

Simulação Física para Jogos

Mark Joselli

mark.joselli@pucpr.br



Sumário

- * Objetivos de hoje
- * Grandezas físicas
- * Vetores
- * Operações com vetores
- * Exercício

Aula Passada

- * Apresentação da disciplina
- * Introdução a física de jogos

Objetivos de Hoje

- * Revisão de vetores

O que são grandezas físicas?

- Grandezas físicas são todos os valores passíveis de medição;

• Ex:

- Temperatura (quantitativo - numérico)

VS

Saudade (qualitativo - muito, pouco, bastante);

- Uma grandeza física sempre é acompanhada de um **número** e uma **medida**.

Grandezas Escalares e Vetoriais

- Algumas grandezas, são representadas por um simples número, dentro de uma escala qualquer;
- Essas são as **Grandezas Escalares**. Ex:
 - A massa e a distância são grandezas escalares pois, se alguém menciona 3 Kg ou 5 metros, você entende o que esses valores significam;

Grandezas Escalares e Vetoriais

Outras grandezas não são tão fáceis de descrever assim:

Como descrever a direção que o seu corpo se move?

Como entender a força do vento?

Além de uma intensidade, a força do vento também tem uma direção. Por isso, ela não é simplesmente uma **Grandeza Escalar**, mas sim, uma **Grandeza Vetorial**;

Ex: Velocidade é uma grandeza vetorial pois, quando alguém menciona 5Km/h, para entendermos a velocidade precisamos ainda saber se é na horizontal ou na vertical, se é para a direita ou para a esquerda e para cima ou para baixo;

O mesmo acontece com a Força (em Newton).

Vetores

- Vetores representam na essência uma diferença relativa entre coisas;
- São propriedades dos vetores:
 - Um **tamanho**: também chamado de magnitude ou intensidade (10, 15, 30, ...);
 - Uma **direção**: Que indica a “inclinação” do vetor no espaço (horizontal, vertical, inclinado);
 - E um **sentido**: Que indica para onde o vetor aponta (esquerda, direita, cima, baixo).
- Notem que posição não é uma propriedade dos vetores:
 - A posição inicial de um vetor é sempre **relativa** a algum sistema de coordenadas.

Vetores

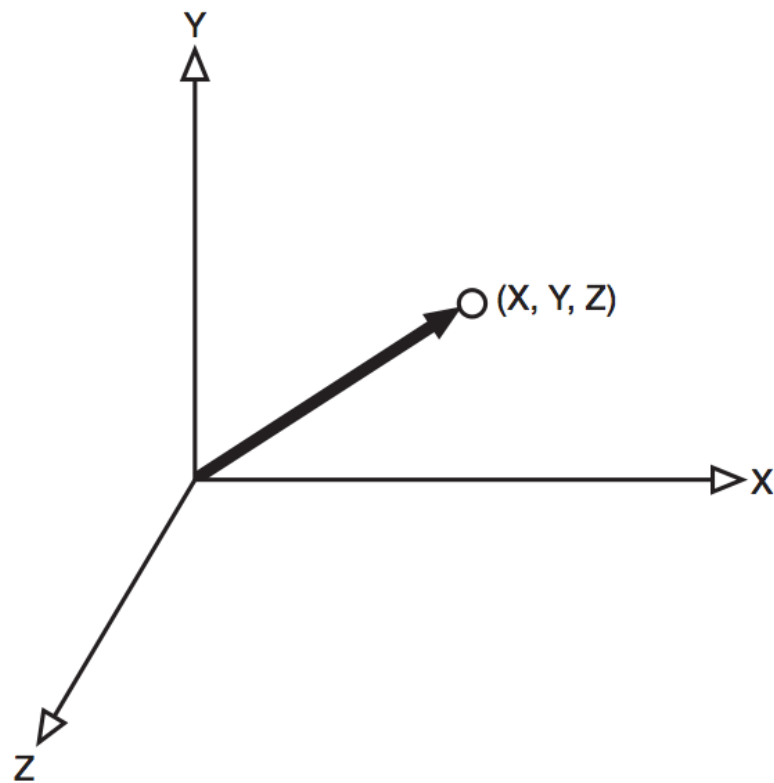
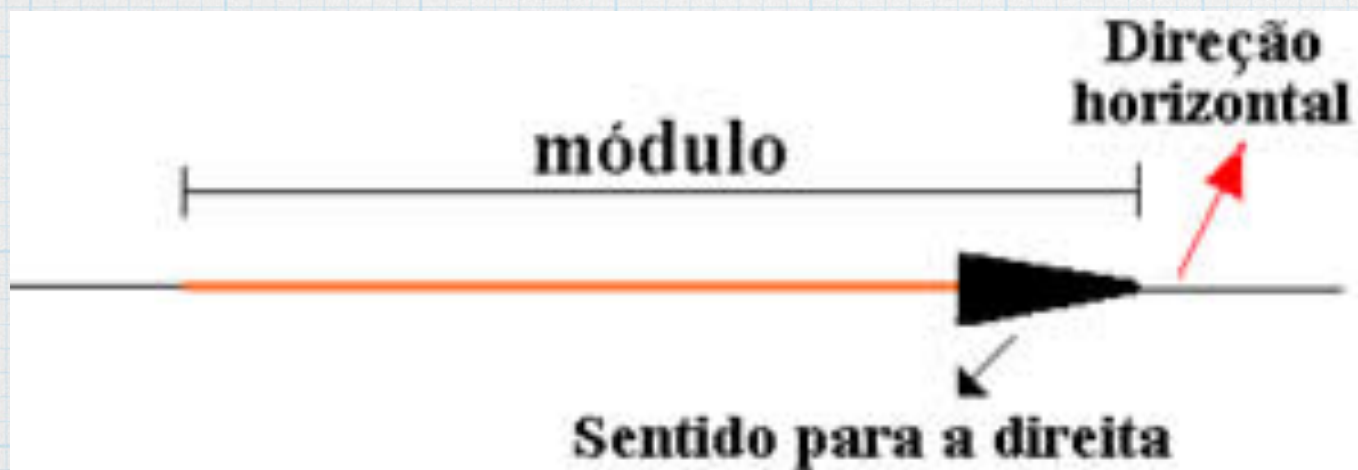
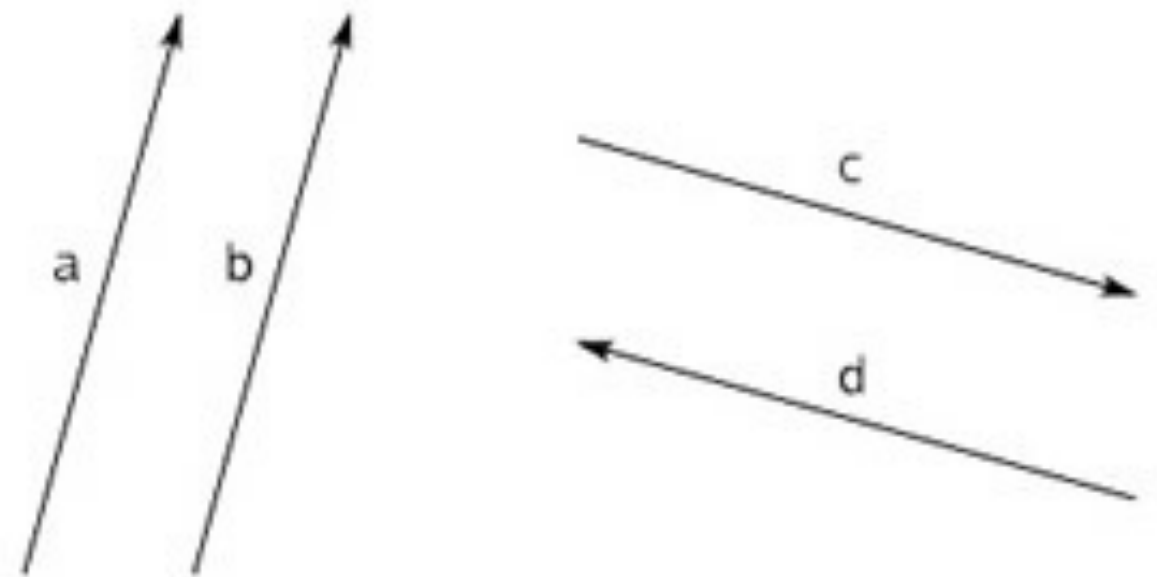


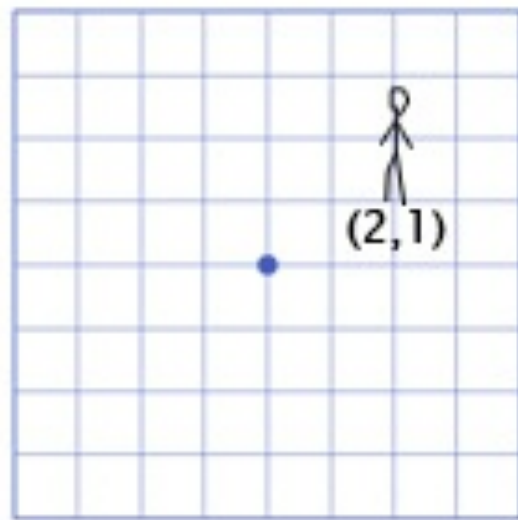
FIGURE 4.1 A point in space is both a vertex and a vector.



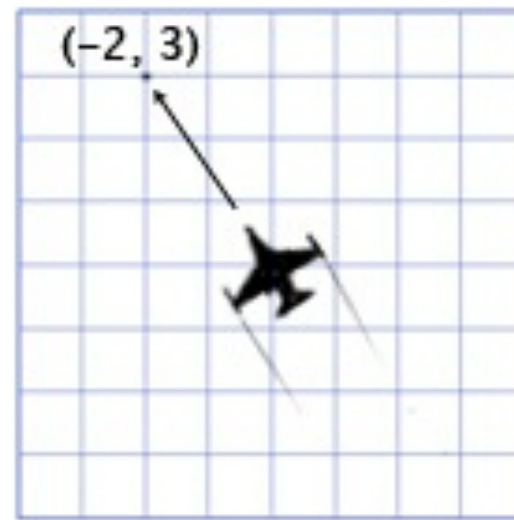
Representação matemática de um vetor

- Vetores representam deslocamentos com sinal em cada eixo;
- Portanto, em 2 dimensões teremos um valor para x e y ; Em 3, para x , y e z ; Em 4, x , y , z e w ;
- Graficamente, representamos vetores como uma flecha;
- A posição da flecha não importa, desde que sua direção, tamanho e sentido sejam mantidos (lembrem-se que vetores não possuem posição no espaço).

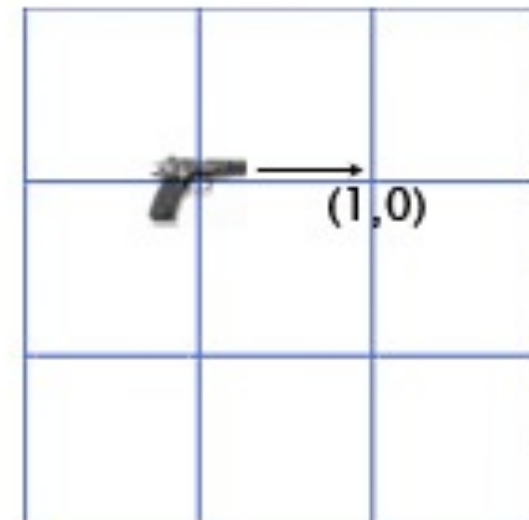
Vetores não possuem posição no espaço



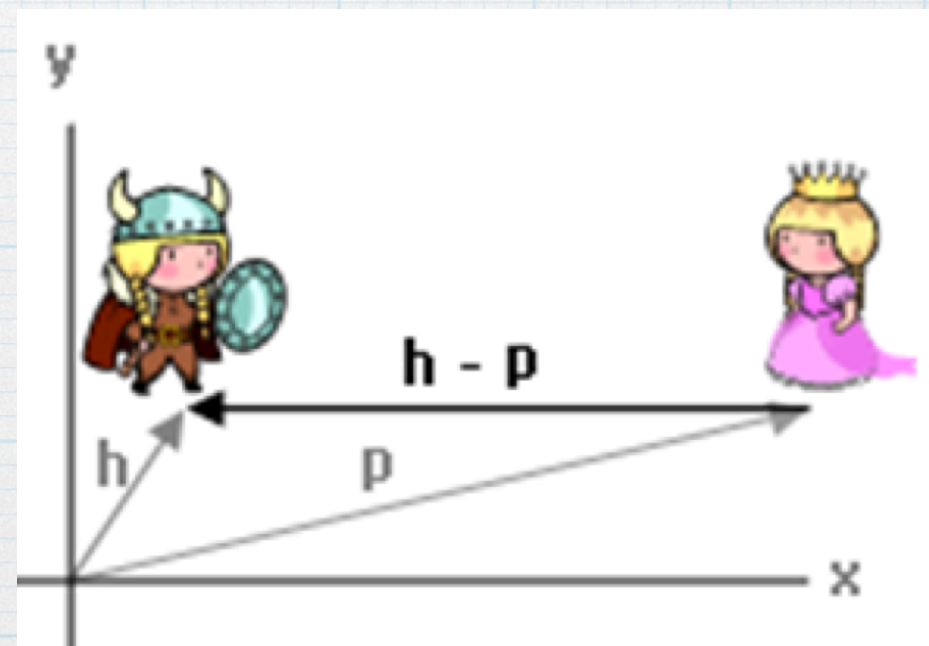
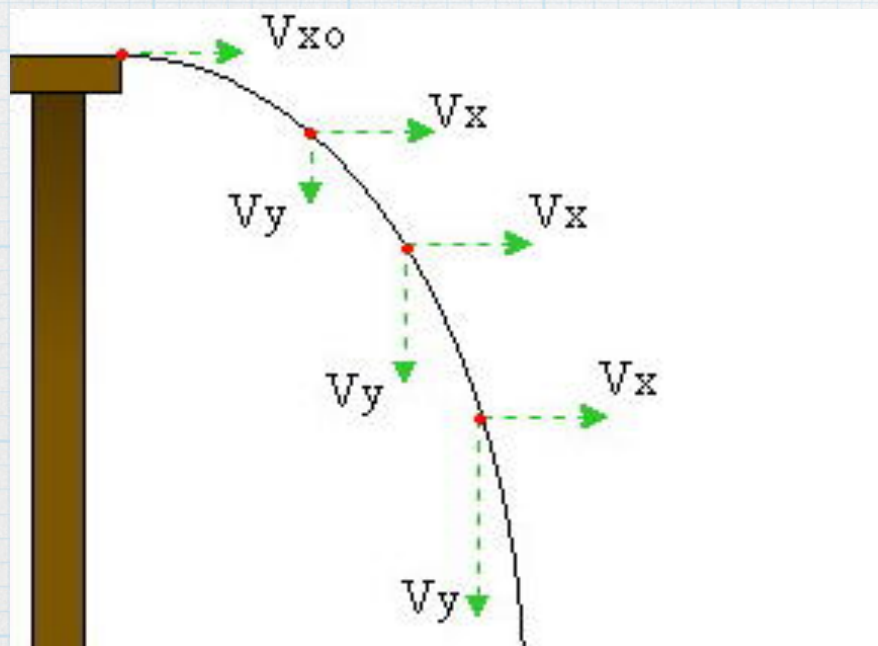
Position



Velocity



Direction

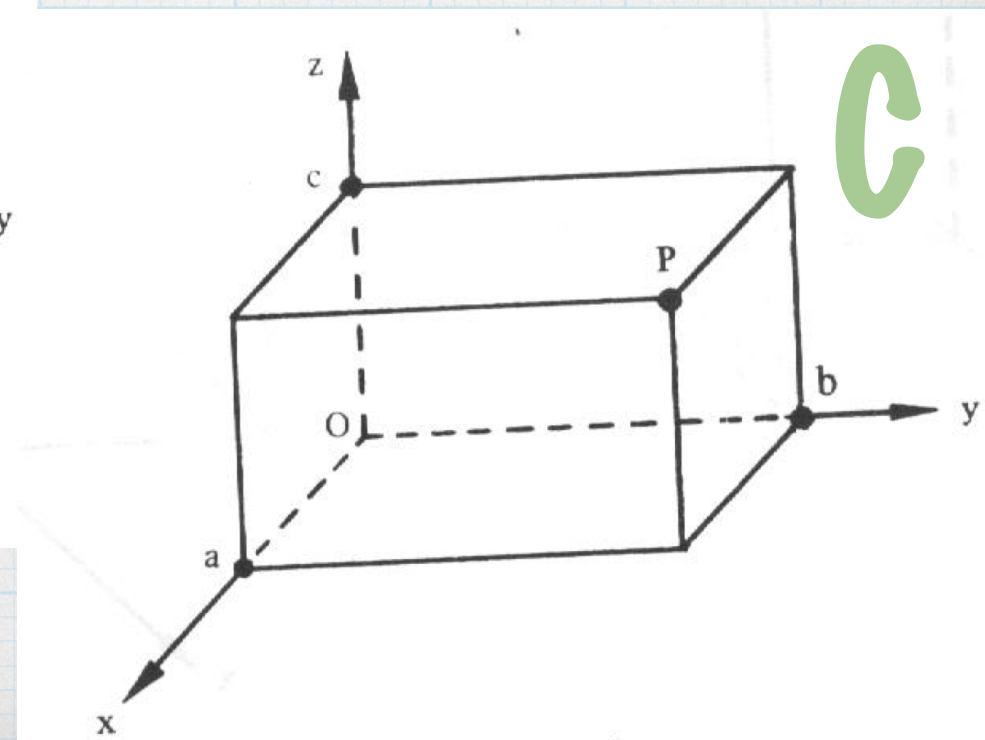
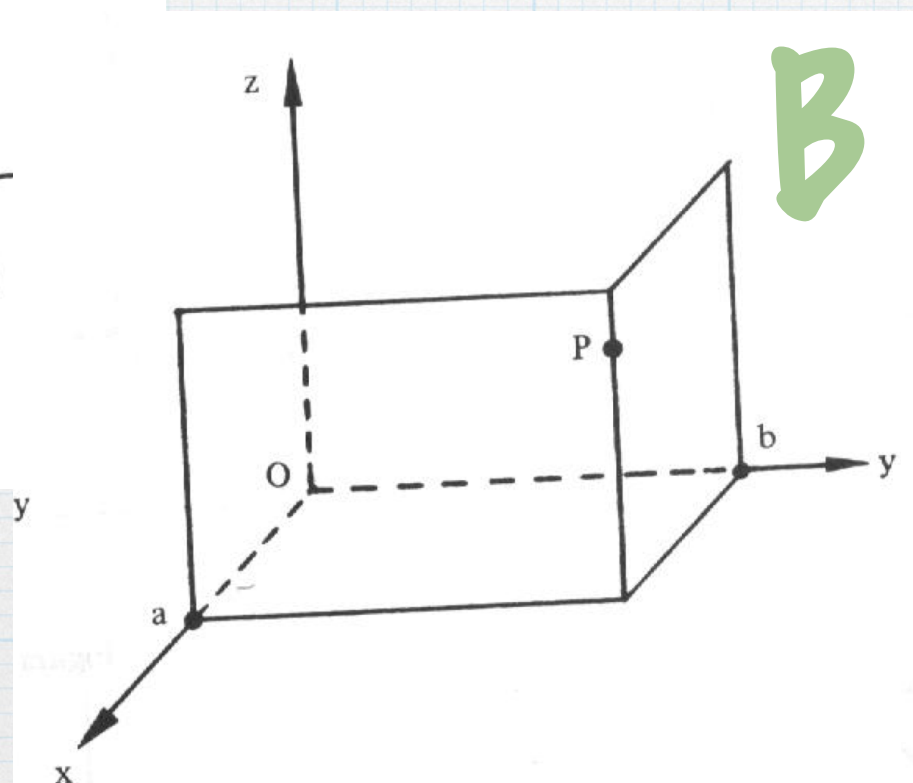
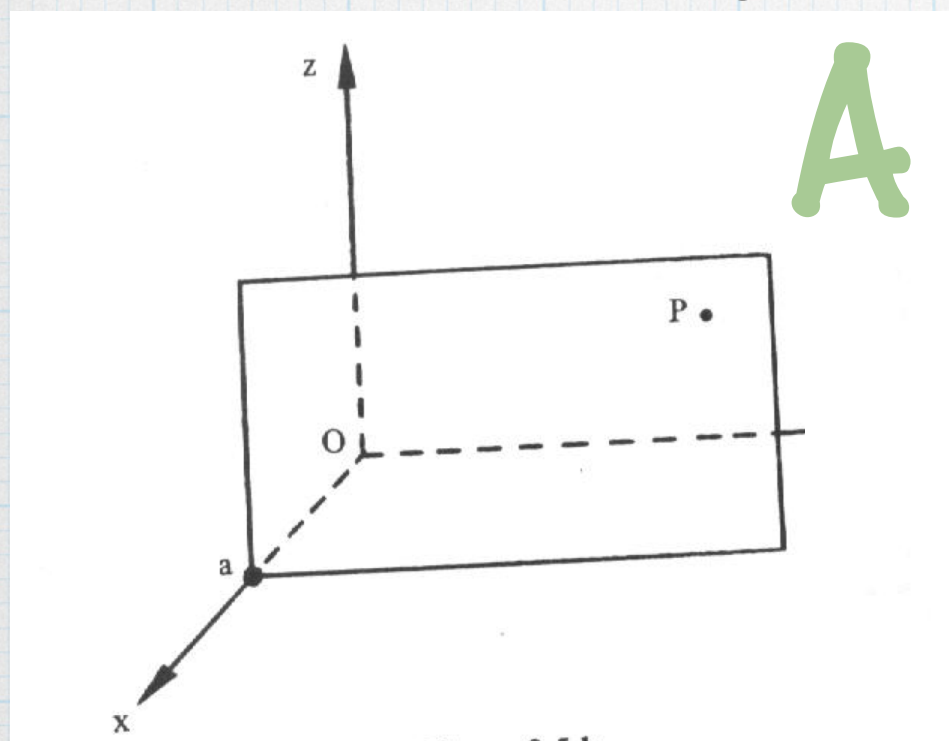


Vetores como uma sequência de deslocamentos

- No sistema de coordenadas retangular, uma forma conveniente de pensar em vetores é quebrá-los em seus 3 componentes, alinhados com os eixos;
- Por exemplo, o vetor $[1 \ -3 \ 4]$ representa um deslocamento, mas também podemos pensar no deslocamento que se faz ao mover uma unidade para direita, três para baixo, e quatro para frente;
- A ordem que realizamos esses passos não é importante.
- Por isso, costumam-se chamar a intensidade de um vetor em cada eixo de **componentes do vetor**.

Vetores como uma intersecção entre planos

Um vetor pode ser representado pelo ponto fatiado por todos os eixos ao mesmo tempo:



Posições Relativas

- Um vetor também pode ser encarado como uma **posição relativa**;
- Isto é, dado um ponto qualquer, podemos entender o vetor como uma diretriz para chegar num próximo ponto;
- Agora, pergunta-se:
 - O que seria uma **posição absoluta**?
 - Isso realmente existe?
 - É possível definir uma posição, sem que ela seja relativa a absolutamente nada?

Relação entre pontos e vetores

- Sim, posições absolutas existem:

- São os chamados pontos!

- Entretanto, é impossível descrever onde essa posição está sem algum tipo de referência:

- Essa referência é o Sistema de Coordenadas;

Relação entre pontos e vetores

- Os pontos, portanto, possuem coordenadas relativas a origem do Sistema de Coordenadas;
- Por isso, podemos usar vetores para representar pontos;
- Assim, podemos concluir que todo um Sistema de Coordenadas que não é relativo a nenhum outro possui um posicionamento absoluto;
- No CSS, o conceito de posicionamento relativo e absoluto é bem definido.

Um ponto pode ser representado
como um vetor, mas não o
contrário

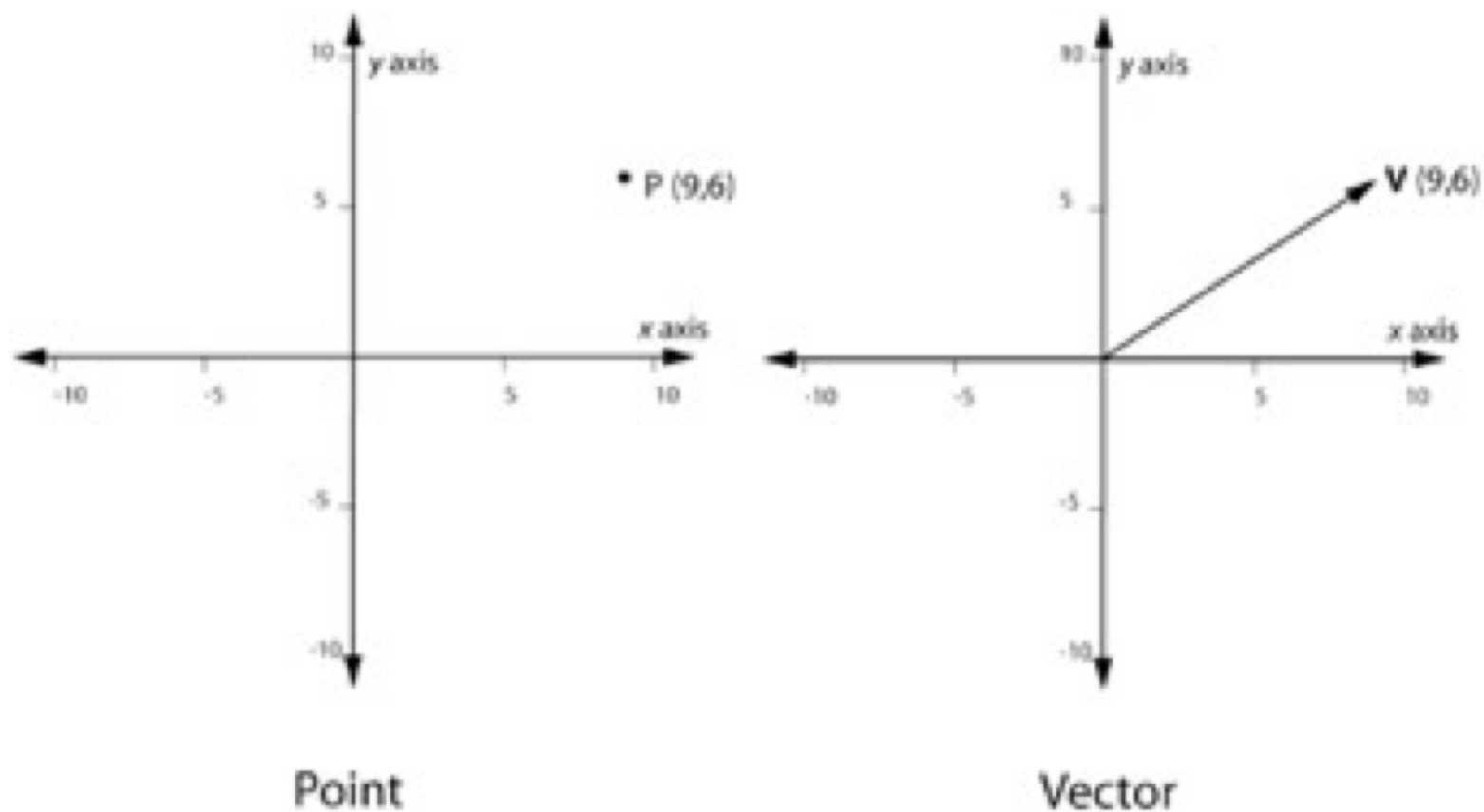


Figure 1.16: A point, P , and a vector, V

Posições relativas e o movimento dos corpos

No estudo dos movimentos relativos são considerados via de regra dois referenciais:

- Um referencial supostamente fixo, denominado de **referencial fixo**;

- É um outro que se movimenta em relação a ele, denominado de **referencial móvel**.

Posições relativas e o movimento dos corpos

O movimento do corpo em relação ao referencial fixo é denominado de movimento **absoluto**:

Ex: Movimento do barco em relação à árvore da costa.

O movimento do corpo em relação ao referencial móvel é denominado de movimento **relativo**:

Ex: Movimento do barco em relação à água.

O movimento do referencial móvel em relação ao referencial fixo é denominado de movimento de **arrastamento**:

Ex: Movimento que a água aplica no barco.

Posições relativas e o movimento dos corpos

Exemplo:

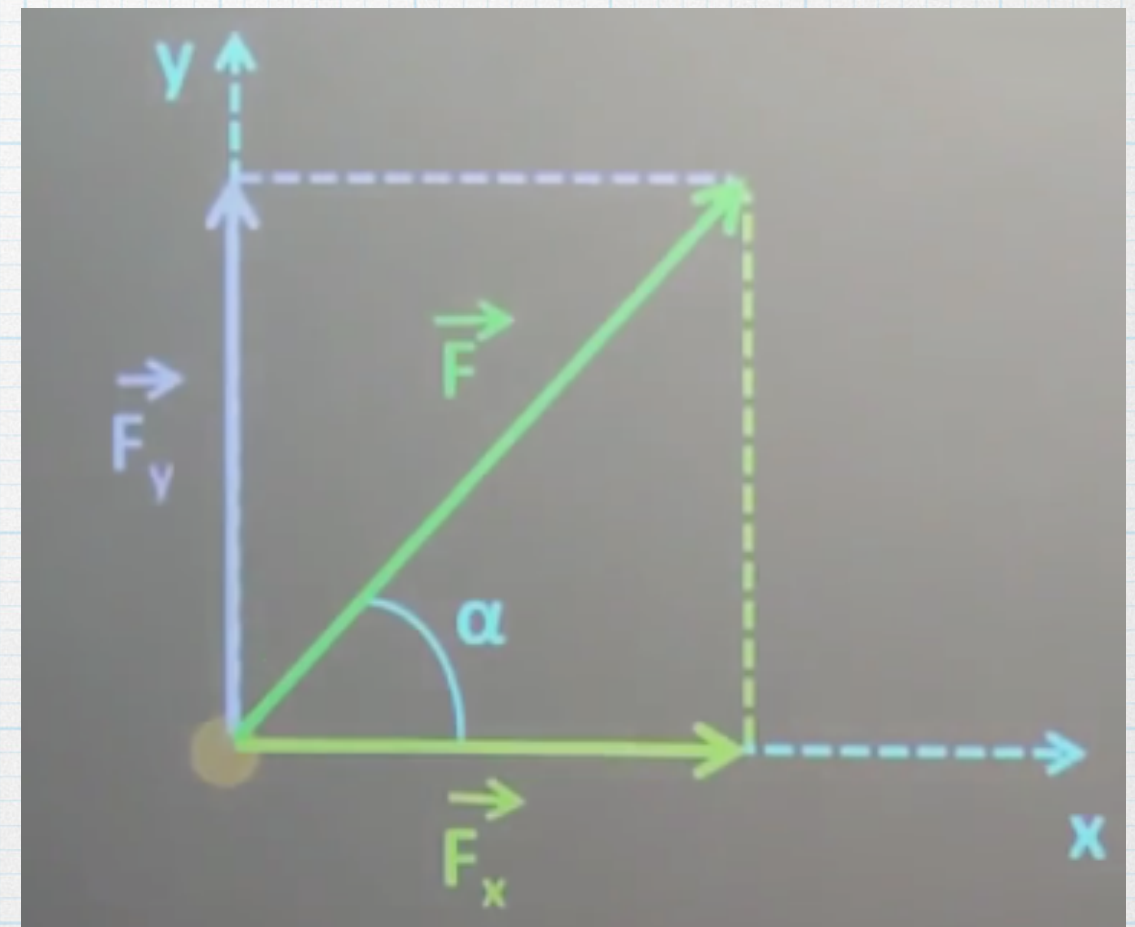
Quando **andamos** dentro de um **ônibus** em movimento, podemos considerar a **rua** como referencial fixo e o ônibus como referencial móvel;

O **nosso** movimento em relação ao ônibus é o movimento relativo, e em relação à **rua** é o movimento absoluto. O movimento do **ônibus** em relação à rua é o movimento de arrastamento.

Vetores definidos por um tamanho e um ângulo

Também podemos definir um vetor 2D através do seu tamanho e seu ângulo em relação ao eixo x;

A esse formato damos o nome de Coordenada Polar, sendo esta definida sobre o Sistema de Coordenadas Polares;



Vetores no processing

Representando o vetor

```
class PVector {  
  
    float x;  
    float y;  
  
    PVector(float x_, float y_) {  
        x = x_;  
        y = y_;  
    }  
  
}
```


Operação sobre vetores

- Até agora, discutimos apenas a definição matemática de vetores.
- Agora veremos as operações matemáticas sobre eles de duas formas:
 - Primeiro, a definição matemática da operação;
 - A interpretação geométrica dessa operação;
 - Os exemplos em Processing das operações.

Adição e Subtração de Vetores

- Nós podemos adicionar ou subtrair vetores, desde que sejam da mesma dimensão;
- Usamos a mesma notação que a soma de escalares:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_{n-1} + b_{n-1} \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Adição e Subtração de Vetores

- A subtração pode ser usada como a soma da negação do segundo termo.

- Isto é: $a - b = a + (-b)$:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} + \left(- \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \dots \\ a_{n-1} - b_{n-1} \\ a_n - b_n \end{bmatrix}$$

- Note que a subtração não é comutativa. Ou seja: $a - b$ não é igual $b - a$.

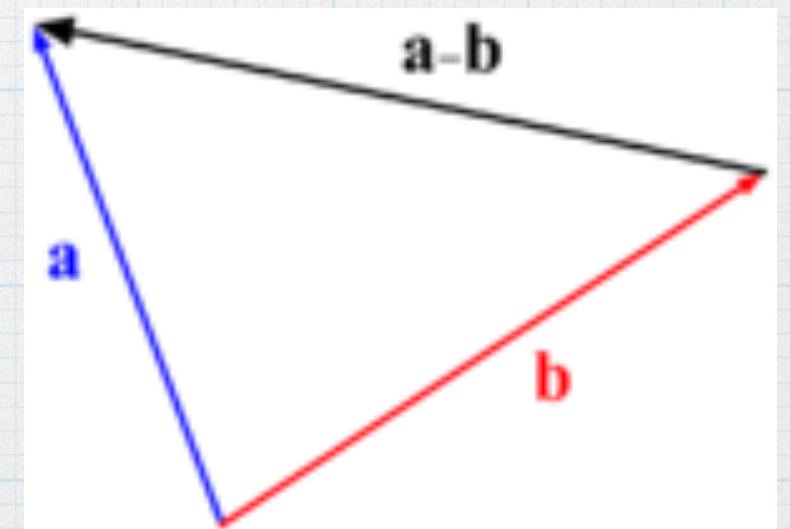
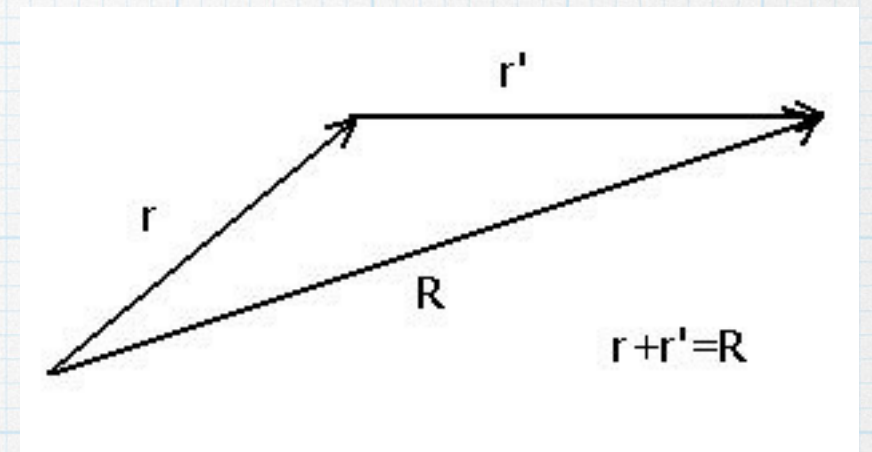
Adição e Subtração de Vetores

Geometricamente, somamos a e b ligando a cabeça de a no rabo de b ;

Essa é chamada de “regra do polígono da adição de vetores”;

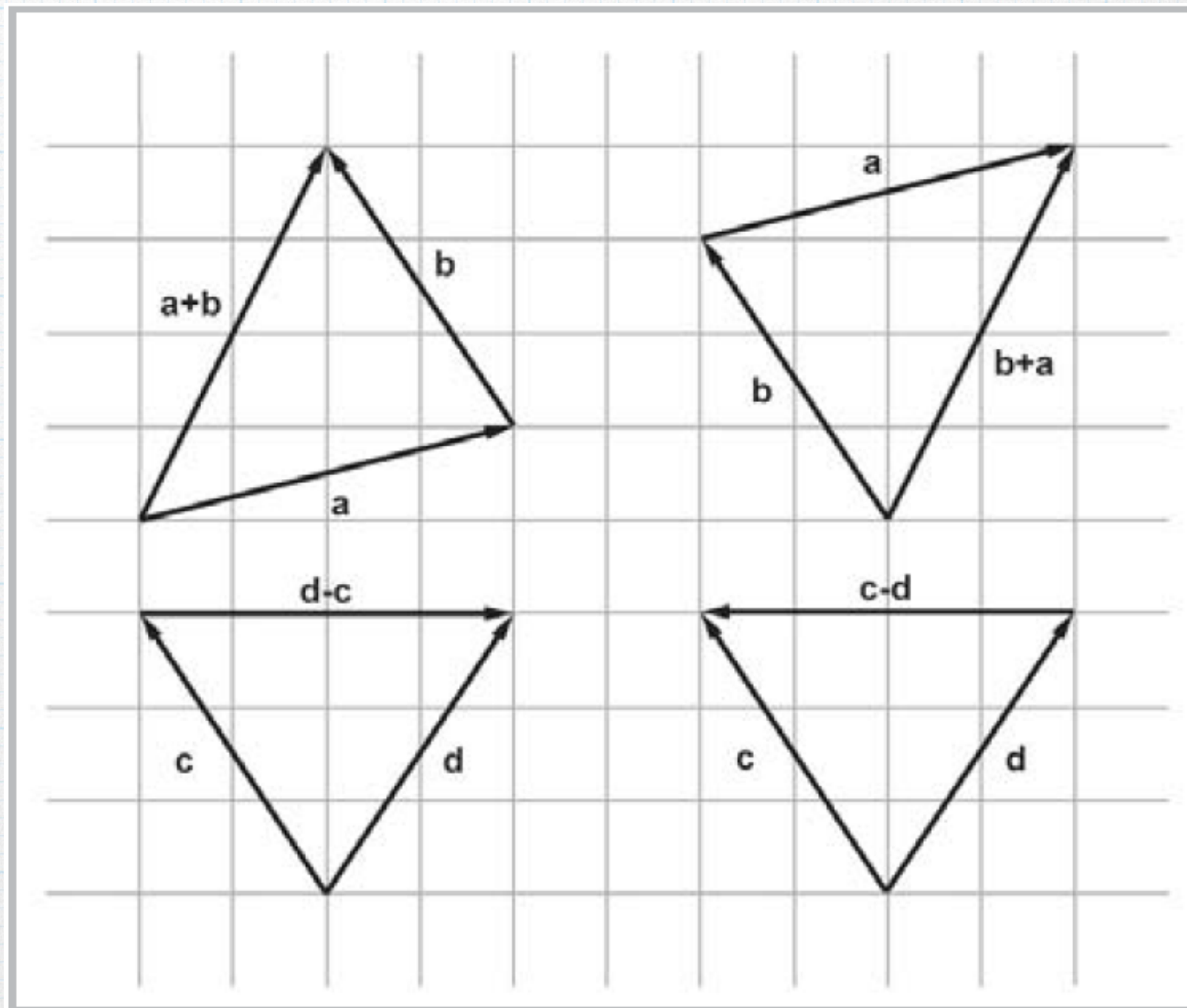
Na subtração, ligamos as duas cabeças dos vetores;

A ponta do vetor resultante apontará para o elemento que está sofrendo a subtração;



Adição e Subtração de Vetores

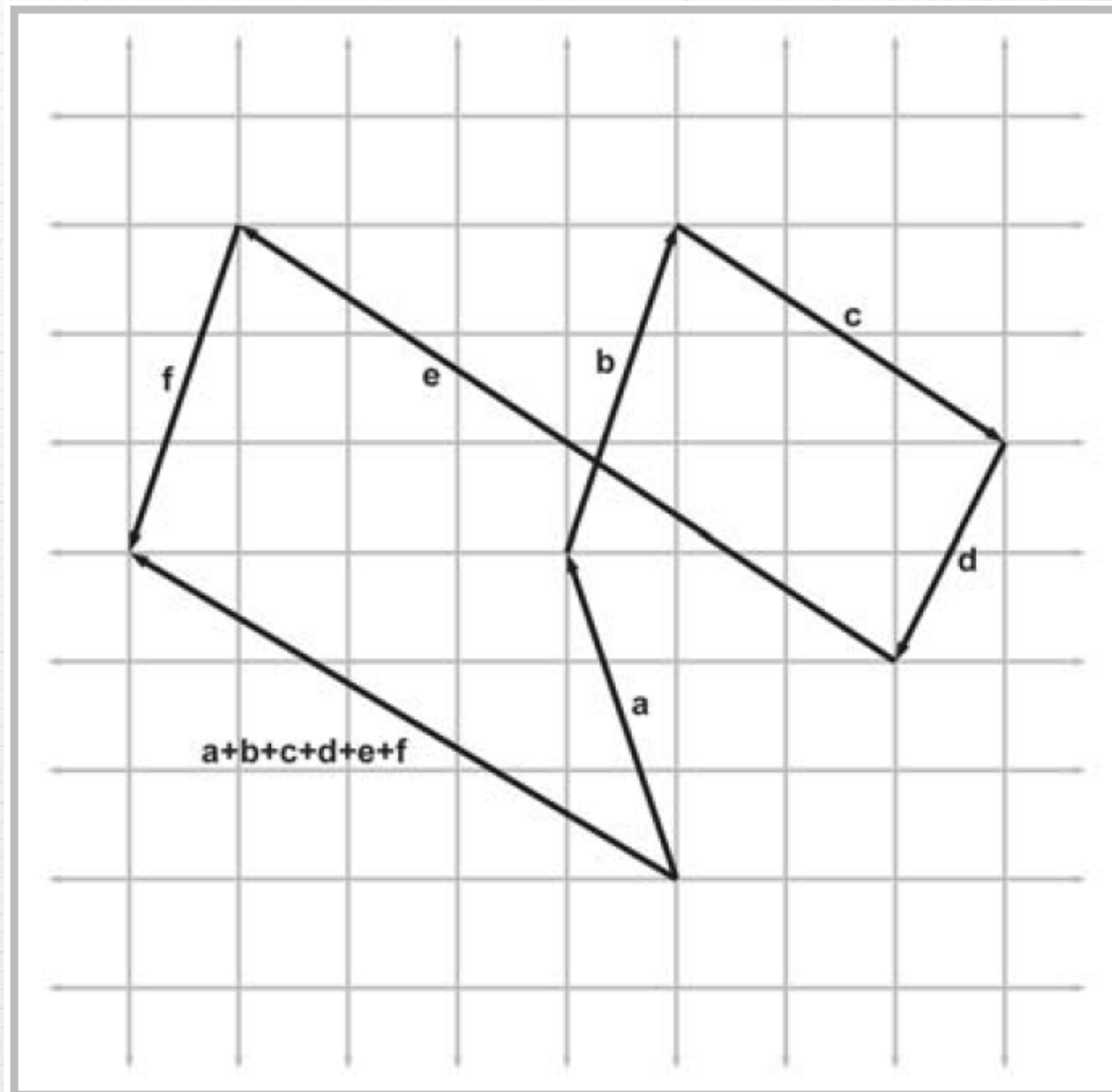
Nela, inverter a ordem das operações resulta num vetor de sentido oposto;



Adição e Subtração de Vetores

Podemos estender a regra do polígono para mais de dois vetores;

Um conjunto de vetores sendo aplicados ao mesmo tempo sobre um vetor normalmente é chamado de sistema de forças.



Soma de Vetores = offset

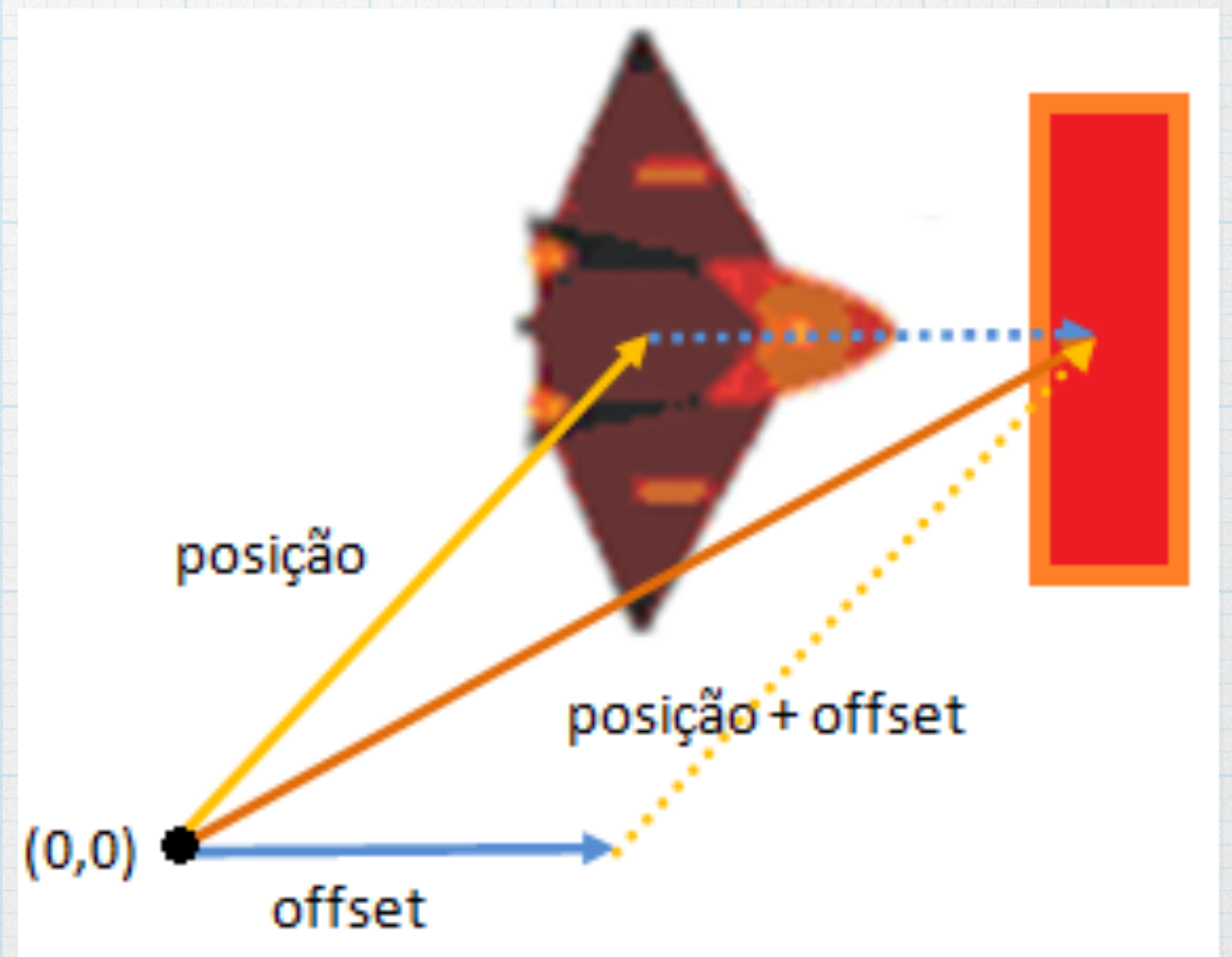
- Um vetor sozinho pode representar a posição de um objeto no espaço:

- Vimos que essa representação, se relacionada ao Sistema de Coordenadas do Mundo, também define o vetor como um ponto.

- Um vetor também pode representar a distância de um objeto em relação a outro;

- Chamamos isso de **offset**;

- Se somarmos a posição de um objeto com o offset, automaticamente obtemos a posição do outro objeto:



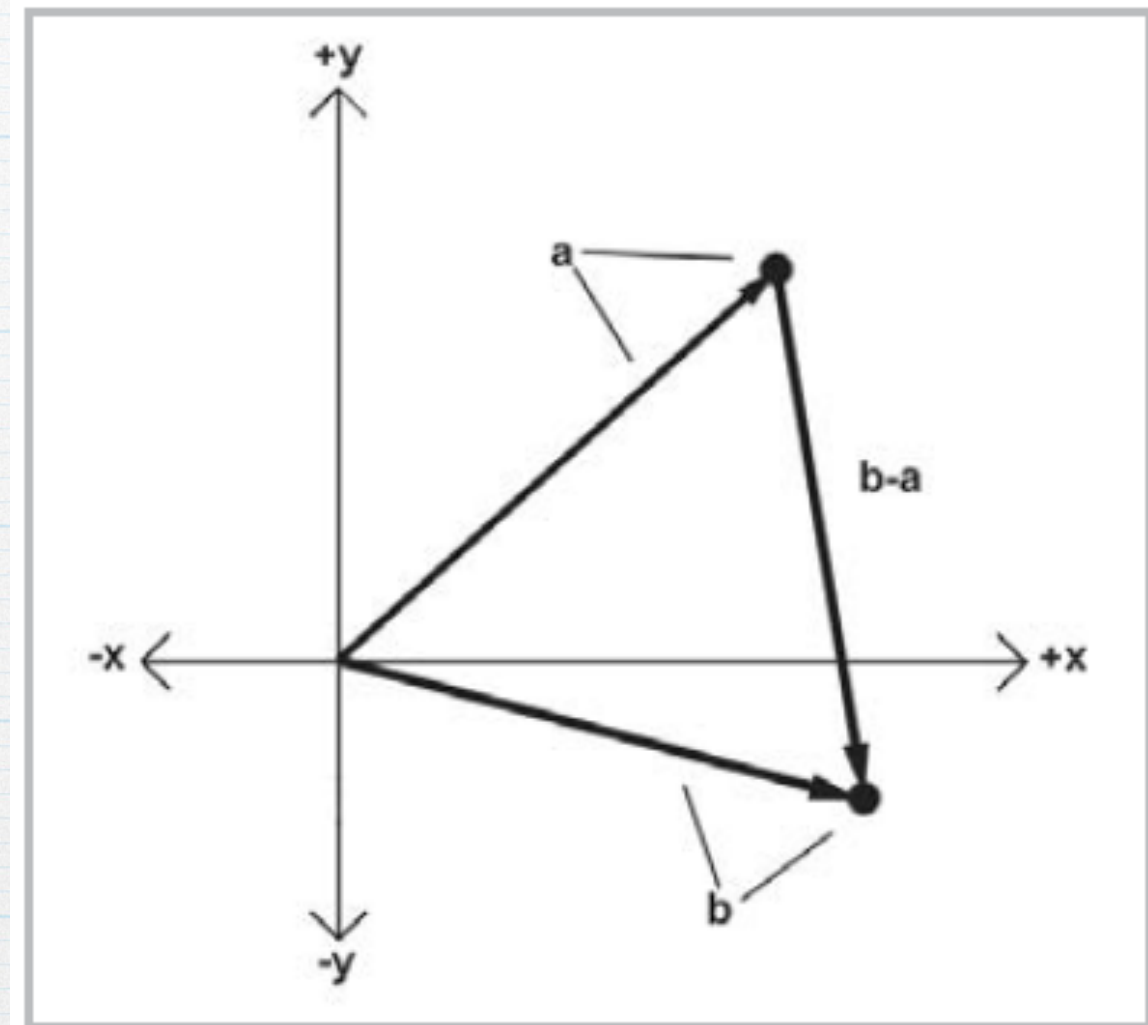
Vetores de um ponto até outro

- É muito comum que queiramos calcular o deslocamento necessário para de um ponto chegar a outro;

- Podemos fazer isso usando a regra do polígono e uma subtração:

- Consideramos o centro do Sistema de Coordenadas Local do objeto como o vetor da sua posição;

- Note que $b - a$, resulta num vetor que vai de a até b .

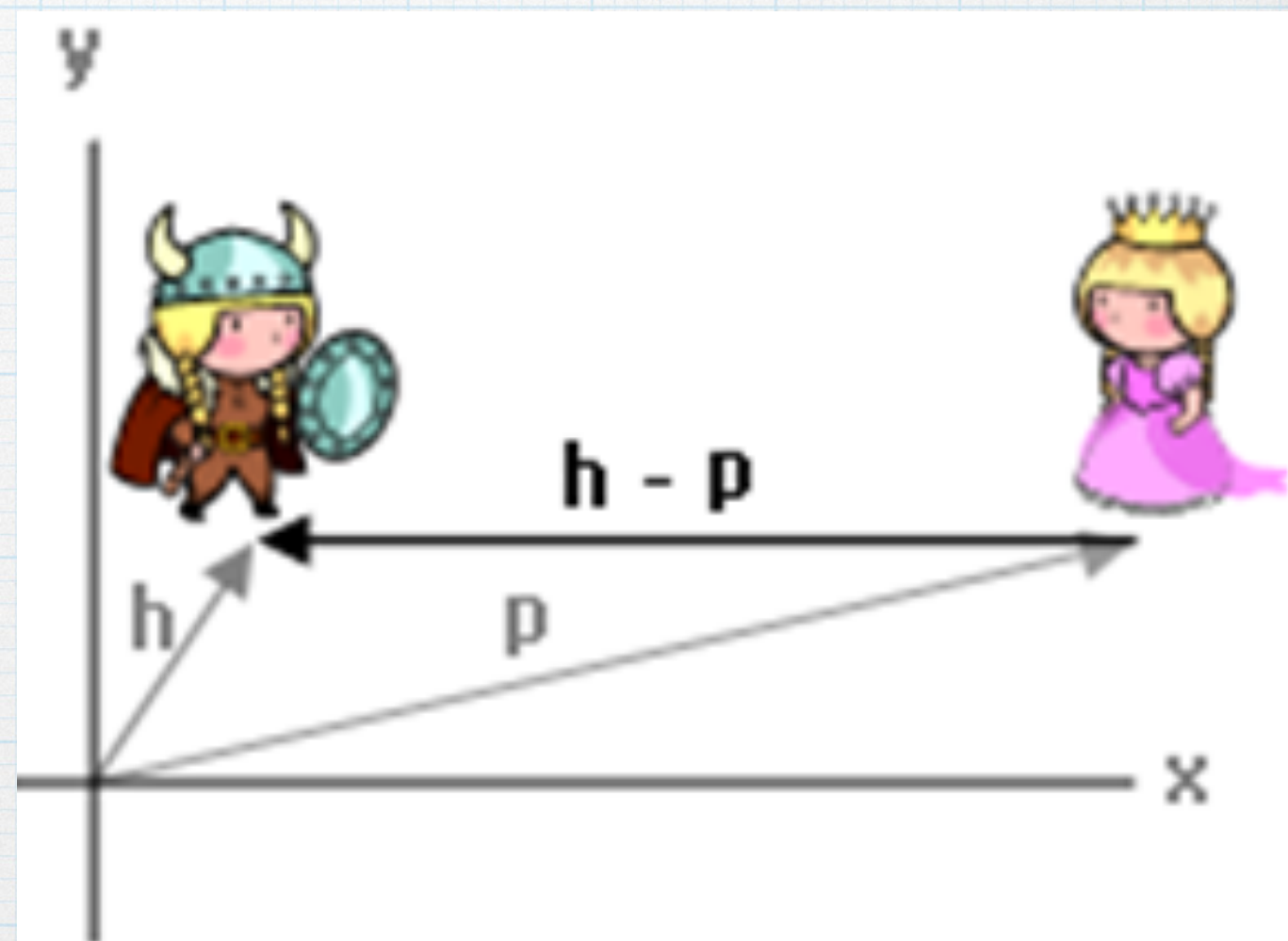


OU SEJA...

Subtração de vetores = trajetórias

A subtração entre dois vetores resulta num terceiro vetor que é a trajetória entre dois pontos;

O tamanho desse vetor representa a distância que terá de ser percorrida entre os dois pontos.



Soma e Subtração de Vetores

```
void add(PVector v) {  
    y = y + v.y;  
    x = x + v.x;  
}
```

```
void sub(PVector v) {  
    x = x - v.x;  
    y = y - v.y;  
}
```


Multiplicação por um escalar

- Podemos multiplicar um vetor por um escalar;

- O resultado é um vetor com tamanho diferente, mesma direção e:

- Mesmo sentido se o escalar for maior que zero;

- Sentido oposto, com o escalar menor que 0;

- O vetor zero, se o escalar for 0.

$$k \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} k = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \dots \\ ka_{n-1} \\ ka_n \end{bmatrix}$$

Multiplicação por um escalar

- A divisão ocorre de forma análoga, já que ela equivale a multiplicação pela recíproca do escalar (a multiplicação pelo inverso resulta em 1):

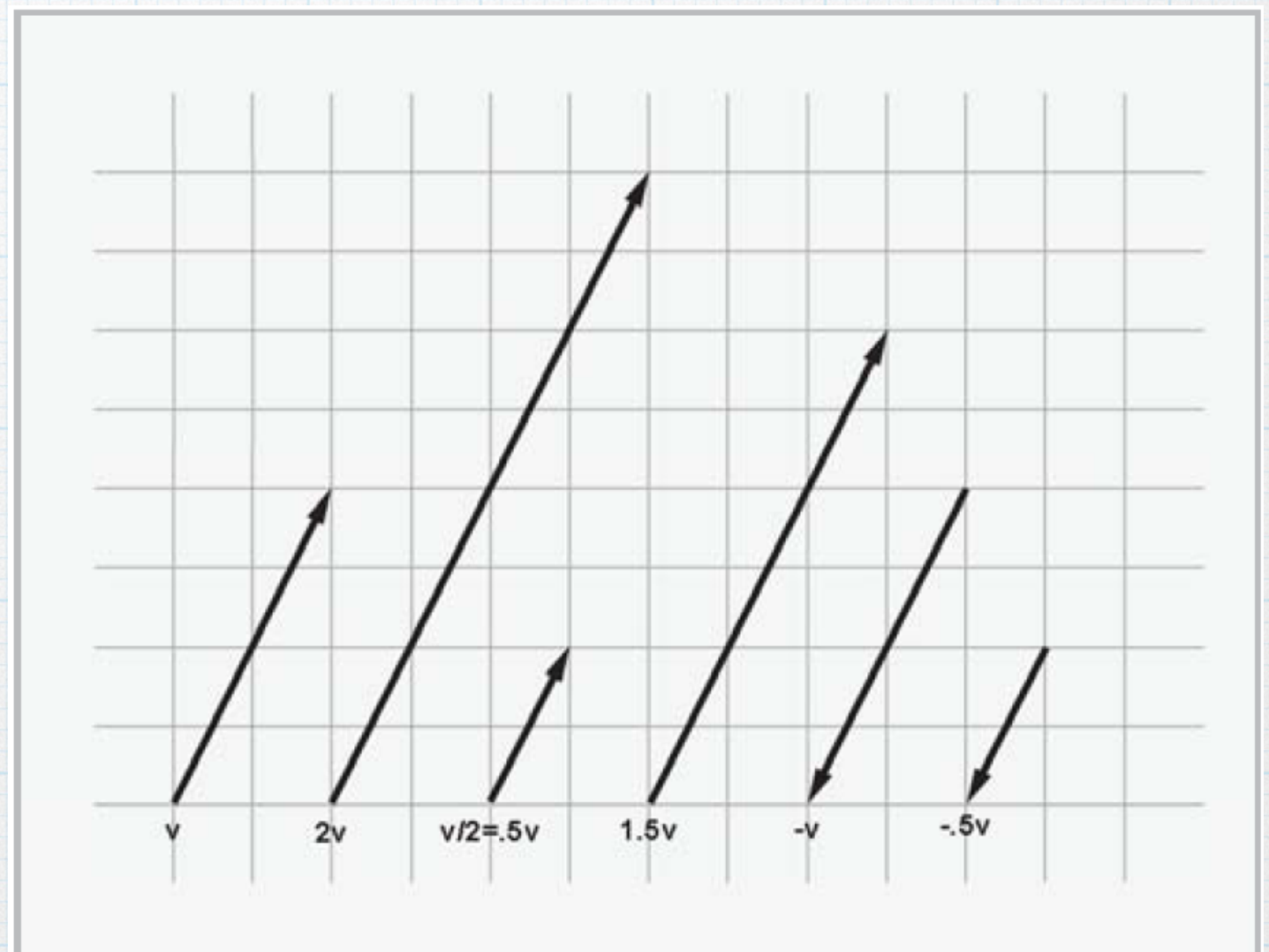
- $v \div k = (1 \div k) * v;$

- A multiplicação tem precedência sobre somar ou subtrair vetores. $3a+b = (3a)+b$, não $3(a+b)$;

Multiplicação por um escalar

Geometricamente, multiplicar o vetor por um escalar k significa aumentar ou diminuir seu tamanho em k vezes;

O exemplo ao lado mostra o mesmo vetor multiplicado por diferentes escalares.



Multiplicação por um escalar

```
void mult(float n) {  
    x = x * n;  
    y = y * n;  
}
```

```
void div(float n) {  
    x = x / n;  
    y = y / n;  
}
```


Negação de Vetores

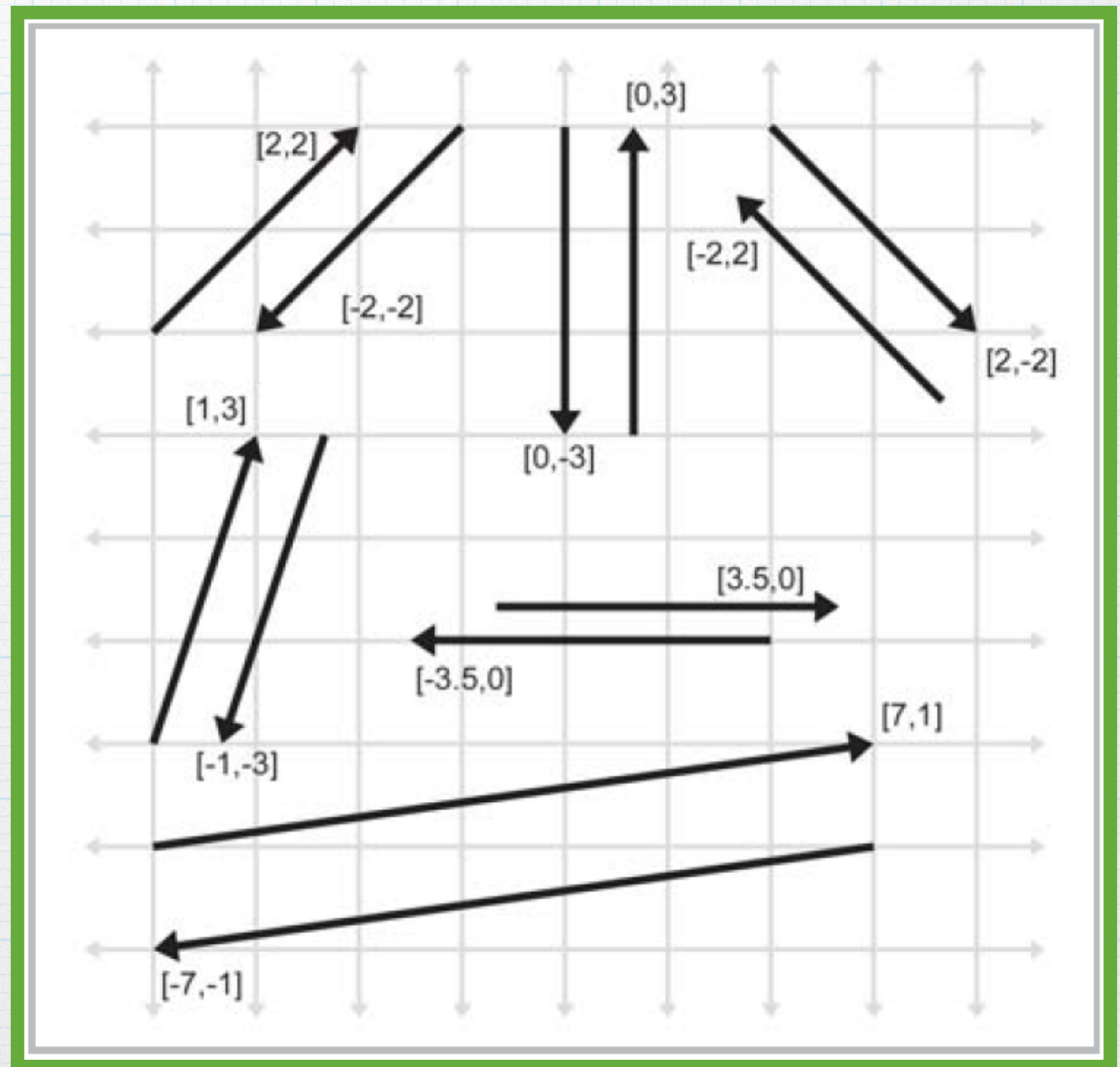
- A negação de um vetor x , é um vetor y tal que $x + y = 0$;
- Para negar um vetor, simplesmente invertemos o sinal de todos os componentes do vetor;
- Por exemplo: $-[-3 \ 1 \ 1 \ 0] = [3 \ -1 \ -1 \ 0]$;
- A negação gera um vetor que tem mesmo tamanho, direção, mas sentido oposto;

Negação de Vetores

A figura mostra exemplos de vetores e suas negativas;

Lembre-se que a posição dos vetores é irrelevante.

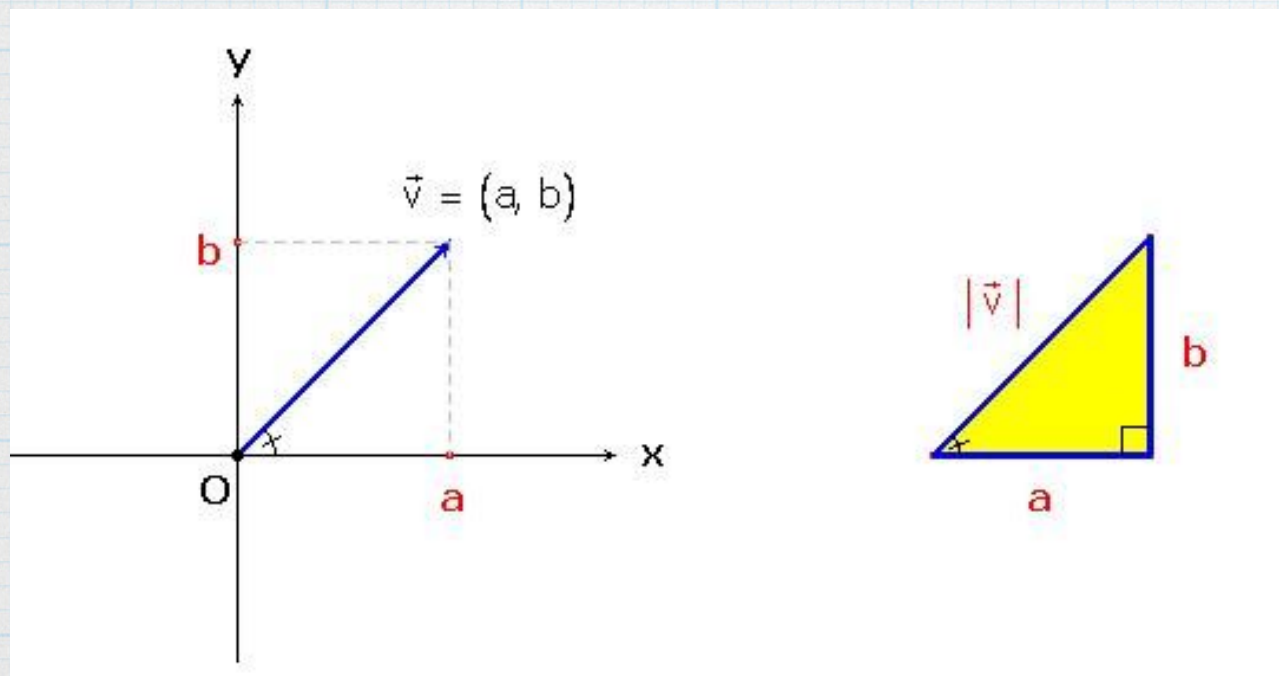
A negação de vetores pode ser vista como multiplicação pelo escalar -1 .



Tamanho de um vetor (Magnitude)

- Podemos calcular o tamanho do vetor a partir do teorema de Pitágoras;
- A fórmula pode ser extrapolada para qualquer dimensão:

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 + \dots + \mathbf{v}_{n-1}^2 + \mathbf{v}_n^2} \\ \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i^2} \end{aligned}$$

Tamanho de um vetor (Magnitude)


```
float mag() {  
    return sqrt(x*x + y*y);  
}
```


Normalização

- Sabemos que a distância entre dois pontos é dado pelo offset, e que o offset é descoberto pela subtração de dois vetores:
 - Se subtrairmos $a - b$, teremos um vetor offset com a direção apontando para a ;
 - Se subtrairmos $b - a$, teremos um vetor com o mesmo tamanho do anterior, mas de direção oposta.
- Mas, muitas vezes não estamos preocupados com a distância (offset), mas sim com apenas a direção (versor).

Normalização

- Nessas situações, é conveniente usarmos vetores unitários, ou seja, de tamanho 1;
- Esses vetores respondem perguntas do tipo: “Para que lado estou virado?”
- Criamos vetores unitários dividindo o vetor pelo seu tamanho:

$$|\vec{u}| = \left| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = 1$$


$$\vec{v} \neq 0$$

Normalização

- Geometricamente, em 2D, o vetor normalizado é aquele que sua ponta termina num círculo de raio 1:

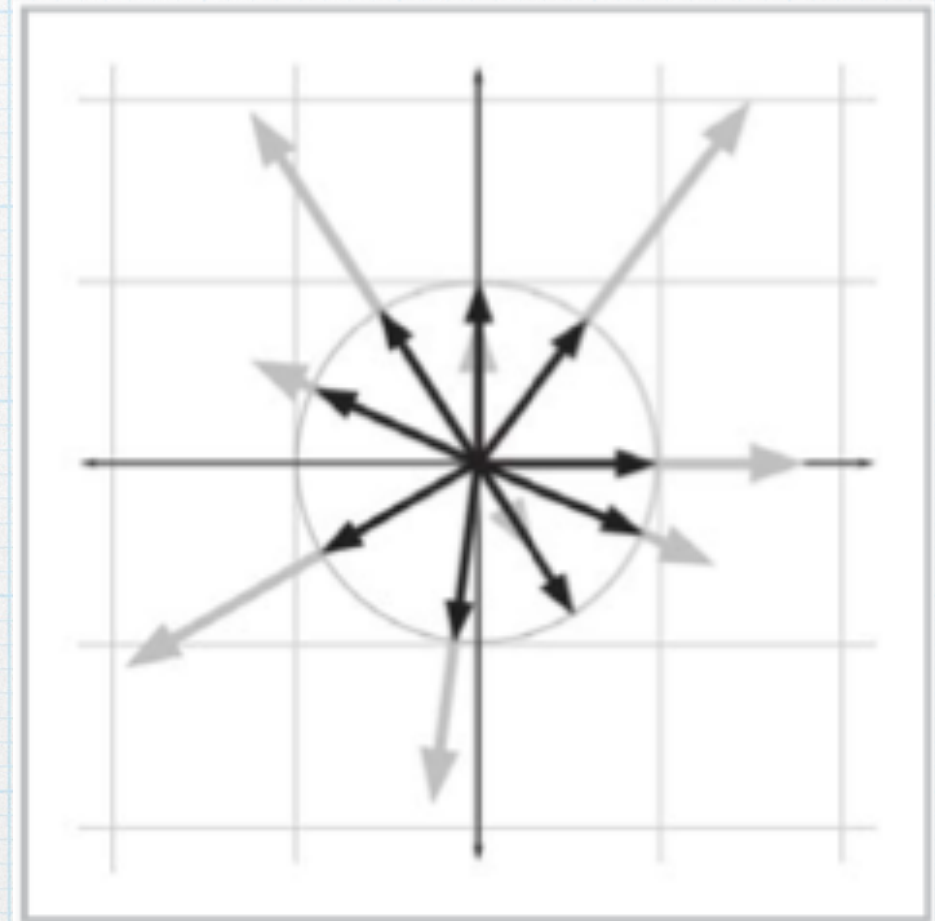
- Lembra que o seno e o cosseno possuem valores unitários devido à divisão do cateto pela hipotenusa?

- Em 3D, numa esfera;

- O vetor zero não pode ser normalizado, já que não tem direção;

- Uma das utilidades de um vetor unitário é forçar o tamanho do vetor;

- Transformamos ele em unitário e o multiplicamos pelo tamanho desejado.



Normalização - Exemplo

$$\frac{[12 \quad -5]}{\|[12 \quad -5]\|} = \frac{[12 \quad -5]}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}}$$

$$= \frac{[12 \quad -5]}{\sqrt{169}} = \frac{[12 \quad -5]}{13}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12}{13} & \frac{-5}{13} \end{bmatrix} \approx [0,923 \quad -0,385]$$

Normalização

```
void normalize() {  
    float m = mag();  
    if (m != 0) {  
        div(m);  
    }  
}
```


Distância entre dois vetores

```
float dist(PVector v){  
    PVector r = PVector.sub(this,v);  
    return r.mag();  
}
```

- Perceba que a ordem da subtração não altera o resultado do tamanho.

Vetor nulo

- Para um dado conjunto, chamamos de **identidade somatória** o elemento x , tal que: $x + y = y$;
- Para um vetor de uma dimensão particular, chamamos de vetor zero um vetor que tem 0 em todas as suas dimensões, sendo ele a identidade somatória dos vetores;
- O vetor zero é importante pois **ele é o único vetor que não tem tamanho ou direção**. Na verdade, ele representa a ausência de deslocamento;
- Cuidado: Algumas operações de vetores, como a normalização e o produto escalar, envolvem divisão pelo tamanho (ou seja, divisão por 0).

Ângulo entre dois vetores

```
float angleBetween(PVector v)
```


Produto escalar (Dot product)

O produto escalar é definido como a soma do produto dos componentes do vetor;

Usamos para ele a notação $a \cdot b$ (o que justifica o dot):

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n$$

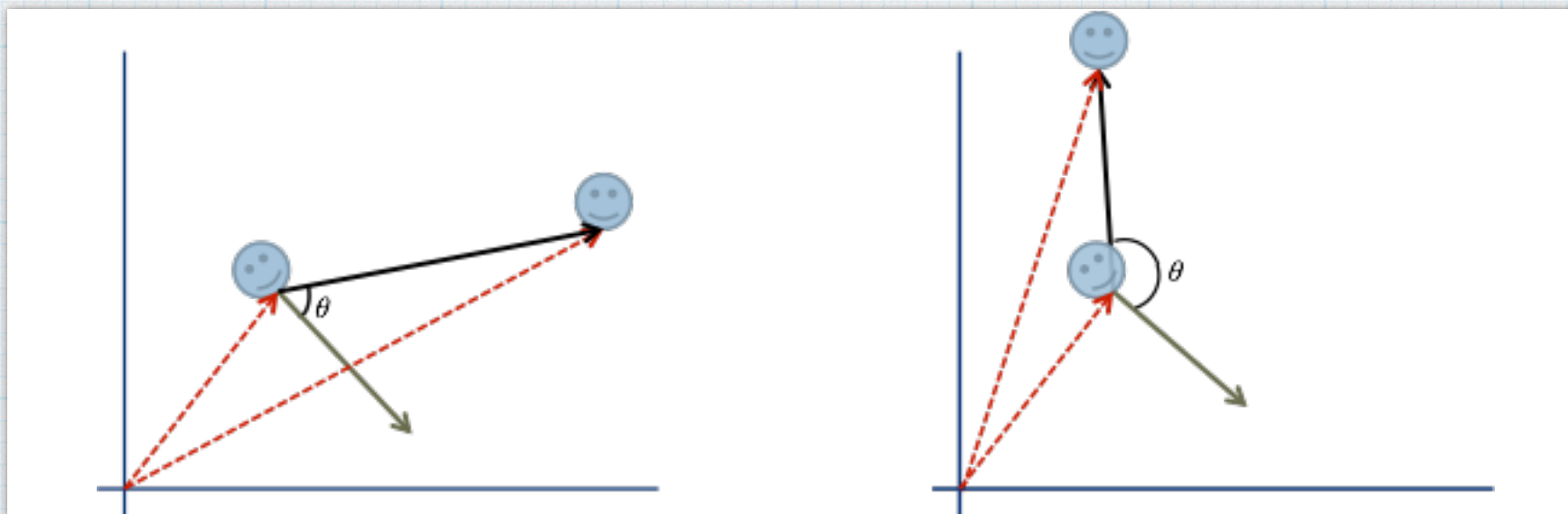
Ou, de maneira sucinta:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Produto escalar (Dot product)

Uma das utilidades do produto escalar é o cálculo de campos de visão (**fov - Field of View**);

O alcance da visão é chamado de Threshold, ângulo de visão ou limiar de visão:

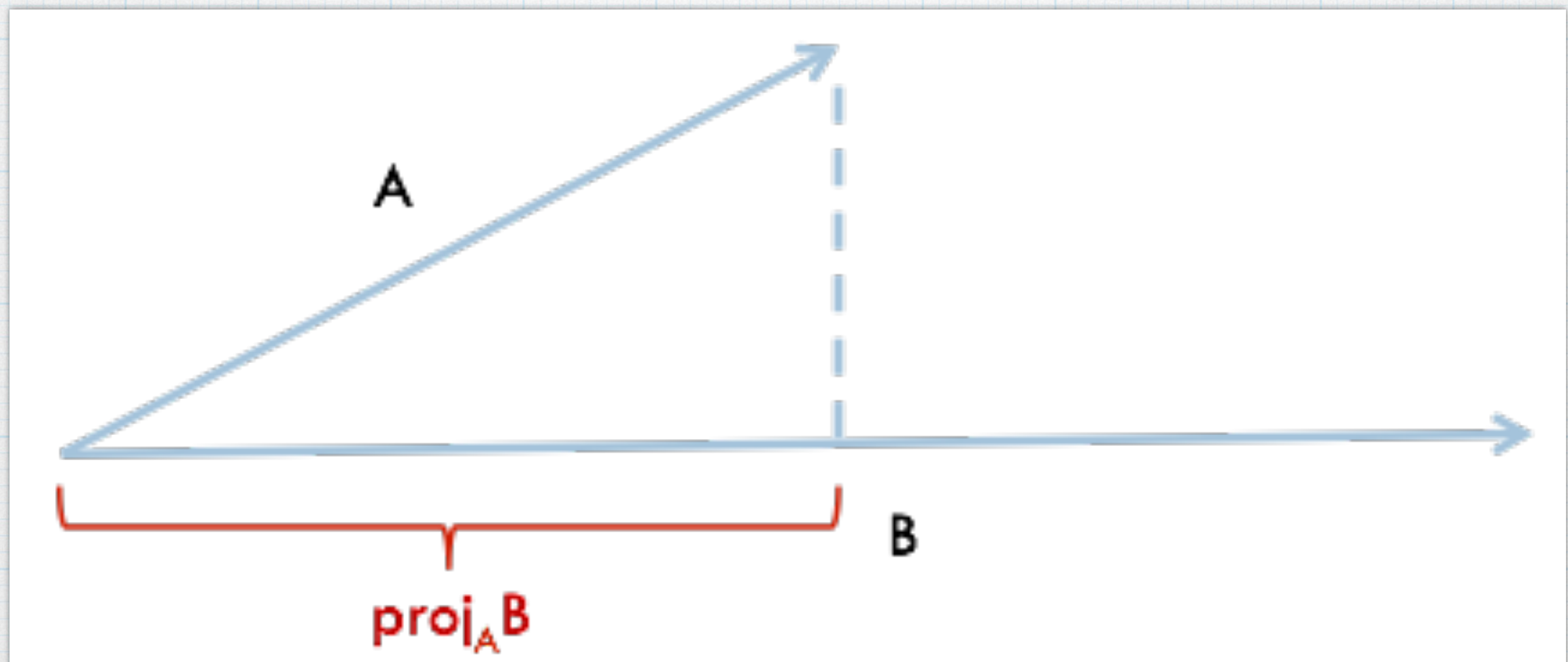


Na segunda figura, temos $a \cdot b < 0$. Geralmente isso já representa alguém fora da visão ($\theta > 90^\circ$, se o threshold for igual a 90°);

Na primeira, ainda temos que testar se o ângulo θ está dentro do campo de visão.

Produto escalar (Dot product)

- Outra importante propriedade do produto escalar é que seu valor representa a distância do vetor A projetado sobre o vetor B ($\cos(\alpha) \cdot |A| \cdot |B|$):



Produto escalar (Dot product)

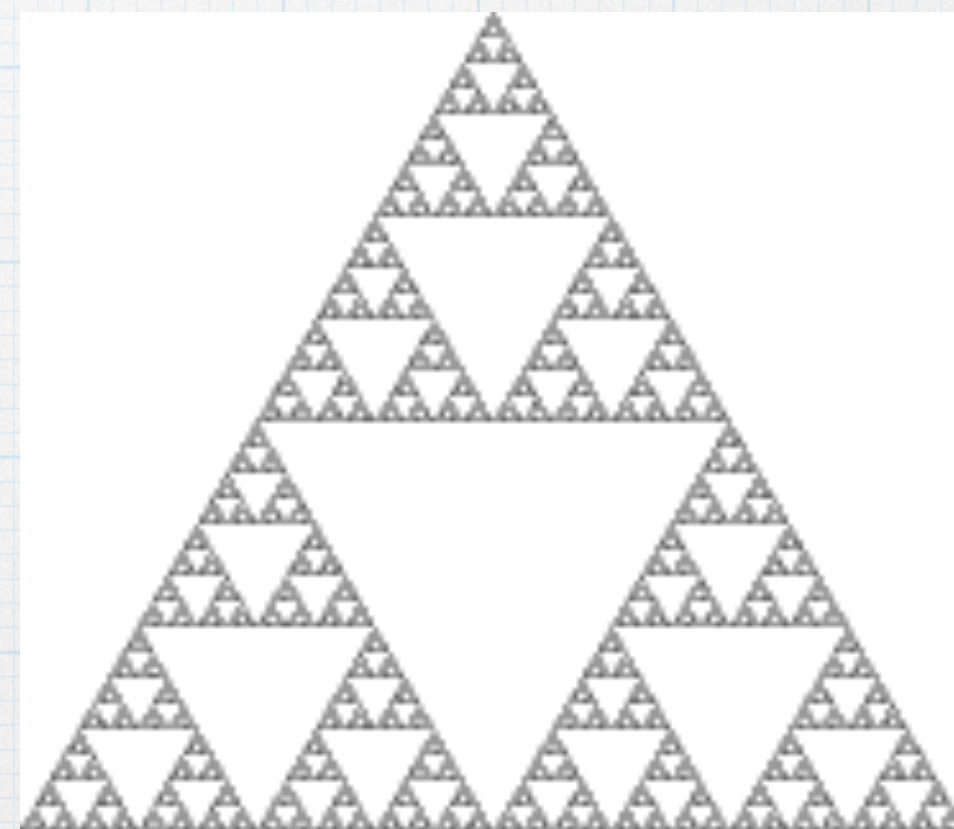
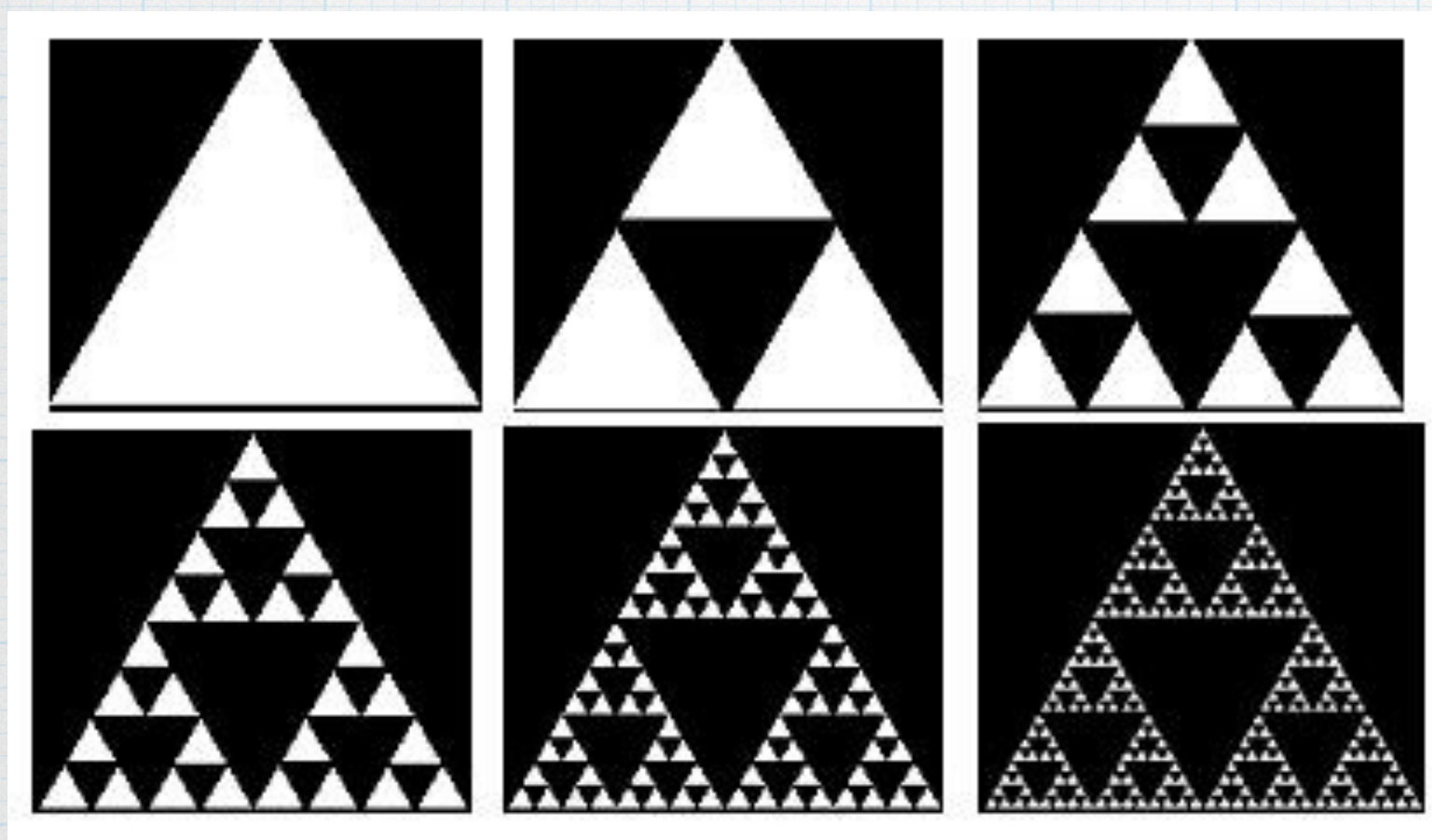
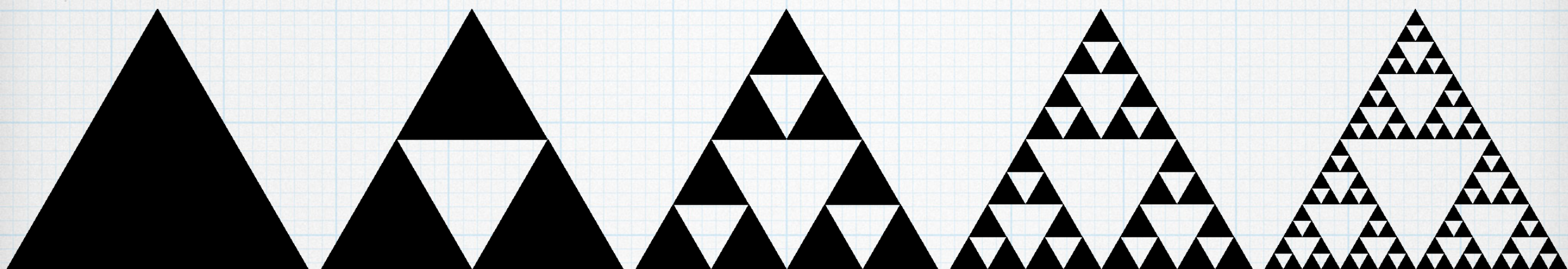
```
float dot(PVector v)
```


Rotação de Vetores

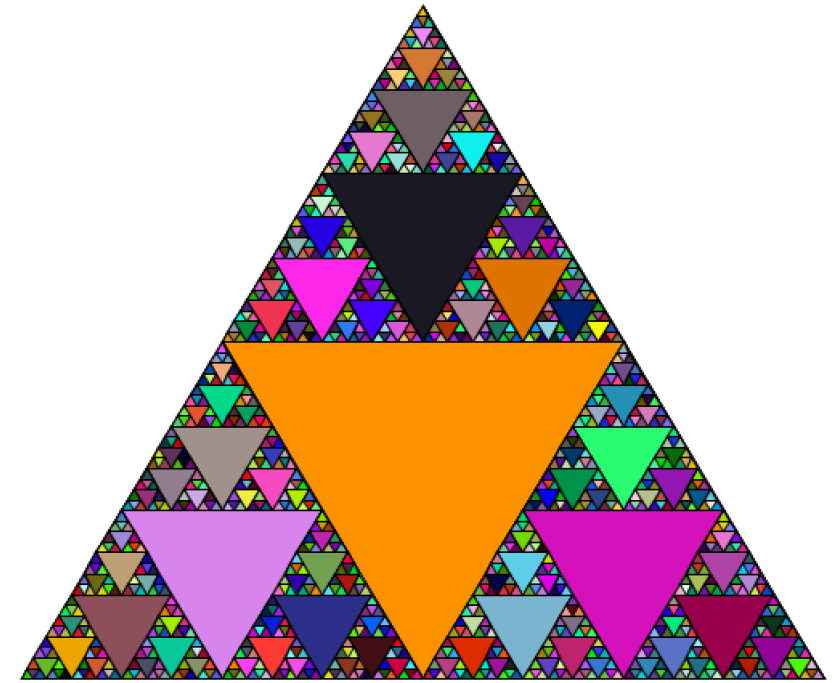
- Outra operação interessante é a rotação de um vetor. Com um pouco de trigonometria, a rotação pode ser descrita da seguinte forma:

```
float rotate(float angle)
```

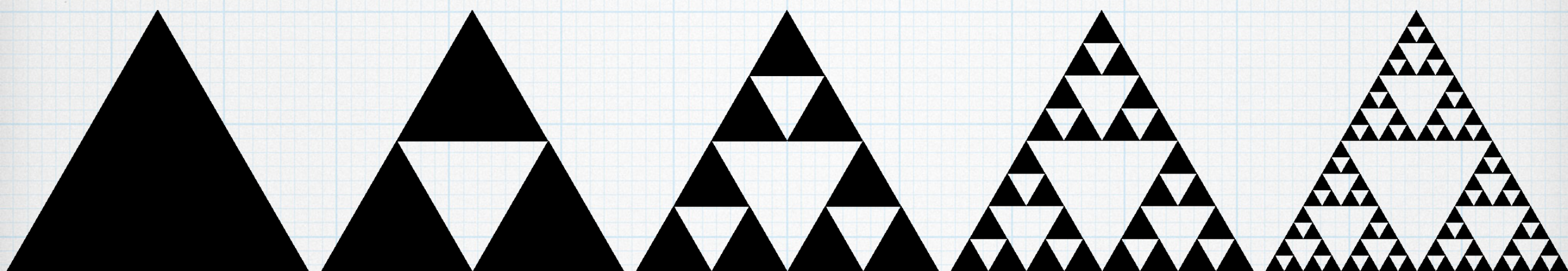
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} newX \\ newY \end{bmatrix}$$



Exercício 1 - Triângulo de Sierpinsky



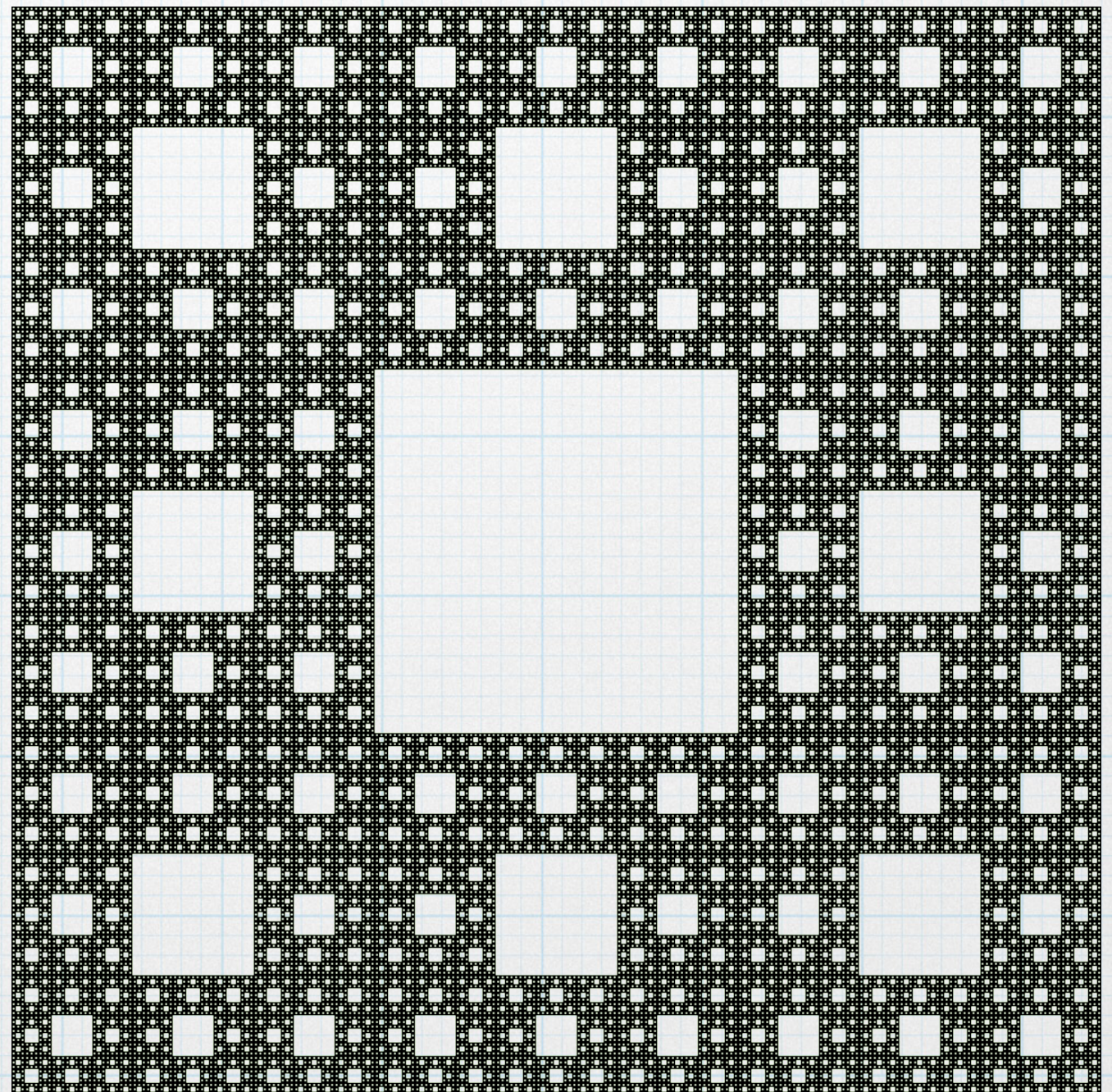
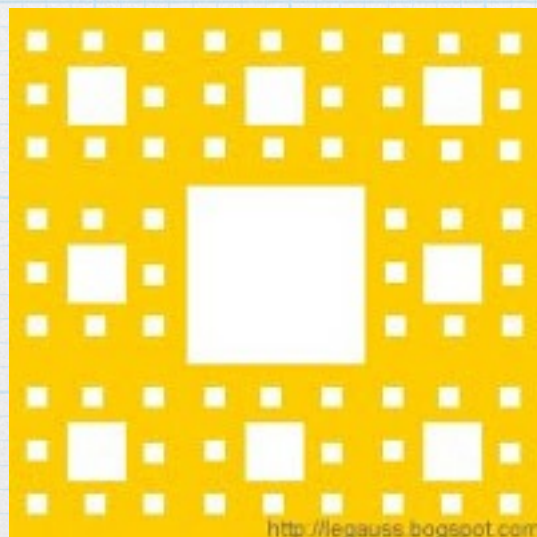
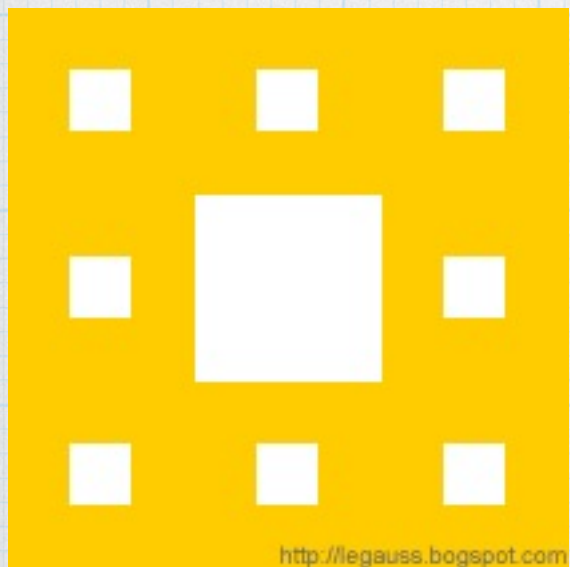
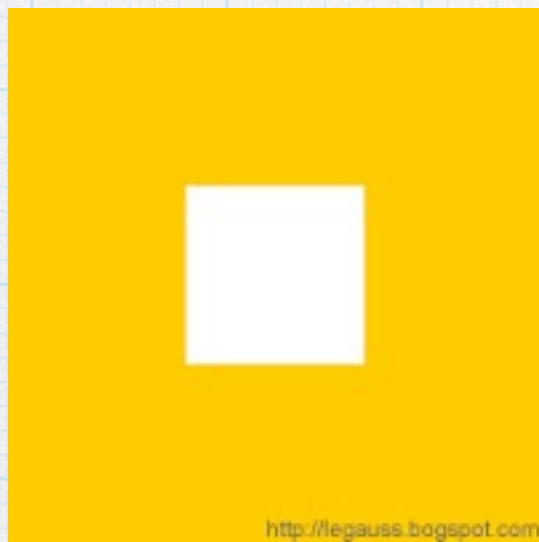
- * Faça o algoritmo do triangulo de Sierpinsky
- * Para a resolução do exercício é obrigatório o uso de vetores.




1. Comece com qualquer triângulo em um plano. O triângulo de Sierpinski utilizava um triângulo equilátero com a base paralela ao eixo horizontal.
2. Encolha o triângulo pela metade (cada lado deve ter metade do tamanho original), faça três cópias, e posicione cada triângulo de maneira que encoste nos outros dois em um canto.
3. Repita o passo 2 para cada figura obtida, indefinidamente (ver a partir da terceira figura).

Desafio

Desenhar uma versão com quadrados (o carpete de Sierpinsky):



Referência

 O uso de vetores nos jogos - Vinícius G.
Mendonça.