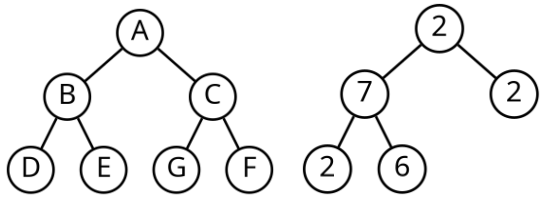
Arboles

Algoritmos y Estructuras de Datos (CB100) - FIUBA
Martin Klöckner - mklockner@fi.uba.ar

Un árbol es una estructura de datos que posee ramificaciones pero no sigue con una estructura lineal, como las listas enlazadas por ejemplo (salvo en casos particulares) en esta estructura es posible poseer mas de una posición siguiente, aunque típicamente se tienen dos (arboles binarios). Un árbol obligatoriamente debe cumplir que cada nodo tenga un solo padre.

Dentro de la estructura se asigna diferentes nombres a los nodos con diferentes características, como la **raíz**, el cual es el nodo que no tiene "ancestros" y la **hoja** que es un nodo que no tiene hijos. Otras definiciones incluyen el **grado** que es el numero de hijos máximo que puede tener un subárbol o nodo, y la **altura** de un nodo que es la longitud del camino mas largo desde el nodo a la raíz (por convención la raíz tiene altura 1).

En la figura 1 se muestran 2 ejemplos de arboles binarios. Tomando como ejemplo el árbol binario de la figura 1.1, la raíz es el nodo A, las hojas los nodos D, E, F y G, el grado de la raíz 2 y la altura 3.



(1) Árbol de búsqueda binaria (2) Árbol binario

Figura 1: Ejemplos de arboles binarios

En la figura 2 se ve un ejemplo de la estructura típica de un árbol binario junto con el contenido de los nodos, cada nodo tiene un dato asociado que almacena y a su vez una referencia al nodo izquierdo y derecho que le preceden.

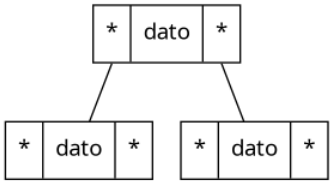


Figura 2: Estructura de nodo de un árbol binario

Arboles de búsqueda binaria

Un árbol de búsqueda binaria o ABB por sus siglas, es un árbol binario, es decir que tiene un máximo de dos hijos por cada nodo, pero que además está ordenado, esto es, el nodo izquierdo contiene un dato menor en comparación con el nodo actual, y el nodo derecho un dato mayor. Un ejemplo de un árbol de búsqueda binaria se puede ver en la figura 1.2, el árbol de la figura 1.1 también es un árbol de búsqueda binaria si consideramos el orden alfabético.

Tener un árbol binario ordenado permite reducir el numero de pasos requeridos para encontrar un dato almacenado en el árbol. Los ABB deben cumplir que el dato de la raíz sea mayor al dato de todos los valores almacenados en los nodos hijos del nodo izquierdo y menor a todos los datos almacenados en los hijos del lado derecho. En el mejor de los casos la altura de un ABB es $log(n)$ y en el peor de los casos la altura es n, esto ultimo en este tipo de arboles ABB determina el tiempo mínimo y máximo para acceder a un nodo [1] (el peor de los casos que es cuando el dato esta en una hoja).

Cuando se inserta o elimina un elemento en el árbol se lo hace siguiendo un orden. El caso en que el nodo a eliminar tiene uno o dos hijos es trivial, lo particular es cuando el nodo tiene dos hijos, en ese caso se debe reemplazar el nodo eliminado por el sucesor inorden, esto es el nodo que se debería visitar si se acabara de visitar el nodo eliminado (con recorrido inorden) esto resulta en el nodo mas a la izquierda del subárbol derecho del nodo eliminado.

Maneras de recorrer un árbol binario

Existen varias formas de recorrer un árbol binario siendo las mas típicas Depth-First Search (DFS o recorrido en profundidad) y Breath-First Search (BFS o recorrido en anchura). En la primera (recorrido en profundidad) se puede realizar en preorden, inorden o postorden; para la segunda típicamente se recorren los nodos por niveles.

Para la manera en profundidad (Depth-First Search), en el recorrido en preorden, primero se accede a la raíz, luego al nodo izquierdo y luego al derecho, si alguno de los nodos es un subárbol entonces se realiza el mismo procedimiento. Para el recorrido inorden, primero se accede al nodo izquierdo, luego a la raíz, y por ultimo al nodo derecho, este recorrido típicamente se usa en arboles de búsqueda binaria (ABB). Por ultimo en el recorrido postorden, primero se accede a ambos nodos, izquierdo y derecho, y luego a la raíz.

Para la manera en anchura (Breath-First Search), se recorre el nodo en orden por niveles de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, primero la raíz, luego todos los nodos, luego los nodos de los nodos, etc.

Por ejemplo, en el árbol de la figura 1.1, el recorrido utilizando los 4 métodos mencionados resultan como se ve en la tabla 1.

[1] Abdul Bari. (2018, Marzo 16). 10.1 AVL Tree - Insertion and Rotations. https://www.youtube.com/watch?v=jDM6_TnYIqE&t=239s.

Recorrido	Nodos
Preorden	$A - B - D - E - C - F - G$
Inorden	$D - B - E - A - C - F - G$
Postorden	$D - E - B - F - G - C - A$
Nivel por nivel	$A - B - C - D - E - F - G$

Tabla 1: Recorridos de un árbol binario

Características de los arboles

Árbol lleno

Se dice que un árbol esta lleno si todas las hojas tienen el mismo nivel y todos los nodos anteriores tienen el numero máximo de hijos (en un árbol binario 2) el árbol de la figura 1.1 está lleno, pero el de la figura 1.2 no lo está ya que las hojas no tienen el mismo nivel (hay hojas de nivel 2 y otras de 3).

Árbol completo

Se dice que un árbol esta completo, si todas sus hojas están llenas sin contar el ultimo subárbol, es decir, puede haber alguno hoja vacía y además todas las hojas están lo mas a la izquierda posible, es decir, las posibles hojas vacías están a la derecha de la raíz del nodo, y se van completando de izquierda a derecha. En la figura 1 ambos arboles están completos. A un árbol que no esta completo también se le dice desequilibrado.

Árbol balanceado

Un árbol se dice balanceado si para cada nodo la diferencia de alturas entre el subárbol izquierdo y derecho es pequeña, típicamente menor o igual a 1 en valor absoluto.

Árbol degenerado o patológico

Un árbol degenerado (también llamado árbol patológico) es un tipo especial de árbol en el que cada nodo tiene a lo sumo un hijo. Es decir, se comporta como una lista enlazada en lugar de un árbol ramificado. Esto ocurre por ejemplo al insertar datos ordenados en un ABB.

Factor de equilibrio

El factor de equilibrio se define para cada nodo como la diferencia entre las alturas del nodo derecho e izquierdo (el sentido opuesto, es decir, la diferencia del izquierdo y el derecho también vale, pero se debe respetar la convención elegida para todo el árbol).

$$F_{equilibrio} = h_{derecho} - h_{izquierdo}$$

Árbol AVL (Adelson-Velski y Landis)

Un árbol AVL, es una caso particular de un árbol de búsqueda binaria en el que cada vez que se inserta o elimina un nuevo elemento se lo hace de manera que el árbol resulte balanceado, esta es una mejora a los ABB ya que si se insertan los datos ordenados en el árbol ABB se degenera. Para que el árbol AVL resulte balanceado al insertar o eliminar un elemento se comprueba si el árbol resulta balanceado mediante el calculo del factor de equilibrio para cada nodo, en caso de que el factor de equilibrio no pertenezca a $[-1, 0, 1]$, se lo balancea.

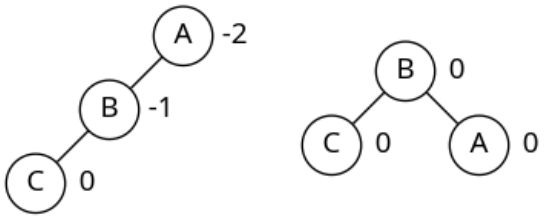
Si bien los arboles AVL son mucho mas eficientes que los arboles ABB, tienen la particularidad de que por cada nivel pueden tener una mínima cantidad de nodos (en el peor de los casos) que no es la máxima, y en particular se verifica que para un árbol AVL de altura h (o h niveles) la cantidad mínima de nodos es $F(n)$, siendo F la serie de Fibonacci de n términos, es por esto que también a los arboles AVL se los conoce como **arboles de Fibonacci**.

Algoritmos de rotación

Las rotaciones se realizan para balancear arboles AVL. El punto clave es entender que las rotaciones se aplican solo a 3 nodos y modifican los nodos hijos. Se determina que un nodo debe ser balanceado calculando el factor de equilibrio de cada nodo, el primer nodo de abajo hacia arriba que esta desbalanceado debe ser balanceado.

Rotación simple a derecha (o LL [2])

En las rotaciones simples a derecha sobre un nodo, se rota ese nodo a su hijo izquierdo y en su lugar se toma el hijo derecho del nodo previo; en el lugar del nodo previo “asciende” su hijo derecho. En la figura 3.1 se muestra un árbol desbalanceado, cuyo primer nodo desbalanceado de abajo hacia arriba es A, ya que tiene un factor de equilibrio −2 lo cual en valor absoluto es mayor estricto que 1, en la figura 3.2 se muestra el resultado luego de realizar una rotación simple a derecha sobre el nodo A.



(1) Arbol desbalanceado (2) Luego de RSD

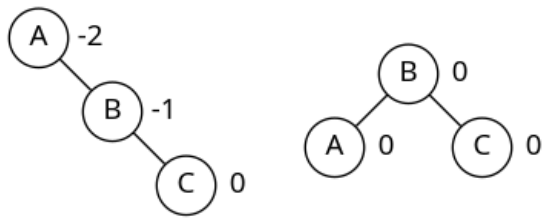
Figura 3: Rotación simple a derecha

Rotación simple a izquierda (o RR)

Las rotaciones simples a izquierda son análogas a las rotaciones simples a derecho pero en sentido contrario, en la figura 4.1 se muestra un ejemplo de una árbol AVL desbalanceado, en la figura 4.2 se muestra el mismo árbol luego de hacer una rotación

[2] LL (por left-left en ingles) es porque el que causa el desbalanceo del nodo esta en el hijo izquierdo del hijo izquierdo.

simple a derecha con respecto al nodo B, para finalizar el balanceo faltaría hacer una rotación simple a izquierda con respecto al nodo A.

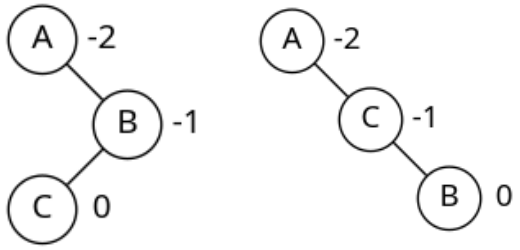


(1) Arbol desbalanceado (2) Luego de RSI

Figura 4: Rotación simple a izquierda

Rotación doble derecha (derecha-izquierda, RL)

En las rotaciones dobles a derecha se deben realizar dos rotaciones simples, en primer lugar a derecha y por ultimo a izquierda. En la figura 5.1 se muestra un árbol desbalanceado, para balancearlo en primer lugar se realiza una rotación simple a derecha sobre el nodo B, resultando como en la figura 5.2.



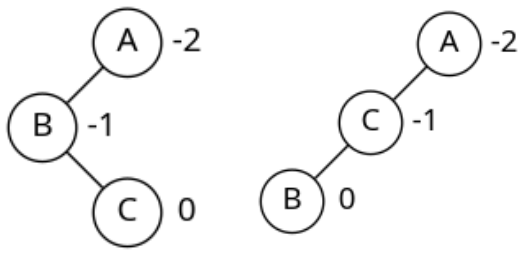
(1) Arbol desbalanceado (2) Luego de RSD sobre B

Figura 5: Rotación doble a derecha

Luego de la primer rotación se obtiene un nuevo árbol desbalanceado, pero que se puede balancear fácilmente mediante una rotación simple, en este caso una rotación simple a izquierda sobre el nodo A.

Rotación doble izquierda (izquierda-derecha, LR)

Las rotaciones dobles a izquierda son similares a las dobles a derecha pero las rotaciones ocurren en sentido opuesto, la primera a izquierda y la segundo a derecha.



(1) Arbol desbalanceado (2) Luego de RSI sobre B

Figura 6: Rotación doble a izquierda

Árbol B

Los arboles B surgen como una forma de hacer mas eficiente la lectura y escritura en disco de datos, en particular de decrementar el tiempo y la cantidad de bloques leídos de un disco a la hora de buscar un dato.

Lo particular de los arboles B en comparación a los arboles binarios vistos anteriormente es que tienen un numero mayor de datos almacenados y un numero mayor de hijos, pero se sigue la convención de los arboles de búsqueda binaria en que los datos a la izquierda son menores y a la derecha mayores, tanto en los nodos como en las claves. Esto se ve en la estructura de los nodos, un ejemplo se muestra en la figura 7, en el cual se ve una estructura de un árbol B de orden 3.

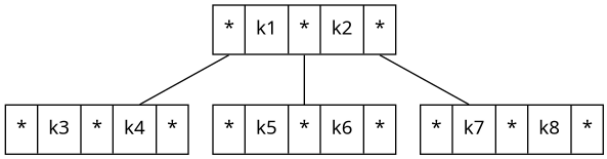


Figura 7: Estructura de un árbol B

El *orden* de un árbol B (se denota con la letra m) determina la cantidad máxima de hijos que pueden tener los nodos (y por consiguiente la cantidad máxima de claves, ya que es $m - 1$). Por ejemplo, en el árbol de la figura 7, el orden del árbol es 3, por lo que cada nodo puede tener un máximo de 3 hijos, y almacenar 2 claves.

Por definición, en los arboles B se deben cumplir las siguientes reglas:

1. Todos los nodos, salvo la raíz, deben tener al menos $((m/2) - 1)$ claves, o $m/2$ hijos (salvo hojas).
2. Todas las hojas están en el mismo nivel.
3. El proceso de creación es de abajo hacia arriba.

Operaciones

Los arboles B tienen las mismas operaciones que los arboles binarios y aparte la operación de dividir y fusionar. Al igual que los arboles AVL, al momento de insertar y eliminar datos del árbol ocurre un proceso de balanceo, pero en este caso siendo la operación mas sencilla, ya que se trata de un procedimiento de un solo paso.

Búsqueda

La búsqueda es similar al árbol binario ya que las claves están ordenadas en cada nodo $k1 < k2 < ... < kn$, en caso de que el dato a buscar este entre el rango de dos claves, por ejemplo el dato a buscar k, cumple $k2 < k < k3$, entonces se debe buscaren en el hijo entre $k2$ y $k3$, luego se realiza el mismo procedimiento hasta llegar a las hojas.

Inserción

Para agregar un elemento, de manera análoga a arboles binarios, se busca la posición mediante comparación con las claves hasta llegar a la hoja, en caso de que haya lugar en la hoja simplemente se agrega, si no hay lugar se tiene que dividir la hoja y promover el elemento $((m-1)/2)+1$ a un nivel superior, de manera que en la nueva hoja queden el numero mínimo de elementos. En caso de que no haya mas lugar en el nodo superior donde se promueve el elemento se realiza el mismo procedimiento.

Eliminación

Cuando se elimina un elemento, a diferencia de cuando se inserta, puede ocurrir en cualquier nodo, sea el nodo raíz, un nodo interno o un nodo hoja. Si el nodo del cual se quiere eliminar el elemento es una hoja, y al eliminar el elemento el numero de claves sigue siendo mayor a la mínima, entonces el proceso de eliminación se detiene allí. Si el numero es menor al numero mínimo de elementos por nodo entonces se pide "prestado" al hermano izquierdo o derecho (dependiendo la implementación del algoritmo) en caso de que ninguno de los dos tenga o que tengan el numero mínimo de elementos, se pide al de un nivel superior, en caso de que ocurra lo mismo con el del nivel superior, que no tiene elementos para prestar, entones se pide al de un nivel superior, y así sucesivamente hasta la raíz, si la raíz tiene un solo elemento entonces se baja un nivel del árbol.

Árbol B+

Los arboles B+ son muy similares a los arboles B pero con la condición que los datos deben estar en las hojas, para esto se hace que las raíces sean referencias al dato verdadero que se encuentra en la hojas. Además se impone la condición de que todas las hojas deben estar conectadas, de esta forma todas las hojas formen una especie de lista enlazada, y como todos los datos se almacenan en las hojas, esta lista enlazada dispone de todos los datos almacenados en el árbol, esto permite recorrer secuencialmente todos los nodos del árbol, lo cual es una mejora con respecto a los arboles B, ya que se deben recorrer recursivamente, nodo por nodo.

En la figura 8 se muestra un ejemplo de una estructura de un árbol B+, se puede ver la conexión entre las hojas y las copia de los nodos intermedios ($k1$ y $k2$).

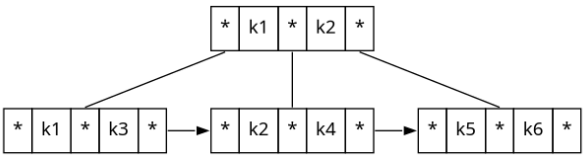


Figura 8: Estructura de un árbol B+

Operaciones

Las operaciones en general son similares a los arboles B, pero con algunas particularidades.

Búsqueda

En el caso de la búsqueda en un árbol B+, es similar a la búsqueda del árbol B, pero no se debe detener cuando se encuentre la clave en la pagina raíz o en un pagina interior, si no que se debe seguir por la rama derecha apuntada por esa clave.

Inserción

El proceso de inserción en un árbol B+ es muy similar al de un árbol B, pero se diferencia en que cuando se inserta una nueva clave en un nodo lleno, esta se divide en dos, con la primera teniendo el numero mínimo de claves y la segundo el numero mínimo de claves sumada las nueva clave, el elemento que promociona a un nuevo nivel es una copia de la clave central.

Eliminación

En el caso de eliminar un elemento una vez encontrado, se elimina directamente de la hoja (todos los datos están en las hojas), si luego de eliminarlo la hoja queda con menos del mínimo de elementos por hoja $(m/2)$ entonces hay que eliminar la hoja y redistribuir los elementos con las hojas hermanas, la clave copia en el nodo padre se debe eliminar también, si el nodo padre también queda con menos del mínimo de claves por hoja, entonces hay que realizar el mismo procedimiento.

Colas con prioridad

Las colas con prioridad son una estructura de datos de tipo cola (o queue) pero tienen la particularidad que al momento de insertar un elemento se puede asignar una prioridad, de esta forma no se inserta siempre en un mismo lugar si no que se puede inserta con un orden en particular.

Existen varias maneras de implementar una cola con prioridad, por ejemplo un vector, una lista enlazada o un árbol heap.

Árbol heap

Los arboles heap son una particularidad de los arboles binarios, en los cuales se busca que siempre estén completos y parcialmente ordenados, esto se hace insertando los elementos de derecha a izquierda por niveles. Una vez insertado el elemento se compara e intercambia con el padre hasta mantener la relación mayor-menor según el tipo de árbol heap.

Y entre nodos del mismo nivel no existe una relación particular.

Los arboles heap típicamente se almacenan en vec-

tores.

Árbol heap de máximo

En el árbol heap de máximo los datos en los padres son siempre mayor que los datos almacenados en los hijos.

Árbol heap de mínimo

En los arboles heap de mínimo ocurre al revés que en los arboles heap de máximo, es decir, los datos almacenados en los padres son siempre menor que los datos almacenados en los hijos.