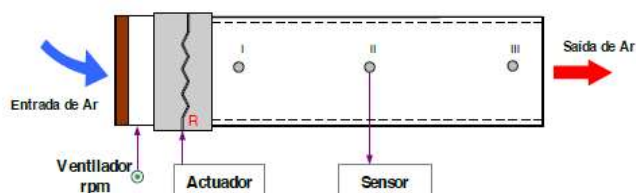
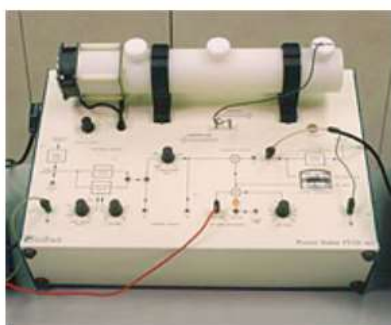


SISTEMAS DE DECISÃO



Projeto de um Controlador Óptimo Polinomial para um Processo Térmico

2023/2024

Nome: Miguel Caldeirinha

Número: 60568

Nome: Matheus Brito

Número: 57003

Índice

1. Introdução	2
2. Conceitos	3
2.1. ARX - Auto Regressive with eXogenous input	3
2.2. Problema de Otimização	3
3. Descrição do Sistema	5
3.1. Obtenção do Modelo	5
4. Desenvolvimento e Simulação	8
5. Implementação no Sistema Real	12
5.1. Polinómio $Rq - 1 = r$	12
5.2. Polinómio $Rq - 1 = r(1 - q - 1)$	15
6. Conclusão	18
Anexos	19
I. Função para determinar a acção de controlo $u(k)$ a aplicar ao sistema, com $Rq - 1 = r$..	19
II. Função para determinar a acção de controlo $u(k)$ a aplicar ao sistema, com $Rq - 1 =$ $r(1 - q - 1)$	20
III. Código utilizado para simular o controlador óptimo polinomial em um modelo ARX ...	21
IV. Código utilizado para testar o controlador óptimo polinomial no sistema real	22
V. Código utilizado para testar o controlador óptimo polinomial no sistema real com penalização de $u(k-1)$	24

1. Introdução

O propósito deste estudo é a aplicação de técnicas de controlo óptimo em sistemas dinâmicos representados por funções de transferência discretas. Para isso, empregou-se o processo térmico Feedback PCT 37-100, ilustrado na Figura 1, como objeto de teste. Foi elaborado um controlador óptimo polinomial, utilizando um critério de controlo específico, $J(k)$, adaptado para abordar o problema de seguimento.

Assim, através deste estudo, busca-se não apenas aplicar conceitos teóricos de controlo óptimo, mas também demonstrar sua eficácia prática em um cenário real. A análise detalhada do desempenho do controlador em diferentes condições operacionais permite uma visão mais abrangente sobre a eficácia e os limites dessas técnicas em ambientes dinâmicos complexos.

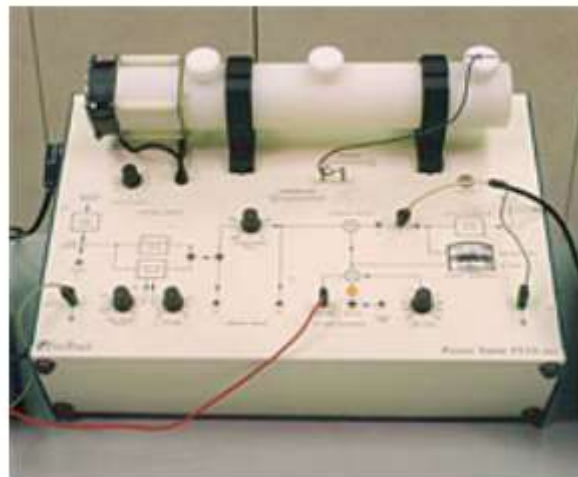


Figura 1 - Processo térmico PCT 37-100.

2. Conceitos

2.1. ARX - Auto Regressive with eXogenous input

Um modelo ARX é uma maneira de descrever um sistema linear invariante no tempo discreto, que emprega uma equação às diferenças incorporando entradas e saídas passadas. O modelo é descrito pela Equação (1), na qual $A(q^{-1})$ e $B(q^{-1})$ são polinômios de ordem n_a e n_b , respectivamente e descrito na Figura 2.

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k)$$

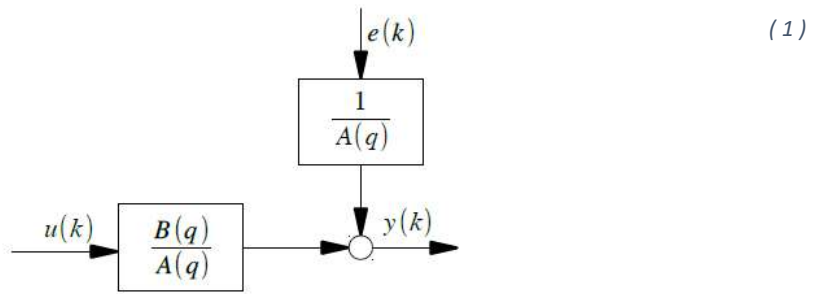


Figura 2 - Diagrama de blocos ARX

2.2. Problema de Otimização

Para o problema de otimização é necessário um critério de desempenho que é descrito pela função de custo quadrática da Equação (2),

$$J(k) = [P(q^{-1})y(k+d) - Q(q^{-1})y_d(k)]^2 + [R(q^{-1})u(k)]^2$$

Este trabalho tem como objetivo ser um problema de seguimento pelo que os polinômios de penalização sobre a saída e sobre a referência são iguais a 1, ou seja, $P(q^{-1}) = Q(q^{-1}) = 1$, no teste com o sistema real utilizamos tanto $R(q^{-1}) = r$, quanto $R(q^{-1}) = r(1 - q^{-1})$ para analisar as suas diferenças.

Pretende-se obter a ação de controlo, $u(k)$, que minimiza o critério de desempenho, $J(k)$. Ao dividir a unidade por $A(q^{-1})$ obtém-se

$$\frac{1}{A(q^{-1})} = F(q^{-1}) + q^{-d} \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

(3)

Reunindo todos estes elementos obtemos a lei de controlo óptimo da Equação (4) que servira de base para projetar o controlador. Pondo $u(k)$ em evidencia tem-se a expressão do controlador.

$$\left[P(q^{-1})B(q^{-1})F(q^{-1}) + \frac{r_0}{b_0}R(q^{-1}) \right] u(k) = -P(q^{-1})G(q^{-1})y(k) + Q(q^{-1})y_d(k)$$

(4)

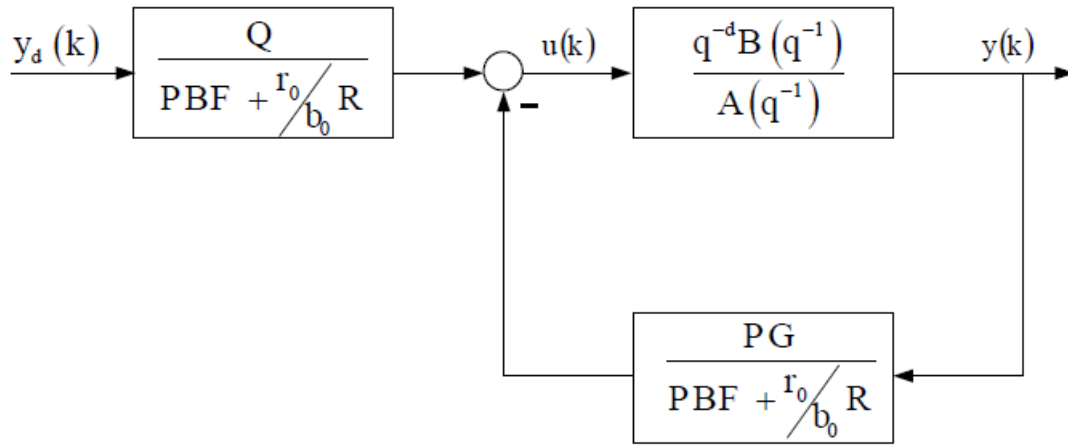


Figura 3 - Diagrama de blocos da equação de controlo óptimo

3. Descrição do Sistema

O sistema real a ser controlado é um processo térmico que envolve um tubo pelo qual passa um fluxo de ar gerado por um ventilador. Esse fluxo de ar é aquecido por uma resistência, cuja tensão aplicada aos terminais representa nossa ação de controle. Além disso, o tubo contém um sensor de temperatura que fornece o sinal de saída do processo.

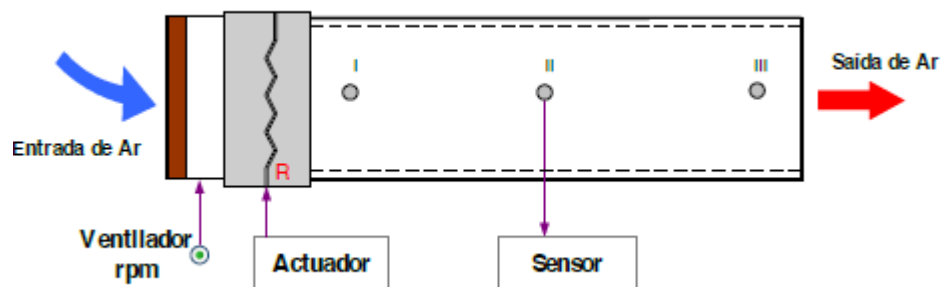


Figura 4 - Esquemático do processo térmico PCT 37-100

3.1. Obtenção do Modelo

Depois de excitar o processo com dois conjuntos de sinais binários pseudoaleatórios compreendidos entre [2.5;4.5] V e, conseqüentemente a obtenção do conjunto de dados de estimação (U_e, Y_e) e de validação (U_v, Y_v), procedeu-se à obtenção de um modelo do tipo ARX que consiga representar o funcionamento do sistema (relação entrada/saída) com uma fiabilidade e complexidade aceitável. Para este propósito observou-se a qualidade de diversos modelos, sendo estes representados na Figura 5 e na Figura 6.

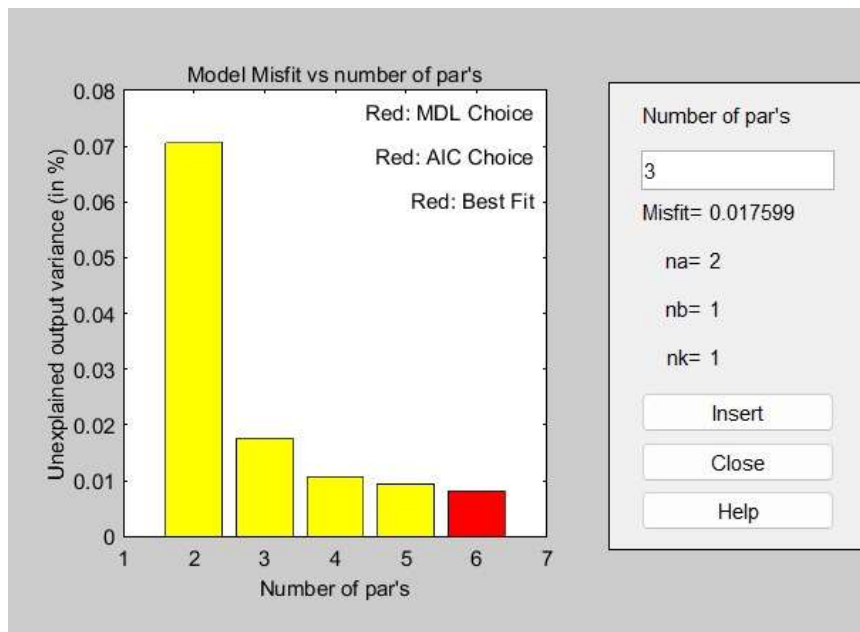


Figura 5 - Comparação entre diferentes modelos ARX para o processo

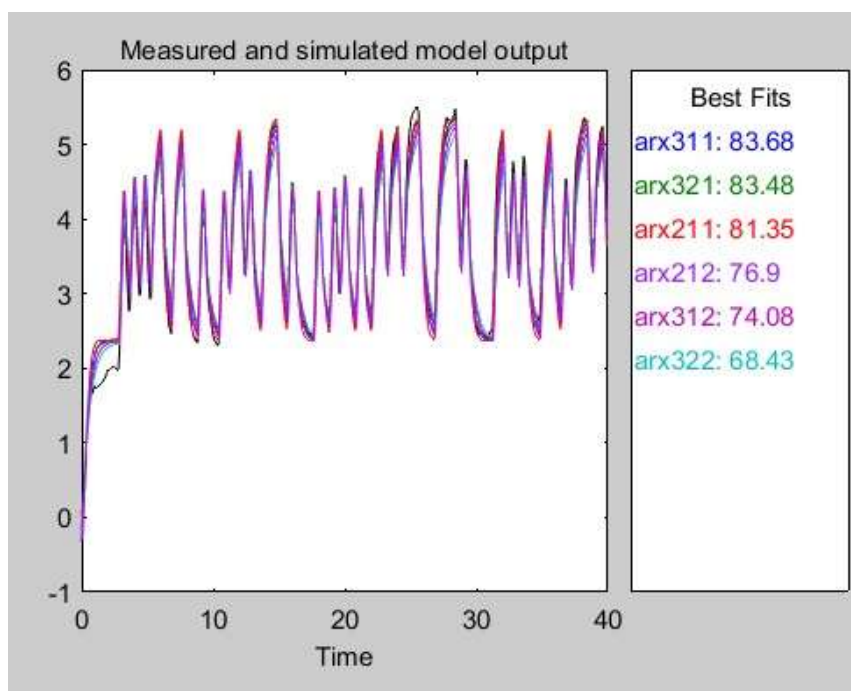


Figura 6 - Comparação entre diferentes modelos ARX para o processo

Após examinarmos um amplo conjunto de modelos com diversos níveis de complexidade, constatamos que o aumento do valor de n_k (atraso puro) estava a resultar em uma diminuição da qualidade do modelo do sistema.

Em última análise, optamos pelo modelo ARX (2,1,1) devido a sua combinação de desempenho satisfatório e complexidade aceitável. Os modelos concorrentes que

ofereciam um ajuste melhor aos dados exigiam um aumento de complexidade, o que não se justificava diante da melhoria marginal na qualidade do ajuste.

Desta forma obteve-se que:

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.3694q^{-1} + 0.4811q^{-2}$$

$$B(q^{-1}) = 0.1325q^{-1}$$

(5)

4. Desenvolvimento e Simulação

A partir destes polinómios, calcula-se os polinómios $F(q^{-1})$ e $G(q^{-1})$ a partir da EQ. (3), apresentados de seguida:

$$F(q^{-1}) = 1; \quad G(q^{-1}) = 1.3694 - 0.4811q^{-1};$$

(6)

Tendo em conta a Equação. (4), simulou-se o sistema em anel fechado considerando $P(q^{-1}) = Q(q^{-1}) = 1$ e $R(q^{-1}) = r$ simulando para diferentes valores de r .

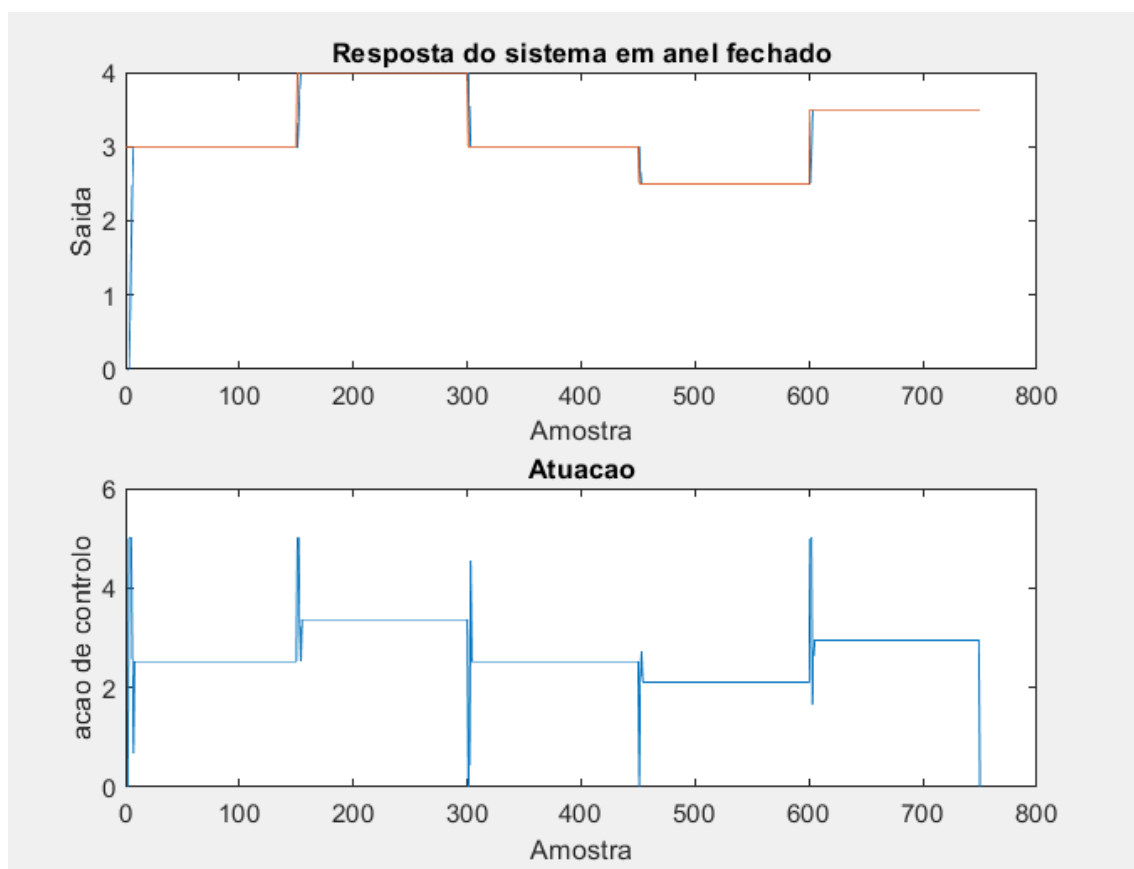


Figura 7 - Simulação em anel fechado com $P=Q=1$ e $r=0$.

```
somaErroQuadratico =
    21.2382

mediaErroQuadratico =
    0.0283
```

Figura 8 - Métricas calculadas na simulação em anel fechado com $P=Q=1$ e $r=0$.

Para $r = 0$ observa-se que a resposta do sistema é alterada de forma muito veloz, isso acontece porque a ação de controlo $u(k)$ não está a exercer influência na função de custo $J(k)$, o que leva a que se atinjam valores e variações de input mais elevados, porém saturados entre 0V e 5V devido às exigências do actuador.

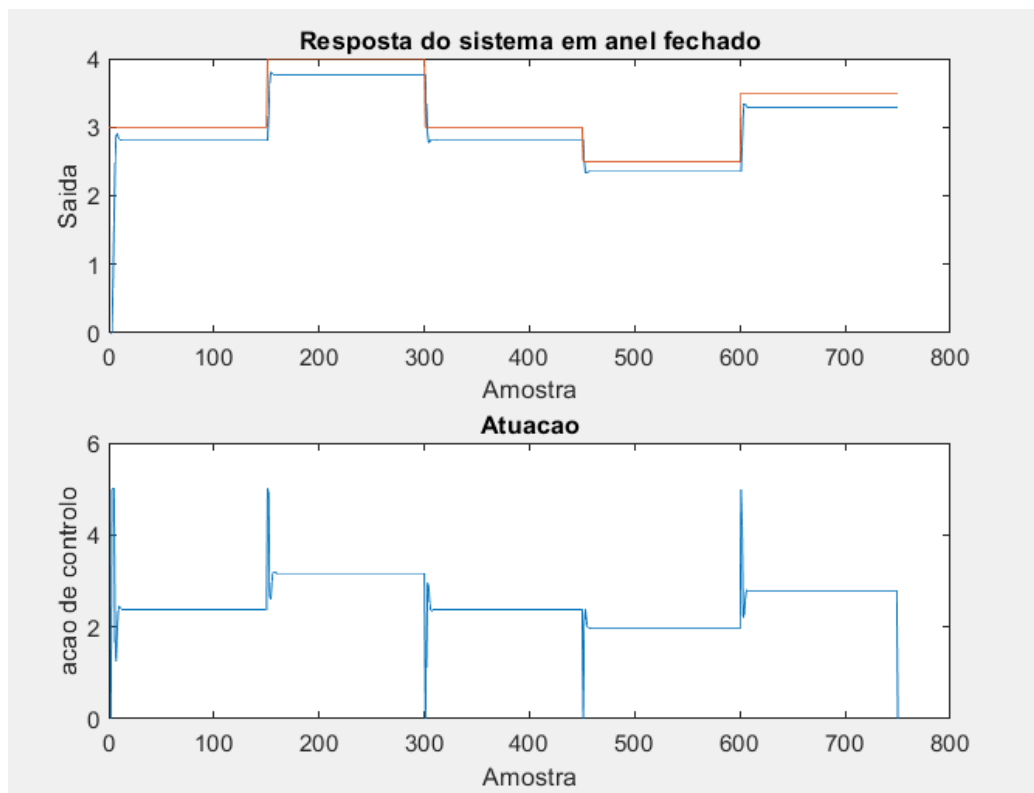


Figura 9 - Simulação em anel fechado com $P=Q=1$ e $r=0.1$

```
somaErroQuadratico =  
  
49.1470  
  
mediaErroQuadratico =  
  
0.0655
```

Figura 10 - Métricas calculadas na simulação em anel fechado com $P=Q=1$ e $r=0.1$

Para $r = 0.1$ note-se a aparição de um erro estático não nulo. Relativamente ao caso anterior, outra diferença entre os dois controladores reside no tempo de resposta. Quanto maior for o parâmetro de penalização mais gradual será o aumento da ação de controlo, aumentando desta forma o tempo de resposta do sistema.

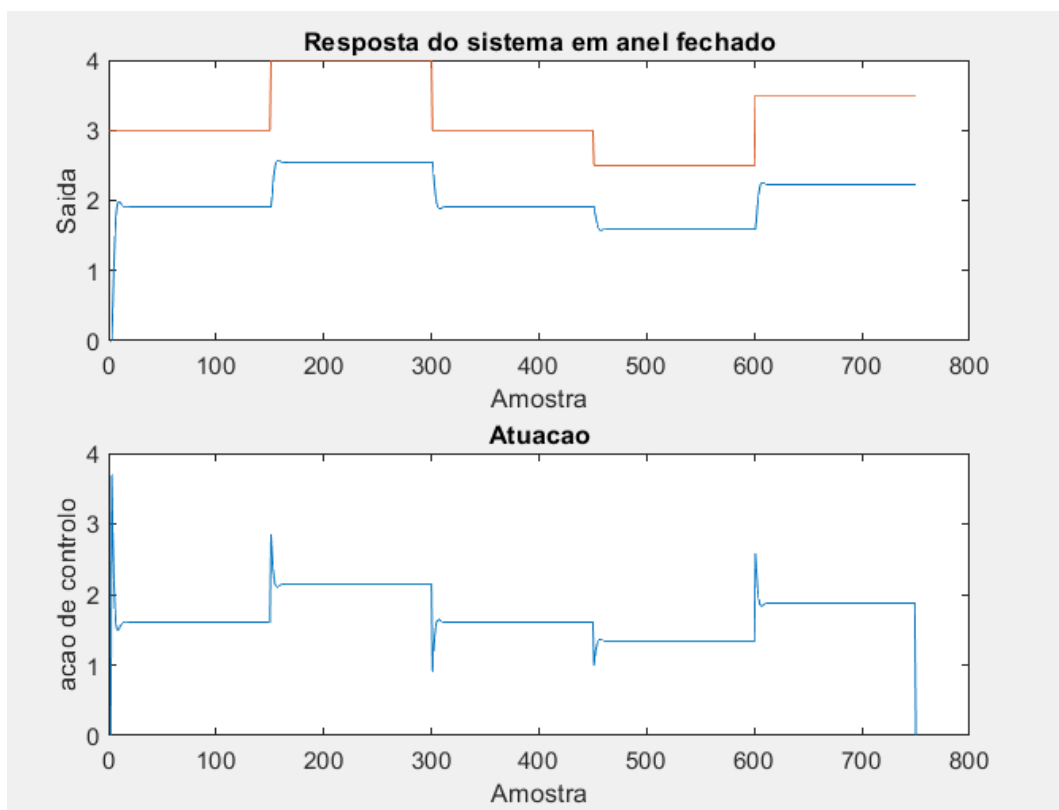


Figura 11 - Simulação em anel fechado com $P=Q=1$ e $r=0.3$

```
somaErroQuadratico =  
  
1.0610e+03  
  
mediaErroQuadratico =  
  
1.4147
```

Figura 12 - Métricas calculadas na simulação em anel fechado com $P=Q=1$ e $r=0.3$

A figura 11 ilustra a resposta do sistema para o caso em que $r = 0,1$. Neste caso, verifica-se de forma ainda mais evidente a relação entre a penalização, a velocidade de resposta e o erro estático. Quanto maior foi o valor utilizado no parâmetro r maiores foram os somatórios dos erros quadráticos obtidos.

5. Implementação no Sistema Real

5.1. Polinómio $R(q^{-1}) = r$

Em relação à simulação no processo físico, primeiro testamos para um $R(q^{-1}) = r$ em que r assumia os valores $r=0.1$; $r=0.15$; $r=0.17$; $r=0.2$; $r=0.3$.

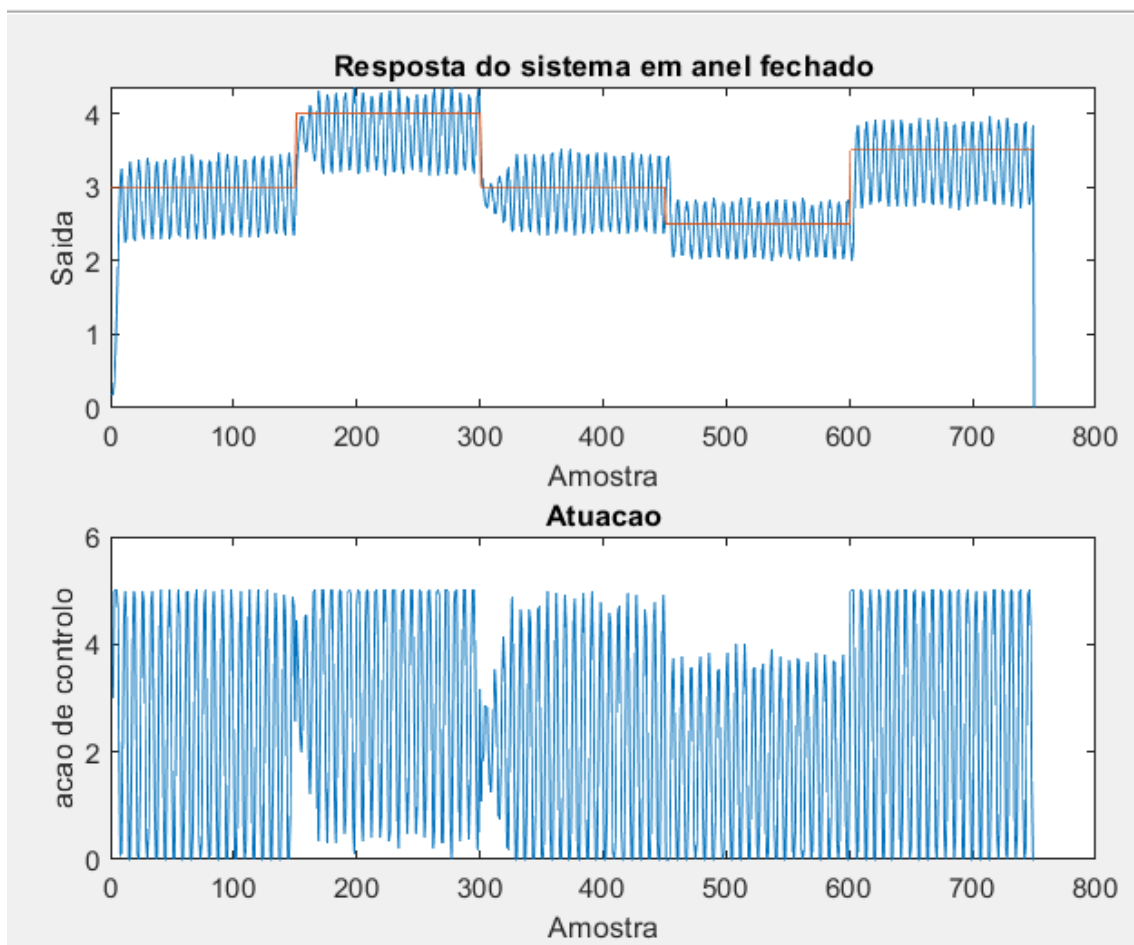


Figura 13 - Simulação no processo físico com $P=Q=1$ e $r=0.1$

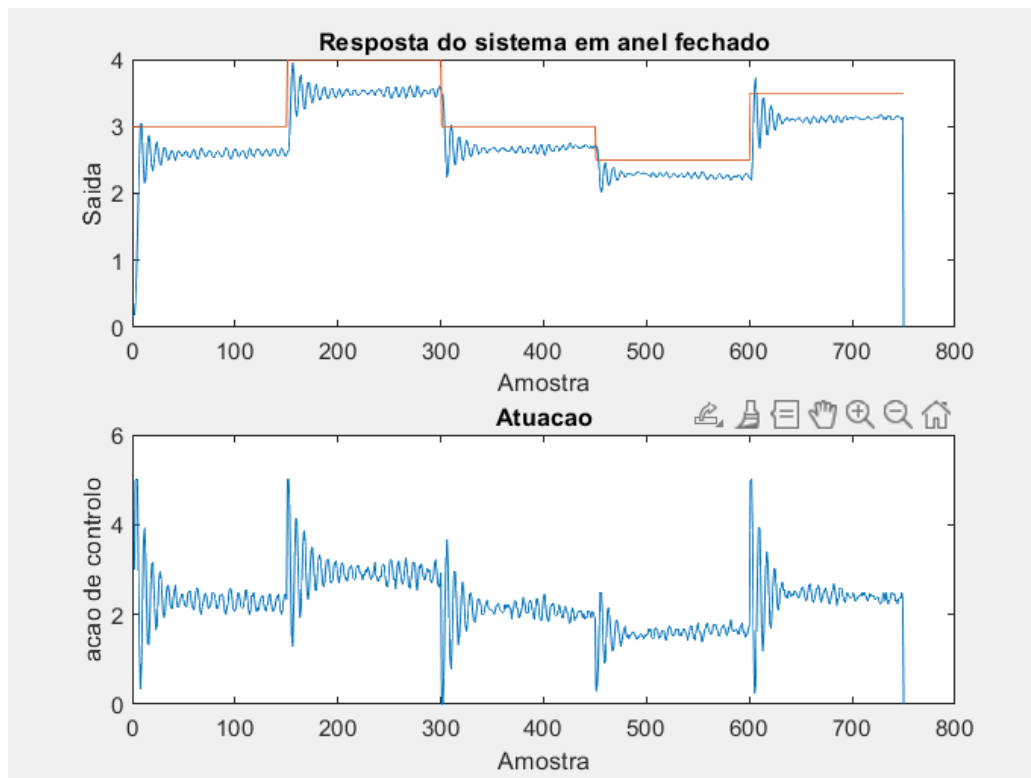


Figura 14 - Simulação no processo físico com $P=Q=1$ e $r=0.15$

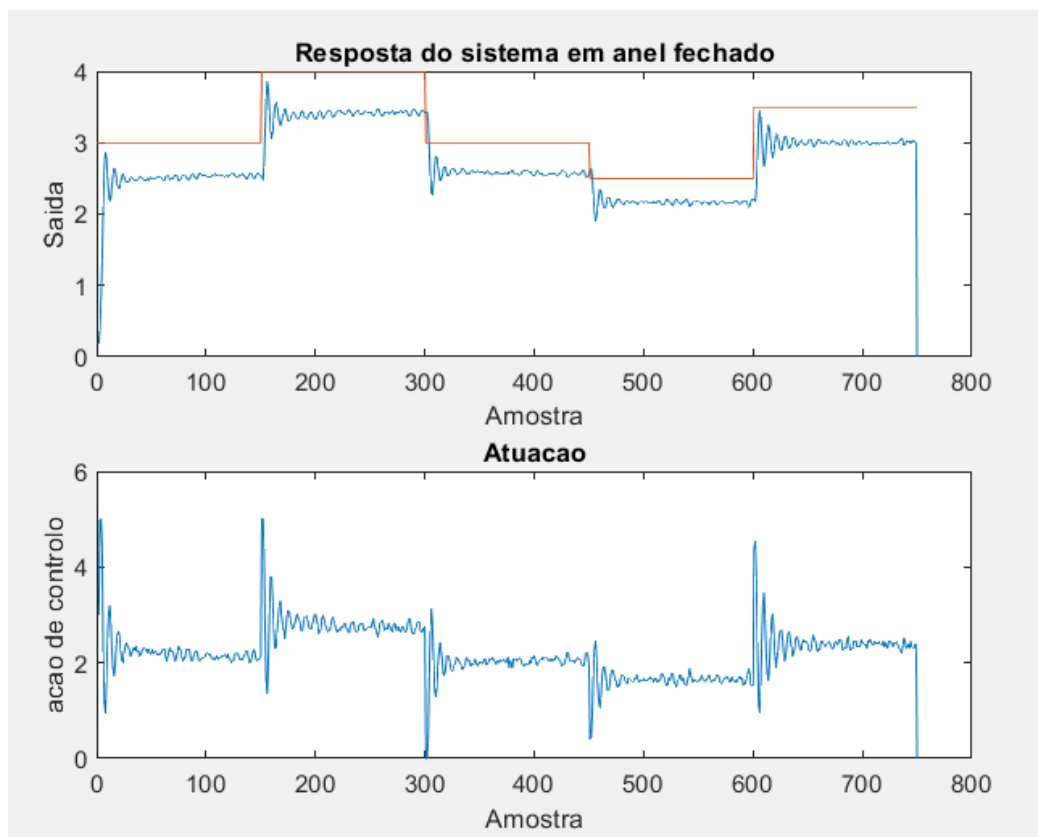


Figura 15- Simulação no processo físico com $P=Q=1$ e $r=0.17$

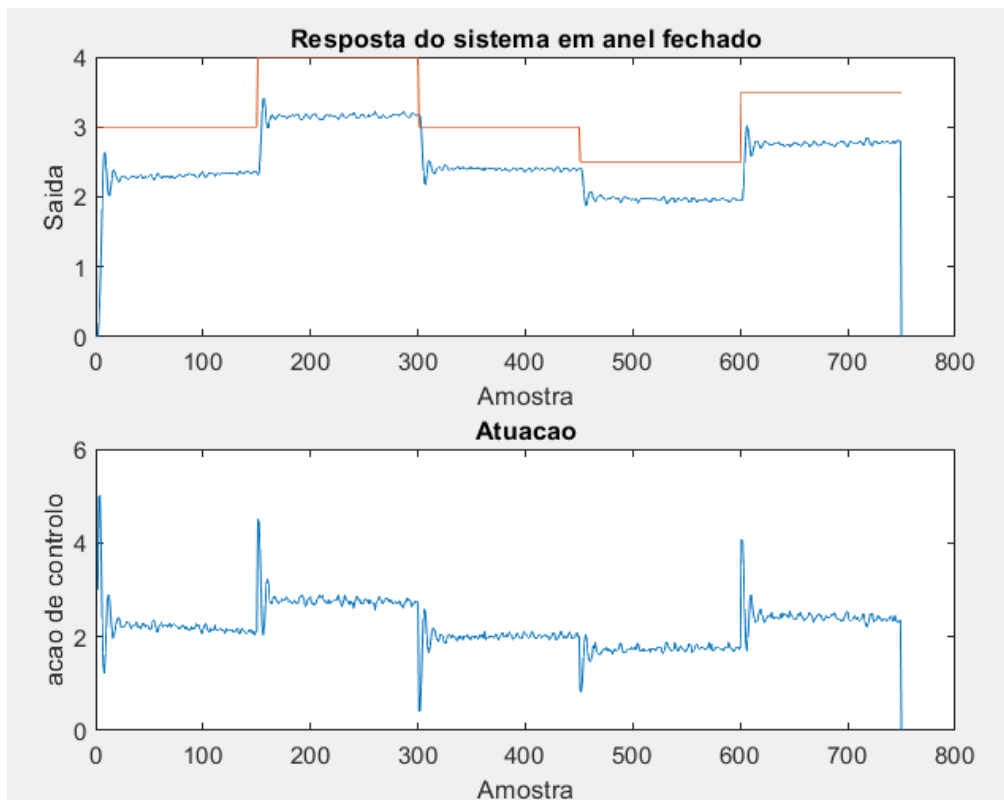


Figura 16 - Simulação no processo físico com $P=Q=1$ e $r=0.2$

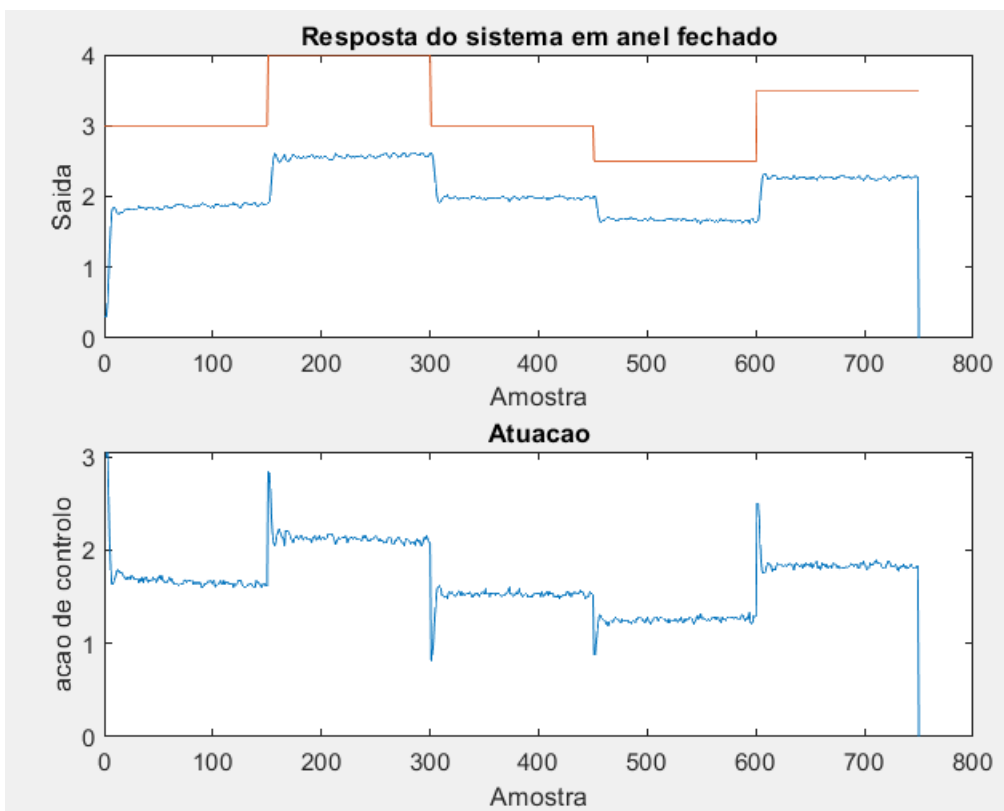


Figura 17- Simulação no processo físico com $P=Q=1$ e $r=0.3$

Analisando os gráficos, observamos que o valor mais apropriado para R é $r=0.17$, pois ele apresenta um equilíbrio ideal entre proximidade ao sinal desejado e suscetibilidade ao ruído. Além disso, podemos concluir que à medida que o valor de R diminui, o sinal se aproxima mais do desejado, porém fica mais suscetível ao ruído. Idealmente teríamos $r=0$, mas dessa forma o sinal ficaria muito vulnerável ao ruído, por isso faz-se necessário penalizar a ação de controlo. Por outro lado, à medida que aumentamos o valor de r , embora reduza o ruído apresentado, o sinal de saída diminui em magnitude. Estas observações são cruciais para a escolha adequada de parâmetros no contexto da análise de sinais.

5.2. Polinómio $R(q^{-1}) = r(1 - q^{-1})$

Para o R com penalização na entrada $u(k-1)$ tivemos os seguintes resultados:

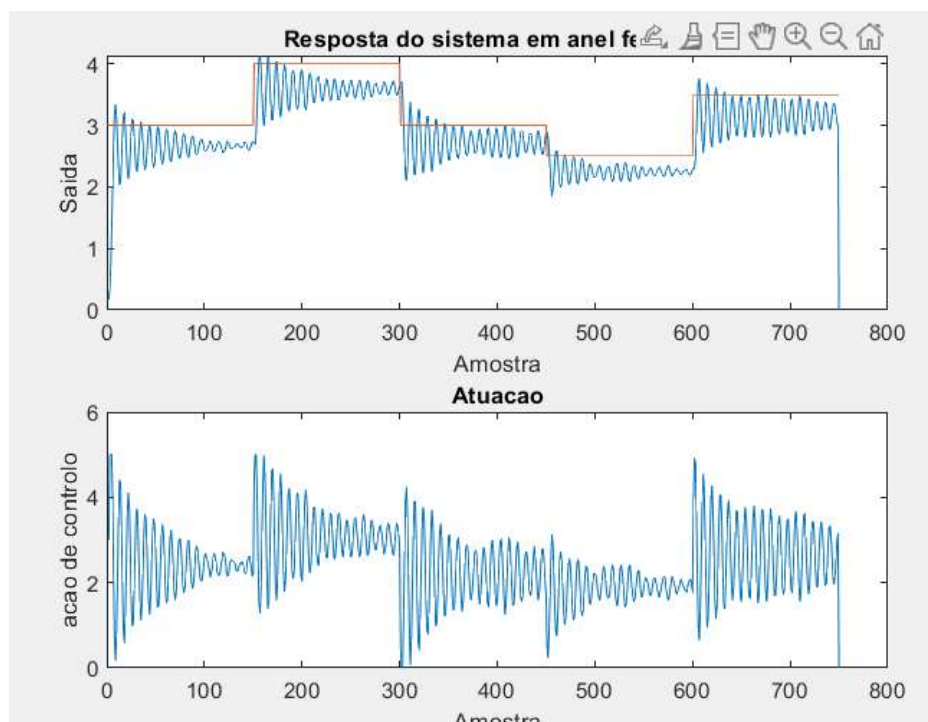


Figura 18 - Simulação no processo físico com $P=Q=1$ e $r=0.2$

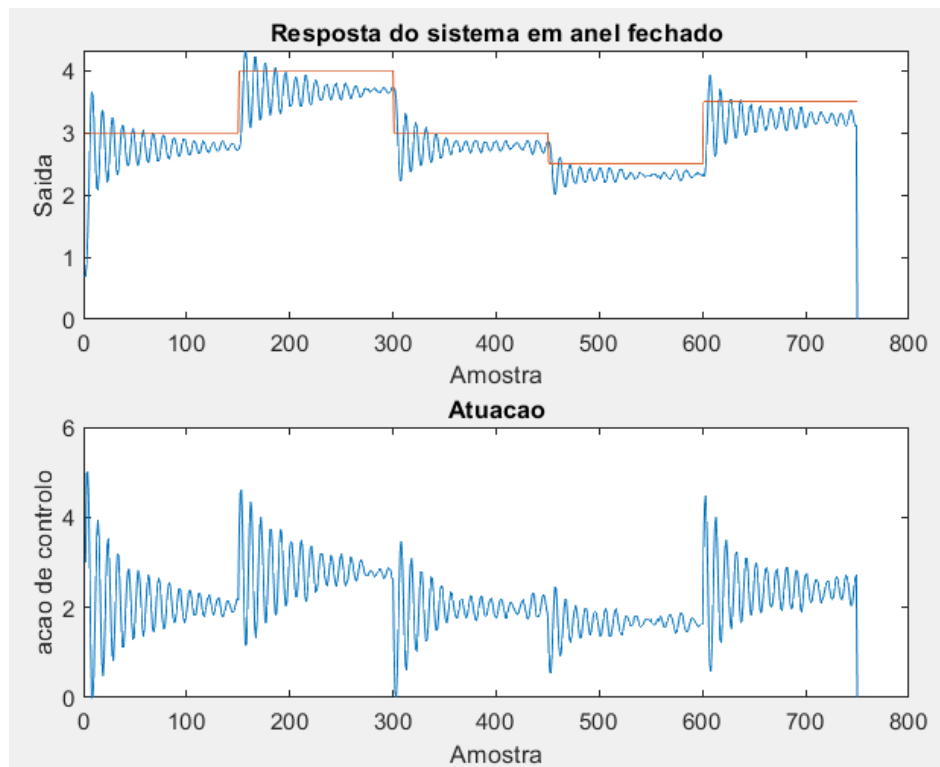


Figura 19 - Simulação no processo físico com $P=Q=1$ e $r=0.25$

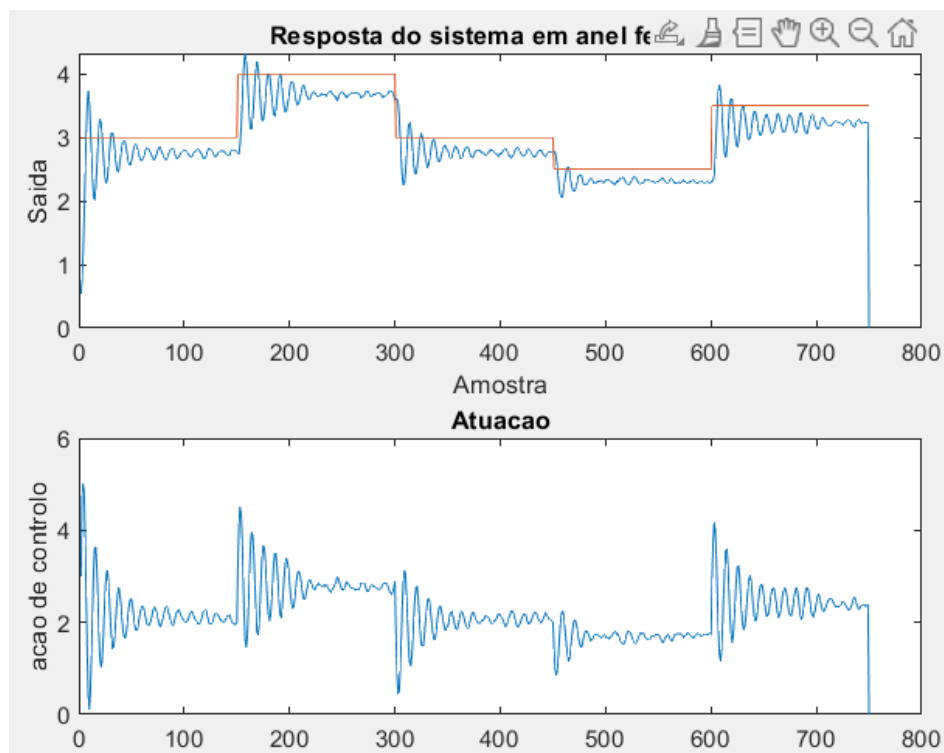


Figura 20- Simulação no processo físico com $P=Q=1$ e $r=0.3$

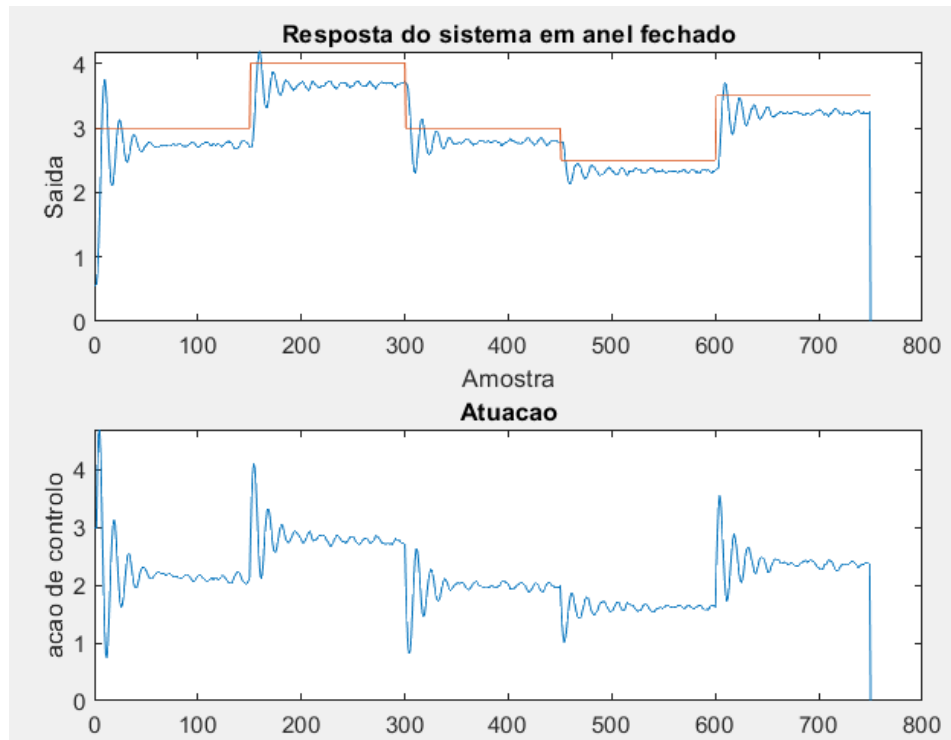


Figura 21- Simulação no processo físico com $P=Q=1$ e $r=0.4$

Ao implementarmos a penalização ao sinal $u(k-1)$, ou seja, o polinómio $R(q^{-1}) = r(1 - q^{-1})$, observamos uma piora nas respostas em anel fechado quando comparamos às respostas com o mesmo valor de r utilizando o polinómio anterior. Ao compararmos os resultados obtidos com $r=0.2$ com e sem a penalização de $u(k-1)$, notamos que com a penalização há uma suscetibilidade maior ao ruído, embora tenhamos obtido um erro quadrático inferior. Conforme aumentamos o valor de R , a suscetibilidade ao ruído diminuiu, assim como a soma do erro quadrático. Concluimos, portanto, que entre os valores testados o valor de $r=0.4$ seria o mais adequado para o nosso sistema, considerando a relação entre ruído e proximidade ao sinal desejado.

6. Conclusão

Primeiramente, foi determinado um modelo ARX capaz de descrever, até certo ponto, o funcionamento do sistema. Em seguida, foi necessário definir uma função de custo para minimizar certas características do sistema. Com base no modelo e na função de custo estabelecidos, procedeu-se à determinação da ação de controle necessária para atender aos critérios estabelecidos.

Foram analisados os efeitos de vários controladores, variando o parâmetro de penalização da ação de controle. Isso permitiu observar um trade-off entre os diferentes controladores. Para fatores de penalização mais baixos, o sistema pode tornar-se menos restrito, com suas maiores limitações sendo as limitações físicas do próprio processo. Isso resulta em um tempo de resposta mais curto, mas também requer que o processo acompanhe as variações na ação de controle. Por outro lado, para fatores de penalização mais altos, a resposta do sistema é mais lenta, mas há um relaxamento das limitações do sistema.

Anexos

- I. Função para determinar a acção de controlo $u(k)$ a aplicar ao sistema, com $R(q^{-1}) = r$

```
function [u] = ctrlq(B,F,G,P,Q,R,yk,yk1,yd)
    COEF_u = conv(conv(P,B),F)+(R(1)/B(1))*R;
    COEF_y = -conv(P,G);
    COEF_yd = Q;

    atrasos_y = length(COEF_y);
    u = (COEF_y(1:atrasos_y)*[yk; yk1] + COEF_yd*yd) / COEF_u(1);
end
```

- II. Função para determinar a acção de controlo $u(k)$ a aplicar ao sistema, com $R(q^{-1}) = r(1 - q^{-1})$

```
function [u] = ctrlqII(B,F,G,P,Q,R,yk,yk1,yd,uk1)
    COEF_u = conv(conv(P,B),F)+(R(1)/B(1))*R;
    COEF_y = -conv(P,G);
    COEF_yd = Q;

    atrasos_y = length(COEF_y);
    u = (COEF_y(1:atrasos_y)*[yk; yk1] + COEF_yd*yd -
    COEF_u(2)*uk1)/ COEF_u(1);
end
```

III. Código utilizado para simular o controlador ótimo polinomial em um modelo ARX

```
%%% Simula um modelo
clear all, clc,
load('arx211.mat')

N = 150;
Ref= [3.0*ones(1,N), 4.0*ones(1,N), 3.0*ones(1,N), 2.5*ones(1,N),
3.5*ones(1,N)]'; % Definir o sinal de referência

A = arx211.A;
B = arx211.B(2);
Ts = arx211.Ts;

P = 1;
Q = 1;

[F, G] = deconv([1 0 0], A);
G = G(2:end);

r = 0.3;
R = [r];

u = zeros(size(Ref));
y = zeros(size(Ref));
error = zeros(size(Ref));
yd = Ref;

disp('A controlar');
for k=3:1:size(Ref)-1

    u(k) = ctrlq(B,F,G,P,Q,R,y(k),y(k-1),yd(k));

    if u(k) > 5 % Saturação
        u(k) = 5;
    elseif u(k) < 0
        u(k) = 0;
    end

    y(k+1) = G(1)*y(k) + G(2)*y(k-1) + B(1)*u(k);

    error(k) = y(k) - yd(k);

end

subplot(2,1,1), plot(y(1:end)), hold on, plot(Ref)
title('Resposta do sistema em anel fechado')
ylabel('Saida'), xlabel('Amostra')
subplot(2,1,2), plot(u(1:end))
title('Atuacao')
ylabel('acao de controle'), xlabel('Amostra')

somaErroQuadratico = error'*error
mediaErroQuadratico = somaErroQuadratico / length(error)
save('simulacao_0_3.mat')
```

IV. Código utilizado para testar o controlador óptimo polinomial no sistema real

```
%%% Teste no processo real
clear all, clc,
load('arx211.mat')

N = 150;
Ref= [3.0*ones(1,N), 4.0*ones(1,N), 3.0*ones(1,N),
2.5*ones(1,N), 3.5*ones(1,N)]'; % Definir o sinal de referência

A = [1 -1.3694 0.4811];
B = [0.1325];
Ts = 0.08;

P = 1;
Q = 1;

[F, G] = deconv([1 0 0], A);
G = G(2:end);

r = 0.01;
R = [r];

u = zeros(size(Ref));
y = zeros(size(Ref));
error = zeros(size(Ref));
yd = Ref;

usbinit % Inicialização da placa de aquisição

disp('A controlar');
for k=1:1:size(Ref)-1
    y(k)= usbread(0);
    tic % Inicia cronómetro

    if k < 3
        u(k) = yd(k);
    else
        u(k) = ctrlq(B,F,G,P,Q,R,y(k),y(k-1),yd(k));
    end

    if u(k) > 5 % Saturação
        u(k) = 5;
    elseif u(k) < 0
        u(k) = 0;
    end

    usbwrite(u(k),0); % Actua sobre o processo
    Dt = toc; % Stop cronómetro
    pause(Ts-Dt) % Temporização

    error(k) = y(k) - yd(k);
end
```

```
usbwrite(0,0)

subplot(2,1,1), plot(y(1:end)), hold on, plot(Ref)
title('Resposta do sistema em anel fechado')
ylabel('Saida'), xlabel('Amostra')
subplot(2,1,2), plot(u(1:end))
title('Atuacao')
ylabel('acao de controlo'), xlabel('Amostra')

somaErroQuadratico = error'*error;
mediaErroQuadratico = somaErroQuadratico / length(error);
save('Dados_Processo.mat')
```


V. Código utilizado para testar o controlador óptimo polinomial no sistema real com penalização de $u(k-1)$

```
%%% Teste no processo real
clear all, clc,

N = 150;
Ref= [3.0*ones(1,N), 4.0*ones(1,N), 3.0*ones(1,N),
2.5*ones(1,N), 3.5*ones(1,N)]'; % Definir o sinal de referência

A = [1 -1.3694 0.4811];
B = [0.1325];
Ts = 0.08;

P = 1;
Q = 1;

[F, G] = deconv([1 0 0], A);
G = G(2:end);

r = 0.4;
R = [r -r];

u = zeros(size(Ref));
y = zeros(size(Ref));
error = zeros(size(Ref));
yd = Ref;

usbinit % Inicialização da placa de aquisição

disp('A controlar');
for k=1:1:size(Ref)-1
    y(k)= usbread(0);
    tic % Inicia cronómetro

    if k < 3
        u(k) = yd(k);
    else
        u(k) = ctrlqII(B,F,G,P,Q,R,y(k),y(k-1),yd(k),u(k-1));
    end

    if u(k) > 5 % Saturação
        u(k) = 5;
    elseif u(k) < 0
        u(k) = 0;
    end

    usbwrite(u(k),0); % Actua sobre o processo
    Dt = toc; % Stop cronómetro
    pause(Ts-Dt) % Temporização

    error(k) = y(k) - yd(k);
end
usbwrite(0,0)
```

```
subplot(2,1,1), plot(y(1:end)), hold on, plot(Ref)
title('Resposta do sistema em anel fechado')
ylabel('Saida'), xlabel('Amostra')
subplot(2,1,2), plot(u(1:end))
title('Atuacao')
ylabel('acao de controlo'), xlabel('Amostra')

somaErroQuadratico = error'*error;
mediaErroQuadratico = somaErroQuadratico / length(error);
save('Dados_Processo_0_4V2.mat')
```