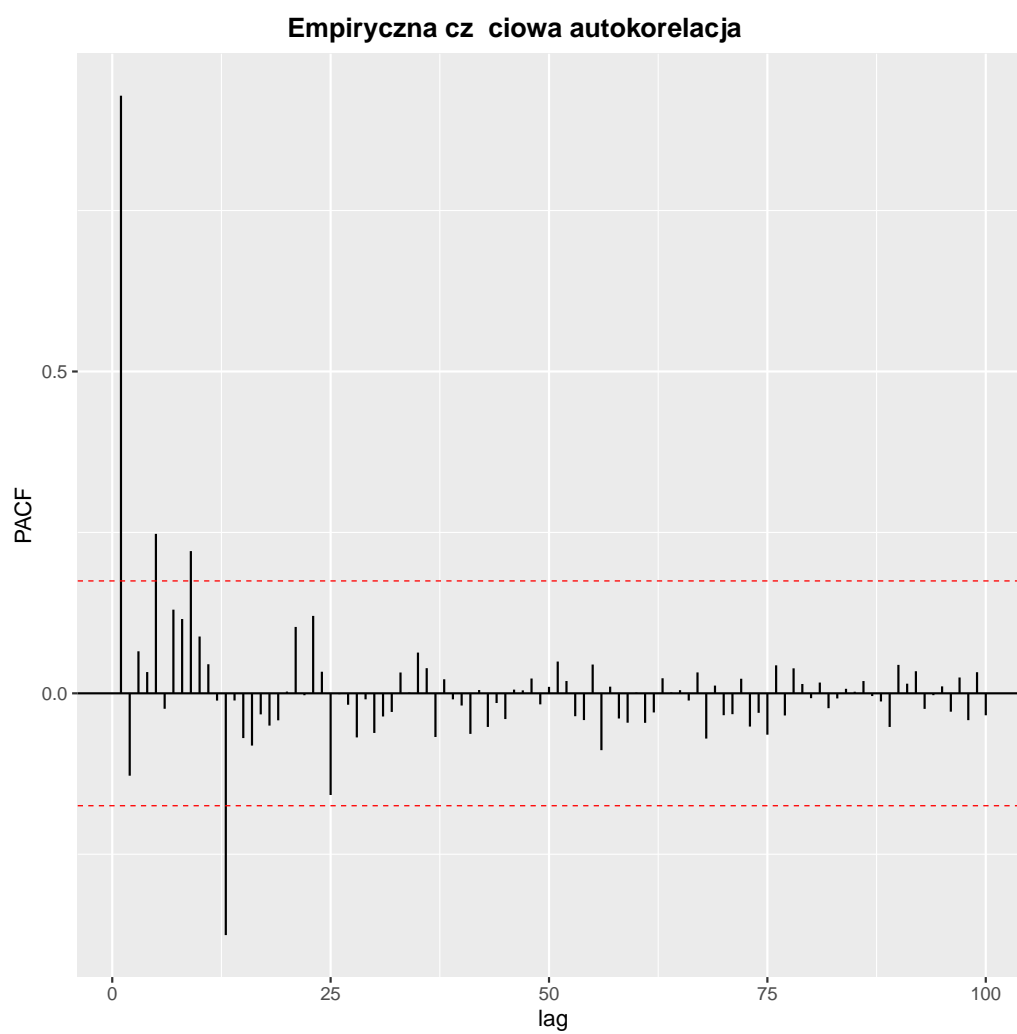
Do dalszej analizy zbiór danych podzieliłyśmy na dwie części. Wyodrębniłyśmy z danych zbiór treningowy składający się ze 126 obserwacji i zbiór testowy zawierający 18 obserwacji, który stanowi półtora roku. Model będzie dobierany dla zbioru treningowego, a predykowane przyszłe obserwacje zostaną porównane ze zbiorem testowym.

2.3. Dekompozycja szeregu czasowego

2.3.1. Wykresy ACF i PACF dla surowych danych

Na wykresach (3) i (4) przedstawiliśmy wartości odpowiednio funkcji autokorelacji oraz częściowej autokorelacji dla analizowanych danych przed dekompozycją. Empiryczna funkcja autokorelacji wyraża się wzorem

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)},$$



Rysunek 4. Wykres częściowej autokorelacji szeregu czasowego liczby pasażerów pewnych linii lotniczych przed dekompozycją.

gdzie

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (X_{t+|h|} - \bar{x})(X_t - \bar{x}), \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

natomiast w celu wyznaczenia częściowej autokorelacji wykorzystaliśmy funkcję `pacf` dostępną w pakiecie R. Wykres autokorelacji mocno sugeruje, że w rozpatrywanym szeregu czasowym występują jakieś zależności. W kolejnych krokach spróbujemy je zidentyfikować oraz zniwelować. Wykres częściowej autokorelacji nie dostarcza nam tego rodzaju wątpliwości.

2.3.2. Test ADF weryfikujący hipotezę o niestacjonarności dla surowych danych

	lag	ADF	p.value
1	0.00	0.59	0.81
2	1.00	0.19	0.70
3	2.00	0.41	0.76
4	3.00	0.59	0.81
5	4.00	0.99	0.91

Tabela 4. Model liniowy pierwszego typu.

W celu weryfikacji hipotezy stacjonarności szeregu wykonaliśmy test ADF, czyli rozszerzony test Dickey’a-Fullera. Test Dickey’a-Fullera weryfikuje obecność pierwiastka jednostkowego, jednak nie uwzględnia faktu, że składnik losowy równania $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$ może zawierać autokorelację. Z tego względu wykonujemy jego rozszerzoną wersję. Korzystając z pakietu `aTSA` wykonujemy test ADF w trzech wariantach. Jako hipotezę zerową przyjmujemy, że dane są niestacjonarne. Pierwszy typ regresji testowej bez komponentów deterministycznych wyraża się wzorem

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Wyniki testu z zastosowaniem tego modelu zaprezentowaliśmy w tabeli (4). Widzimy, że p-wartości są wysokie, nie ma zatem podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Test wskazuje na niestacjonarność szeregu.

	lag	ADF	p.value
1	0.00	-1.23	0.62
2	1.00	-1.77	0.42
3	2.00	-1.38	0.56
4	3.00	-1.21	0.62
5	4.00	-0.86	0.74

Tabela 5. Model liniowy drugiego typu.

Drugi wariant testu uwzględnia występowanie dryfu w badanym szeregu. Do rozpatrywanego modelu regresji dodajemy wyraz wolny. Wyniki uzyskane

po przeprowadzeniu tego wariantu testu znajdują się w tabeli (5). Ponownie otrzymane p-wartości są większe niż poziom istotności, dlatego ponownie nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Wynik testu wskazuje na niestacjonarność szeregu z dryfem.

	lag	ADF	p.value
1	0.00	-4.36	0.01
2	1.00	-6.64	0.01
3	2.00	-6.45	0.01
4	3.00	-6.73	0.01
5	4.00	-5.49	0.01

Tabela 6. Model liniowy trzeciego typu.

Ostatni już wariant testu uwzględnia komponenty deterministyczne takie jak wyraz wolny i trend liniowy. Wyniki znajdują się w tabeli (6). Widzimy, że otrzymane wartości są mniejsze niż poziom istotności, dlatego odrzucamy hipotezę zerową. Możemy stwierdzić, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy alternatywnej mówiącej o zmiennej stacjonarnej wokół trendu.

2.3.3. Identyfikacja trendów deterministycznych

Aby uzyskać szereg stacjonarny w słabym sensie użyliśmy transformacji Boxa-Coxa, która ma na celu ustabilizować wariancję w naszych danych. Transformacja Boxa-Coxa wyraża się wzorem

$$w_t = \begin{cases} \log(y_t) & \text{gdy } \lambda = 0; \\ \frac{(\text{sign}(y_t)|y_t|^\lambda - 1)}{\lambda} & \text{gdy } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Na wykresie (5) przedstawiony został szereg czasowy po zastosowaniu takiej transformacji.

Transformacja jednak nie zredukowała trendu i sezonowości. Dwukrotne zastosowanie różnicowania pomogło nam uzyskać szereg stacjonarny. Procedura ta została zastosowana dla kolejno jednego i dwunastu lagów. Zastosowane różnicowanie wyraża się wzorami

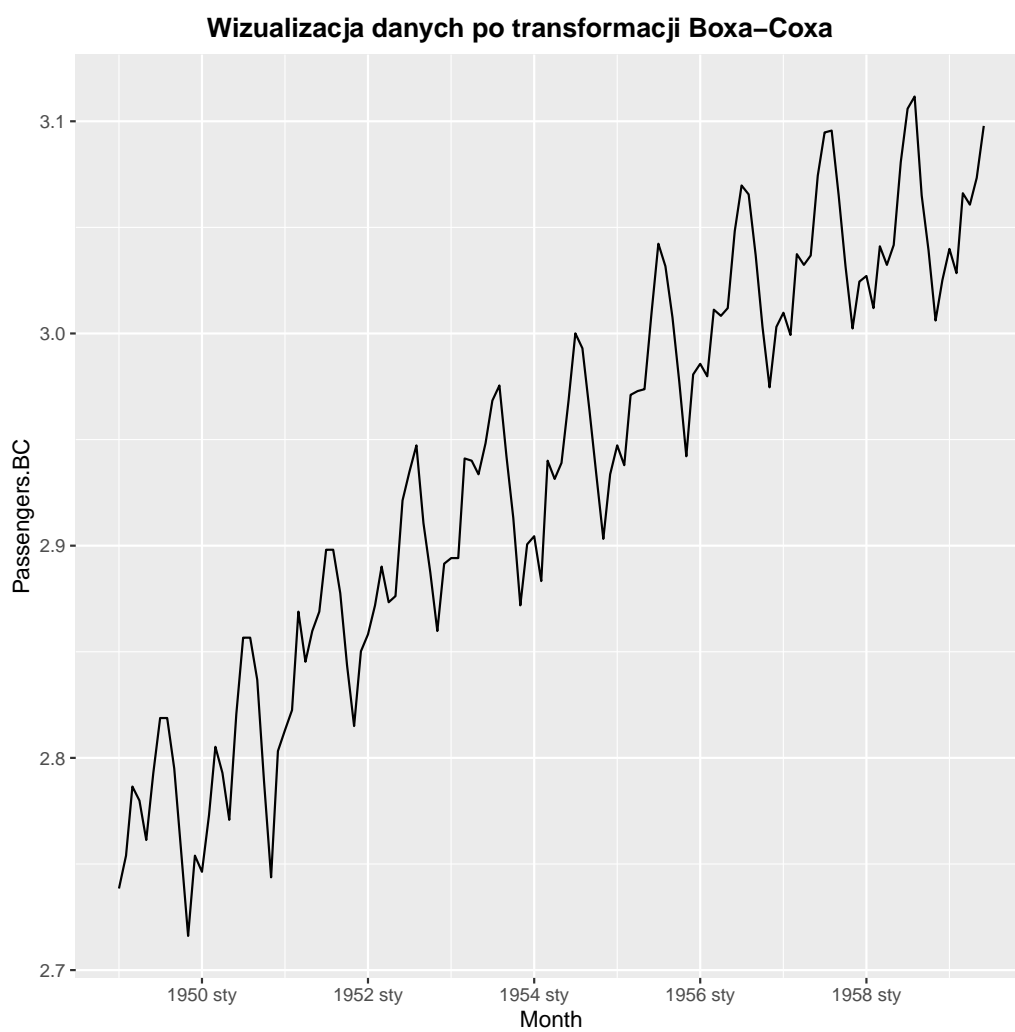
$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-12}.$$

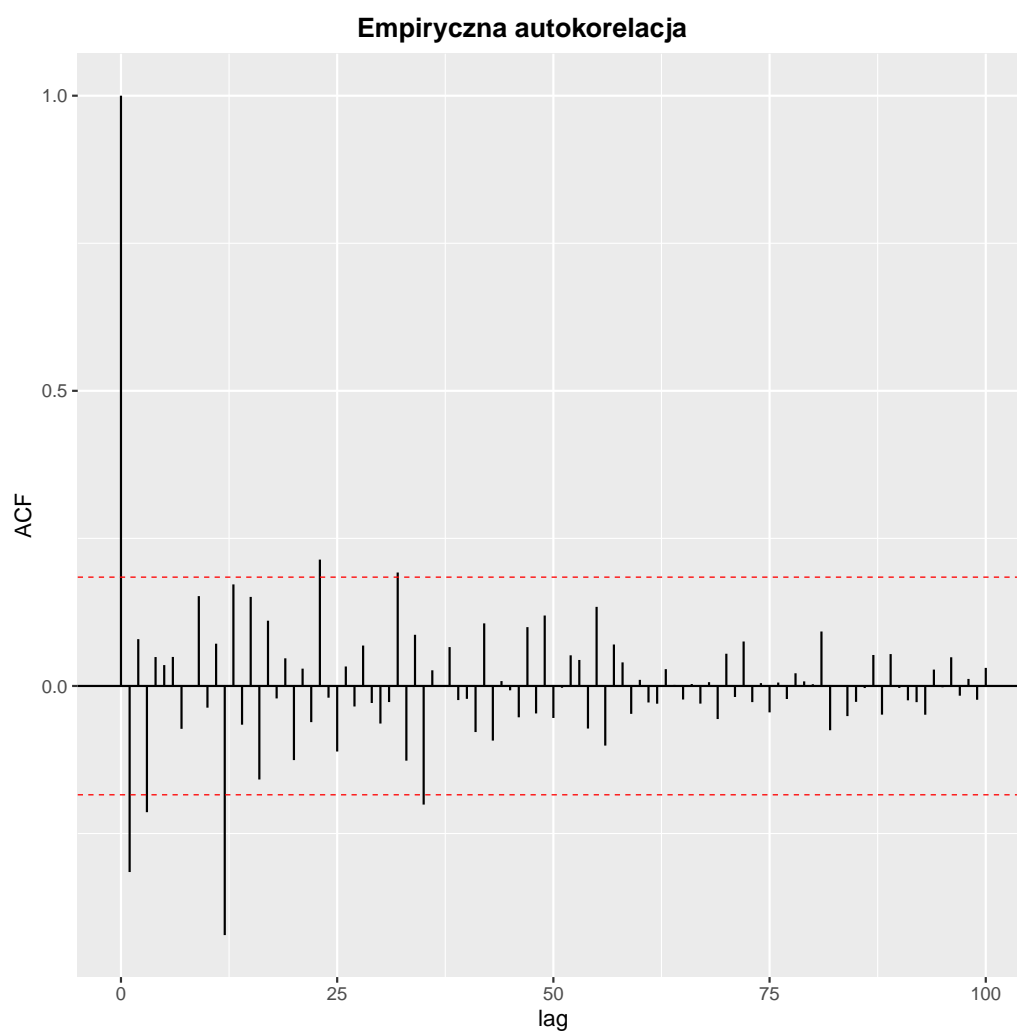
Wykonałyśmy je wykorzystując funkcję `diff`. Różnicowanie ma na celu usunięcie trendu i sezonowości, która odpowiada za liczbę pasażerów w poszczególnych miesiącach roku tak, aby uzyskać szereg stacjonarny w słabym sensie.

2.3.4. Wykresy ACF i PACF dla szeregu po dekompozycji

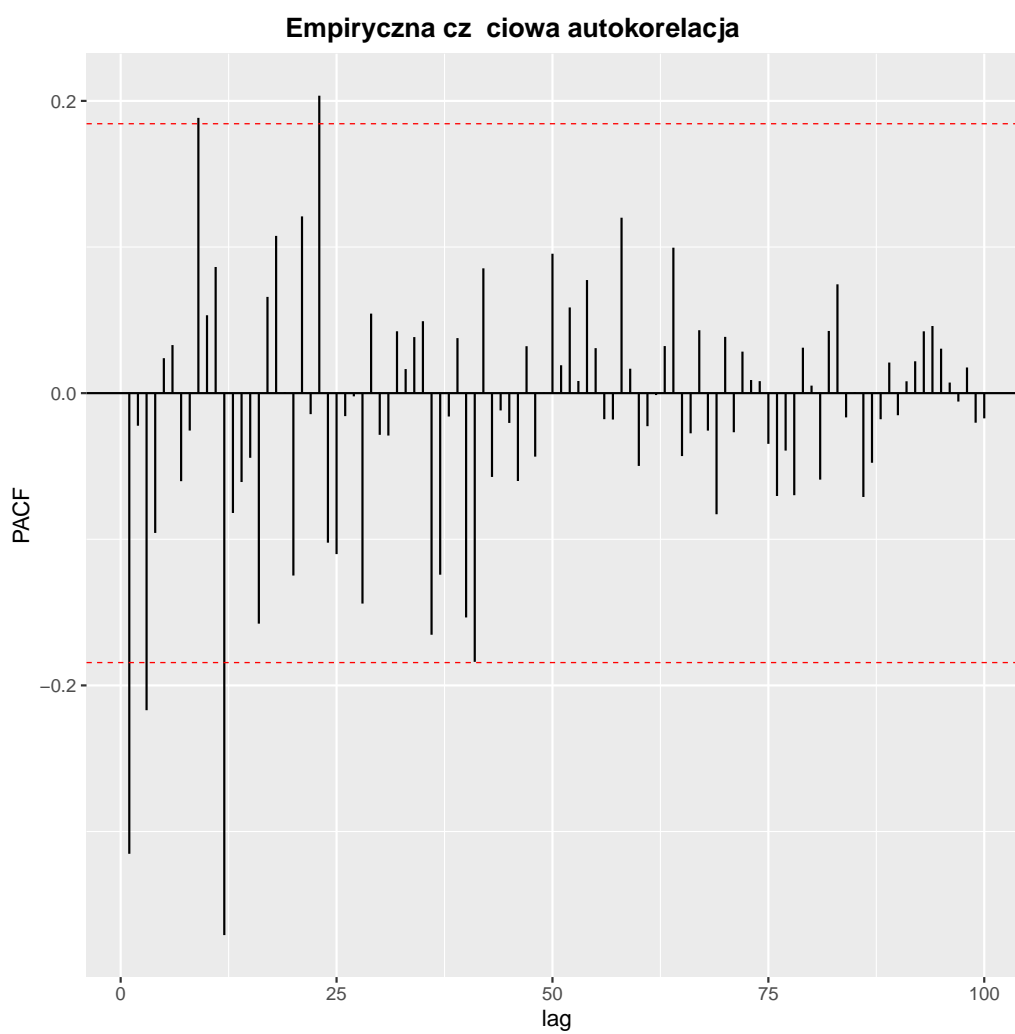
Po dokonaniu dekompozycji wykonałyśmy wykresy ACF i PACF, które są odpowiednio przedstawione na wykresach (6) i (7). Wykresy nie wskazują na istnienie powtarzalności. Poza pojedynczymi przypadkami wartości nie wykraczają poza przedziały ufności. Obie funkcje zbiegają do zera. Wnioskujemy zatem, że dekompozycja została wykonana wystarczająco dobrze i szereg został stacjonarny. Zatem przeprowadzona dekompozycja umożliwia nam dobór modelu ARMA.



Rysunek 5. Wykres przedstawiający szereg czasowy po zastosowaniu transformacji Boxa-Coxa.



Rysunek 6. Wykres autokorelacji szeregu czasowego liczby pasażerów pewnych inii lotniczych po dokompozycji.



Rysunek 7. Wykres częściowej autokorelacji szeregu czasowego liczby pasażerów pewnych linii lotniczych po dekompozycji.

2.3.5. Test ADF weryfikujący hipotezę o niestacjonarności dla szeregu po dekompozycji

	lag	ADF	p.value
1	0.00	-14.63	0.01
2	1.00	-8.67	0.01
3	2.00	-8.21	0.01
4	3.00	-7.01	0.01
5	4.00	-5.66	0.01

Tabela 7. Model liniowy pierwszego typu.

	lag	ADF	p.value
1	0.00	-14.56	0.01
2	1.00	-8.63	0.01
3	2.00	-8.17	0.01
4	3.00	-6.97	0.01
5	4.00	-5.63	0.01

Tabela 8. Model liniowy drugiego typu.

	lag	ADF	p.value
1	0.00	-14.51	0.01
2	1.00	-8.60	0.01
3	2.00	-8.17	0.01
4	3.00	-7.00	0.01
5	4.00	-5.62	0.01

Tabela 9. Model liniowy trzeciego typu.

Wykonując test ADF po przeprowadzeniu dekompozycji spodziewamy się, że otrzymamy małe p-wartości i odrzucimy hipotezę zerową mówiącą o niestacjonarności. W tabelach (7), (8), (9) zaprezentowałyśmy wyniki z przeprowadzonego testu w trzech wariantach. Widzimy, że każdy z nich wskazuje na to, że możemy odrzucić hipotezę zerową na rzecz hipotezy alternatywnej mówiącej o stacjonarności danych.

3. Modelowanie danych przy pomocy ARMA

3.1. Dobranie rzędu modelu przy użyciu kryteriów informacyjnych

Dobór odpowiedniego rzędu modelu ARMA jest bardzo ważny. W tym celu korzysta się ze wskaźników dopasowania modelu. Wykorzystywanymi najpowszechniej wskaźnikami są Bayesowskie kryterium informacyjne (BIC)

i kryterium informacyjne Akaikiego (AIC). Kryterium BIC obliczane jest przy pomocy wzoru

$$BIC = -2 \ln L + (p + q) \ln(n),$$

natomiast kryterium AIC przy pomocy

$$AIC = -2 \ln L + 2(p + q),$$

gdzie L to funkcja wiarygodności dla residuum. Spośród uzyskiwanych wartości dla poszczególnych parametrów wybiera się parę parametrów, dla których wartość kryterium jest najmniejsza. BIC i AIC uzyskane dla naszego szeregu znajdują się odpowiednio na wykresach (8) i (9). Aby wybrać parametry p i q stworzyliśmy tabele (10) i (11), które zawierają pięć najmniejszych wartości poszczególnych kryteriów informacyjnych.

	P	Q	AIC
1	6	9	-699.79
2	10	9	-698.56
3	6	6	-697.82
4	8	5	-696.50
5	9	6	-696.37

Tabela 10. Wycinek pięciu pierwszych par parametrów p i q z najmniejszym AIC.

	P	Q	BIC
1	0	1	-678.71
2	1	0	-677.50
3	2	3	-676.92
4	3	2	-675.40
5	1	1	-674.52

Tabela 11. Wycinek pięciu pierwszych par parametrów p i q z najmniejszym BIC.

Na podstawie tabel (10) i (11) wybrałyśmy parametry modelu zaproponowane przez BIC. Otrzymujemy zatem szereg o $p = 0$ i $q = 1$, czyli używany został model średniej ruchomej MA(1).

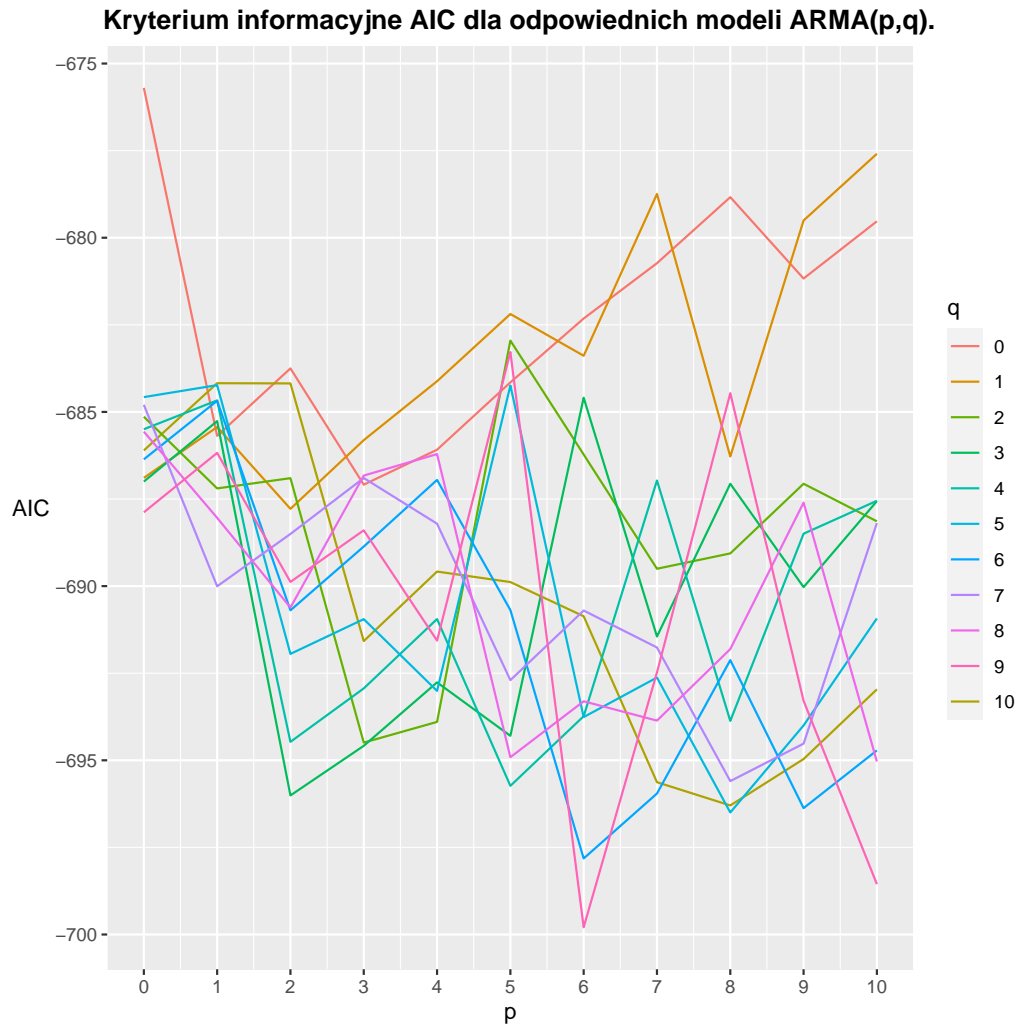
3.2. Estymacja parametrów modelu wybraną metodą

Po wyborze rzędów modelu ARMA, można przejść do estymacji parametrów. Skorzystałyśmy z innowacyjnego algorytmu Hannana-Rissanena dostępnego w pakiecie `itsmr`.

Uzyskane parametry zostały zawarte w tabeli (12).

4. Ocena dopasowania modelu

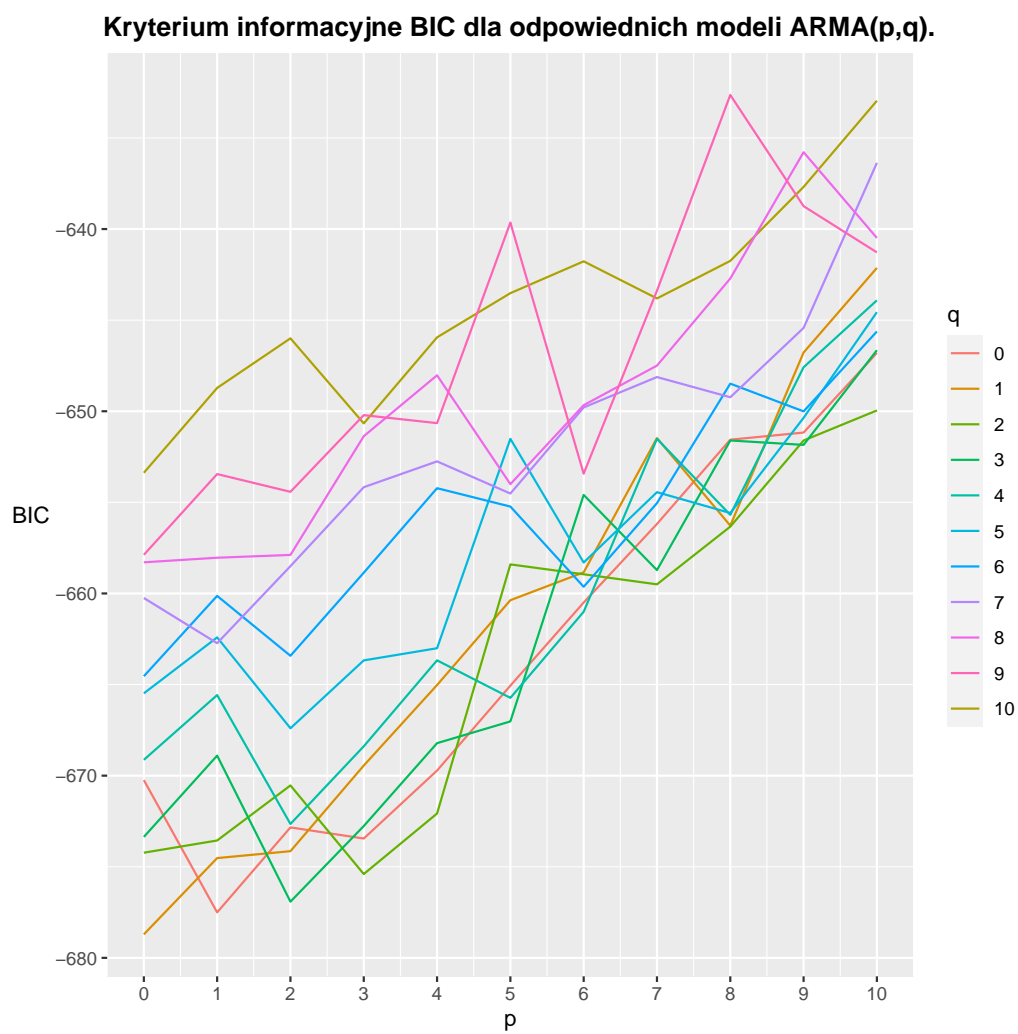
4.1. Przedziały ufności dla ACF i PACF



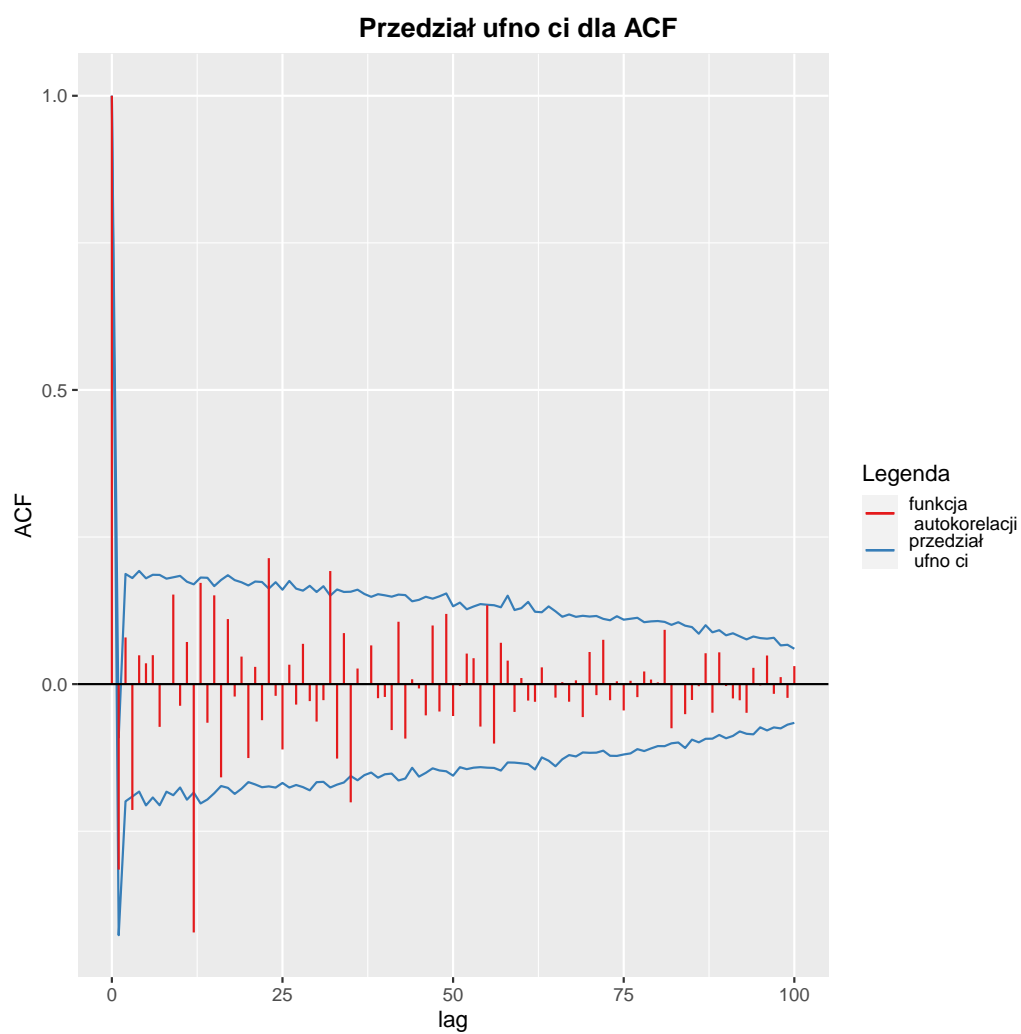
Rysunek 8. Kryterium informacyjne Akaikiego dla parametrów $p, q \in [0, 10] \cup \mathbb{N}$.

	estymowany parametr
ϕ	0
θ	-0.287022
σ^2	1.28×10^{-4}

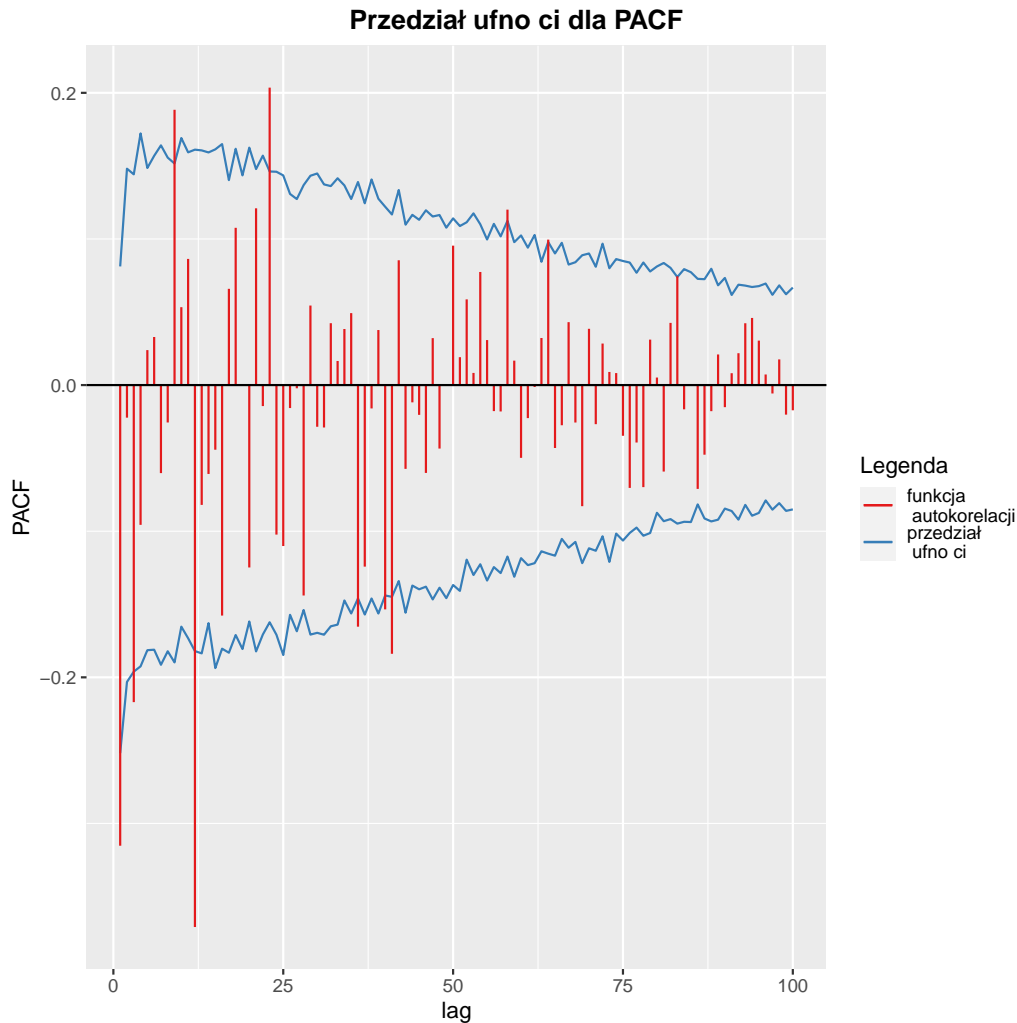
Tabela 12. Estymowane parametry modelu ARMA(0, 1).



Rysunek 9. Bayesowskie kryterium informacyjne dla parametrów $p, q \in [0, 10] \cup \mathbb{N}$.



Rysunek 10. Wykres funkcji autokorelacji wraz z przedziałami ufności.



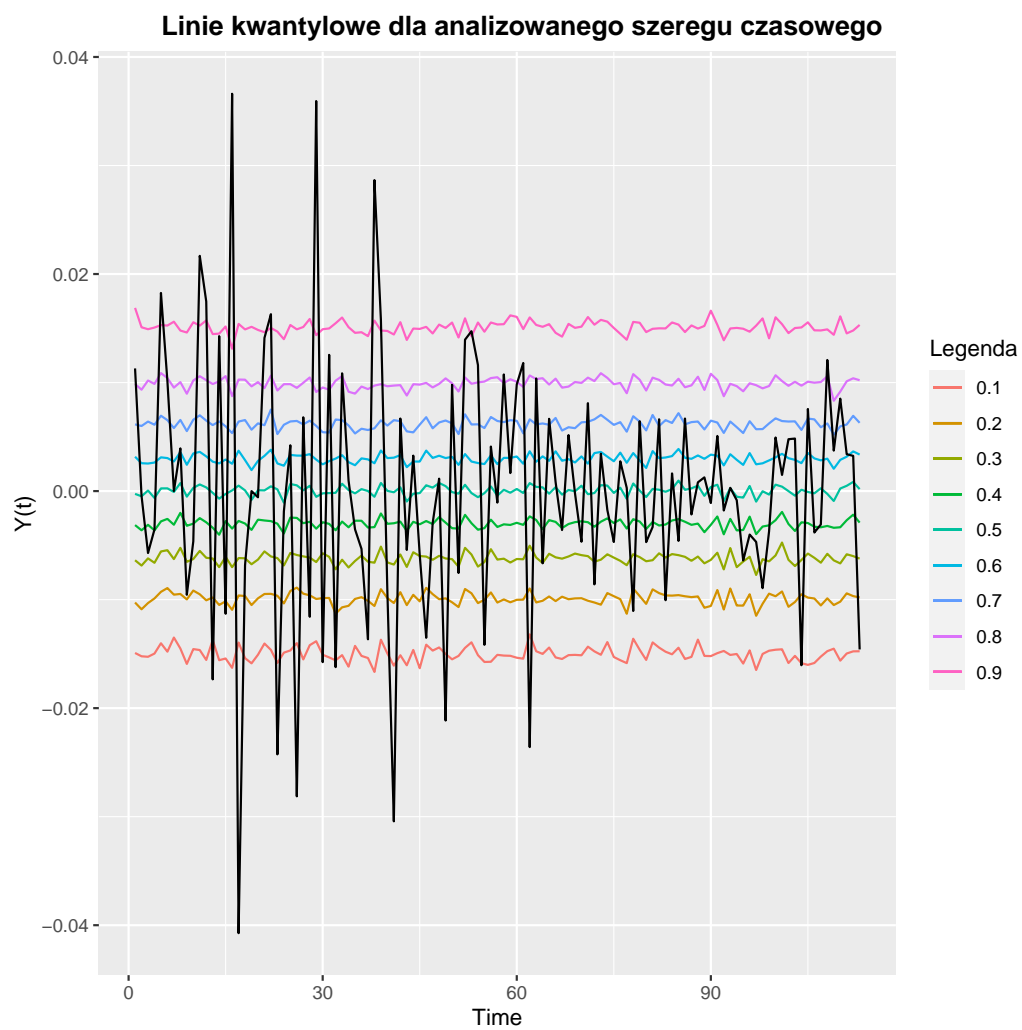
Rysunek 11. Wykres funkcji częściowej autokorelacji wraz z przedziałami ufności.

Dla wybranego przez nas modelu $ARMA(0,1)$ z parametrem $\theta = -0.2870219$ symulacyjnie wyznaczyliśmy przedziały ufności dla funkcji ACF za pomocą metody Monte Carlo. Wykonaliśmy 1000 kroków Monte Carlo i w każdym z nich policzyliśmy empiryczną funkcję autokorelacji. Następnie dla każdego lagu wyznaczyliśmy empiryczne kwantyle rzędu $\frac{\alpha}{2}$ i $1 - \frac{\alpha}{2}$ funkcji autokorelacji. Na wykresie (10) zaprezentowaliśmy empiryczną funkcję autokorelacji z danych po dekompozycji wraz z wyznaczonymi przedziałami ufności dla ACF. Obserwujemy pojedyncze wyjścia poza przedział ufności.

Podobną procedurę zastosowaliśmy do wyznaczenia przedziałów ufności dla empirycznej częściowej funkcji autokorelacji. Rezultaty widoczne są na rysunku (11). Ponownie widzimy pojedyncze wyjścia poza przedział ufności. Obserwujemy też stopniowe wygaszanie się funkcji.

4.2. Porównanie linii kwantylowych z trajektorią

W kolejnym kroku wygenerowaliśmy linie kwantylowe dla analizowanego szeregu czasowego wykonując 1000 kroków Monte Carlo. Wyniki widoczne są na rysunku (12) Dla wygenerowanych trajektorii modelu $ARMA(0, 1)$ z



Rysunek 12. Linie kwantylowe dla analizowanego szeregu czasowego.

	uzyskane	spodziewane
kwantyle_od_0.9_do_0.1	0.83	0.80
kwantyle_od_0.8_do_0.2	0.66	0.60
kwantyle_od_0.7_do_0.3	0.50	0.40
kwantyle_od_0.6_do_0.4	0.25	0.20

Tabela 13. Procentowa część obserwacji w danym przedziale

parametrem $\theta = -0.2870219$ wyznaczyliśmy decyle oraz sprawdziliśmy, jaki procent danych mieści się w zadanych przedziałach. Traktując linie kwantylowe jako przedziały ufności dla trajektorii na poziomie 80%, 60%, 40% oraz 20% wyznaczyliśmy faktyczny procent danych mieszczący się w danym przedziale. Wyniki zaprezentowaliśmy w tabeli (13). Każdy rozpatrywany odse-tek danych zawiera się w rozpatrywanych decylowych przedziałach ufności.

4.3. Prognoza dla przyszłych obserwacji i porównanie z rzeczywistymi danymi

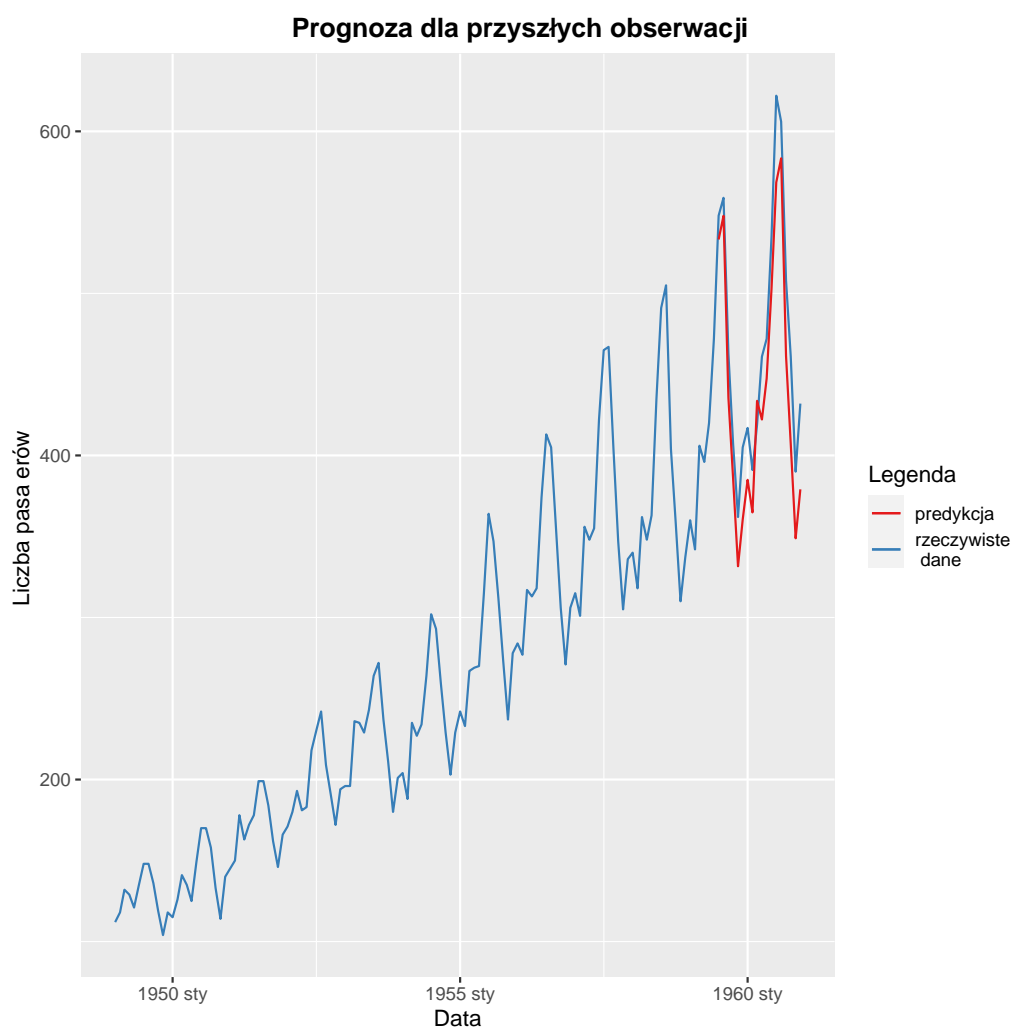
Następnym etapem była prognoza przyszłych obserwacji. Za pomocą wybranego modelu ARMA(0, 1) z parametrem $\theta = -0.2870219$ wykonaliśmy predykcję liczby pasażerów dla kolejnych 18 miesięcy i porównaliśmy ją z wartościami rzeczywistymi wyodrębnionymi z danych w sekcji 2.2. Do prognozowania użyliśmy funkcji `forecast` z pakietu `forecast`. Funkcja ta zwróciła nam prognozowane wartości dla modelu ARMA, więc aby móc porównać otrzymane wartości z rzeczywistymi danymi wykonaliśmy operacje odwracające różnicowanie oraz transformacje Boxa-Coxa. W tym celu wykorzystaliśmy funkcję `diffinv` z pakietu `stats` oraz funkcję `inv_boxcox` z pakietu `ldsr`. Wyniki zaprezentowaliśmy na rysunku (13). Widzimy, że model bardzo dobrze poradził sobie z predykcją liczby pasażerów, jedynie przewidział zmianę wariancji większą niż była w rzeczywistości.

5. Weryfikacja założeń dotyczących szumu

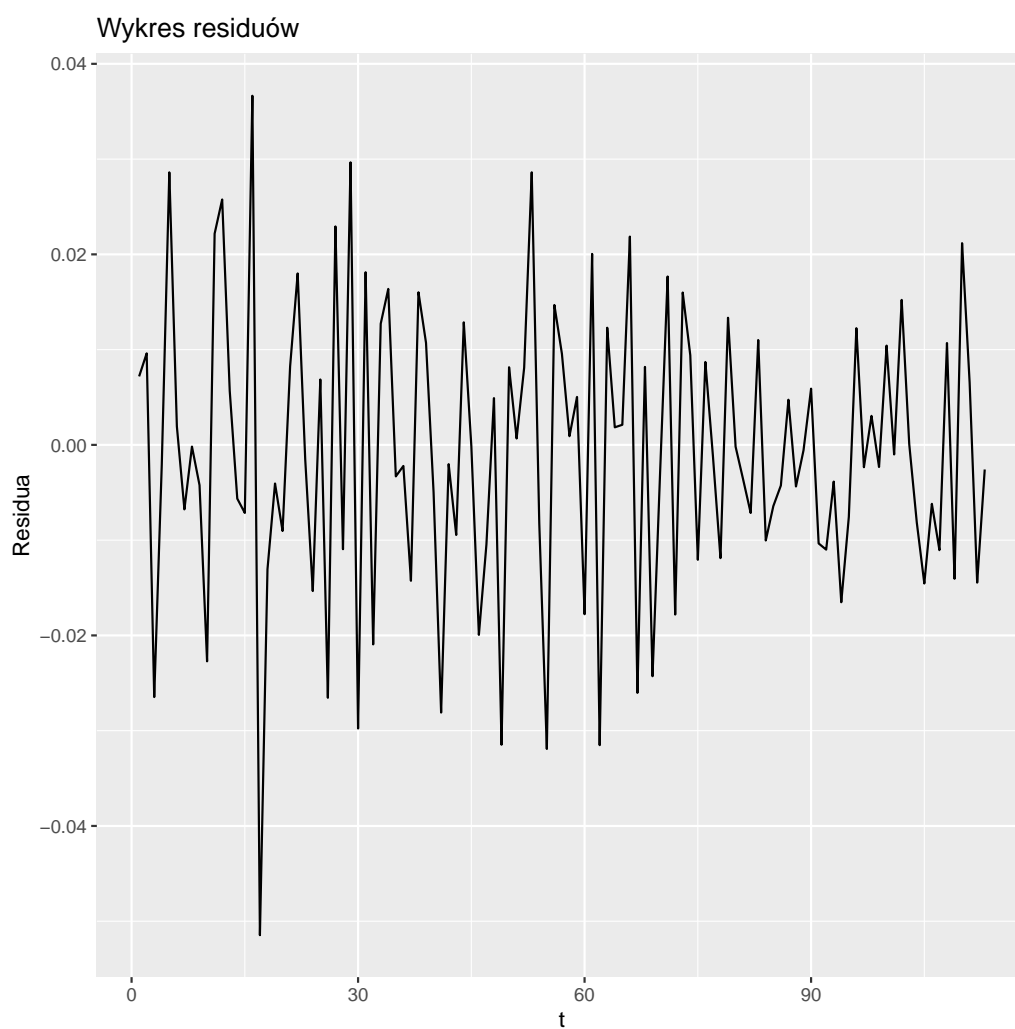
Wartości resztowe modelu, czyli residua zostały zawarte na wykresie (14). Uzyskałyśmy je poprzez odjęcie modelu ARMA z uzyskanymi parametrami od rzeczywistych danych po dekompozycji. W kolejnych krokach sprawdzone zostaną założenia dotyczące szumu.

5.1. Założenie dotyczące średniej

Sprawdziliśmy, czy wartość oczekiwana residuów wynosi 0. W tym celu obliczony został nieobciążony estymator wartości oczekiwanej, czyli średnia arytmetyczna. Dla próbki residuów wynosi ona -9.65×10^{-4} . Dodatkowo obserwując wykres (14) zauważamy, że wartości residuów są bliskie zeru. Wartość średniej arytmetycznej jest na tyle mała, że można uznać, że założenie o zerowej wartości oczekiwanej jest spełnione.



Rysunek 13. Prognoza dla przyszłych obserwacji i porównanie z rzeczywistymi danymi.



Rysunek 14. Wykres residuów modelu.

	statystyka testowa	p-wartość
Arch test	4.1036	0.1285028

Tabela 14. Wyniki testu Arch.

	statystyka testowa	p-wartość
test Ljunga-Boxa	11.5201	6.8848624×10^{-4}

Tabela 15. Wyniki testu Ljunga-Boxa.

5.2. Założenie dotyczące wariancji

Zweryfikować należało także założenie o stałości wariancji, które często nazywa się założeniem homoskedastyczności. Wartość estymatora nieobciążonego dla wariancji próbki wynosi 2.36×10^{-4} . Sprawdźmy, czy jest ona stała dla próbk. W tym celu skorzystamy z testu Arch, który w hipotezie zerowej przyjmuje założenie o homoskedastyczności danych. Wyniki tego testu zostały przedstawione w tabeli (14) i wskazują one na stałość wariancji residuów.

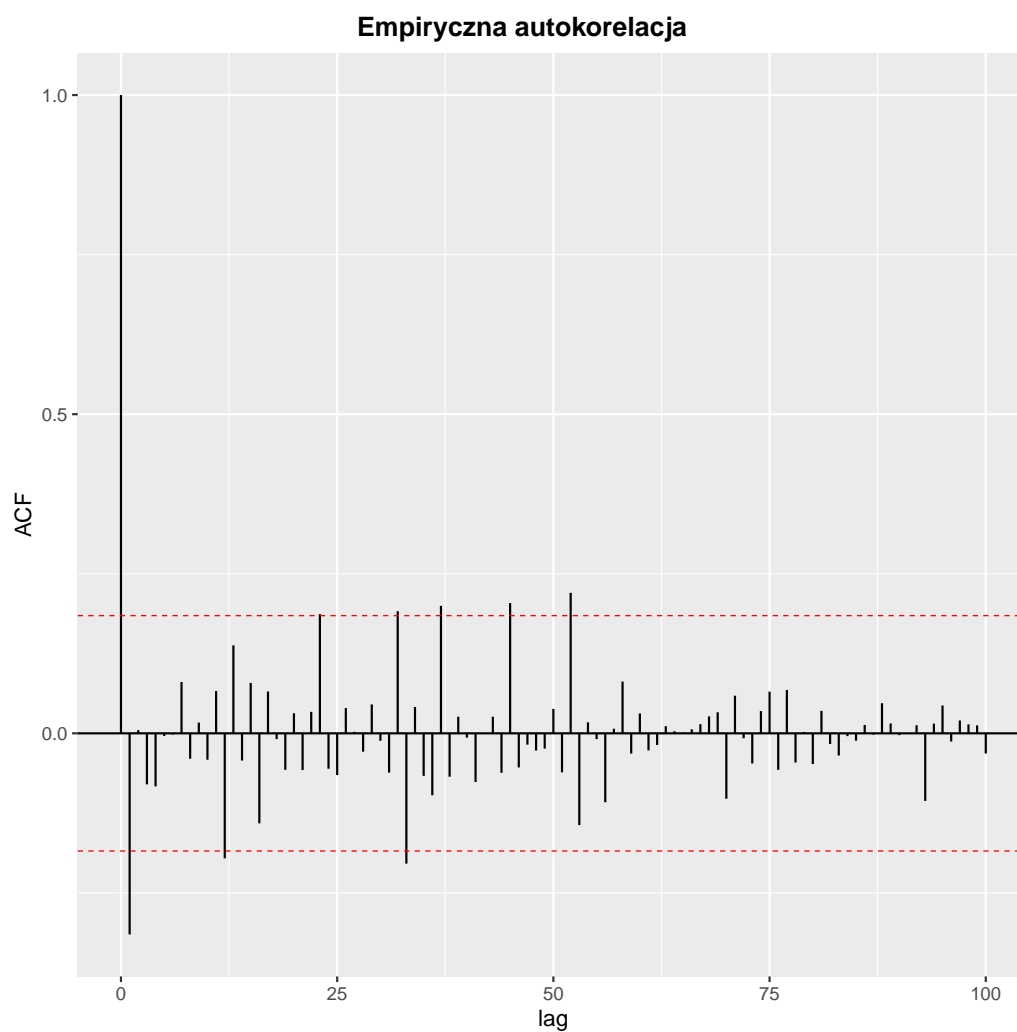
5.3. Założenie dotyczące niezależności

Do zweryfikowania założenia o niezależności residuów posłużymy się wykresami ACF i PACF, które odpowiednio zawarte są na wykresach (15) i (16). Zauważmy, że wartości na obu wspomnianych wykresach wykraczają poza przedziały. Na wykresach można dodatkowo doszukać się powtarzalności. Dodatkowo wykonany został test Ljunga-Boxa, wyniki tego testu zostały zawarte w tabeli (15). Uzyskana p-wartość wskazuje na fałszywość hipotezy zerowej, świadczącej o niezależności residuów. W rezultacie dochodzimy do wniosku, że wartości resztowe nie są niezależne.

5.4. Założenie dotyczące normalności rozkładu

Na koniec sprawdziliśmy założenie o normalności residuów. W tym celu zostały przeprowadzone testy Shapiro-Wilka i Jarque-Bera, a uzyskane wyniki zostały umieszczone w tabeli (16). Postanowiłyśmy wykonać wykres kwantylowy (20), który porówna kwantyle między rozkładem normalnym a rozkładem residuów. Na wykresach (17) i (18) porównane zostały odpowiednio dystrybuanty i gęstości z rozkładu normalnego z jego empirycznymi odpowiednikami. Na wykresie (19) widnieje histogram residuów z czerwoną linią odpowiadającą gęstości rozkładu normalnego.

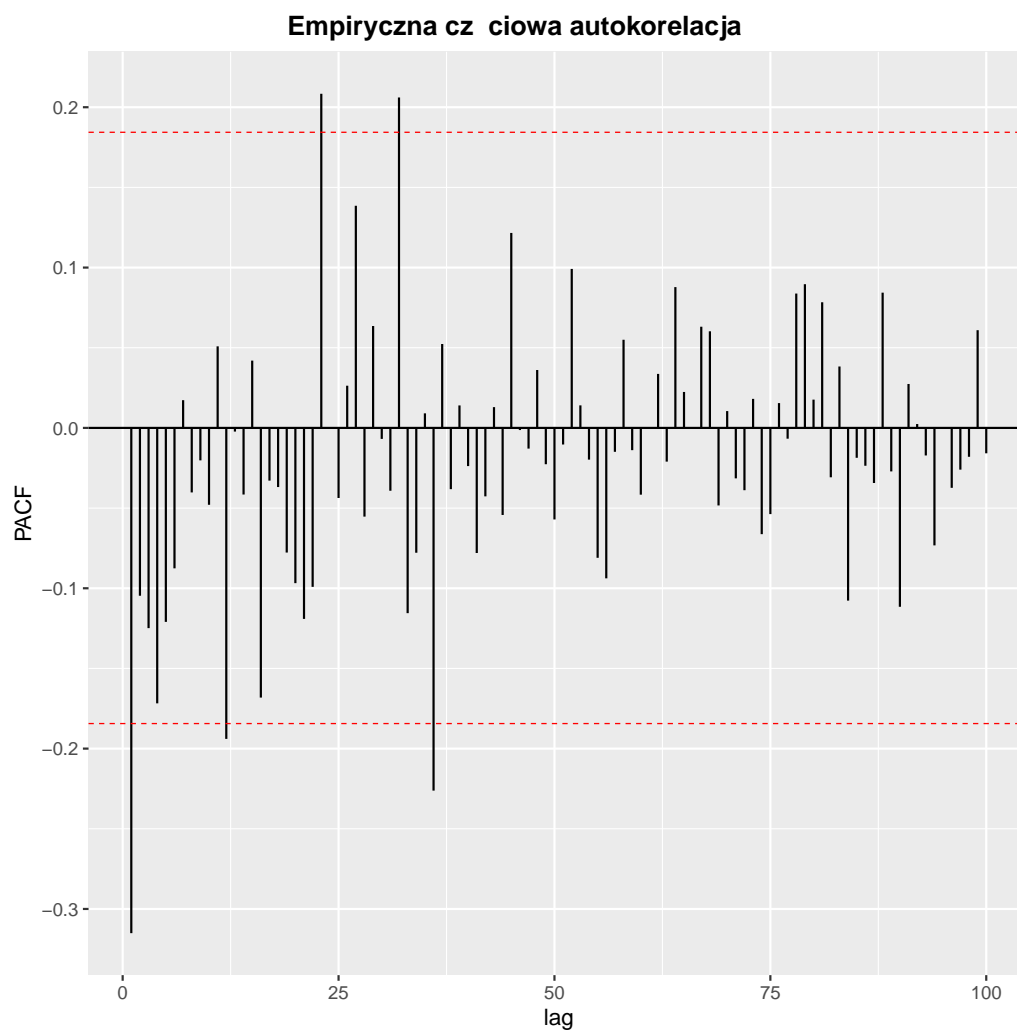
Na podstawie wyników uzyskanych w tabeli i wykresów dochodzimy do wniosku, że residua pochodzą z rozkładu normalnego.



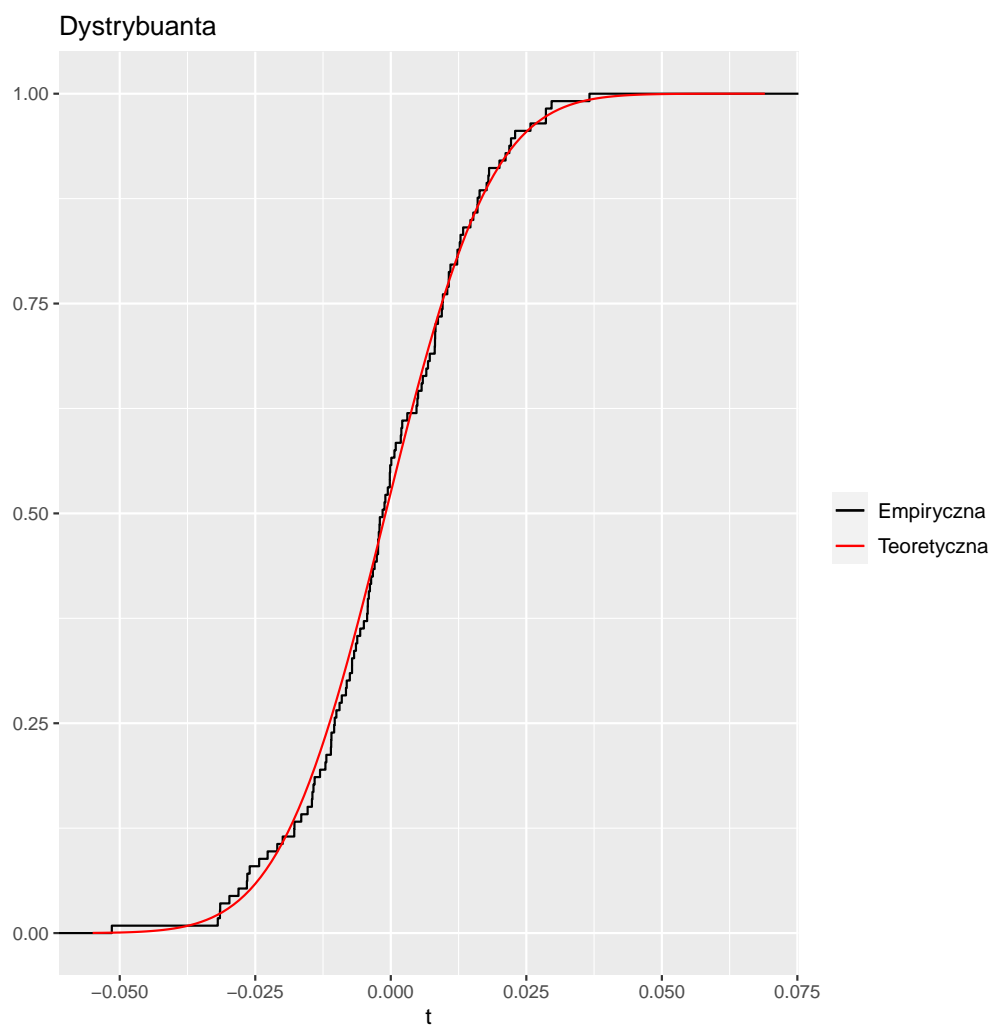
Rysunek 15. Wykres autokorelacji residuów dla lagów od 0 do 100.

test	statystyka testowa	p-wartość
Shapiro-Wilk	0.9915	0.7140779
Jarque-Bera	1.6074	0.4476733

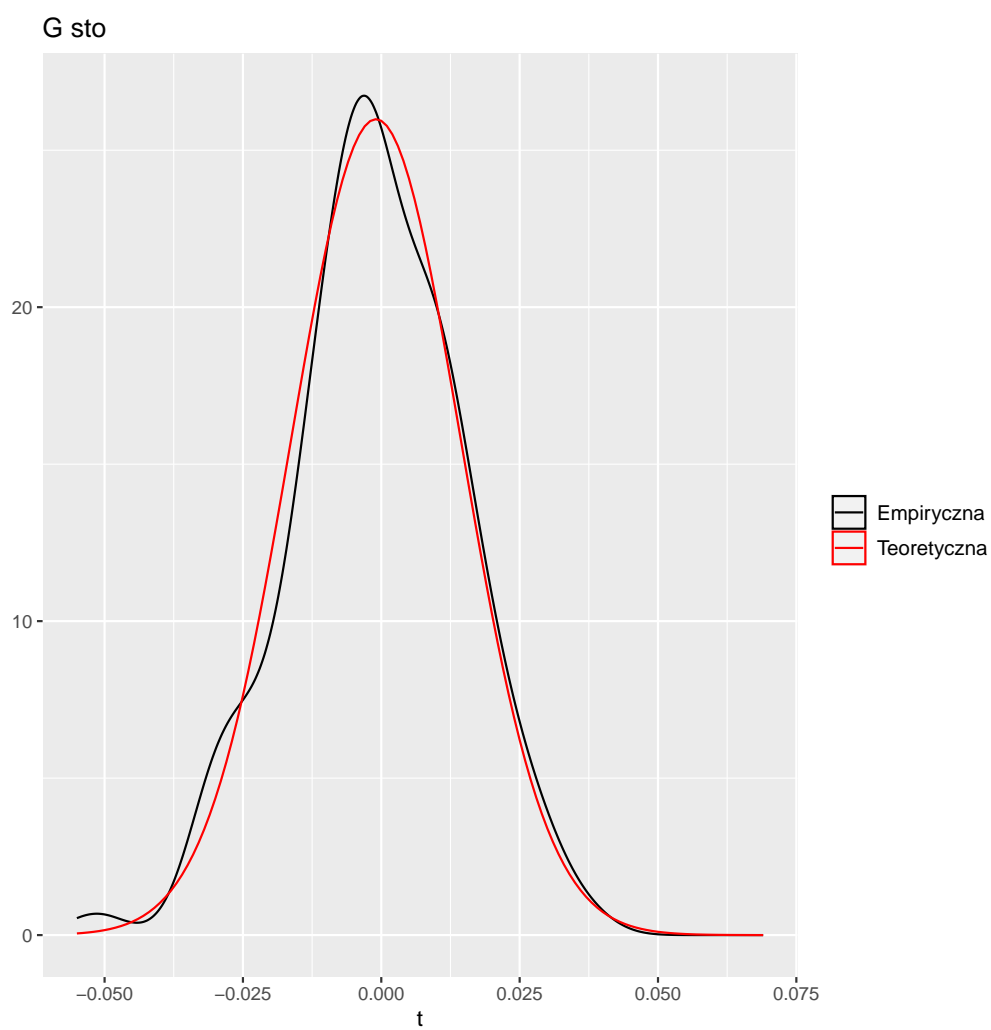
Tabela 16. Wyniki testów na normalność residuów.



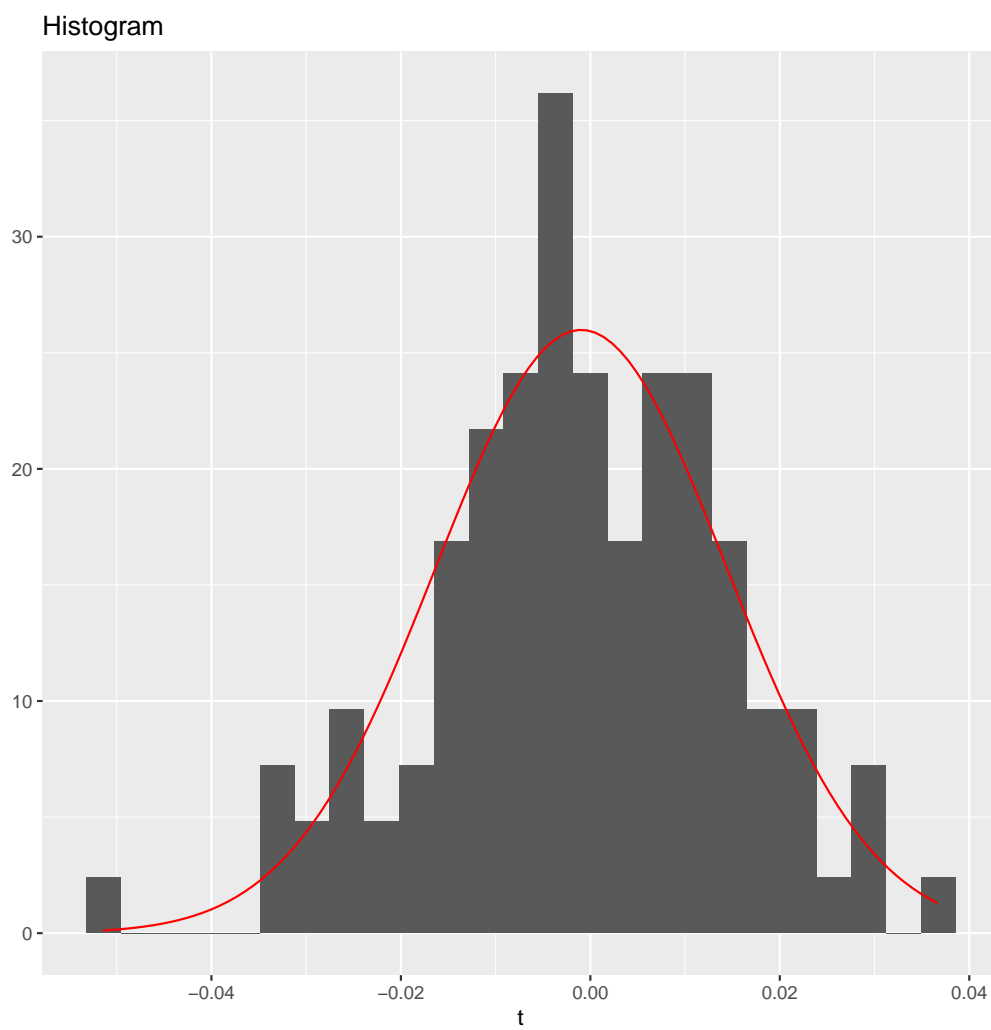
Rysunek 16. Wykres częściowej autokorelacji residuów dla lagów od 0 do 100.



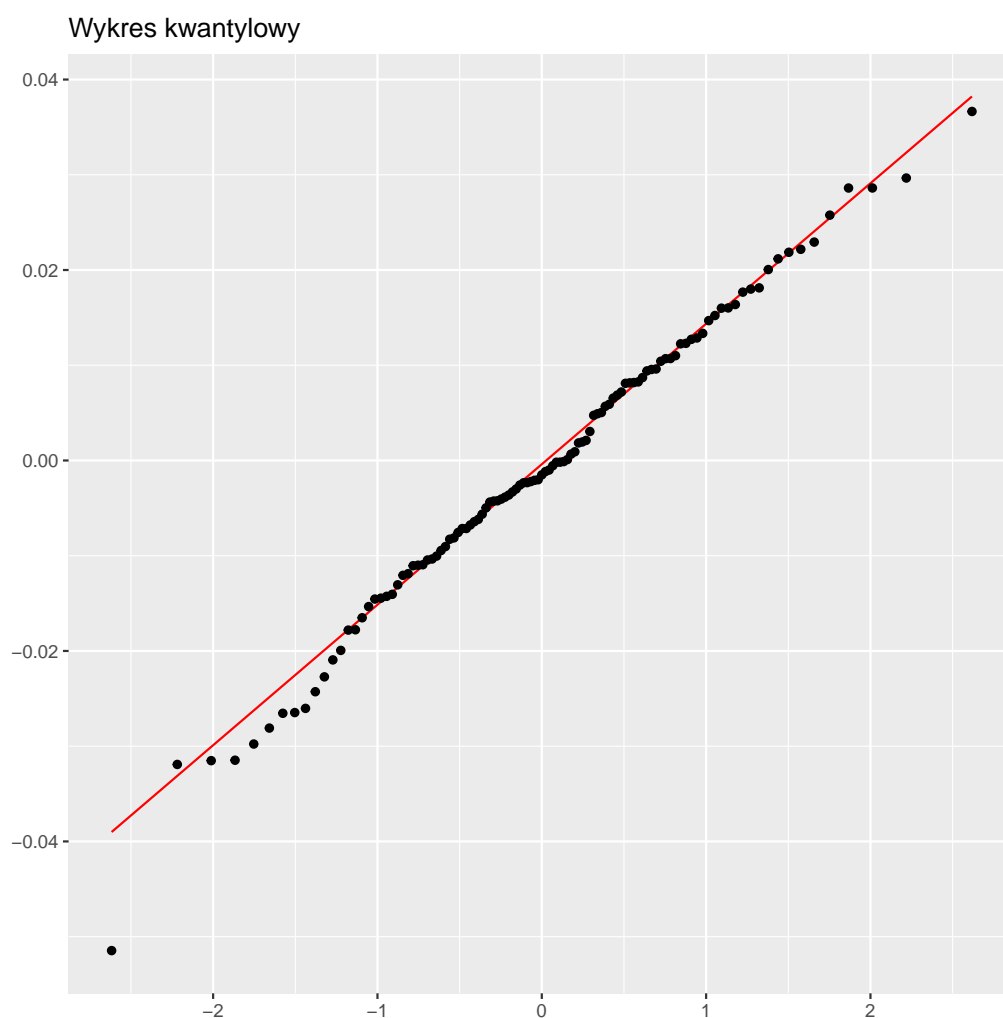
Rysunek 17. Wykres porównujący dystrybuantę residuów z dystrybuantą rozkładu normalnego.



Rysunek 18. Wykres porównujący gęstość residuów z gęstością rozkładu normalnego.



Rysunek 19. Hisogram residuów z gęstością rozkładu normalnego.



Rysunek 20. Wykres porównujący kwantyle residuów z kwantylami rozkładu normalnego.

6. Zakończenie

6.1. Podsumowanie

Podsumowując powyższy raport udało się zidentyfikować trendy deterministyczne występujące w danych dotyczących liczby pasażerów pewnej linii lotniczej na przestrzeni lat 1949-1959. Po dekompozycji uzyskaliśmy dane, na których przeprowadzone testy nie wskazały na niestacjonarność. Zbieżne wnioski uzyskaliśmy analizując wykresy funkcji ACF i PACF. Następnie przy pomocy kryteriów informacyjnych dobraliśmy model ARMA(0, 1) oraz wykorzystując algorytm Hannana-Rissanena jego parametr $\theta = -0.2870219$. Wykonując wykresy funkcji ACF i PACF dla wybranego modelu nie zaobserwowaliśmy nieoczekiwanych zachowań tych funkcji. Poza pojedynczymi obserwacjami mieściły się one w wyznaczonych przedziałach ufności. Analizując linie kwantylowe dla szeregu czasowego widzieliśmy, że oczekiwana liczba obserwacji mieściła się w wyznaczonych przedziałach. Wykonując predykcje na kolejne 18 miesięcy otrzymaliśmy prognozowaną liczbę pasażerów w okresie 07.1959-12.1960, wyniki są zbieżne z rzeczywistymi danymi. W analizie residuów okazało się, że spełnione są założenia dotyczące zerowej wartości oczekiwanej i stałej wariancji residuów. Nie spełnione natomiast jest założenie o niezależności. Dodatkowo, okazało się, że wartości resztowe pochodzą z rozkładu normalnego.

6.2. Wnioski

Możemy wnioskować, że dobrany model ARMA(0, 1) z parametrem $\theta = -0.2870219$ poprawnie opisuje szereg czasowy z analizowanych danych.