

Jurdik Fisika FPMIPA UPI
Bandung

DISTRIBUSI VARIABEL RANDOM DISKRIT

Distribusi Variabel Random Diskrit

- Proses Bernoulli
- Distribusi Binomial
- Distribusi Geometrik
- Distribusi Hipergeometrik
- Proses & Distribusi Poisson
- Pendekatan untuk Distribusi Binomial

PROSES BERNOULLI

Percobaan Bernoulli adalah percobaan yang memenuhi kondisi-kondisi berikut:

1. Satu percobaan dengan percobaan yang lain **independen**. Artinya, sebuah hasil tidak mempengaruhi muncul atau tidak munculnya hasil yang lain
2. Setiap percobaan memberikan dua hasil yang mungkin, yaitu ***sukses**** dan ***gagal***. Kedua hasil tersebut bersifat **mutually exclusive** dan **exhaustive**.
3. **Probabilitas sukses**, disimbolkan dengan ***p***, adalah **tetap** atau konstan. **Probabilitas gagal**, dinyatakan dengan ***q***, adalah ***q = 1-p***.

* Istilah *sukses* dan *gagal* adalah istilah statistik yang tidak memiliki implikasi positif atau negatif

PROSES BERNOULLI

Beberapa distribusi yang dilandasi oleh proses Bernoulli adalah :

- ❑ Distribusi binomial,
- ❑ Distribusi geometrik, dan
- ❑ Distribusi hipergeometrik.

(termasuk kategori tersebut adalah distribusi multinomial dan negatif binomial).

DISTRIBUSI BINOMIAL

- ✖ Sebuah variabel random, X , menyatakan jumlah sukses dari n percobaan Bernoulli dengan p adalah probabilitas sukses untuk setiap percobaan, dikatakan mengikuti **distribusi (diskrit) probabilitas binomial** dengan parameter n (jumlah sukses) dan p (probabilitas sukses).
- ✖ Selanjutnya, variabel random X disebut **variabel random binomial**

PERSYARATAN SUATU PERCOBAAN BINOMIAL

1. Percobaan/eksperimen terdiri dari n yang berulang
2. Setiap usaha memberikan hasil yang dapat ditentukan dengan *sukses* atau *gagal*
3. Probabilitas *sukses*, dinyatakan dengan p , tidak berubah dari usaha yang satu ke usaha yang berikutnya
4. Tiap usaha bebas dengan usaha yang lainnya.

Sebuah sistem produksi menghasilkan produk dari dua mesin A dan B dengan kecepatan yang sama. Diambil 5 produk dari rantai produksi dan nyatakan X sebagai jumlah produk yang dihasilkan dari mesin A.

Ada $2^5 = 32$ urutan yang mungkin sebagai output dari mesin A dan B (sukses dan gagal) yang membentuk ruang sample percobaan. Diantara hasil tersebut, ada 10 hasil yang memuat tepat 2 produk dari mesin A ($X=2$):

AABBB ABABB ABBAB ABBBA BAABB BABAB BABBA BBAAB BBABA
BBBAA

Probabilitas 2 produk dari mesin A dari 5 produk yang diambil adalah $p^2q^3 = (1/2)^2(1/2)^3 = (1/32)$, probabilitas dari 10 hasil tersebut adalah :

$$P(X = 2) = 10 * (1/32) = (10/32) = 0.3125$$

10	(1/32)
Jumlah hasil dimana 2 dihasilkan dari mesin A	Probabilitas bahwa sebuah hasil memiliki 2 produk dari mesin A

$$P(X=2) = 10 * (1/32) = (10/32) = .3125$$

Perhatikan bahwa probabilitas tersebut dihasilkan dari:

10	(1/32)
Jumlah hasil dimana 2 dihasilkan dari mesin A	Probabilitas bahwa sebuah hasil memiliki 2 produk dari mesin A

Secara umum:

1. **Probabilitas** dari x sukses dari n percobaan dengan probabilitas sukses p dan probabilitas gagal q adalah:

$$p^x q^{(n-x)}$$

2. **Jumlah urutan** dari n percobaan yang menghasilkan tepat x sukses adalah jumlah pilihan x elemen dari total n elemen:

$$nC_x = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Distribusi probabilitas binomial :

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}$$

dimana :

p probabilitas sukses sebuah percobaan,

$q = 1-p$,

n jumlah percobaan, dan

x jumlah sukses.

Jumlah sukses x	Probabilitas P(x)
0	$\frac{n!}{0!(n-0)!} p^0 q^{(n-0)}$
1	$\frac{n!}{1!(n-1)!} p^1 q^{(n-1)}$
2	$\frac{n!}{2!(n-2)!} p^2 q^{(n-2)}$
3	$\frac{n!}{3!(n-3)!} p^3 q^{(n-3)}$
\vdots	\vdots
n	$\frac{n!}{n!(n-n)!} p^n q^{(n-n)}$
<hr/>	
1.00	

n=5													
x	p												
	0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99
0	.951	.774	.590	.328	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000	.000	.000
1	.999	.977	.919	.737	.528	.337	.187	.087	.031	.007	.000	.000	.000
2	1.000	.999	.991	.942	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009	.001	.000
3	1.000	1.000	1.000	.993	.969	.913	.813	.663	.472	.263	.081	.023	.001
4	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.969	.922	.832	.672	.410	.226	.049

	a	F(h)	P(h)
Distribusi probabilitas kumulatif binomial dan distribusi probabilitas variabel random binomial A, jumlah produk yang dihasilkan oleh mesin A (p=0.5) dalam 5 produk yang diambil.	0	0.031	0.031
	1	0.187	0.156
	2	0.500	0.313
	3	0.813	0.313
	4	0.969	0.156
	5	1.000	0.031
			1.000

Penentuan nilai probabilitas dari probabilitas kumulatif

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{all i \leq x} P(i)$$

$$P(X) = F(x) - F(x - 1)$$

Contoh :

$$\begin{aligned}
 P(3) &= F(3) - F(2) \\
 &= .813 - .500 \\
 &= .313
 \end{aligned}$$

60% dari produk yang dihasilkan adalah sempurna. Sebuah sample random sebanyak 15 diambil. Berapa probabilitas bahwa **paling banyak ada tiga** produk yang sempurna?

n=15			
	p		
	.50	.60	.70
0	.000	.000	.000
1	.000	.000	.000
2	.004	.000	.000
3	.018	.002	.000
4	.059	.009	.001
...

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{all\ i \leq x} P(i)$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = .002$$

Meandaridistribusbinomial

$$\mu = E(X) = np$$

Varsidaridistribusbinomial

$$\sigma^2 = V(X) = npq$$

Deviasistandaridistribusbinomial

$$\sigma = SD(X) = \sqrt{npq}$$

A adalah jumlah produk dari mesin A dalam 5 produk

$$\mu_H = E(H) = (5)(.5) = 2.5$$

$$\sigma_H^2 = V(H) = (5)(.5)(.5) = 0.5$$

$$\sigma_H = SD(H) = \sqrt{0.5} = .7071$$

DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

- ✗ Distribusi binomial digunakan pada populasi yang tidak terbatas, sehingga proporsi sukses diasumsikan diketahui.
- ✗ **Distribusi probabilitas hipergeometrik** digunakan untuk menentukan probabilitas kemunculan sukses jika sampling dilakukan *tanpa pengembalian*.
- ✗ Variabel random hipergeometrik adalah jumlah sukses (x) dalam n pilihan, *tanpa pengembalian*, dari sebuah populasi terbatas N , dimana D diantaranya adalah sukses dan $(N-D)$ adalah gagal.

-
- ❑ Penurunan fungsi distribusi hipergeometrik diturunkan dengan menghitung kombinasi-kombinasi yang terjadi.
 - ❑ Kombinasi yang dapat dibentuk dari populasi berukuran N untuk sampel berukuran n adalah kombinasi $C(N,n)$.
 - ❑ Jika sebuah variabel random (diskrit) X menyatakan jumlah sukses, selanjutnya dapat dihitung kombinasi diperoleh x sukses dari sejumlah D sukses dalam populasi yang diketahui yaitu $C(D,x)$, dan demikian pula halnya dapat dicari $(n-x)$ kombinasi gagal dari sisanya $(N-D)$, yaitu kombinasi $C((N-D),(n-x))$.

DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK (3)

- ✕ Dengan demikian:
- ✕ sukses $C(D,x)$. $C((N-D),(n-x))$ atau

$$\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}$$

- ✕ yang diperoleh dari total kombinasi yang mungkin $C(N,n)$ atau

$$\binom{N}{n}$$

DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK (4)

- ✖ Sebuah variabel random (diskrit) X menyatakan jumlah sukses dalam percobaan bernoulli dan total jumlah sukses D diketahui dari sebuah populasi berukuran N , maka dikatakan x mengikuti distribusi hipergeometrik dengan fungsi kemungkinan :

$$p(x) = \frac{\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 1, 2, \dots, \min(n, D)$$
$$= 0 \quad \text{otherwise}$$

- ✖ Distribusi kemungkinan hipergeometrik sering pula disimbolkan dengan $h(x; N; n; D)$.

DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK (4)

Parameter pemusatan dan penyebaran adalah sebagai berikut :

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\min(n,D)} x \cdot \frac{\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} = n \cdot D / N \quad (\text{jika } N \text{ besar maka } D/N = p)$$

Untuk kasus dimana $n < D$, maka ekspektasi tersebut adalah

$$E(X) = \sum_{x=0}^n x \frac{\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}. \quad \text{Karena } \binom{D}{x} = \frac{D \cdot (D-1)!}{x \cdot (x-1)! (D-x)!}, \text{ maka diperoleh}$$

$$E(X) = D \sum_{x=0}^n \frac{\binom{D-1}{x-1} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK (5)

Transformasikan $y=x-1$, maka bentuk di atas berubah

menjadi $E(X) = D \sum_{y=0}^n \frac{\binom{D-1}{y} \binom{N-D}{n-1-y}}{\binom{N}{n}}$, karena $\binom{N-D}{n-1-y} = \binom{(N-1)-(D-1)}{n-1-y}$ dan

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N}{n} \binom{N-1}{n-1} \text{ maka diperoleh } E(X) = \frac{nD}{N} \sum_{y=0}^n \frac{\binom{D-1}{y} \binom{(N-1)-(D-1)}{n-1-y}}{\binom{N-1}{n-1}}$$

Karena penjumlahan tersebut menghasilkan nilai satu (sifat distribusi kemungkinan), maka $E(X) = \frac{nD}{N}$.

Dapat dibuktikan bahwa $E(X-1) = \frac{(n-1)(D-1)}{N-1}$. Ekspektasi perkalian

X dan $(X-1)$ adalah $E[X(X-1)] = E(X^2) - E(X)$. Karena $E(X) = \frac{nD}{N}$

dan $E(X-1) = \frac{(n-1)(D-1)}{N-1}$, maka $E[X(X-1)] = \frac{D(D-1)n(n-1)}{N(N-1)}$.

Variansi $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$, hal ini berarti $\sigma^2 = E[X(X-1)] + \mu - \mu^2$ atau ruas kanan menjadi $\frac{D(D-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{nD}{N} - \frac{n^2 D^2}{N^2}$. Dengan pengaturan

kembali diperoleh variansi distribusi kemungkinan

hipergeometrik adalah $V(X) = \sigma^2 = n \cdot \left[\frac{D}{N} \right] \cdot \left[1 - \frac{D}{N} \right] \cdot \left[\frac{N-n}{N-1} \right]$

(untuk N yang besar hasil ini mendekati npq).

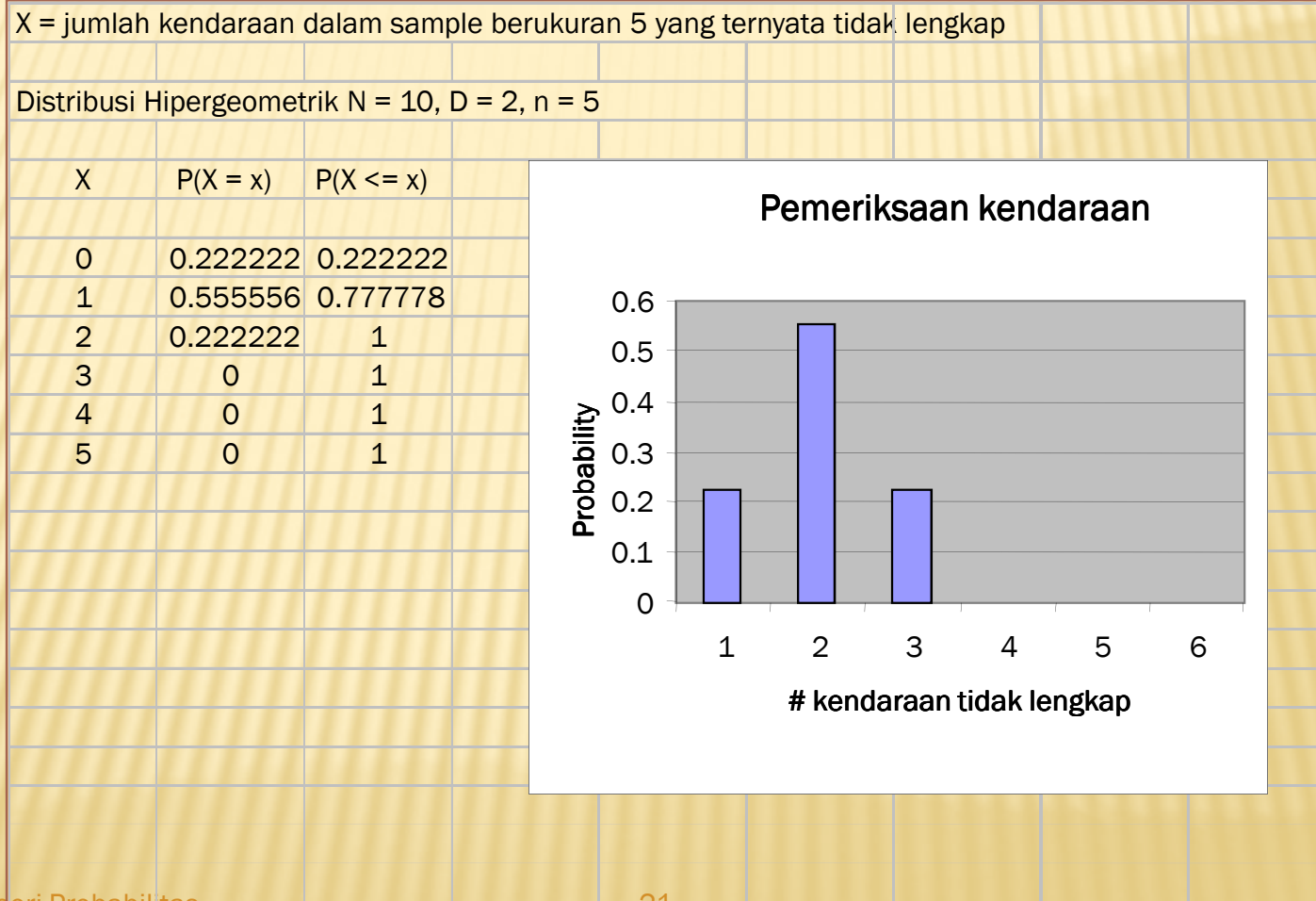
Contoh:

Sebuah dealer otomotif menerima lot berukuran 10 dimana hanya 5 diantaranya yang mendapat pemeriksaan kelengkapan. 5 kendaraan diambil secara random. Diketahui ada 2 kendaraan dari lot berukuran 10 yang tidak lengkap. Berapa kemungkinan sekurangnya ada 1 kendaraan dari 5 kendaraan yang diperiksa ternyata tidak lengkap?

$$P(1) = \frac{\binom{2}{1} \binom{10-2}{5-1}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{2}{1} \binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{\frac{2!}{1!1!} \frac{8!}{4!4!}}{\frac{10!}{5!5!}} = \frac{2}{9} = 0.222$$
$$P(2) = \frac{\binom{2}{2} \binom{10-2}{5-2}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{2}{2} \binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{\frac{2!}{2!0!} \frac{8!}{3!5!}}{\frac{10!}{5!5!}} = \frac{1}{9} = 0.111$$

Sehingga, $P(1) + P(2) =$

$0.222 + 0.111 = 0.333$.



DISTRIBUSI MULTINOMIAL

Distribusi probabilitas binomial digunakan untuk sejumlah sukses dari n percobaan yang independen, dimana seluruh hasil (outcomes) dikategorikan ke dalam dua kelompok (sukses dan gagal). **Distribusi probabilitas multinomial** digunakan untuk penentuan probabilitas hasil yang dikategorikan ke dalam lebih dari dua kelompok.

Fungsi distribusi probabilitas multinomial:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

Berdasarkan laporan sebuah penelitian tahun 1995, diantara produk mikroprosesor pentium generasi pertama diketahui terdapat cacat yang mengakibatkan kesalahan dalam operasi aritmatika. Setiap mikroprosesor dapat dikategorikan sebagai baik, rusak dan cacat (dapat digunakan dengan kemungkinan muncul kesalahan operasi aritmatika). Diketahui bahwa 70% mikroprosesor dikategorikan baik, 25% cacat dan 5% rusak. Jika sebuah sample random berukuran 20 diambil, berapa probabilitas ditemukan 15 mikroprosesor baik, 3 cacat dan 2 rusak?

$$P(15,3,2) = \frac{20!}{15!3!2!} (.7^{15}) (.25^3) (.05^2)$$
$$=.0288$$

DISTRIBUSI GEOMETRIK

Berkaitan dengan percobaan Bernoulli, dimana terdapat n percobaan independen yang memberikan hasil dalam dua kelompok (sukses dan gagal), **variabel random geometric** mengukur jumlah percobaan sampai diperoleh sukses yang pertama kali.

Fungsi distribusi probabilitas

geometrik $P(x) = pq^{x-1}$

dimana $x = 1, 2, 3, \dots$, p dan q adalah parameter (probabilitas sukses dan gagal).

Rata-rata dan variansi distribusi probabilitas geometrik adalah:

$$\mu = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$$

Pada suatu daerah, P-Cola menguasai pangsa pasar sebesar 33.2% (bandingkan dengan pangsa pasar sebesar 40.9% oleh C-Cola). Seorang mahasiswa melakukan penelitian tentang produk cola baru dan memerlukan seseorang yang terbiasa meminum P-Cola. Responden diambil secara random dari peminum cola. Berapa probabilitas responden pertama adalah peminum P-cola, berapa probabilitas pada responden kedua, ketiga atau keempat?

$$P(1) = (.332)(.668)^{(1-1)} = 0.332$$

$$P(2) = (.332)(.668)^{(2-1)} = 0.222$$

$$P(3) = (.332)(.668)^{(3-1)} = 0.148$$

$$P(4) = (.332)(.668)^{(4-1)} = 0.099$$

Probabilitas lulus mata kuliah teori probabilitas adalah 95%, berapa probabilitas anda lulus tahun ini, tahun depan dan seterusnya?

DISTRIBUSI BINOMIAL NEGATIF

Variabel random binomial X , menyatakan:

- ✕ Jumlah sukses dari n percobaan independen Bernoulli.
- ✕ p adalah probabilitas sukses (tetap untuk setiap percobaan)

Jika ingin diketahui:

- ✕ Pada percobaan beberapa (n) sejumlah sukses (c) dapat dicapai dalam percobaan Bernoulli.

Pertimbangkan sebuah proses inspeksi untuk menemukan produk cacat (kategori sukses dengan probabilitas 0.1). Batas sebuah penolakan sebuah lot adalah jika ditemukan 4 buah cacat (D). Ditemukan bahwa sebuah lot ditolak setelah dilakukan inspeksi pada 10 produk.

- ✘ Sebuah kemungkinan adalah DDDGGGGGGD. Dengan teori multiplikasi, probabilitas urutan tersebut adalah $(0.1)^4 (0.9)^6$.
- ✘ Karena 10 percobaan tersebut independen, tanpa memperhatikan urutan, probabilitas diperoleh 4 cacat dari 10 percobaan adalah $(0.1)^4 (0.9)^6$.

- ✖ Karena kriteria penolakan adalah ditemukannya 4 produk cacat, maka posisi ke- n adalah pasti produk cacat. Sehingga jumlah urutan yang mungkin adalah kombinasi 3 dari 9, .
- ✖ Probabilitas diperlukan 10 percobaan untuk menghasilkan 4 sukses adalah:

Distribusi probabilitas negatif binomial $\binom{9}{3}$

$$\left(\frac{9!}{3!6!} \right) (0.1)^4 (0.9)^6$$

$$\binom{n-1}{c-1} p^c (1-p)^{n-c}, \text{ dimana } n = c, c+1, c+2, \dots$$

✕ Perhatikan distribusi kumulatif:

$$\sum_{n=c}^r \binom{n-1}{c-1} p^c (1-p)^{n-c} = \sum_{x=c}^r \binom{r}{x} p^x (1-p)^{r-x}$$

dimana ruas kanan adalah:

$$1 - \sum_{x=0}^{c-1} \binom{r}{x} p^x (1-p)^{r-x} = 1 - B(c-1; r; p)$$

yang dapat diperoleh dari distribusi kumulatif binomial

PROSES & DISTRIBUSI POISSON

- ✗ Percobaan bernoulli menghasilkan variabel random X yang bernilai numerik, yaitu jumlah sukses yang terjadi.
- ✗ Jika pengamatan dilakukan pada pada suatu rentang interval waktu, maka dapat diamati bahwa variabel random X adalah terjadinya sukses selama waktu tertentu.
- ✗ Jika perhatian ditujukan pada kejadian sukses yang muncul (lahir) pada suatu rentang yang kecil, maka terjadi sebuah proses kelahiran (*birth atau arrival process*) atau dikenal sebagai proses Poisson (*Poisson process*).

SIFAT-SIFAT PROSES POISSON:

- Jumlah sukses yang terjadi dalam suatu selang waktu (atau daerah tertentu) tidak dipengaruhi (*independent*) terhadap kejadian pada selang waktu atau daerah yang lain.
- Kemungkinan terjadinya suatu sukses (tunggal) dalam interval waktu yang pendek (Δt mendekati nol) sebanding dengan panjang interval dan tidak tergantung pada banyaknya sukses yang terjadi di luar interval tersebut.
- Kemungkinan terjadinya lebih dari satu sukses dalam interval waktu yang pendek dapat diabaikan.

DISTRIBUSI PROBABILITAS POISSON

Distribusi probabilitas Poisson bermanfaat dalam penentuan probabilitas dari sejumlah kemunculan pada rentang waktu atau luas/volume tertentu. Variabel random Poisson menghitung kemunculan pada interval waktu yang kontinu

Fungsi distribusi probabilitas Poisson :

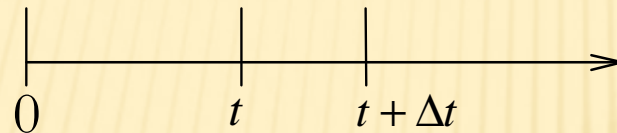
$$P(x) = \frac{\alpha^x e^{-\alpha}}{x!} \quad \text{untuk } x = 1, 2, 3, \dots$$

dimana α adalah rata-rata distribusi (yang juga merupakan variansi) dan e adalah bilangan logaritmik natural ($e=2.71828\dots$).

Fungsi distribusi poisson dapat diturunkan dengan memperhatikan asumsi-asumsi berikut:

- Jumlah kedatangan pada interval yang tidak saling tumpang tindih (*nonoverlapping interval*) adalah variabel random independen.
- Ada nilai parameter λ positif sehingga dalam sebuah interval waktu yang kecil Δt akan diperoleh :
 - i) Kemungkinan bahwa terjadi tepat satu kedatangan pada interval waktu Δt adalah $(\lambda \cdot \Delta t)$.
 - ii) Kemungkinan bahwa terjadi tepat nol kedatangan pada interval waktu Δt adalah $(1 - \lambda \cdot \Delta t)$.

Perhatikan posisi dan rentang waktu berikut:



Untuk suatu titik waktu t yang tetap (*fixed*), kemungkinan terjadi nol kedatangan diformulasikan sebagai berikut :

$p_0(t + \Delta t) \cong [1 - \lambda \cdot \Delta t] \cdot p_0(t)$. Dengan melakukan penyusunan

kembali akan diperoleh $\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} \cong -\lambda \cdot p_0(t)$. Jika interval waktu sangat kecil (Δt mendekati nol), maka dapat digunakan

diferensial berikut : $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} \right] = p'_0(t) = -\lambda p_0(t)$.

Hal yang sama dapat dilakukan jika terdapat kedatangan $x > 0$, sehingga dapat diformulasikan kemungkinan berikut $p_x(t + \Delta t) \cong \lambda \cdot \Delta t p_{x-1}(t) + [1 - \lambda \cdot \Delta t] \cdot p_x(t)$.

Dengan melakukan penyusunan kembali akan diperoleh
$$\frac{p_x(t + \Delta t) - p_x(t)}{\Delta t} \cong \lambda \cdot p_{x-1}(t) - \lambda \cdot p_x(t).$$

Jika interval waktu sangat kecil (Δt mendekati nol), maka dapat digunakan diferensial berikut :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{p_x(t + \Delta t) - p_x(t)}{\Delta t} \right] = p'_x(t) = \lambda p_{x-1}(t) - \lambda p_x(t) .$$

Dari dua persamaan diferensial yang diperoleh (untuk nol kedatangan dan ada kedatangan $x > 0$), diperoleh solusi berikut $p_x(t) = (\lambda t)^x \cdot e^{-(\lambda t)} / x!$. Karena titik waktu t adalah tetap (*fixed*), maka dapat digunakan notasi $\alpha = \lambda t$, sehingga distribusi probabilitas poisson yang diperoleh adalah:

$$p(x) = (\alpha)^x \cdot e^{-\alpha} / x!, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$= 0 \quad \text{x lainnya}$$

Parameter pemusatan dan penyebaran adalah:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\alpha^x \cdot e^{-\alpha}}{x!} = \alpha \quad \text{dan} \quad V(X) = \left(\sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{\alpha^x \cdot e^{-\alpha}}{x!} \right) - (\alpha)^2 = \alpha.$$

Perusahaan telepon memberikan 1000 pilihan pesawat telepon (sebagai kombinasi warna, type, fungsi, dll). Sebuah perusahaan membuka cabang baru dan tersedia 200 sambungan telpon dimana setiap karyawan boleh memilih pesawat telepon sesuka hatinya. Asumsikan bahwa ke-1000 pilihan tersebut adalah equally likely. Berapa probabilitas bahwa sebuah pilihan tidak dipilih, dipilih oleh seorang, dua orang atau tiga orang karyawan?

$$n = 200 ; p = 1/1000 = 0.001 ;$$

$$\alpha = np = (200)(0.001) = 0.2$$

$$P(0) = \frac{.2^0 e^{-.2}}{0!} = 0.8187$$
$$P(1) = \frac{.2^1 e^{-.2}}{1!} = 0.1637$$
$$P(2) = \frac{.2^2 e^{-.2}}{2!} = 0.0164$$
$$P(3) = \frac{.2^3 e^{-.2}}{3!} = 0.0011$$

Rata-rata pengiriman bahan baku ke suatu pabrik adalah 10 truk dan fasilitas bongkar hanya mampu menerima paling banyak 15 truk per hari. Pemasok menginginkan agar truk pasokannya dapat dibongkar pada hari yang sama. Suatu hari, pemasok mengirimkan sebuah truk ke pabrik tersebut, berapa kemungkinan truk tersebut harus bermalam karena tidak dapat dibongkar?

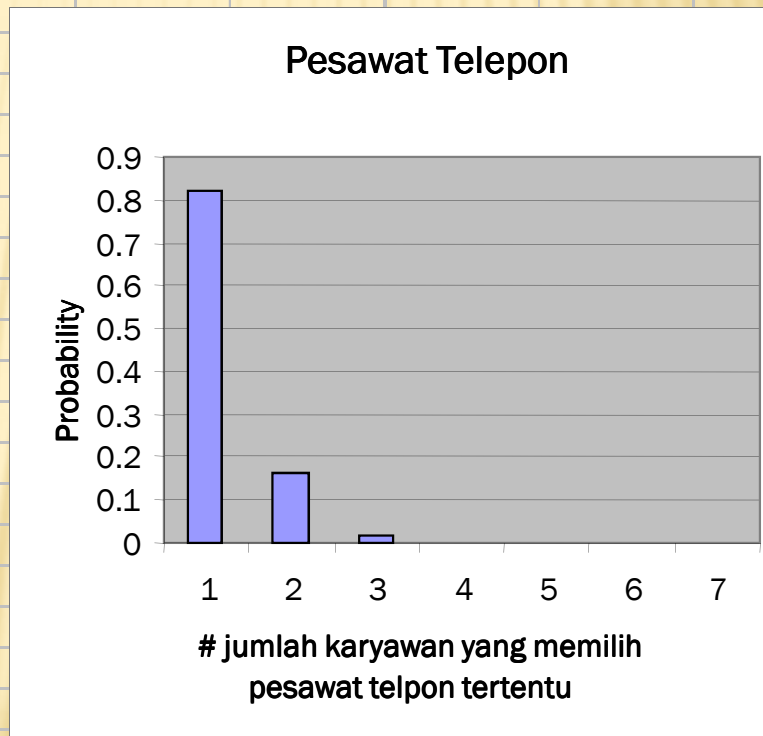
X adalah variabel random banyaknya truk bahan baku yang tiba setiap hari. Dengan distribusi Poisson, kemungkinan sebuah truk harus bermalam adalah $P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - \sum_{x=0}^{15} p(x; 10) = 0.9513$

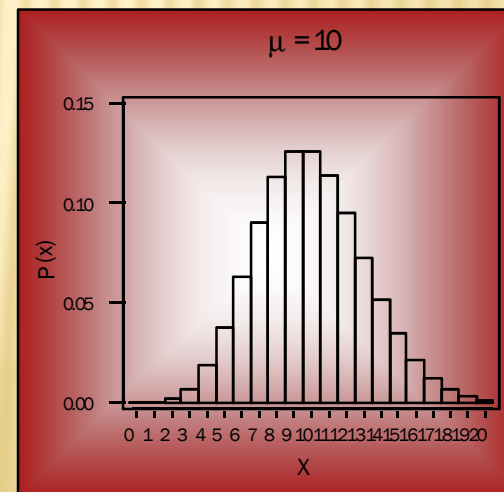
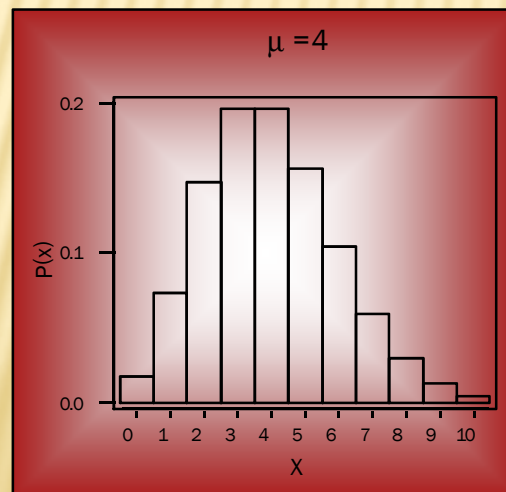
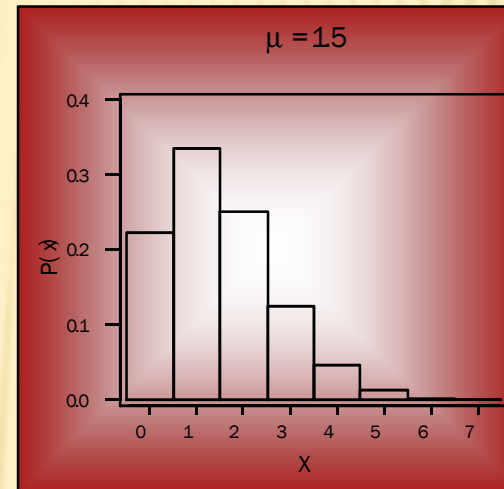
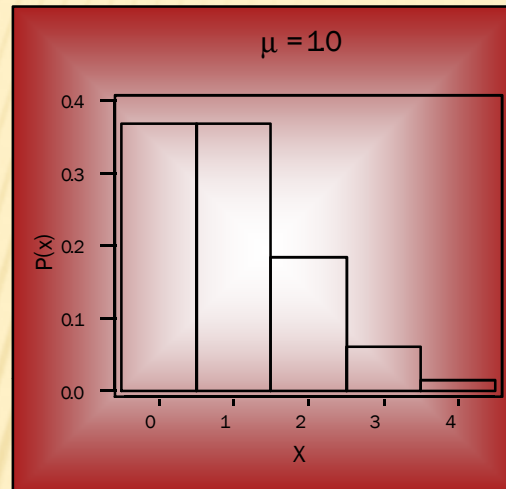
(dari tabel), maka kemungkinan sebuah truk harus bermalam karena tidak dapat dibongkar adalah $1 - 0.9513 = 0.0487$.

X = jumlah karyawan yang memilih pesawat telepon tertentu

Poisson Distribution mean = 0.2

X	P(X = x)	P(X ≤ x)
0	0.818731	0.818731
1	0.163746	0.982477
2	0.016375	0.998852
3	0.001092	0.999943
4	0.000055	0.999998
5	0.000002	1
6	0	1





PENDEKATAN BINOMIAL - POISSON

Pada distribusi probabilitas binomial, jika n sangat besar dan p kecil, maka perhitungan kemungkinannya sulit dilakukan. Pada kondisi tersebut, perhitungan nilai kemungkinan untuk variabel random binomial dapat didekati dengan perhitungan (atau tabulasi) pada distribusi poisson.

Teorema :

Jika X adalah variabel random binomial dengan distribusi kemungkinan $b(x;n,p)$, dan jika bila ukuran sampel $n \rightarrow \infty$, nilai proporsi sukses $p \rightarrow 0$, dan digunakan pendekatan $\mu = np$, maka nilai $b(x;n, p) \rightarrow p(x; \mu)$.

Bukti :

Fungsi distribusi kemungkinan binomial dapat ditulis sebagai berikut

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x}.$$

Jika dilakukan transformasi $p = \mu/n$ maka diperoleh

$$b(x; n, p) = \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-x} = 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) = 1,$$

dan dari definisi bilangan natural e , diperoleh hubungan berikut

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \frac{1}{(-n)/\mu} \right]^{-n/\mu} \right\}^{-\mu} = e^{-\mu}.$$

Dengan memperhatikan syarat limit di atas dapat diperoleh

$b(x; n, p) \rightarrow \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$, dimana $x=0, 1, 2, \dots$, yaitu sebuah distribusi poisson untuk $\mu = \alpha$ (rata-rata jumlah sukses=rata-rata kedatangan).

Contoh

Besarnya kemungkinan ditemukan cacat pada hasil pengelasan titik adalah 0.001. Pada sebuah produk hasil rakitan terdapat 4000 titik pengelasan, berapa kemungkinan ditemukan lebih dari 6 cacat pada sebuah produk hasil rakitan?

Variabel random X (binomial) menyatakan jumlah cacat pada hasil rakitan, maka kemungkinan ditemukan lebih dari 6 cacat tersebut adalah

$$P(X \leq 6) = \sum_{x=0}^6 \binom{4000}{x} 0.001^x \cdot 0.999^{4000-x}.$$

Perhitungan ini sulit dilakukan sehingga didekati dengan perhitungan untuk fungsi distribusi kemungkinan Poisson (dimana parameter adalah

$\alpha = 4000 \cdot 0.001 = 4$) sebagai berikut $P(X \leq 6) = \sum_{x=0}^6 e^{-4} \cdot 4^x / x! = 0.889$, maka

kemungkinan ditemukan lebih dari 6 cacat adalah $1 - 0.889 = 0.111$.

Contoh

Sebuah proses menghasilkan barang-barang dari plastik yang sering kali memiliki gelembung atau cacat. Diketahui bahwa rata-rata terdapat 1 dari 1000 barang yang dihasilkan mempunyai satu atau lebih cacat.

Berapa kemungkinan bahwa dari sampel acak berjumlah 8000 produk plastik akan terdapat 7 produk yang memiliki cacat gelembung?

Pada dasarnya, kasus produk plastik cacat ini mengikuti distribusi binomial dengan $n=8000$ dan $p=0,001$. Karena p sangat kecil dan mendekati nol serta n sangat besar, maka perhitungan nilai kemungkinan dapat didekati dengan distribusi Poisson dengan dimana $\mu = (8000)(0,001)=8$, sehingga kemungkinan bahwa dari sampel acak berjumlah 8000 produk plastik akan terdapat 7 produk yang memiliki cacat dapat dihitung sebagai berikut

$$P(X < 7) = \sum_{x=0}^6 b(x; 8000, 0,001) \cong \sum_{x=0}^6 p(x; 8) = 0,3134.$$

DISTRIBUSI PROBABILITAS UNIFORM

Distribusi probabilitas diskrit uniform berkaitan dengan variabel random dimana semua nilainya memiliki kemungkinan yang sama.

Definisi

Jika variabel random X memiliki nilai x_1, x_2, \dots, x_k dengan kemungkinan terjadi yang sama maka dikatakan bahwa variabel random X mengikuti distribusi uniform diskrit dengan fungsi distribusi kemungkinan sebagai berikut

$$f(x; k) = \frac{1}{k}, \text{ dimana } x = x_1, x_2, \dots, x_k$$

Parameter pemusatan dan penyebaran adalah sebagai berikut :

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^k x_i \cdot \frac{1}{k} \text{ dan } V(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot \frac{1}{k} - \left(\sum_{i=1}^k x_i \cdot \frac{1}{k} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2}{k}.$$

DISTRIBUSI BINOM

Suatu eksperimen, atau setiap usaha dengan dua kemungkinan hasil *sukses* atau *gagal*. Eksperimen semacam ini dinamakan eksperimen bernoulli, apabila probabilitas *sukses* pada setiap eksperimen tetap, misalnya p , maka banyaknya *sukses* x dalam eksperimen Bernoulli berdistribusi Binomial

$$p(x) = {}^n C_x p^x (1-p)^{n-x}$$

PERSYARATAN SUATU PERCOBAAN BINOMIAL

1. Percobaan/eksperimen terdiri dari n yang berulang
2. Setiap usaha memberikan hasil yang dapat ditentukan dengan *sukses* atau *gagal*
3. Probabilitas *sukses*, dinyatakan dengan p , tidak berubah dari usaha yang satu ke usaha yang berikutnya
4. Tiap usaha bebas dengan usaha yang lainnya.

CONTOH :

MELEMPARKAN UANG LOGAM TIGA KALI, LEMPARAN SUKSES BILA DIPEROLEH SATU KALI BAGIAN BELAKANG UANG YANG MUNCUL

$S = \{BBB, BBM, BMB, MBB, BMM, MBM, MMB, MMM\}$

$$p(x) = (n, x) p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(B) = n! / B!(n-B)! \cdot P^B \cdot (1-P)^{n-b}$$

$$\begin{aligned} P(B=1) &= (3.2.1)/(1).(2.1) \cdot (1/2)(1/2)^{3-1} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\binom{3}{x}}{8}$$

$$x = 0, 1, 2, 3$$

X = variabel acak BINOM

Nilai distribusi Binom dinyatakan dengan $b(x:n,p)$

contoh sebuah koin dilempar 3 kali

$$b\left(x:3, \frac{1}{2}\right) = \frac{\binom{3}{x}}{8}$$

$$x = 0, 1, 2, 3$$

P = peluang sukses

q = peluang gagal

N = banyak lemparan atau banyaknya koin sekali lempar

x = sukses

n - x = gagal

UMUM

$$b(x : n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

Contoh:

Tentukan peluang untuk mendapatkan muncul angka 2 sebanyak 3 kali dari sebuah dadu yang dilemparkan 5 kali !!!

solusi

$$b(x : n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$b\left(3 : 5, \frac{1}{6}\right) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{5^2}{6^5} = 0,032$$

BESARAN-BESARAN UNTUK DISTRIBUSI BINOM

Rerata	$\mu = Np$
Varians	$\sigma^2 = Npq$
Standar Deviasi	$\sigma = \sqrt{Npq}$
Koefisien Kemiringan Momen	$a_3 = \frac{q - p}{\sqrt{Npq}}$
Koefisien Kurtosis Momen	$a_4 = 3 + \frac{1 - 6pq}{Npq}$

DISTRIBUSI MULTINOM

Percobaan mendapatkan kejadian sebanyak k: E_1, E_2, \dots, E_k

Peluang masing-masing p_1, p_2, \dots, p_k

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k; p_1, p_2, \dots, p_k, n) = \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

dengan

$$\sum_{i=1}^k x_i = n \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1$$

CONTOH:

Sepasang dadu dilempar 6 kali. Tentukan peluang untuk mendapatkan:

- a. Jumlah 7 dan 11
- b. Angka yang sama satu kali
- c. Kombinasi lainnya 3 kali

Solusi

a. E_1 : total 7 dan 11 $\longrightarrow p_1 = \frac{2}{9}$

b. E_2 : sekali berpasangan $\longrightarrow p_2 = \frac{1}{6}$

c. E_3 : tidak berpasangan juga tidak berjumlah 7 atau 11 $\longrightarrow p_3 = \frac{11}{18}$

DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

Contoh-1:

Kartu Bridge : 52 kartu

Hitam Club dan spade = 26

Merah Diamond dan HEart = 26

Banyak cara mengambil 3 kartu merah dari 26 kartu merah = $\binom{26}{3}$

Banyak cara mengambil 2 kartu hitam dari 26 kartu hitam = $\binom{26}{2}$

Banyak cara mengambil 5 kartu merah atau hitam tanpa dikembalikan = $\binom{52}{5}$

Peluang mengambil 5 kartu (3 merah & 2 hitam) tanpa dikembalikan

$$\frac{\binom{26}{3} \binom{26}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{\frac{26!}{3!(26-3)!} \frac{26!}{2!(26-2)!}}{\frac{52!}{5!(52-5)!}} = \frac{\frac{26!}{3!23!} \frac{26!}{2!24!}}{\frac{52!}{5!47!}} = 0,3251$$

UMUM

Sukses x dari k sukses

$(N-x)$ gagal dari $(N-k)$

Bilangan yang menunjukkan X sukses dalam eksperimen Hypergeometrik disebut variabel acak Hypergeometrik. Distribusi peluang hipergeometrik dinyatakan dengan $h(x;N,n,k)$ bergantung pada banyaknya sukses k

Karakteristik percobaan
hipergeometrik:

- (1) Sampel acak berukuran n diseleksi dari populasi berukuran N
- (2) K dari N diklasifikasikan sebagai “SUKSES” dan $(N-k)$ “GAGAL”

