CUANTIFICADORES

ESCUELA de TALENTOS
Innovación & Excelencia - Escuela del siglo XXI

Mg. CONTRERAS CUEVA Valentin Jeler

CUANTIFICADORES:

Cuando se habla de CUANTIFICADORES en la lógica, la teoría de conjuntos y las matemáticas en general, se hace referencia a aquellos símbolos utilizados en una proposición lógica para indicar "CUÁNTOS" elementos de un conjunto dado cumplen con cierta propiedad.

Los cuantificadores permiten la construcción de proposiciones a partir de funciones proposicionales, bien sea particularizando o generalizando. Por ejemplo, si consideramos la función proposicional:

P(x) = x es menor que dos

Esto podría particularizarse así: "***Existe un número real que es menor que dos***" o generalizarlo diciendo: "***Todos los números reales son menores que dos***".

CUANTIFICADORES:

CUANTIFICADOR UNIVERSAL:

Es la operación lógica que es verdadera cuando todos los valores de x, pertenecientes al conjunto con el cual se relaciona, son verdaderos. Se denota con el símbolo $\forall x$ y se lee "para todo x", o sus expresiones equivalentes "para cada x", "todos los x", etc.

EJEMPLO

Sea $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Determina el valor de verdad de $\forall x \in A, x^2 < 34$.

- Evaluamos $x^2 < 34$ para cada elemento de A:

Para $x = 1$ ▶ $1^2 < 34$ ....(V) Para $x = 4$ ▶ $4^2 < 34$ .... (V)

Para $x = 2$ ▶ $2^2 < 34$ ....(V) Para $x = 5$ ▶ $5^2 < 34$ .... (V)

Para $x = 3$ ▶ $3^2 < 34$ ....(V) Para $x = 6$ ▶ $6^2 < 34$ .... (F)

La proposición $\forall x \in A, x^2 < 34$ es falsa, ya que no todos los elementos de A satisfacen la desigualdad.

CUANTIFICADORES:

- ## CUANTIFICADOR UNIVERSAL:

EJEMPLO

Sea A = {1; 2; 3; 4; 5; 6}. Determina el valor de verdad de $\forall x \in A$, $5x - 1 > 2$.

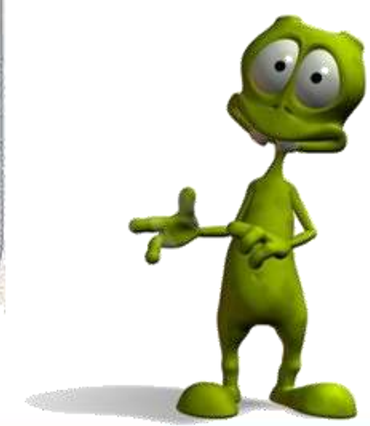
- Evaluamos $5x - 1 > 2$ para cada elemento de A:

Para $x = 1$ ▶ $4 > 2$ ....(V)	Para $x = 4$ ▶ $19 > 2$ .... (V)
Para $x = 2$ ▶ $9 > 2$ ....(V)	Para $x = 5$ ▶ $24 > 2$ .... (V)
Para $x = 3$ ▶ $14 > 2$ ....(V)	Para $x = 6$ ▶ $29 > 2$ .... (V)

La proposición $\forall x \in A$, $5x - 1 > 2$ es verdadera, ya que todos los elementos de A satisfacen la desigualdad.

Ten en cuenta

$\forall x \in A$... se lee así: "Para todo elemento que pertenece al conjunto A...".



CUANTIFICADORES:

- **CUANTIFICADOR EXISTENCIAL :**

Es la operación lógica que es verdadera cuando al menos un valor de x perteneciente al conjunto con el cual se relaciona, es verdadero. Se denota con el símbolo $\exists x$ y se lee "existe por lo menos un x", o sus expresiones equivalentes "hay un x", "algunos x", etc.

EJEMPLO

a) **Sea A = {1; 2; 3; 4; 5; 6}. Determina el valor de verdad de $\exists x \in A / x^2 - x = 15$.**

- Evaluamos $x^2 - x = 15$ hasta hallar un valor de A que satisfaga la igualdad:

Para $x = 1$ ▶ $0 = 15$ .... (F) Para $x = 4$ ▶ $12 = 15$ .... (F)
Para $x = 2$ ▶ $2 = 15$ .... (F) Para $x = 5$ ▶ $20 = 15$ .... (F)
Para $x = 3$ ▶ $6 = 15$ .... (F) Para $x = 6$ ▶ $30 = 15$ .... (F)

La proposición es falsa, ya que no existe por lo menos un valor de A que haga verdadera la igualdad $x^2 - x = 15$.

CUANTIFICADORES:

- **CUANTIFICADOR EXISTENCIAL:**

EJEMPLO

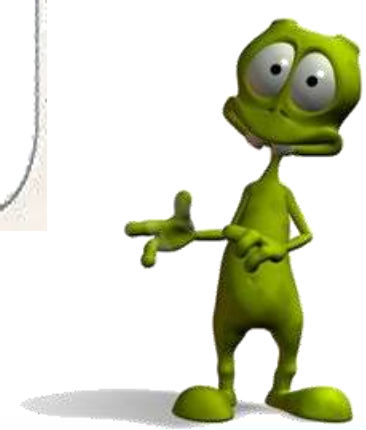
b) Sea $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$. Determina el valor de verdad de $\exists x \in B \,/\, 3x > 10$.

- Para $x = 6$, obtenemos la proposición $18 > 10$, que es verdadera. Encontramos al menos un elemento de B que verifica la desigualdad.

La proposición $\exists x \in B \,/\, 3x > 10$, con $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, es verdadera.

Ten en cuenta

$\exists x \in A \,/\, \ldots$ se lee así: "Existe por lo menos un x que pertenece al conjunto A tal que …".



CUANTIFICADORES:

- ## CUANTIFICADOR EXISTENCIAL:

EJEMPLO

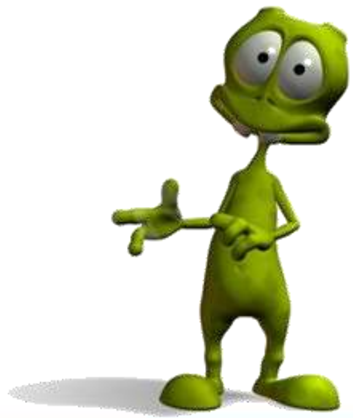
c) Sea N = { 0; 1; 2; 3; 4; 5; …….}. Determine el valor de verdad de $\exists!\ x \in N\ /\ x^2 = 4$.

- Únicamente para $x = 2 \in N$, obtenemos que la proposición $2^2 = 4$ es verdadera. Encontramos un único elemento en N que verifica la igualdad.

La proposición, $\exists!\ x \in N\ /\ x^2 = 4$, con $x = 2 \in N$, es verdadera.

Ten en cuenta

Un caso particular de este cuantificador es el denotado por ∃!, que se lee "existe un único elemento" y que es verdadero si y solo si la proposición es verdadera solo en una ocasión.



CUANTIFICADORES:

- **NEGACIÓN DE CUANTIFICADORES:**

La negación de cualquiera de los cuantificadores se realiza negando la función proposicional P(x) y cambiando el cuantificador universal por el cuantificador existencial, o viceversa. Así:

– Negación del cuantificador universal ▶ $\sim[\forall x \in A, P(x)] \equiv \exists x \in A / \sim P(x)$

– Negación del cuantificador existencial ▶ $\sim[\exists x \in A / P(x)] \equiv \forall x \in A, \sim P(x)$

EJEMPLO

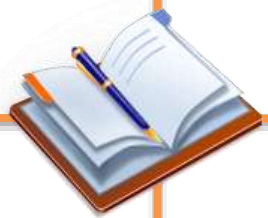
Simboliza y niega esta proposición: "Todos los números enteros son impares".

- Sean el dominio $\mathbb{Z}$ y la función proposicional P(x): x es un número impar.
- Simbolizamos mediante el cuantificador universal: $\forall x \in \mathbb{Z}, P(x)$
- Negamos el cuantificador universal: $\sim[\forall x \in \mathbb{Z}, P(x)] \equiv \exists x \in \mathbb{Z} / \sim P(x)$

Interpretamos: Existe al menos un número entero x que no es impar.

- **OBSERVACIONES:**

  - **Las proposiciones pueden estar negadas como por ejemplo "no es cierto que hay fantasmas" la cual se simboliza como $\sim [\ \exists x, F(x)\ ]$, donde F(x) simboliza la expresión "x es un fantasma".**
  - **Las proposiciones existenciales puede tener negaciones internas como "algo no es mortal" la cual se simboliza como: $\exists x, \sim F(x)$ donde F(x) simboliza la expresión "x es mortal".**
  - **Las palabras "ningún", "ninguno", "nada", "nadie" corresponden a enunciados universales con negaciones, pero de una manera distinta a las proposiciones anteriores. La proposición "*ninguno es mecánico*" no equivale a la proposición "*no todos son mecánicos*" sino a la expresión "*para todo x, x no es mecánico*" que se simboliza: $\forall x, \sim P(x)$.**



Bibliografía:

- SANTILLANA. Matemática.
  Editorial Quad Graphics Perú. Lima. Perú