Simulação Física para Jogos

Mark Joselli
mark.joselli@pucpr.br

Sumário

* Objetivos de hoje
* Grandezas físicas
* Vetores
* Operações com vetores
* Exercicio

Aula Passada

* Apresentação da disciplina
* Introdução a física de jogos

Objetivos de Hoje

* Revisão de vetores

O que são grandezas físicas?

- Grandezas físicas são todos os valores passíveis de medição;
- Ex:
  - Temperatura (quantitativo - numérico)
    VS
    Saudade (qualitativo - muito, pouco, bastante);
- Uma grandeza física sempre é acompanhada de um número e uma medida.

Grandezas Escalares e Vetoriais

- Algumas grandezas, são representadas por um simples número, dentro de uma escala qualquer;
- Essas são as **Grandezas Escalares**. Ex:
    - A massa e a distância são grandezas escalares pois, se alguém menciona 3 Kg ou 5 metros, você entende o que esses valores significam;

Grandezas Escalares e Vetoriais

- Outras grandezas não são tão fáceis de descrever assim:
  - Como descrever a direção que o seu corpo se move?
  - Como entender a força do vento?
- Além de uma intensidade, a força do vento também tem uma direção. Por isso, ela não é simplesmente uma Grandeza Escalar, mas sim, uma Grandeza Vetorial;
- Ex: Velocidade é uma grandeza vetorial pois, quando alguém menciona 5Km/h, para entendermos a velocidade precisamos ainda saber se é na horizontal ou na vertical, se é para a direita ou para a esquerda e para cima ou para baixo;
- O mesmo acontece com a Força (em Newton).

Vetores

- Vetores representam na essência uma diferença relativa entre coisas;
- São propriedades dos vetores:
  - Um tamanho: também chamado de magnitude ou intensidade (10, 15, 30, ...);
  - Uma direção: Que indica a "inclinação" do vetor no espaço (horizontal, vertical, inclinado);
  - E um sentido: Que indica para onde o vetor aponta (esquerda, direita, cima, baixo).
- Notem que posição não é uma propriedade dos vetores:
  - A posição inicial de um vetor é sempre **relativa** a algum sistema de coordenadas.

Vetores

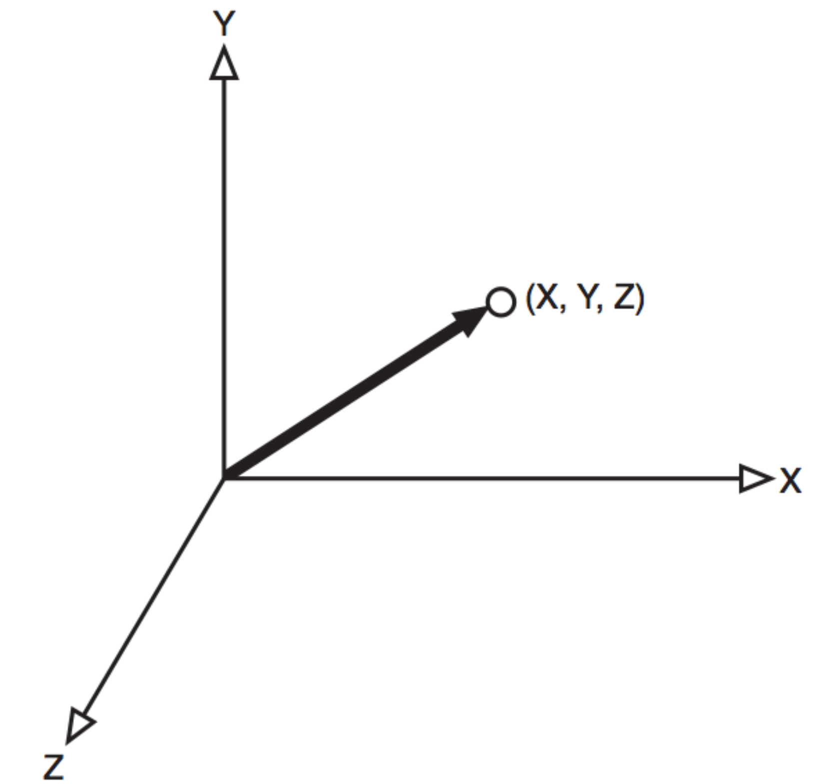
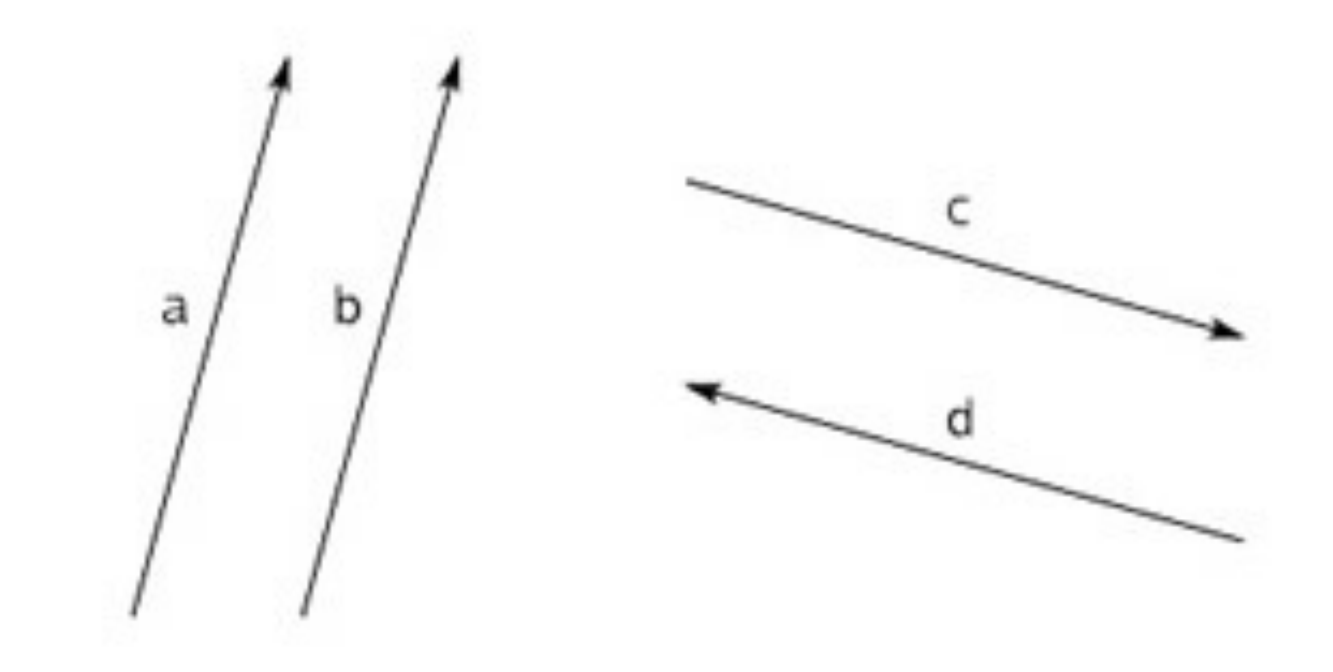
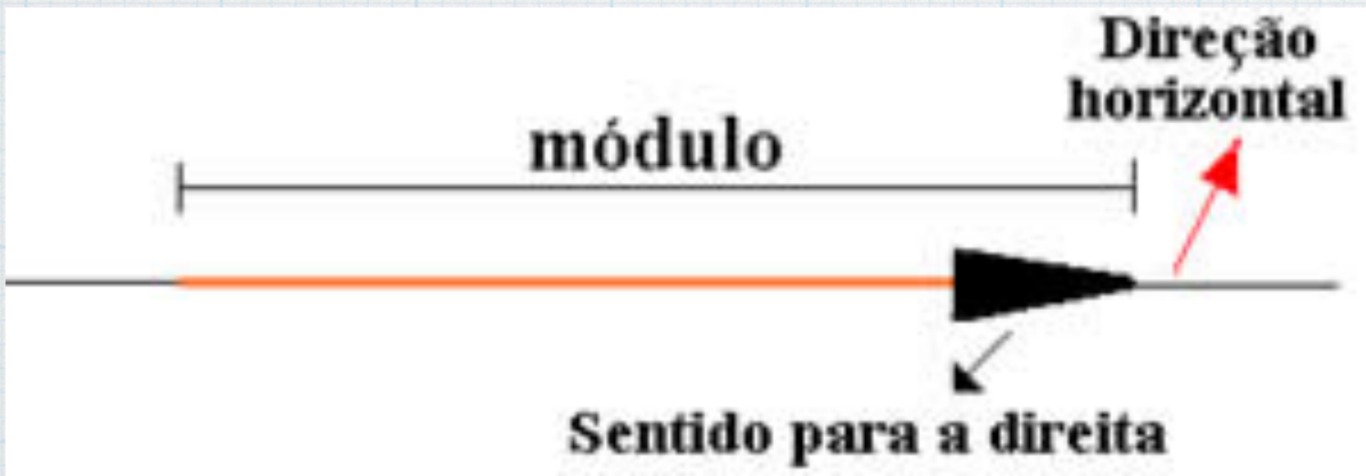


FIGURE 4.1 A point in space is both a vertex and a vector.

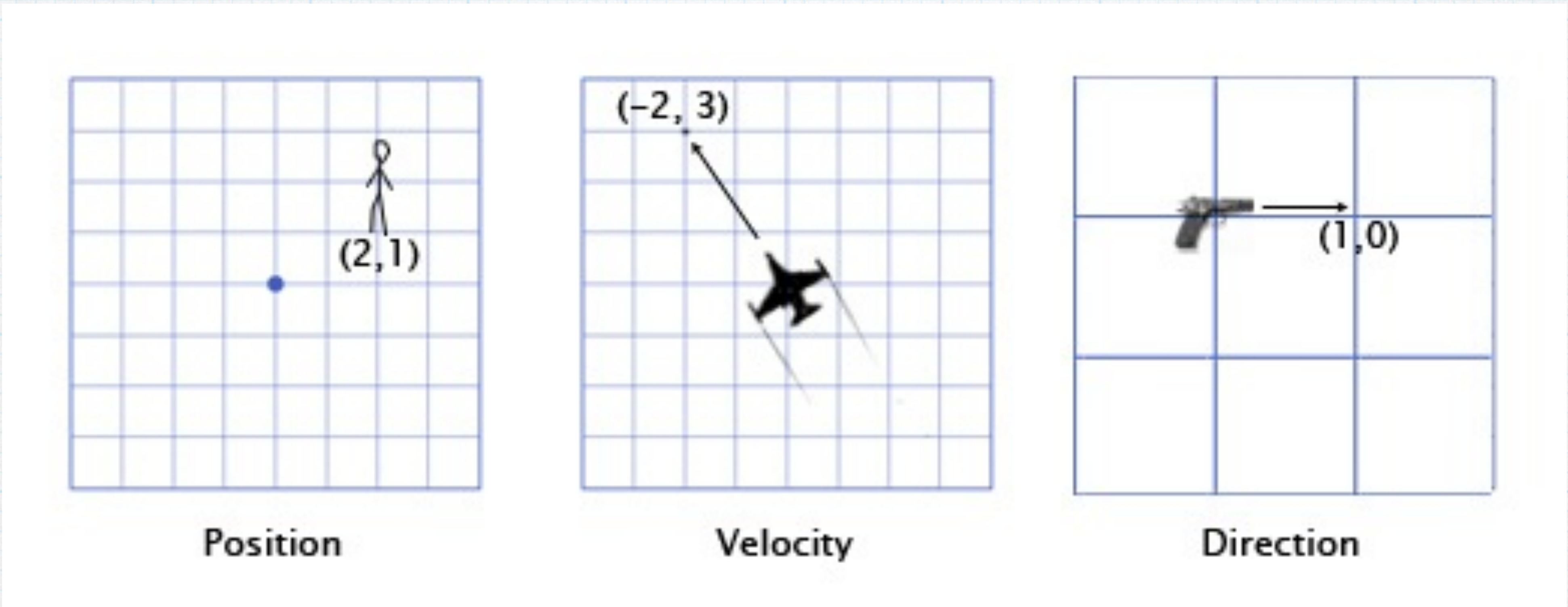


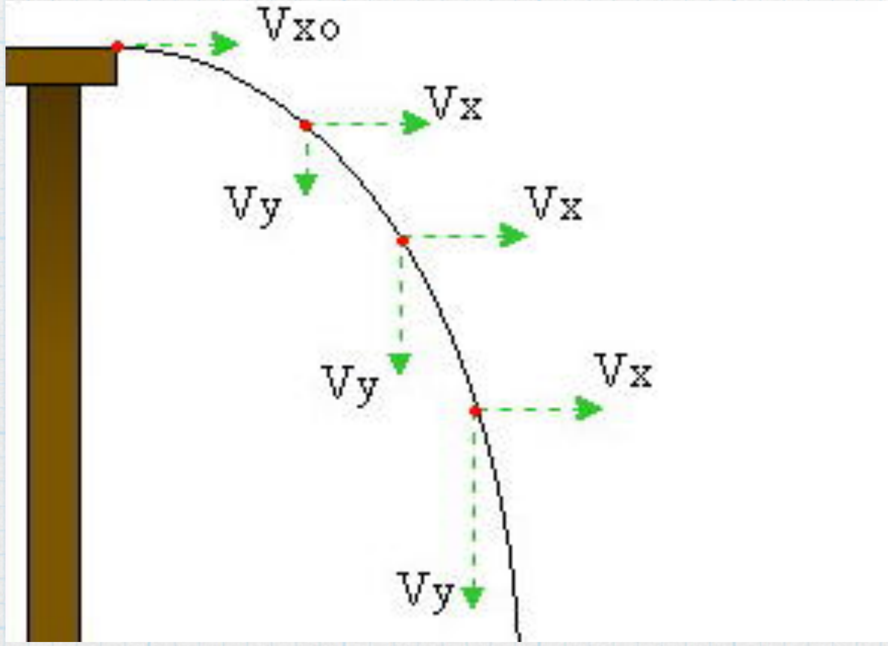


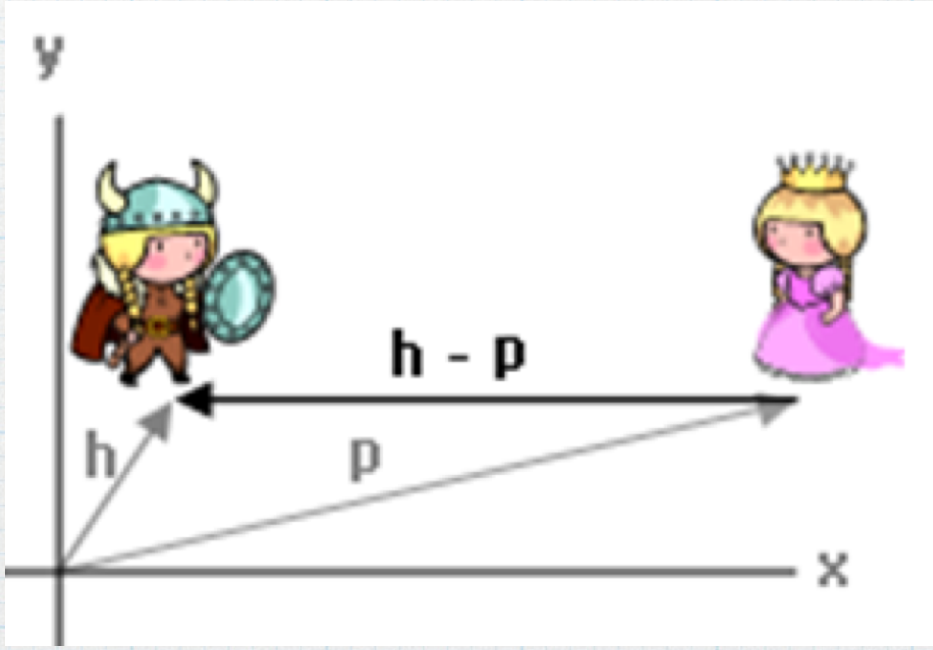
Representação matemática de um vetor

- Vetores representam deslocamentos com sinal em cada eixo;
- Portanto, em 2 dimensões teremos um valor para x e y; Em 3, para x, y e z; Em 4, x, y, z e w;
- Graficamente, representamos vetores como uma flecha;
- A posição da flecha não importa, desde que sua direção, tamanho e sentido sejam mantidos (lembrem-se que vetores não possuem posição no espaço).

Vetores não possuem posição no espaço





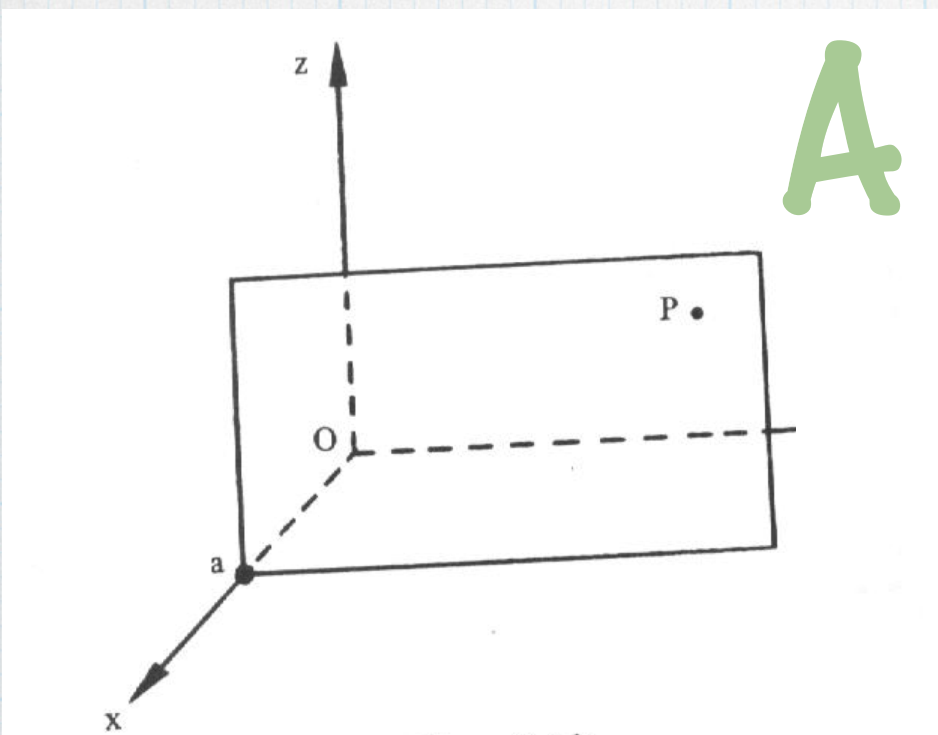


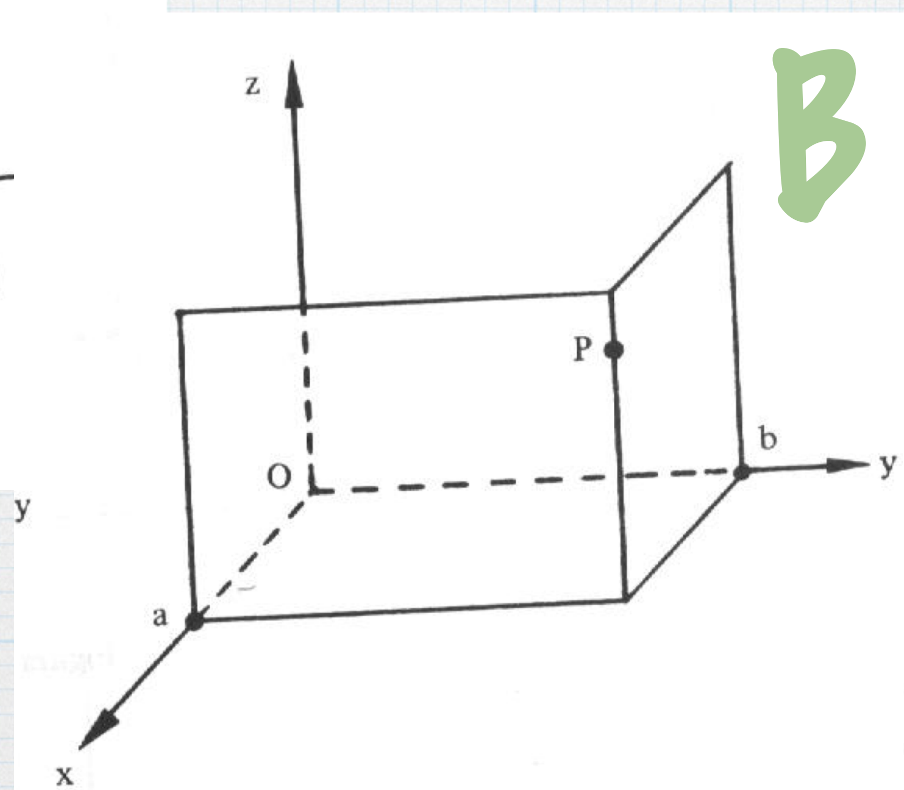
Vetores como uma sequência de deslocamentos

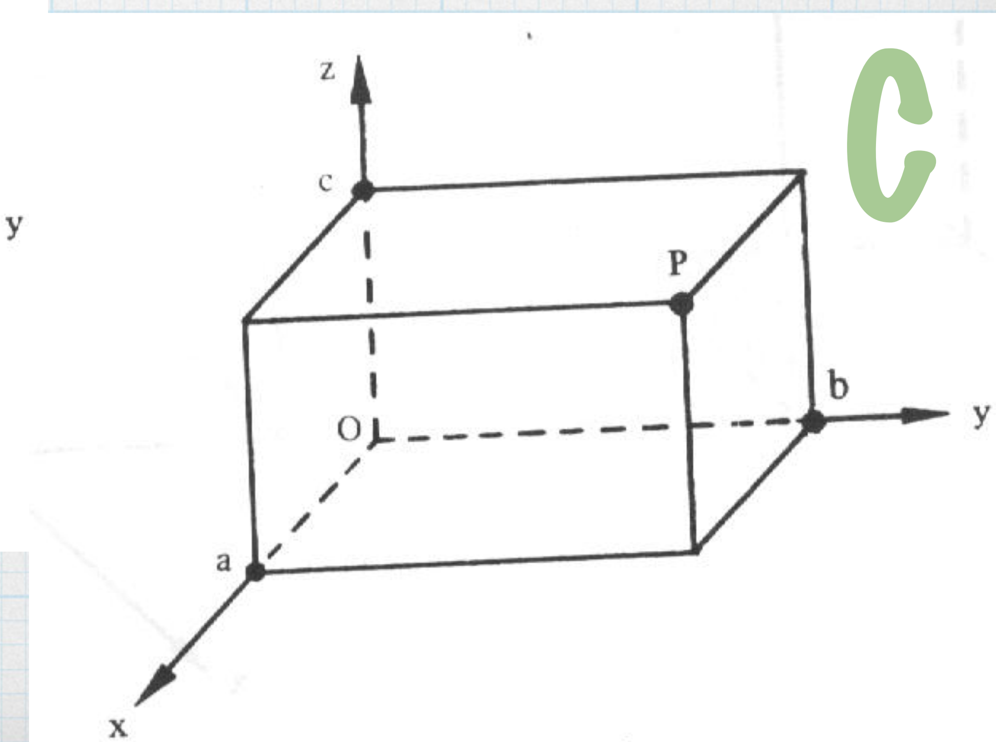
- No sistema de coordenadas retangular, uma forma conveniente de pensar em vetores é quebrá-los em seus 3 componentes, alinhados com os eixos;
- Por exemplo, o vetor [1 -3 4] representa um deslocamento, mas também podemos pensar no deslocamento que se faz ao mover uma unidade para direita, três para baixo, e quatro para frente;
- A ordem que realizamos esses passos não é importante.
- Por isso, costumam-se chamar a intensidade de um vetor em cada eixo de componentes do vetor.

Vetores como uma intersecção entre planos

- Um vetor pode ser representado pelo ponto fatiado por todos os eixos ao mesmo tempo:







Posições Relativas

- Um vetor também pode ser encarado como uma posição relativa;
- Isto é, dado um ponto qualquer, podemos entender o vetor como uma diretriz para chegar num próximo ponto;
- Agora, pergunta-se:
  - O que seria uma posição absoluta?
  - Isso realmente existe?
  - É possível definir uma posição, sem que ela seja relativa a absolutamente nada?

Relação entre pontos e vetores

- Sim, posições absolutas existem:
  - São os chamados pontos!
- Entretanto, é impossível descrever onde essa posição está sem algum tipo de referência:
  - Essa referência é o Sistema de Coordenadas;

Relação entre pontos e vetores

- Os pontos, portanto, possuem coordenadas relativas a origem do Sistema de Coordenadas;
- Por isso, podemos usar vetores para representar pontos;
- Assim, podemos concluir que todo um Sistema de Coordenadas que não é relativo a nenhum outro possui um posicionamento absoluto;
- No CSS, o conceito de posicionamento relativo e absoluto é bem definido.

Um ponto pode ser representado como um vetor, mas não o contrário

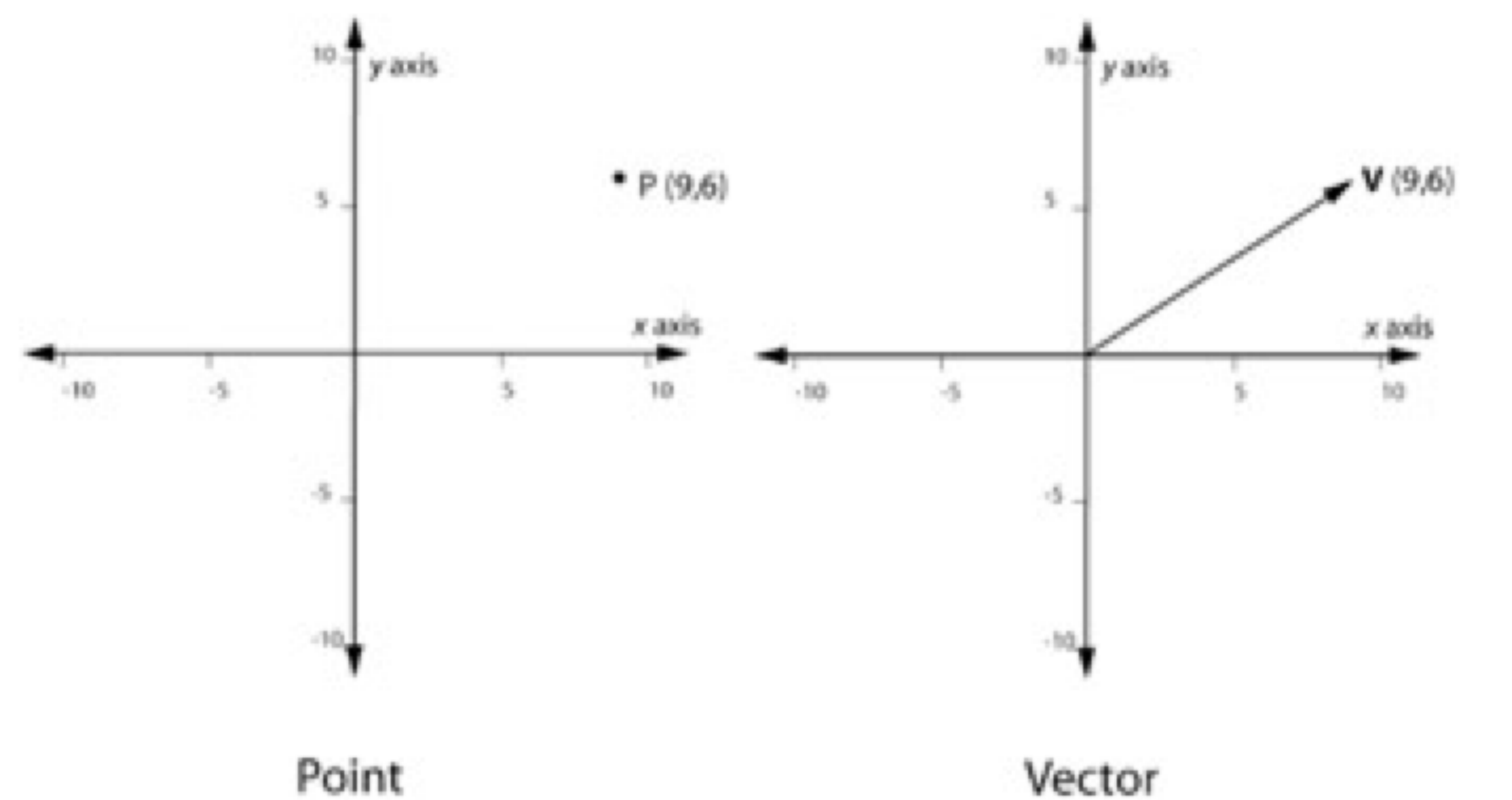


Figure 1.16: A point, P, and a vector, V

Posições relativas e o movimento dos corpos

- No estudo dos movimentos relativos são considerados via de regra dois referenciais:
  - Um referencial supostamente fixo, denominado de **referencial fixo**;
  - E um outro que se movimente em relação a ele, denominado de **referencial móvel**.

Posições relativas e o movimento dos corpos

- O movimento do corpo em relação ao referencial fixo é denominado de movimento absoluto:
  - Ex: Movimento do barco em relação à árvore da costa.
- O movimento do corpo em relação ao referencial móvel é denominado de movimento relativo:
  - Ex: Movimento do barco em relação à água.
- O movimento do referencial móvel em relação ao referencial fixo é denominado de movimento de arrastamento:
  - Ex: Movimento que a água aplica no barco.

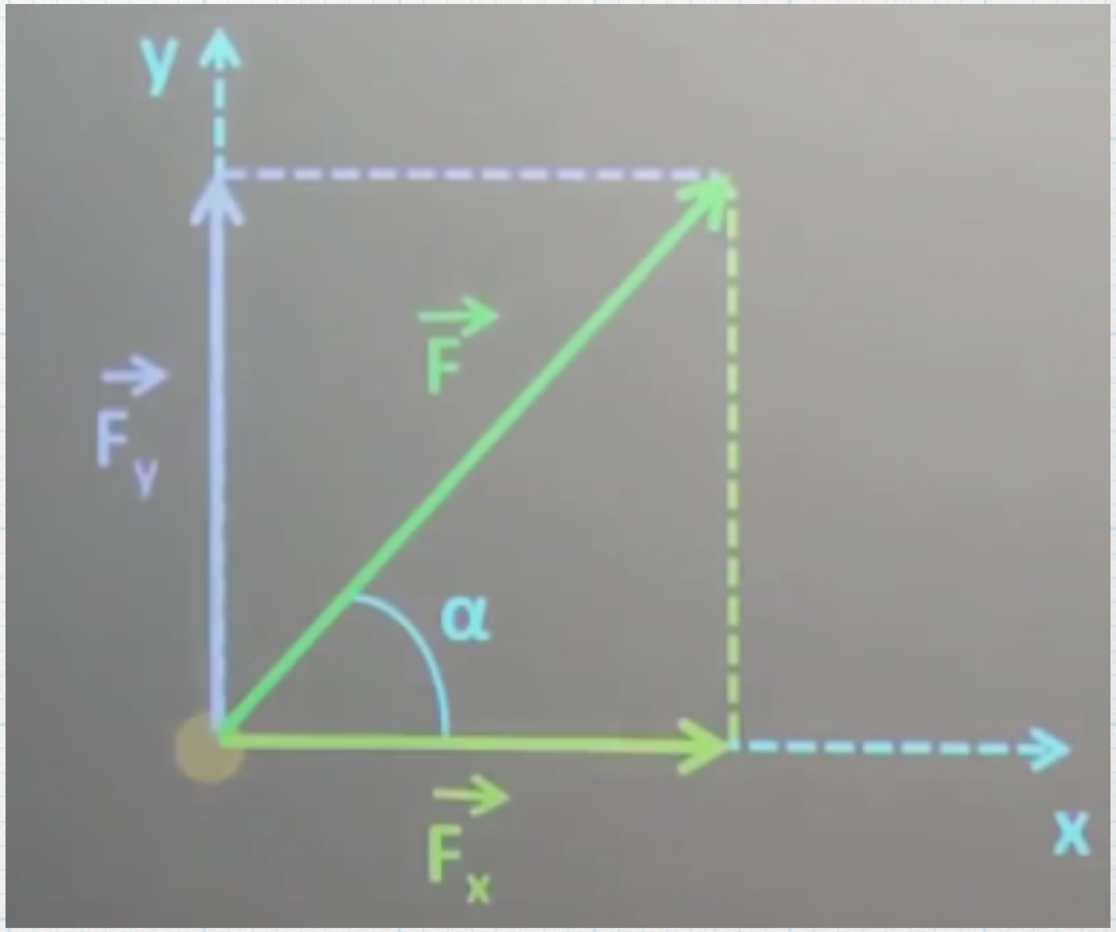
Posições relativas e o movimento dos corpos

- Exemplo:
  - Quando andamos dentro de um ônibus em movimento, podemos considerar a rua como referencial fixo e o ônibus como referencial móvel;
  - O nosso movimento em relação ao ônibus é o movimento relativo, e em relação à rua é o movimento absoluto. O movimento do ônibus em relação à rua é o movimento de arrastamento.

Vetores definidos por um tamanho e um ângulo

- Também podemos definir um vetor 2D através do seu tamanho e seu ângulo em relação ao eixo x;

- A esse formato damos o nome de Coordenada Polar, sendo esta definida sobre o Sistema de Coordenadas Polares;



Vetores no processing

Representando o vetor

```
class PVector {

  float x;
  float y;

  PVector(float x_, float y_) {
    x = x_;
    y = y_;
  }

}
```

Operação sobre vetores

- Até agora, discutimos apenas a definição matemática de vetores.
- Agora veremos as operações matemáticas sobre eles de duas formas:
  - Primeiro, a definição matemática da operação;
  - A interpretação geométrica dessa operação;
  - Os exemplos em Processing das operações.

Adição e Subtração de Vetores

- Nós podemos adicionar ou subtrair vetores, desde que sejam da mesma dimensão;
- Usamos a mesma notação que a soma de escalares:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_{n-1} + b_{n-1} \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Adição e Subtração de Vetores

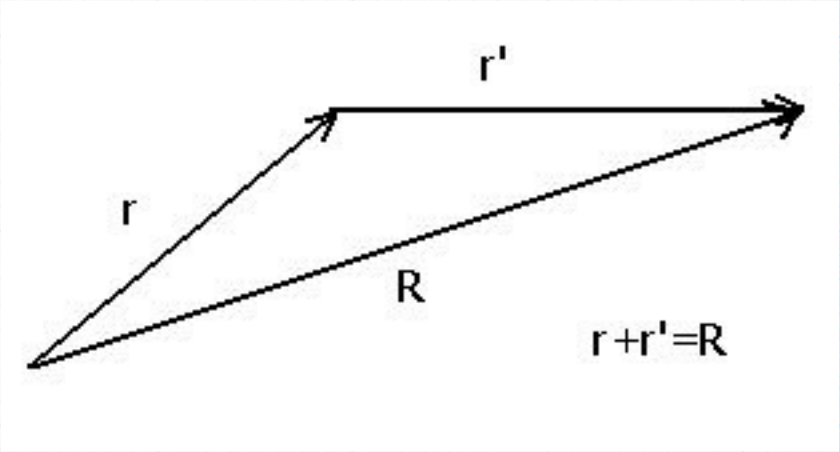
- A subtração pode ser usada como a soma da negação do segundo termo.
- Isto é: a – b = a + (–b):

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} + \left(- \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \cdots \\ a_{n-1} - b_{n-1} \\ a_n - b_n \end{bmatrix}$$

- Note que a subtração não é comutativa. Ou seja: a – b não é igual b – a.

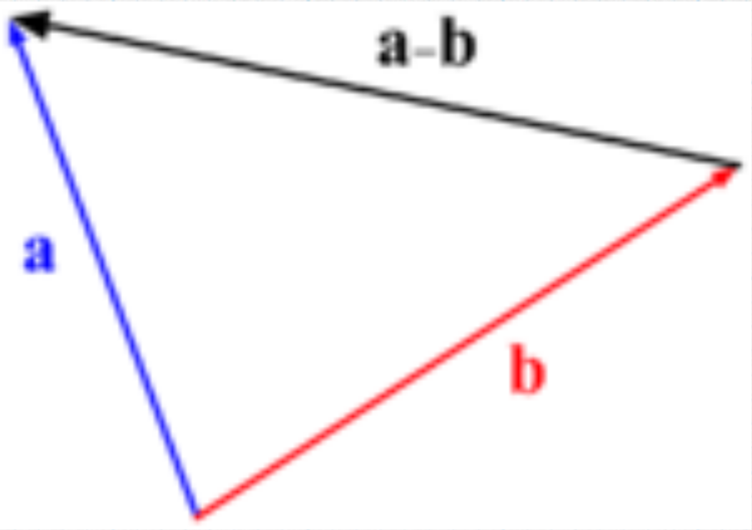
Adição e Subtração de Vetores

- Geometricamente, somamos a e b ligando a cabeça de a no rabo de b;



- Essa é chamada de "regra do polígono da adição de vetores";

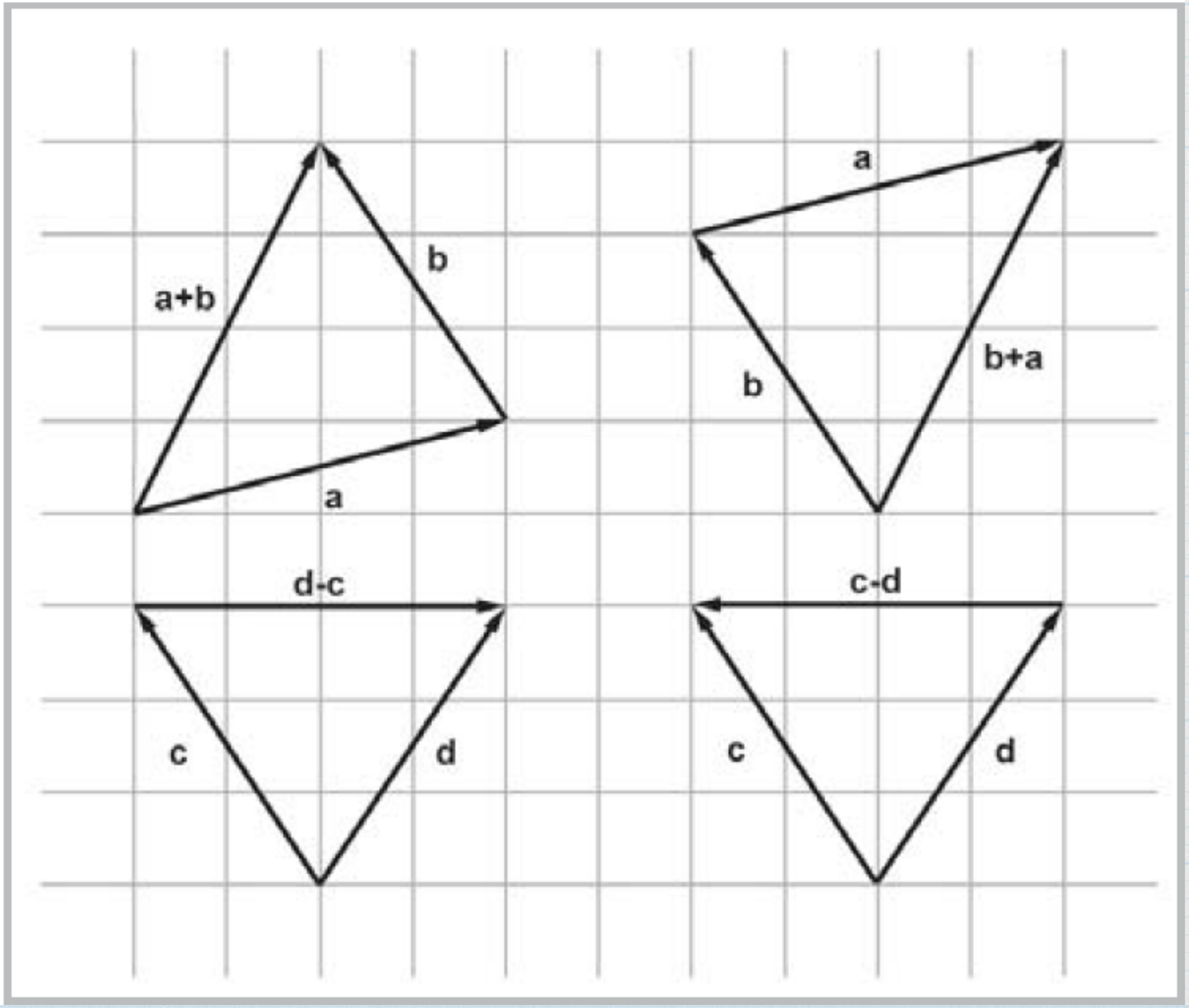
- Na subtração, ligamos as duas cabeças dos vetores;



- A ponta do vetor resultante apontará para o elemento que está sofrendo a subtração;

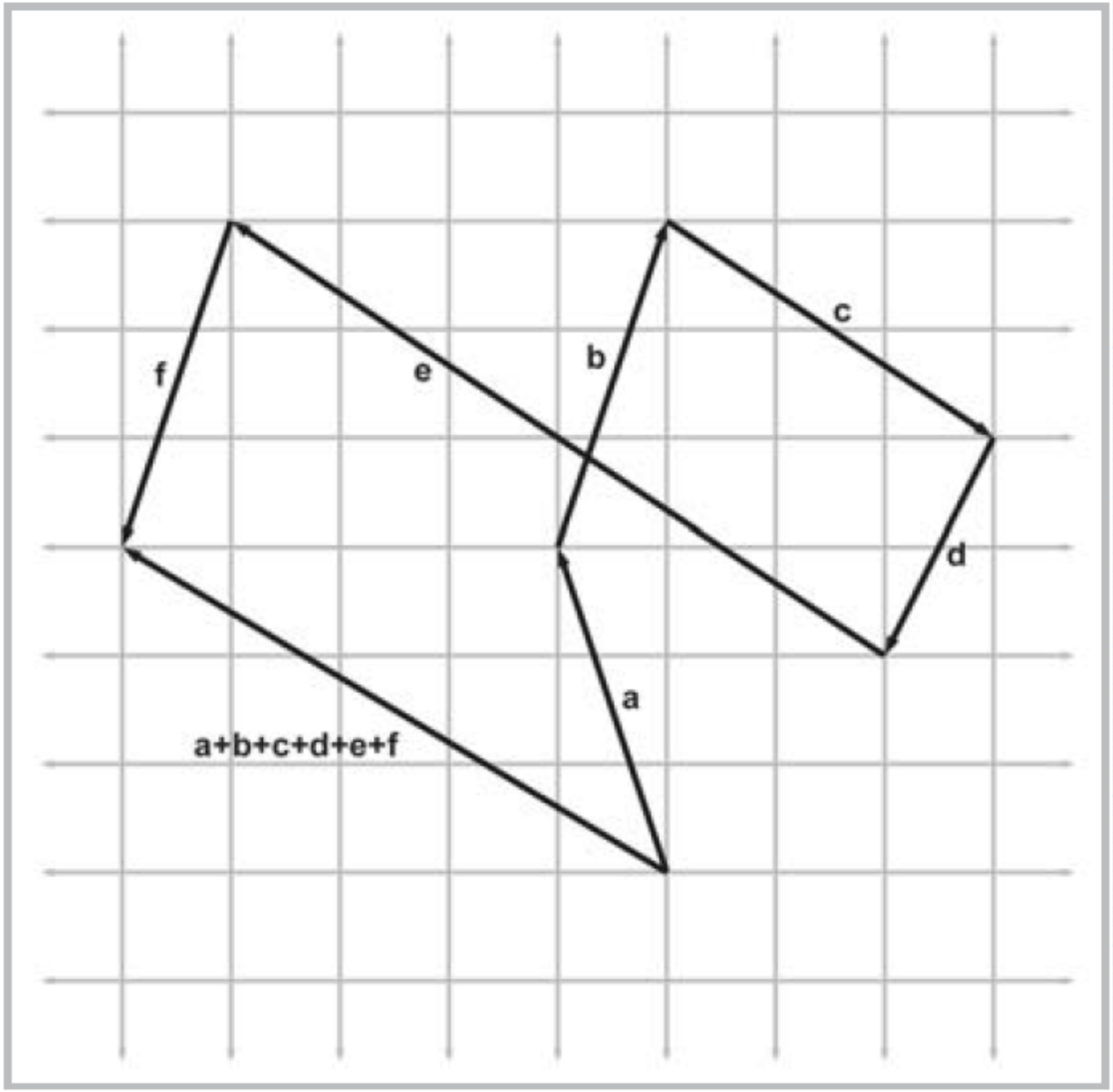
Adição e Subtração de Vetores

- Nela, inverter a ordem das operações resulta num vetor de sentido oposto;



Adição e Subtração de Vetores

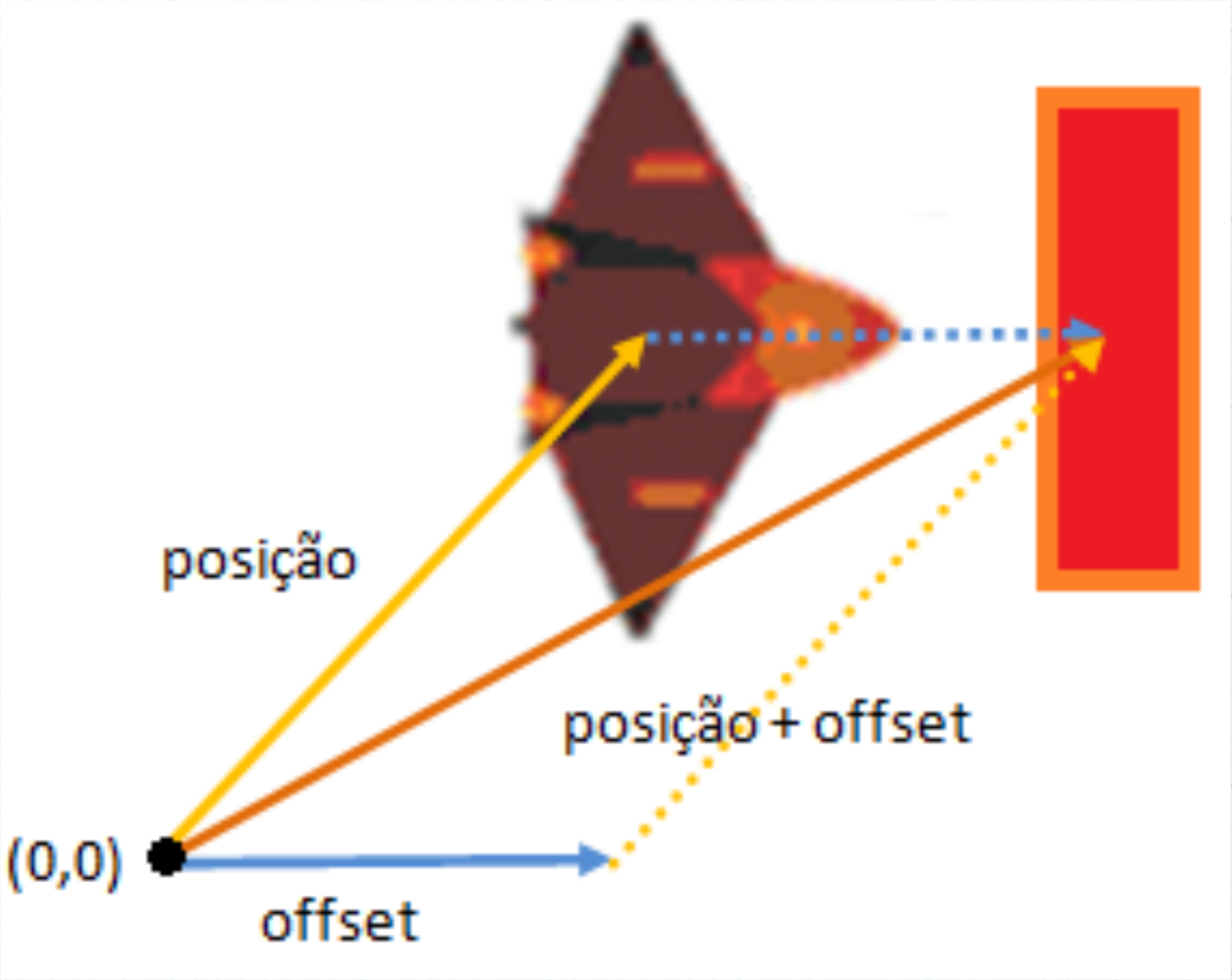
- Podemos estender a regra do polígono para mais de dois vetores;
- Um conjunto de vetores sendo aplicados ao mesmo tempo sobre um vetor normalmente é chamado de sistema de forças.



Soma de Vetores = offset

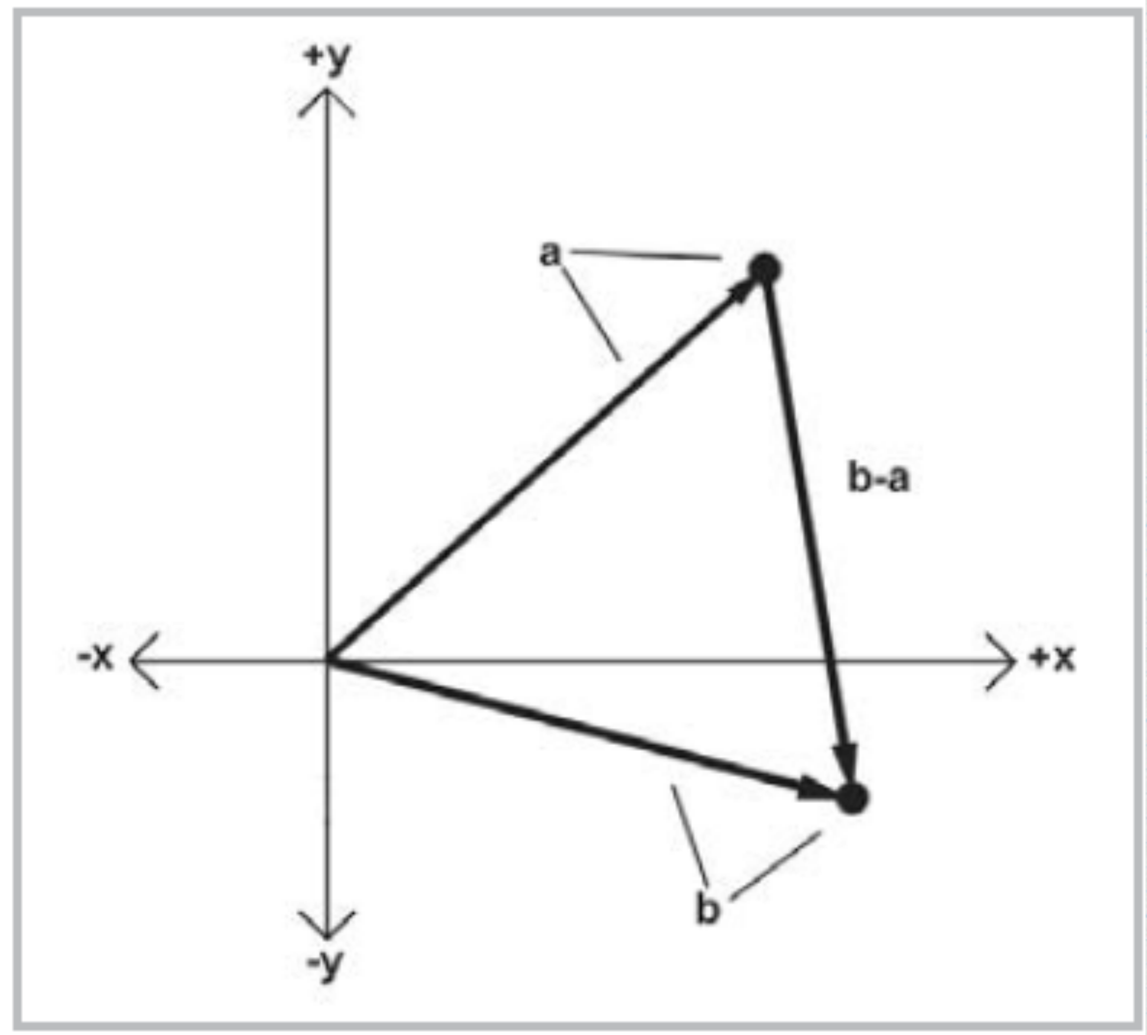
- **Um vetor sozinho pode representar a posição de um objeto no espaço:**
  - **Vimos que essa representação, se relacionada ao Sistema de Coordenadas do Mundo, também define o vetor como um ponto.**

- Um vetor também pode representar a distância de um objeto em relação a outro;
- Chamamos isso de offset;
- Se somarmos a posição de um objeto com o offset, automaticamente obtemos a posição do outro objeto:



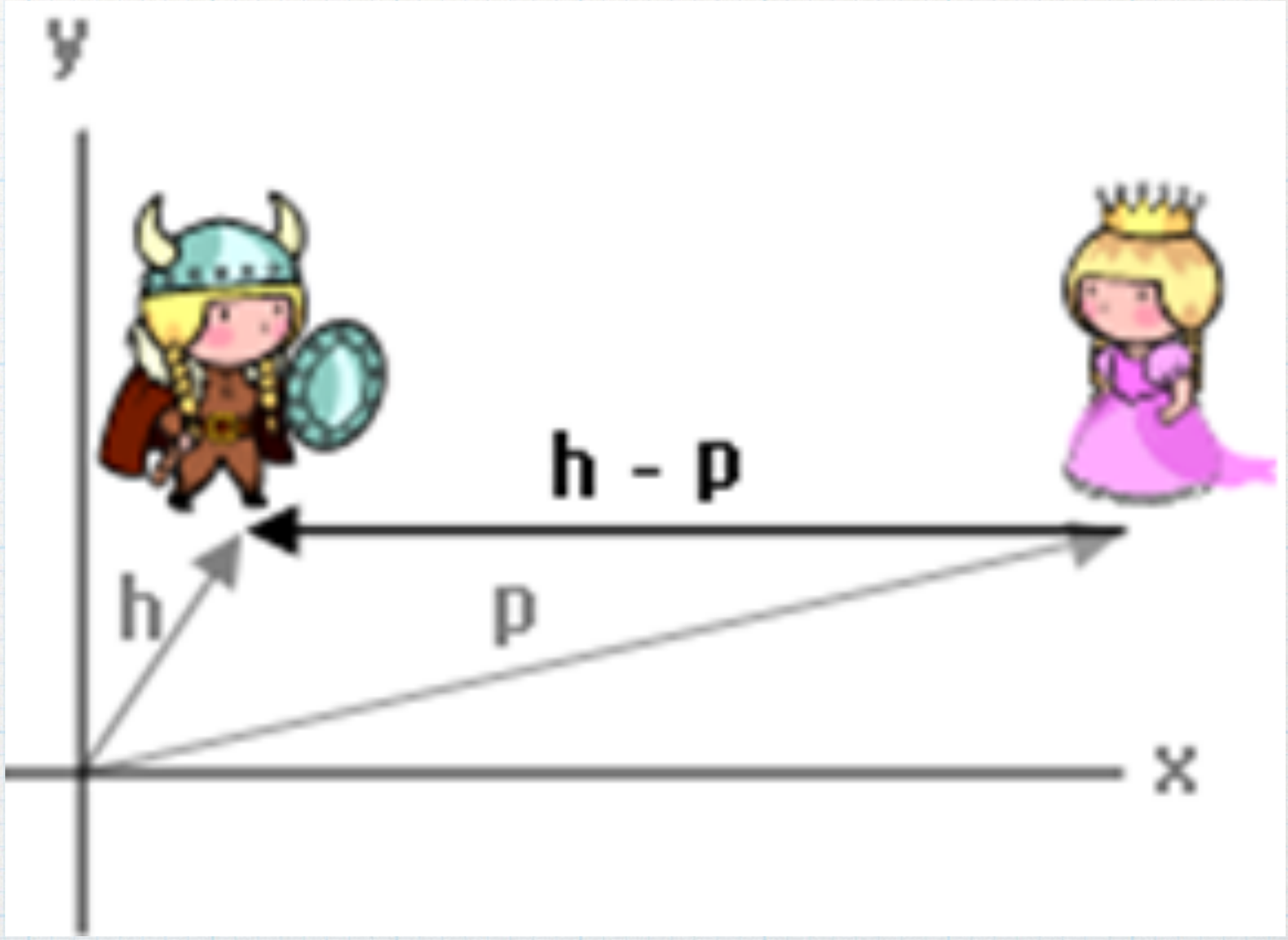
Vetores de um ponto até outro

- É muito comum que queiramos calcular o deslocamento necessário para de um ponto chegar a outro;
- Podemos fazer isso usando a regra do polígono e uma subtração:
    - Consideramos o centro do Sistema de Coordenadas Local do objeto como o vetor da sua posição;
- Note que b – a, resulta num vetor que vai de a até b.



OU SEJA...
Subtração de vetores = trajetórias

- A subtração entre dois vetores resulta num terceiro vetor que é a trajetória entre dois pontos;
- O tamanho desse vetor representa a distância que terá de ser percorrida entre os dois pontos.



Soma e Subtração de Vetores

```
void add(PVector v) {
  y = y + v.y;
  x = x + v.x;
}
```

```
void sub(PVector v) {
  x = x - v.x;
  y = y - v.y;
}
```

Multiplicação por um escalar

- Podemos multiplicar um vetor por um escalar;
- O resultado é um vetor com tamanho diferente, mesma direção e:
  - Mesmo sentido se o escalar for maior que zero;
  - Sentido oposto, com o escalar menor que 0;
  - O vetor zero, se o escalar for 0.

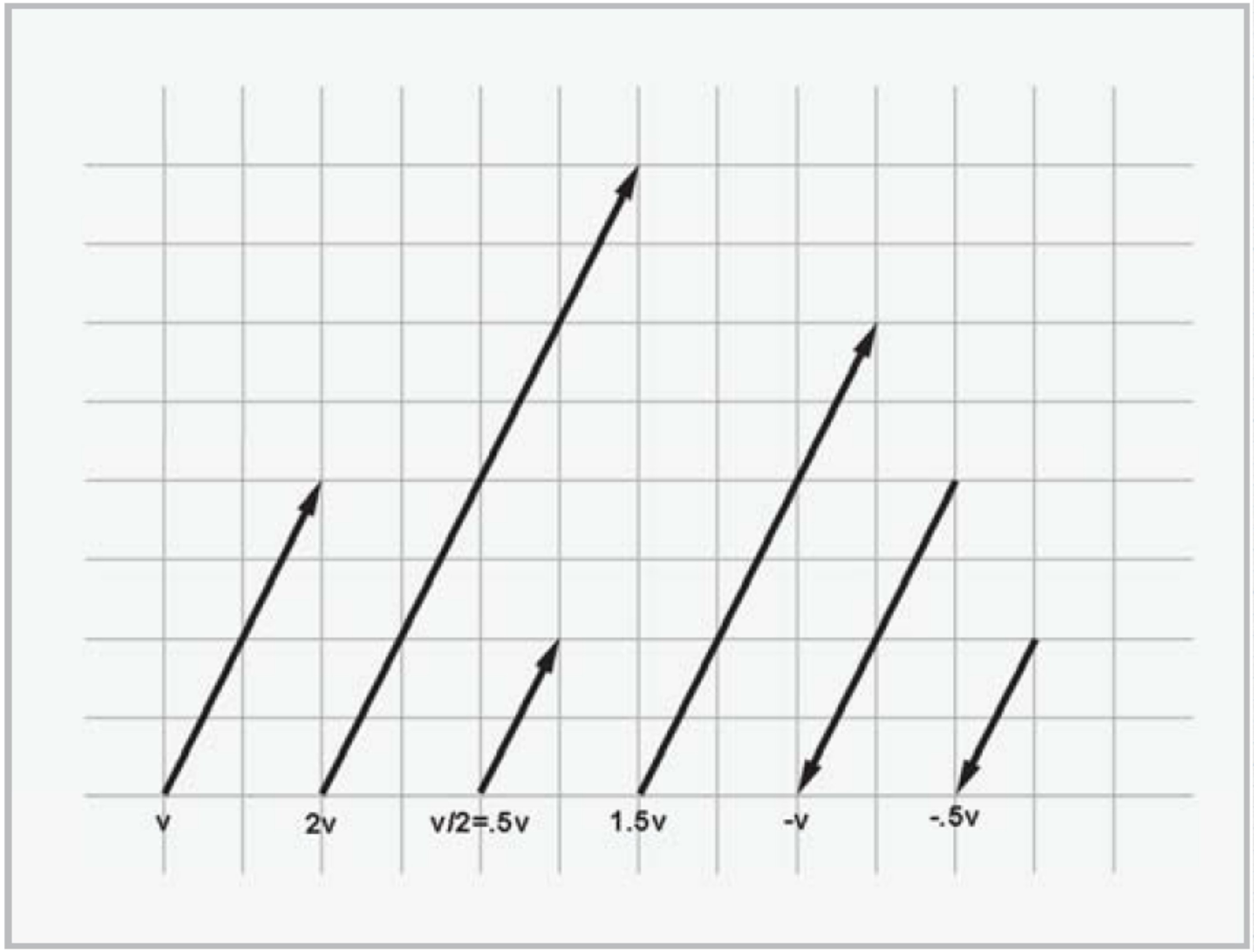
$$k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} k = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \dots \\ ka_{n-1} \\ ka_n \end{bmatrix}$$

Multiplicação por um escalar

- A divisão ocorre de forma análoga, já que ela equivale a multiplicação pela recíproca do escalar (a multiplicação pelo inverso resulta em 1):
    - v ÷ k = (1 ÷ k) * v;
- A multiplicação tem precedência sobre somar ou subtrair vetores. 3a+b = (3a)+b, não 3(a+b);

Multiplicação por um escalar

- Geometricamente, multiplicar o vetor por um escalar k significa aumentar ou diminuir seu tamanho em k vezes;
- O exemplo ao lado mostra o mesmo vetor multiplicado por diferentes escalares.



Multiplicação por um escalar

```
void mult(float n) {
  x = x * n;
  y = y * n;
}
```

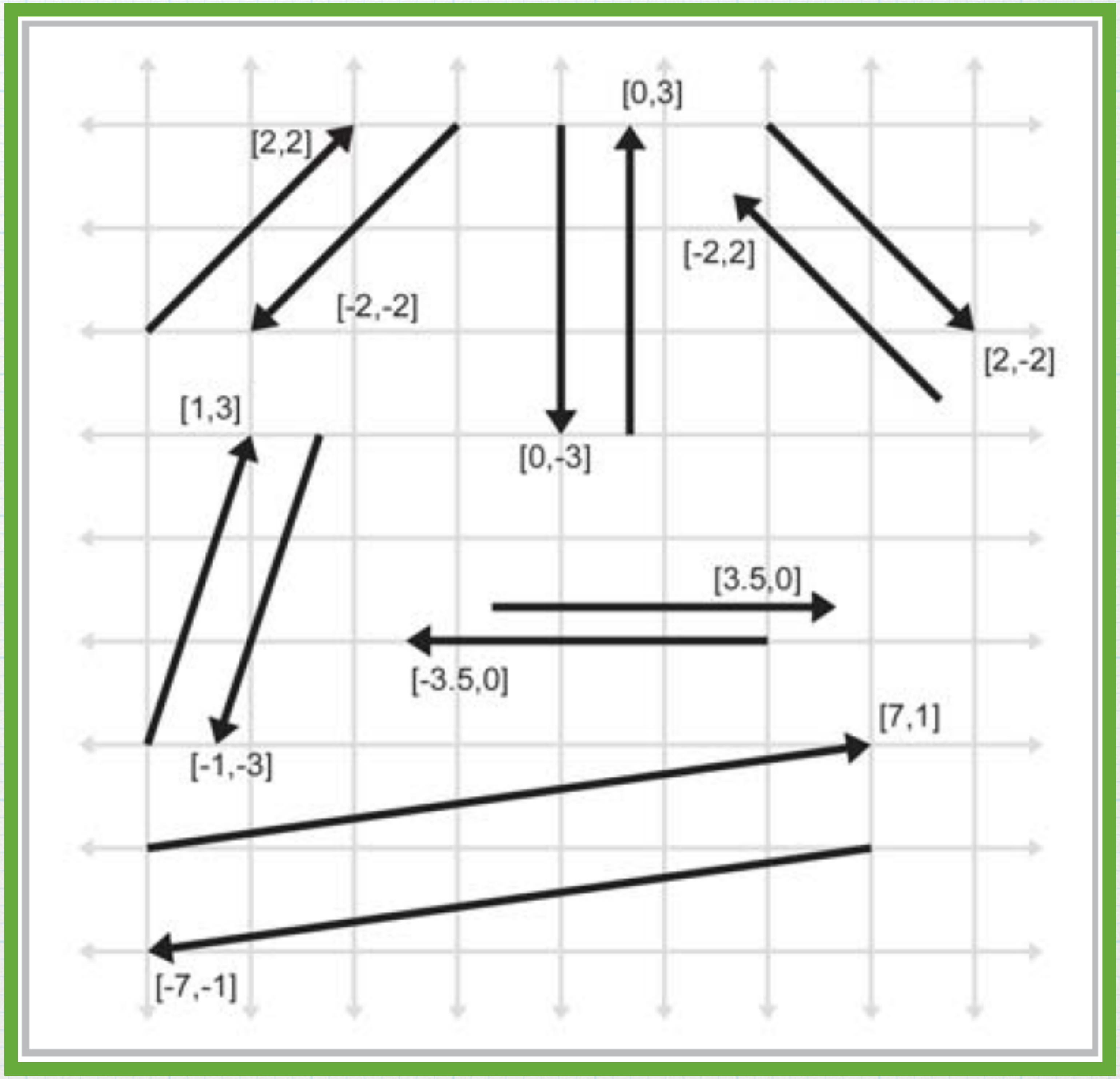
```
void div(float n) {
  x = x / n;
  y = y / n;
}
```

Negação de Vetores

- A negação de um vetor x, é um vetor y tal que x + y = 0;
- Para negar um vetor, simplesmente invertemos o sinal de todos os componentes do vetor;
- Por exemplo: -[-3 1 10] = [3 -1 -10];
- A negação gera um vetor que tem mesmo tamanho, direção, mas sentido oposto;

Negação de Vetores

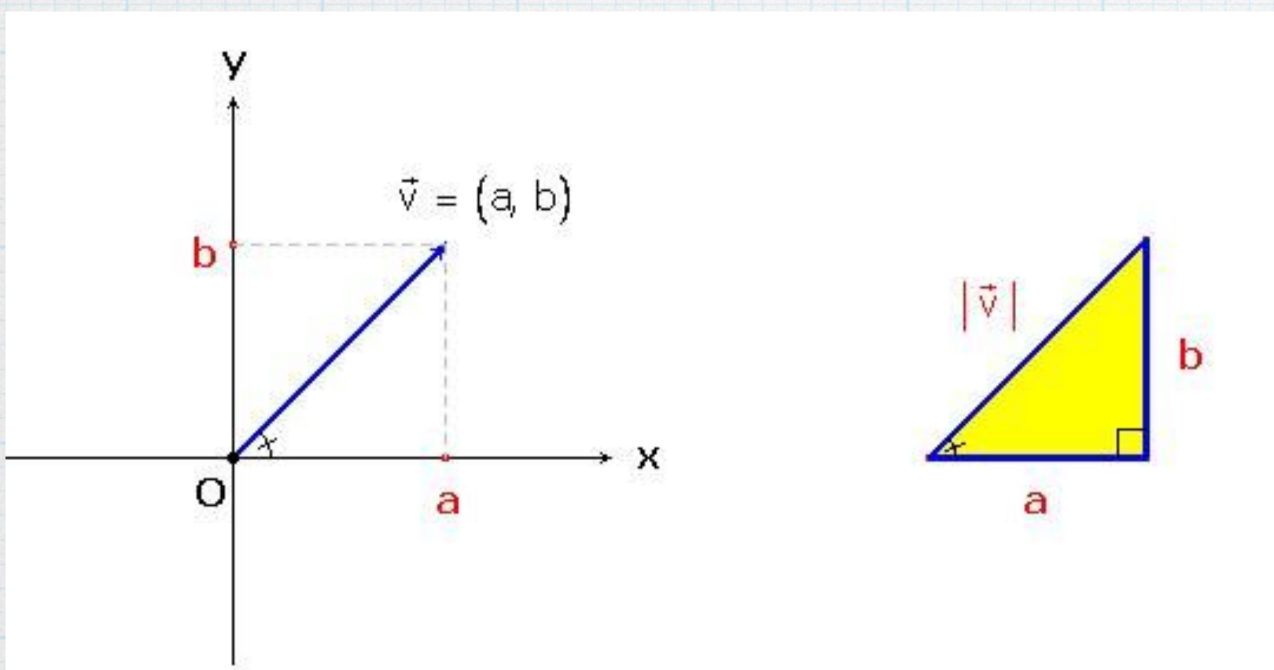
- A figura mostra exemplos de vetores e suas negativas;
- Lembre-se que a posição dos vetores é irrelevante.
- A negação de vetores pode ser vista como multiplicação pelo escalar −1.



Tamanho de um vetor (Magnitude)

- Podemos calcular o tamanho do vetor a partir do teorema de Pitágoras;
- A fórmula pode ser extrapolada para qualquer dimensão:

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{\mathbf{v}_1{}^2 + \mathbf{v}_2{}^2 + \cdots + \mathbf{v}_{n-1}{}^2 + \mathbf{v}_n{}^2} \\ \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i{}^2} \end{aligned}$$

Tamanho de um vetor (Magnitude)

```
float mag() {
  return sqrt(x*x + y*y);
}
```

Normalização

- Sabemos que a distância entre dois pontos é dado pelo offset, e que o offset é descoberto pela subtração de dois vetores:
  - Se subtrairmos a - b, teremos um vetor offset com a direção apontando para a;
  - Se subtrairmos b - a, teremos um vetor com o mesmo tamanho do anterior, mas de direção oposta.
- Mas, muitas vezes não estamos preocupados com a distância (offset), mas sim com apenas a direção (versor).

Normalização

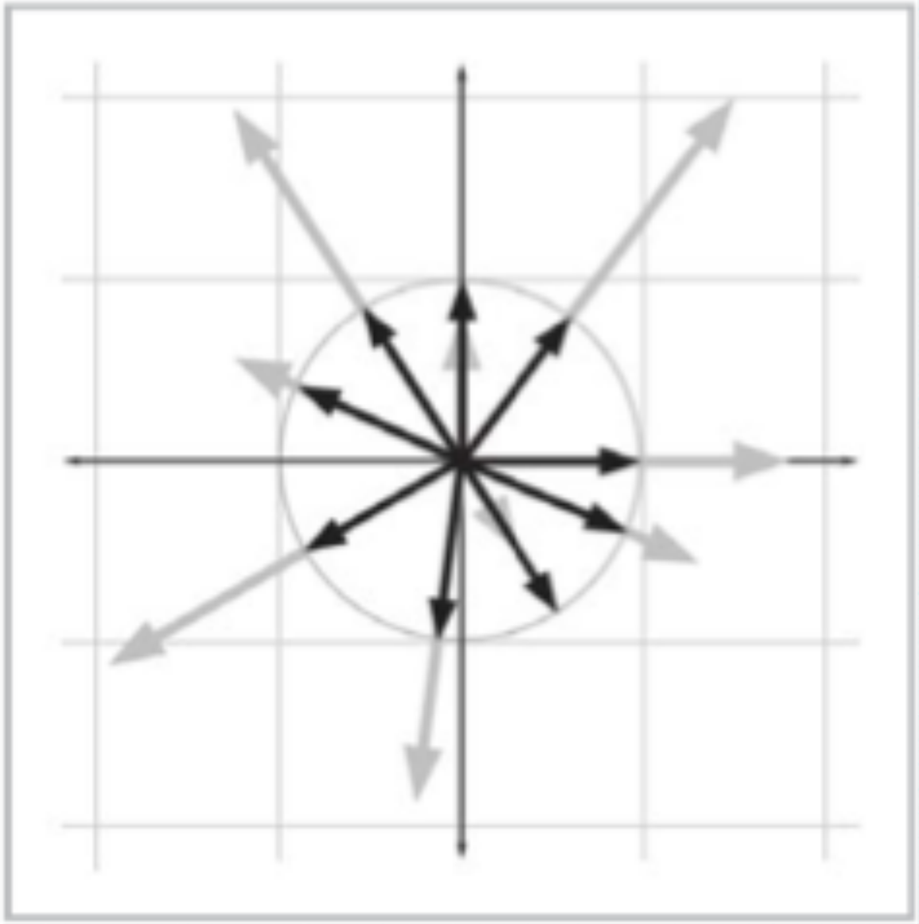
- Nessas situações, é conveniente usarmos vetores unitários, ou seja, de tamanho 1;
- Esses vetores respondem perguntas do tipo: “Para que lado estou virado?”
- Criamos vetores unitários dividindo o vetor pelo seu tamanho:

$$|\vec{u}| = \left| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = 1$$

$$\vec{v} \neq 0$$

Normalização

- Geometricamente, em 2D, o vetor normalizado é aquele que sua ponta termina num círculo de raio 1:
    - Lembra que o seno e o cosseno possuem valores unitários devido à divisão do cateto pela hipotenusa?
- Em 3D, numa esfera;
- O vetor zero não pode ser normalizado, já que não tem direção;
- Uma das utilidades de um vetor unitário é forçar o tamanho do vetor;
- Transformamos ele em unitário e o multiplicamos pelo tamanho desejado.



Normalização - Exemplo

$$\frac{\begin{bmatrix}12 & -5\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}12 & -5\end{bmatrix}\right\|} = \frac{\begin{bmatrix}12 & -5\end{bmatrix}}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix}12 & -5\end{bmatrix}}{\sqrt{169}} = \frac{\begin{bmatrix}12 & -5\end{bmatrix}}{13}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{12}{13} & \frac{-5}{13}\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0{,}923 & -0{,}385\end{bmatrix}$$

Normalização

```
void normalize() {
 float m = mag();
 if (m != 0) {
   div(m);
 }
}
```

Distância entre dois vetores

```
float dist(PVector v){
    PVector r = PVector.sub(this,v);
    return r.mag();
}
```

- Perceba que a ordem da subtração não altera o resultado do tamanho.

Vetor nulo

- Para um dado conjunto, chamamos de **identidade somatória** o elemento x, tal que: $x + y = y$;
- Para um vetor de uma dimensão particular, chamamos de vetor zero um vetor que tem 0 em todas as suas dimensões, sendo ele a identidade somatória dos vetores;
- O vetor zero é importante pois **ele é o único vetor que não tem tamanho ou direção**. Na verdade, ele representa a ausência de deslocamento;
- Cuidado: Algumas operações de vetores, como a normalização e o produto escalar, envolvem divisão pelo tamanho (ou seja, divisão por 0).

Ângulo entre dois vetores

```
float angleBetween(PVector v)
```

Produto escalar (Dot product)

- O produto escalar é definido como a soma do produto dos componentes do vetor;
- Usamos para ele a notação a·b (o que justifica o dot):

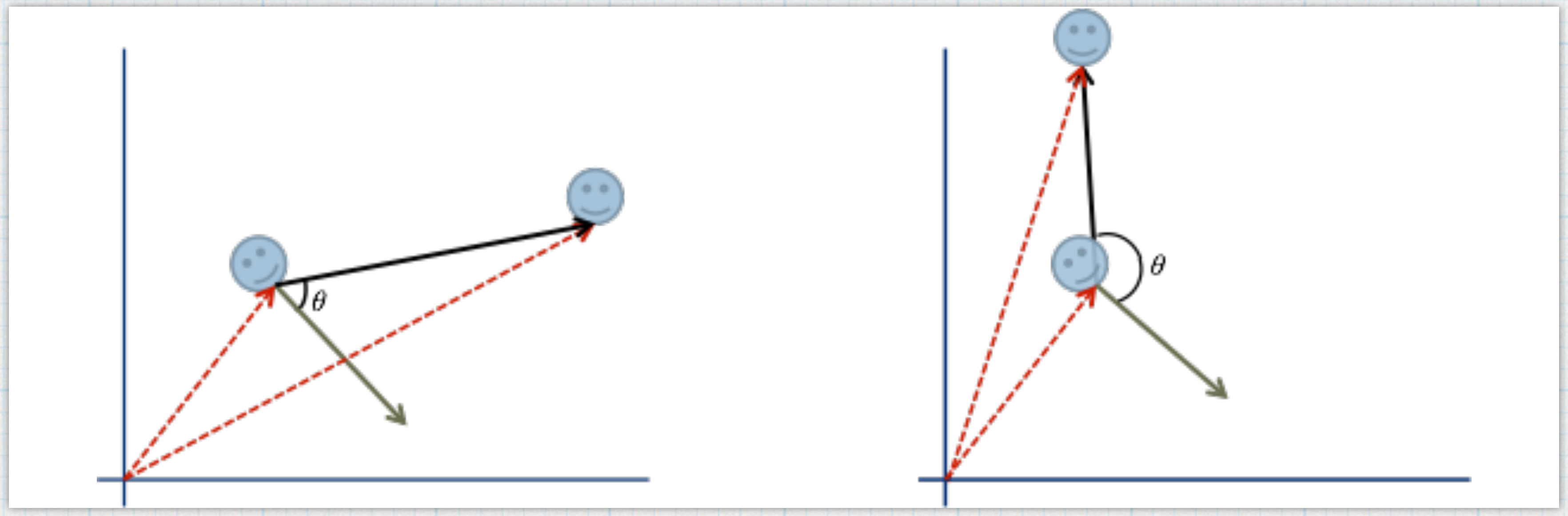
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n$$

- Ou, de maneira sucinta:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Produto escalar (Dot product)

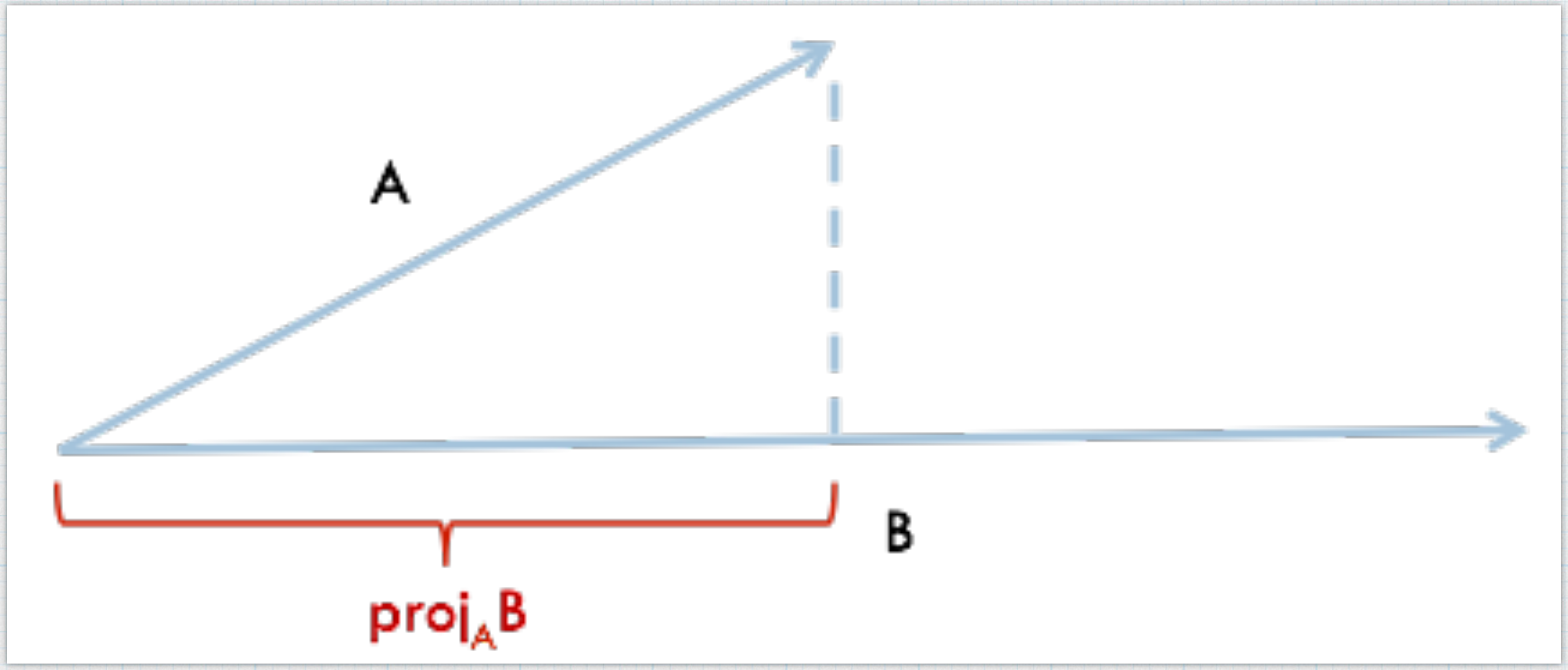
- Uma das utilidades do produto escalar é o cálculo de campos de visão (**fov - Field of View**);
- O alcance da visão é chamado de Threshold, ângulo de visão ou limiar de visão:



- Na segunda figura, temos a·b < 0. Geralmente isso já representa alguém fora da visão (θ > 90º, se o threshold for igual a 90˚);
- Na primeira, ainda temos que testar se o ângulo θ está dentro do campo de visão.

Produto escalar (Dot product)

- Outra importante propriedade do produto escalar é que seu valor representa a distância do vetor A projetado sobre o vetor B (cos(α) • |A| • |B|):



Produto escalar (Dot product)

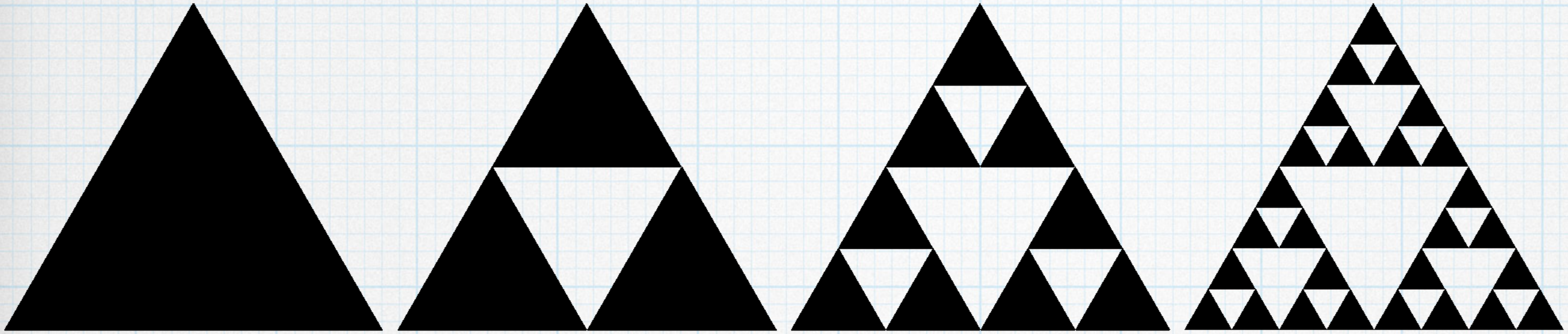
```
float dot(PVector v)
```

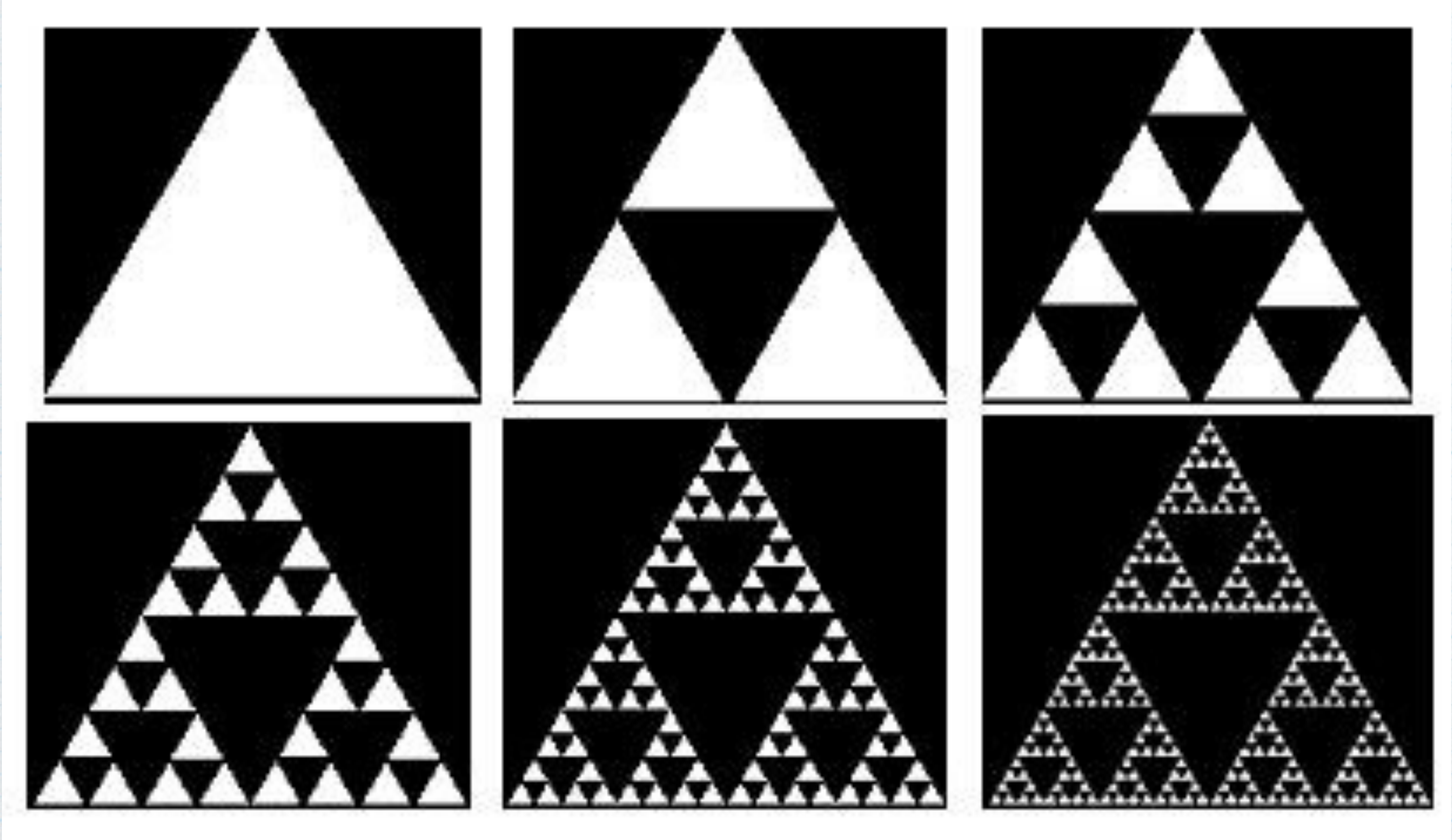
Rotação de Vetores

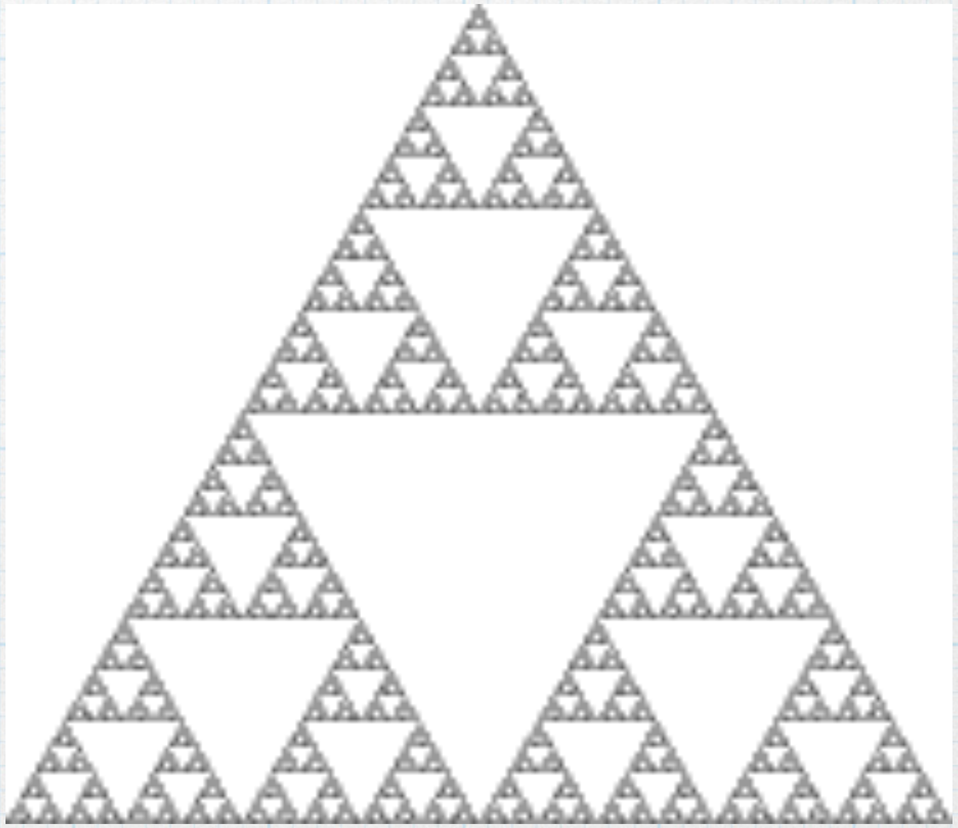
- Outra operação interessante é a rotação de um vetor. Com um pouco de trigonometria, a rotação pode ser descrita da seguinte forma:

```
float rotate(float angle)
```

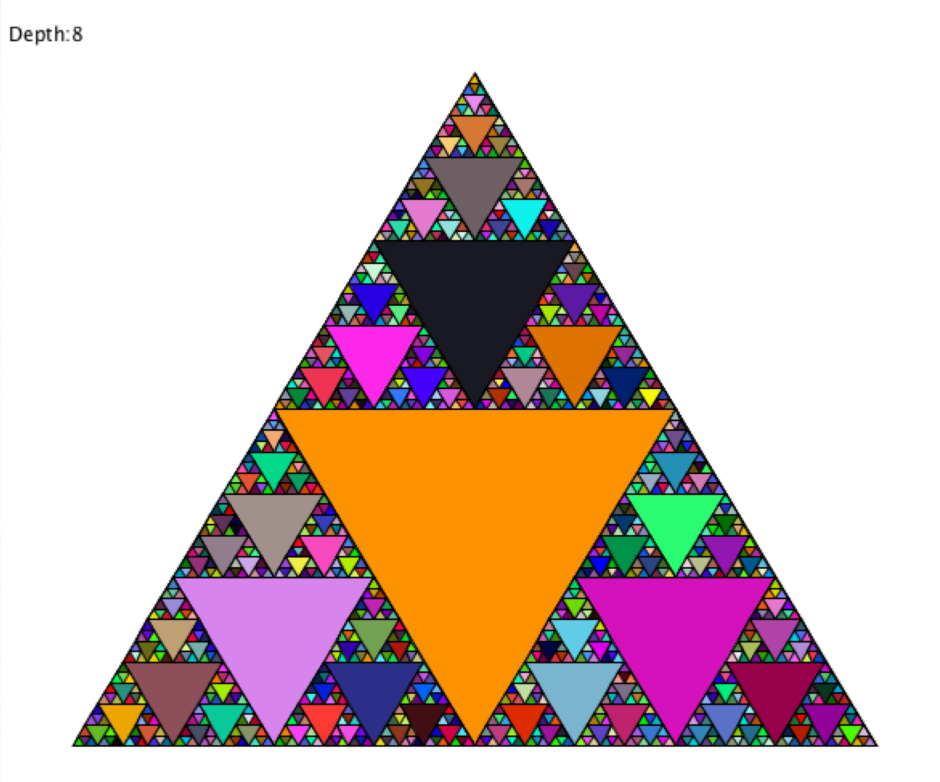
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} newX \\ newY \end{bmatrix}$$



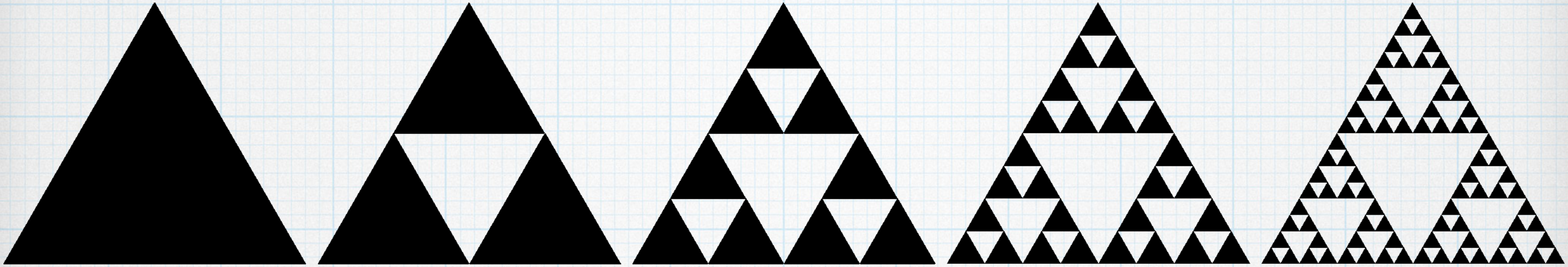




Exemplo 1 - Triângulo de Sierpinsky



* Faça o algoritmo do triangulo de Sierpinsky
* Para a resolução do exercício é obrigatório o uso de vetores.



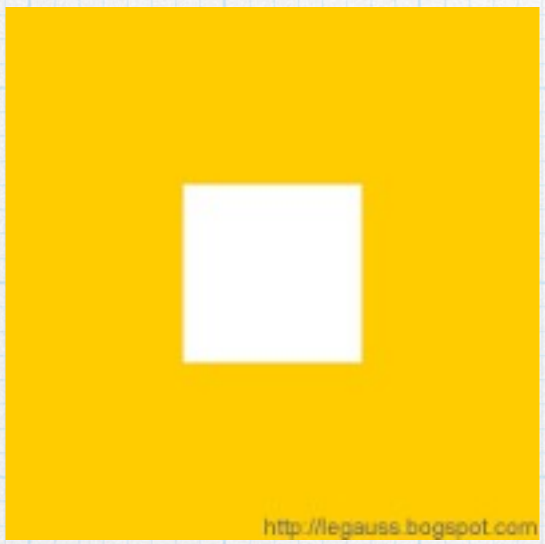
1. Comece com qualquer triângulo em um plano. O triângulo de Sierpinski utilizava um triângulo equilátero com a base paralela ao eixo horizontal.

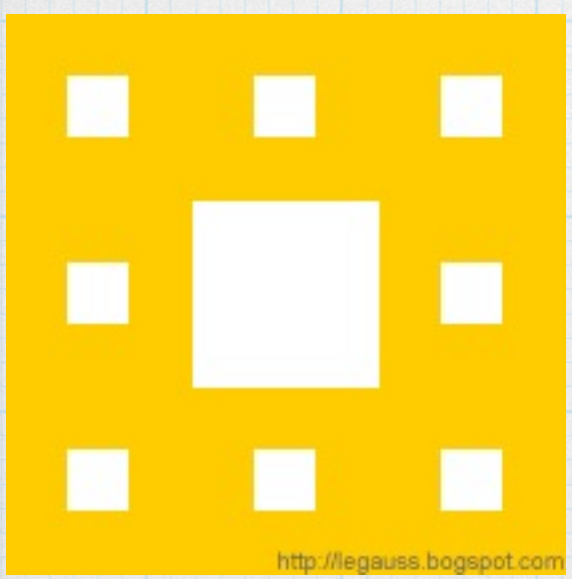
2. Encolha o triângulo pela metade (cada lado deve ter metade do tamanho original), faça três copias, e posicione cada triângulo de maneira que encoste nos outros dois em um canto.

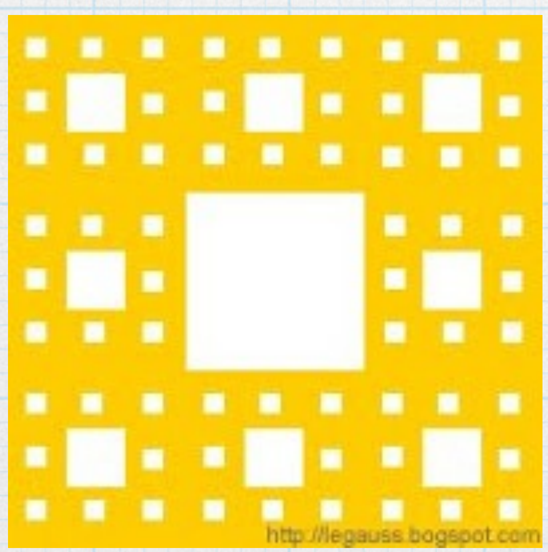
3. Repita o passo 2 para cada figura obtida, indefinidamente (ver a partir da terceira figura).

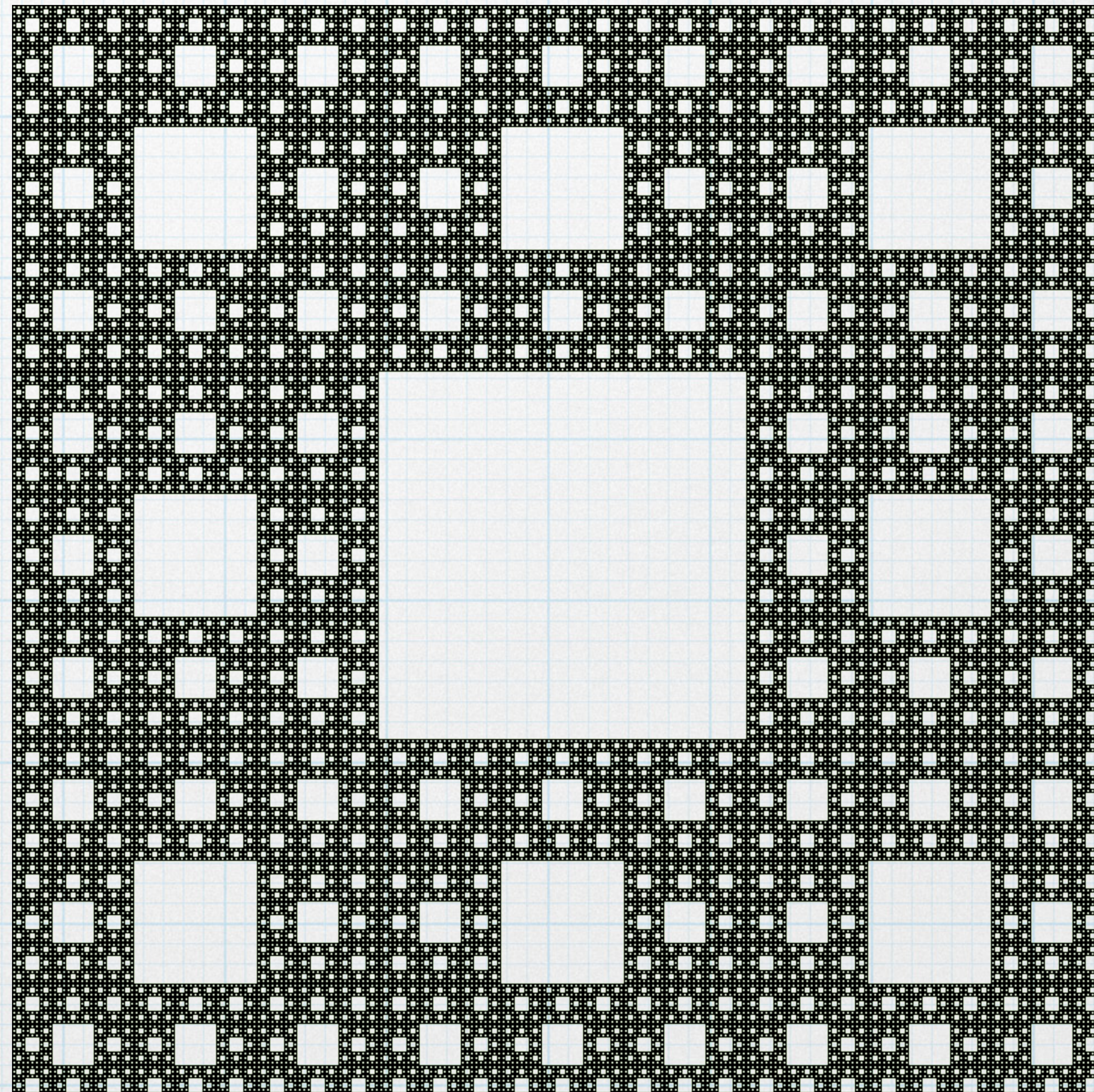
Exercício

- **Desenhar uma versão com quadrados (o carpete de Sierpinsky):**









Referência

- O uso de vetores nos jogos - Vinícius G. Mendonça.