공업수학

20181796 김민준

1. 다음 행렬로 모델링한 Markov process의 limit state를 구하시오

- $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$, $A - I = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & -0.9 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$, $\det(A - I) = 0 \ \rightarrow Ax = x$

- $\begin{bmatrix} -0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & -0.9 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$

- $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 & | & 0 \\ 4 & -9 & 4 & | & 0 \\ 0 & 8 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -8 & 6 & | & 0 \\ 0 & 8 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -8 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$

- $x_3 = 4, x_2 = 3, x_1 = \frac{11}{4}$ → limit state = $\begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$

1 – MATLAB

```
>> A = [0.6 0.1 0.2;0.4 0.1 0.4;0 0.8 0.4]

A =

    0.6000    0.1000    0.2000
    0.4000    0.1000    0.4000
         0    0.8000    0.4000

>> I = eye(3)

I =

     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

>> A-I

ans =

   -0.4000    0.1000    0.2000
    0.4000   -0.9000    0.4000
         0    0.8000   -0.6000
```

```
>> null(A-I)

ans =

   -0.4819
   -0.5257
   -0.7010

>> 11*null(A-I)/(-0.4819)

ans =

   11.0004
   12.0005
   16.0006
```

```
>> A = [0.6 0.1 0.2;0.4 0.1 0.4;0 0.8 0.4]

A =

    0.6000    0.1000    0.2000
    0.4000    0.1000    0.4000
         0    0.8000    0.4000

>> eig(A)

ans =

   -0.3000
    0.4000
    1.0000

>> [V D] = eig(A)

V =

   -0.0937    0.7071    0.4819
   -0.6556    0.0000    0.5257
    0.7493   -0.7071    0.7010
```

2. $n \times n$ matrix의 eigenvalues가 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$일 때 다음을 증명하시오

2-1 kA의 eigenvalues는 $k\lambda_1, \cdots, k\lambda_n$이고, A^m의 eigenvalues는 $\lambda_1^m, \cdots \lambda_n^m$이다. Eigenvector은 동일하다.

- $Ax = \lambda x, \quad kAx = k\lambda x = (k\lambda)x$

$\lambda = \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ → $k\lambda = k\lambda_1, \cdots, k\lambda_n$

- $A^m x = A^{m-1}Ax = A^{m-1}\lambda x = A^{m-2}\lambda Ax = A^{m-2}\lambda^2 x = \cdots = \lambda^m x$

$\lambda = \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ → $\lambda^m = \lambda_1^m, \cdots, \lambda_n^m$

2. $n \times n$ matrix의 eigenvalues가 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$일 때 다음을 증명하시오

- 2-2 $A - kI$의 eigenvalues는 $\lambda_1 - k, \cdots, \lambda_n - k$ 이고 eigen vector 은 동일하다.

$Ax = \lambda x,$

$(A - kI)x = Ax - kIx = \lambda x \ - kIx = \lambda x - kx = (\lambda - k)x$

$(Ix = x\ )$

$\lambda = \lambda_1, \cdots, \lambda_n \rightarrow \lambda - k = (\lambda_1 - k), \cdots, (\lambda_n - k)$

3. 행렬 (5, 9)은 symmetric, skew-symmetric, orthogonal 행렬 중 어떤 것인가? 각 행렬의 고유값을 구하시오. MATLAB으로 확인하시오.

- 5. $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ → 5 : symmetric

- $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(6-\lambda)(1-\lambda) = 0$

- → $\lambda = 6, 1$

```
>> A = [6 0 0;0 2 -2;0 -2 5]

A =

     6     0     0
     0     2    -2
     0    -2     5

>> eig(A)

ans =

     1
     6
     6
```

3.행렬 (5, 9)은 symmetric, skew-symmetric, orthogonal 행렬 중 어떤 것인가? 각 행렬의 고유값을 구하시오. MATLAB으로 확인하시오.

- 9. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_1 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ → 9 : orthogonal

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) + (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0$

→ $\lambda = 1, i, -i$

```
>> A = [0 0 1;0 1 0;-1 0 0]

A =

     0     0     1
     0     1     0
    -1     0     0

>> eig(A)

ans =

   0.0000 + 1.0000i
   0.0000 - 1.0000i
   1.0000 + 0.0000i
```

4.**nxn행렬 A가 skew-symmetric일 때 n이 짝수, 홀수에 따라 역행렬의 존재 여부가 달라지는지 확인하시오.** 존재한다면 skew-symmetric의 역행렬도 skew-symmetric임을 증명하시오. 또한 MATLAB으로 3x3, 4x4 skew-symmetric matrix를 만들어서 역행렬을 직접 구하시오.

• $A^T = -A$를 만족하는 행렬을 Skew-symmetric matrix라고 한다. 따라서

$\det(-A) = (-1)^n \det(A) = \det(A^T) = \det(A)$ 가 성립해야 한다.

$\boxed{\det(cA) = c^n \det(A)}$ $\boxed{\det(A) = \det(A^t)}$

n이 홀수일 때는 $(-1)^n \det(A) = -\det(A) = \det(A)$이므로 $\det(A) = 0$ 이다.

4. nxn행렬 A가 skew-symmetric일 때 n이 짝수, 홀수에 따라 역행렬의 존재 여부가 달라지는지 확인하시오**. 존재한다면 skew-symmetric의 역행렬도 skew-symmetric임을 증명하시오.** 또한 MATLAB으로 3x3, 4x4 skew-symmetric matrix를 만들어서 역행렬을 직접 구하시오.

- $A^T = -A$를 만족하는 행렬을 Skew-symmetric matrix라고 한다.

$AA^{-1} = I$ 이고, $(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$,
$(A^{-1})^T A^T (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ 가 성립한다.

A를 Skew-symmetric matrix라고 가정하면

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$ 이고 $A^{-1} = B$ 라고 하면
$B^T = -B$ 이므로 B또한 skew-symmetric matrix이다.
따라서 skew-symmetric의 역행렬도 skew-symmetric이다.

4. 3x3 → singular

```
>> A = [0 1 2;-1 0 3;-2 -3 0]

A =

     0     1     2
    -1     0     3
    -2    -3     0

>> inv(A)
경고: 행렬이 특이 행렬에 가깝거나 준특이 행렬(badly scaled)일 수 있습니다. 결과값이 부정확할 수 있습니다. RCOND =  3.700743e-18.


ans =

   1.0e+16 *

    2.7022   -1.8014    0.9007
   -1.8014    1.2010   -0.6005
    0.9007   -0.6005    0.3002

>> cond(A)

ans =

   2.8191e+17
```

4x4 → invertible

```
>> A = [0 1 2 3;-1 0 4 5;-2 -4 0 6;-3 -5 -6 0]

A =

     0     1     2     3
    -1     0     4     5
    -2    -4     0     6
    -3    -5    -6     0

>> inv(A)

ans =

   -0.0000   -0.7500    0.6250   -0.5000
    0.7500         0   -0.3750    0.2500
   -0.6250    0.3750   -0.0000   -0.1250
    0.5000   -0.2500    0.1250   -0.0000
```

$(A^{-1})^T = -A^{-1}$ → skew symmetric