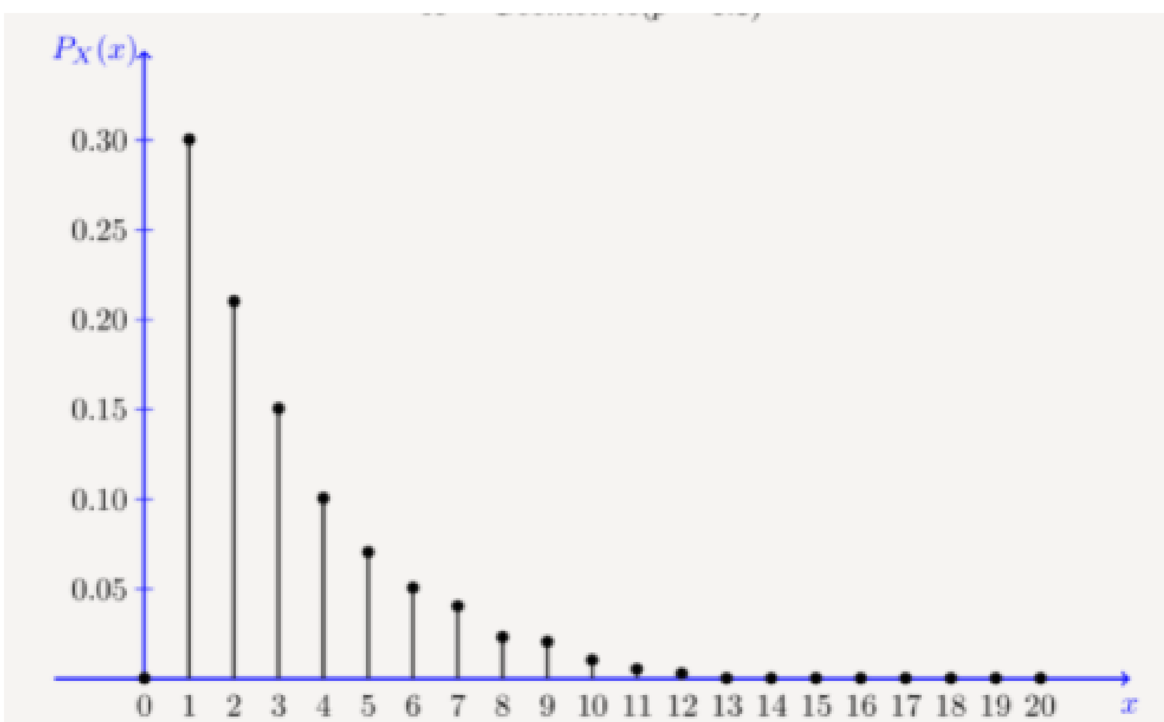
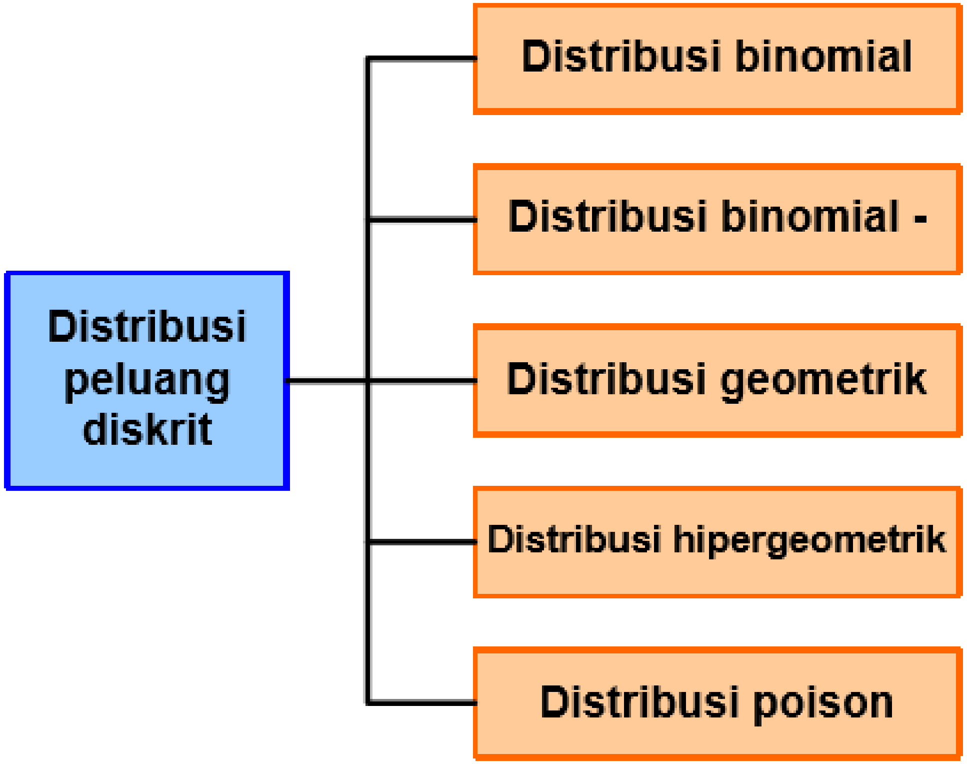
UNIVERSITAS TERBUKA

DISTRIBUSI PELUANG DISKRET

SATS4121 / MODUL 5



DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT



Distribusi Bernoulli

UNIVERSITAS TERBUKA

BERNOULLI TRIAL

a. Ciri - ciri :

1. Percobaan menghasilkan 2 keluaran M. E., yaitu S = SUKSES dan F = GAGAL
2. Keluaran bersifat exhaustive, yaitu : tidak ada keluaran yang lain
3. P(S) = p dan P (F) = q, sehingga p+q = 1

b. Diberikan oleh : $P(Y = y) = p^y.q^{(1-y)}$, dengan $y = \begin{cases} 1, \text{jika S muncul} \\ 0, \text{jika F muncul} \end{cases}$

c. $\mu = p$ dan $\sigma^2 = p.q$

STUDI KASUS 1

Dalam pelemparan koin, ditentukan bahwa munculnya muka (M) adalah SUKSES dan munculnya belakang (B) adalah GAGAL.

SOLUSI : y = 1, jika muncul muka, dan P(M) = p = ½

y = 0, jika muncul belakang, dan P(B) = q = ½

Sehingga distribusi peluang dari y menurut *bernoulli trial* adalah :

$$P(1) = p^1.q^{(1-1)} = p = 0,5$$

$$P(0) = p^0.q^{(1-0)} = q = 0,5$$

UNIVERSITAS TERBUKA

Distribusi Binomial

DISTRIBUSI BINOMIAL

a. Ciri - ciri :

1. Percobaan terdiri atas n kali *bernoulli trial* yang identik ;
2. Hanya ada 2 keluaran M.E., yaitu S = SUKSES dan F = GAGAL untuk tiap *trial* ;
3. P(S) = p dan P (F) = q, bernilai tetap dari satu *trial* ke *trial* lain ;
4. Semua *trial* saling *independent* ;
5. Variabel *random* Binomial Y adalah adalah jumlah S dalam n *trial*.

b. Diberikan oleh :

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} . p^y . q^{(n-y)}, \text{ untuk } y = 0,1,2,\ldots,n$$

dengan : p = peluang SUKSES dalam *trial* tunggal

q = 1 - p

n = jumlah *trial*

y = jumlah SUKSES dalam n *trial*

c. $\mu = n.p$ dan $\sigma^2 = n.p.q$

Distribusi Binomial

UNIVERSITAS TERBUKA

STUDI KASUS 2

Seorang insinyur elektro sedang mengamati problem arus listrik pada komputer. Hasil *survey* terakhir menunjukkan bahwa 10 % komputer yang dipakai mengalami problem ini. Jika 5 sampel *random* dipilih dari seluruh populasi amatan, hitung peluang :

a. terdapat 3 komputer terpilih mengalami kerusakan

b. paling sedikit 3 komputer terpilih mengalami kerusakan

c. kurang dari 3 komputer terpilih mengalami kerusakan

SOLUSI :

a. Tepat 3 komputer, y = 3

$$P(3) = \binom{5}{3}.(10\%)^3.(90\%)^{(2)} = 0{,}0081$$

b. Paling sedikit 3 komputer, y = 3, 4, dan 5

P (Y ≥ 3) = P(3) + P(4) + P(5)

$$P(3) = 0{,}0081$$

$$P(4) = \binom{5}{4}.(10\%)^4.(90\%)^1 = 0{,}00045$$

$$P(5) = \binom{5}{5}.(10\%)^5.(90\%)^0 = 0{,}00001$$

Maka, P(Y ≥ 3) = 0,0081 + 0,00045 + 0,00001

= 0,00856

Distribusi Binomial

c. Kurang dari 3 komputer, $y = 0, 1, 2$

$P(Y < 3) = 1 - P(Y \geq 3) = 1 - 0{,}00856 = 0{,}99144$

ATAU dengan memanfaatkan TABEL DISTRIBUSI BINOMIAL.

STUDI KASUS 3

Sebuah mata uang dilempar 4 kali, kemungkinan munculnya sisi gambar mempunyai distribusi Binomial dengan kemungkinan sukses ½ adalah sebagai berikut :

$$P(Y=y)=\binom{4}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-y}$$

Kemungkinan munculnya gambar 2 kali adalah :

$$P(Y=y)=\binom{4}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-y}=\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{6}{16}$$

Distribusi Binomial

Fungsi kepadatan probabilitasnya adalah :

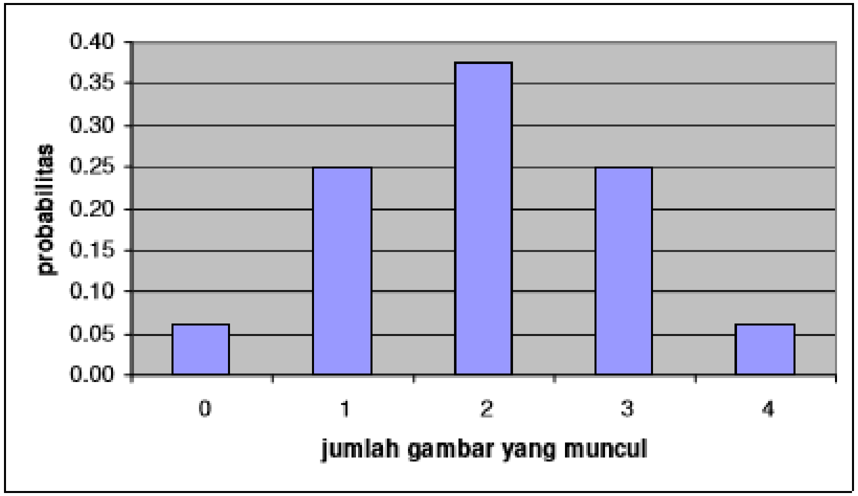
$$P(0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P(1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16}$$

$$P(3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(4) = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$



Distribusi Binomial

Rata-rata kemunculan gambar adalah :

$$\mu = \sum_{n=0}^{4} y \binom{4}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^{y} \left(\frac{1}{2}\right)^{4-y}$$

$$= 0 + 1\frac{4!}{1!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} + 2\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} + 3\frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} + 4\frac{4!}{0!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

$$= \frac{4}{16} + \frac{12}{16} + \frac{12}{16} + \frac{4}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

Varians kemunculan gambar adalah :

$$\sigma^2 = np(1-p) = 4\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = 4\frac{1}{2}\frac{1}{2} = 1$$

STUDI KASUS 5

Dilakukan n pengulangan percobaan dengan menggunakan bilangan acak yang mempunyai probabilitas untuk sukses adalah $\frac{2}{3}$

1. Jika diulangi 3 kali, hitung kemungkinan sukses lebih dari 2 kali.
2. Jika diulangi 5 kali, hitung kemungkinan sukses lebih dari 3 kali.

Distribusi Binomial

Bila dilakukan pengulangan 2 kali

$$P(y \geq 2) = P(2) + P(3)$$

$$= \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{1} + \binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 3.\frac{4}{9}.\frac{1}{3} + 1.\frac{8}{27} = \frac{20}{27}$$

Bila dilakukan pengulangan 5 kali

$$P(y \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$$

$$= \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2} + \binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{1} + \binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$$

$$= 10.\frac{8}{27}.\frac{1}{9} + 5.\frac{16}{81}.\frac{1}{3} + \frac{32}{243} = \frac{80+80+32}{243} = \frac{192}{243}$$

Distribusi Multinomial

DISTRIBUSI MULTINOMIAL

Percobaan BINOMIAL akan menjadi percobaan MULTINOMIAL apabila tiap usaha dapat memberikan lebih dari DUA hasil yang mungkin. Misal, pembagian hasil *output* pabrik menjadi ringan, berat, atau masih dapat diterima. Contoh lain adalah pengambilan suatu kartu dengan perhatian kempat jenis kartu.

a. Ciri - ciri

1. Percobaan terdiri atas n kali *trial* yang identik ;
2. Terdapat k jenis keluaran untuk tiap *trial* ;
3. $p_1, p_2, p_3,..,p_k$, yaitu peluang dari masing - masing keluaran, bernilai tetap dari satu *trial* ke *trial* lain, dan $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_k = 1$;
4. Semua *trial* bersifat *independent* ;
5. Variabel *random* multinomial adalah $Y_1, Y_2, Y_3,...,Y_k$ untuk setiap k jenis keluaran.

Distribusi Multinomial

b. Diberikan oleh :

$$P(Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_k) = \frac{n!}{y_1!\, y_2!\, y_3! \ldots y_k!} . p_1^{y_1} . p_2^{y_2} . p_3^{y_3} \ldots . p_k^{y_k}$$

dengan : p_i = peluang keluaran ke - i dalam *trial* tunggal

$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k = 1$

$n = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_k$ = jumlah *trial*

y_i = jumlah kemunculan keluaran ke - i dalam n *trial*

c. $\mu_i = n.p_i$ dan $\sigma^2_i = n.\ p_i.(1-p_i)$

STUDI KASUS 6

Sebuah penelitian menunjukkan bahwa 10% monitor komputer memberikan radiasi tinggi, 30 % sedang, dan 60% rendah. Bila diambil sampel acak 40 monitor dari sebuah populasi amatan, hitunglah :

a. Peluang bahwa 10 monitor memiliki radiasi tinggi, 10 sedang, 20 rendah ;
b. Rata - rata dan variansi monitor dengan radiasi tinggi dari 40 monitor yang terpilih sebagai sampel.

Distribusi Multinomial

SOLUSI :

a. Ditentukan :

y_1 = jumlah monitor radiasi tinggi
y_2 = jumlah monitor radiasi sedang
y_3 = jumlah monitor radiasi rendah
p_1 = peluang terpilihnya monitor radiasi tinggi
p_2 = peluang terpilihnya monitor radiasi sedang
p_3 = peluang terpilihnya monitor radiasi rendah

Sehingga :

$$P(10,10,20) = \frac{40!}{10!10!20!}.(10\%)^{10}.(30\%)^{10}.(60\%)^{20} = 0{,}0005498$$

b. $\mu_i = n.p_i = 40.10\% = 4$

$\sigma^2{}_i = n.\ p_i.(1-p_i) = 40.(10\%).(1-10\%) = 3{,}6$

Distribusi Geometrik

DISTRIBUSI GEOMETRIC

Distribusi GEOMETRIC, yaitu banyaknya usaha yang berakhir pada sukses yang pertama.

a. Ciri - ciri

Distribusi Binomial negatif dengan r =1 (mencapai SUKES pertama)

b. Diberikan oleh :

$$P(Y = y) = p.q^{y-1}, \text{untuk } y = 1,2,3,\ldots$$

dengan : y = jumlah *trial* sampai SUKSES PERTAMA dicapai.

c. $\mu_i = 1/p$ dan $\sigma^2 = q/p^2$

Distribusi Geometrik

Sebuah kontainer berisi sekring untuk ekspor. Dari spesifikasi produsen diketahui bahwa proporsi cacat sekring adalah 10 %. Inspektor sedang melakukan pengujian kesesuaian mutu sekring dengan cara mengambil satu persatu sampai diketemukan sekring yang cacat. Tentukan peluang bahwa sekring cacat ditemukan dalam 5 pengujian pertama.

SOLUSI :

$p = 0,1$ dan $q = 0,9$

Sehingga : $P(Y = y) = p.q^{y-1} = (0,1).(0,9)^{y-1}$

$P(Y \leq 5) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5)$

$= (0,1)(0,9)^0 + (0,1)(0,9)^1 + (0,1)(0,9)^2 + \dots + (0,1)(0,9)^4$

$= 0,41$

Distribusi Hipergeometrik

DISTRIBUSI HYPERGEOMETRIC

a. Ciri - ciri

1. Percobaan terdiri atas pengambilan *random* n elemen tanpa pengembalian dari total N elemen ;
2. Terdapat S (SUKSES) sebanyak r dan F(GAGAL) sebanyak N - r ;
3. Ukuran n dianggap besar sebanding N (n/ N > 0,05)
4. Variabel *random hypergeometric* Y adalah jumlah S (SUKSES) dalam pengambilan n elemen.

b. Diberikan oleh :

$$P(Y=y)=\frac{\binom{r}{y}\binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}}, \text{ untuk } y=0,1,2,3,\ldots,n$$

dengan : N = jumlah total elemen

r = jumlah SUKSES dalam N

n = jumlah elemen pengambilan

y = jumlah SUKSES dalam pengambilan (n)

c. μ_i = n.r/ N dan $\sigma^2 = \frac{r.(N-r).n.(N-n)}{N^2(N-1)}$

Distribusi Hipergeometrik

STUDI KASUS

Dari 10 katalis yang ada diperlukan 3 untuk keperluan pembuatan produk kimia baru. Dari sepuluh katalis tersebut terdapat 4 jenis katalis berkadar asam tinggi dan 6 jenis berkadar asam rendah.

a. tentukan peluang bahwa katalis yang terpilih semua berkadar asam rendah ;

b. tentukan peluang bahwa dari 3 katalis yang dipilih, hanya 1 yang memiliki kadar asam tinggi.

SOLUSI :

y = jumlah katalis berkadar asam tinggi dari 3 katalis terpilih

N = 10 , n = 3 , r = 4

MAKA

$$P(Y=y) = \frac{\binom{4}{y}\binom{6}{3-y}}{\binom{10}{3}}$$

a. $$P(Y=0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$$

b. $$P(Y=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}$$

Distribusi Poisson

DISTRIBUSI POISSON

a. Ciri - ciri

1. Variabel *random* y = jumlah kemunculan kejadian yang diamati selama unit ukuran tertentu (contoh : jarak, area, volume, dll) ;
2. Nilai peluang dari sebuah kejadian adalah sama untuk setiap ukuran tertentu ;
3. Jumlah kejadian yang muncul untuk setiap unit adalah *independent* ;
4. λ = rata - rata jumlah kejadian dalam setiap unit ukuran

b. Diberikan oleh

$$P(Y = y) = \frac{\lambda^y . e^{-\lambda}}{y!}, \text{untuk } y = 0,1,2,\ldots$$

dengan : λ = rata - rata jumlah kejadian dalam setiap unit ukuran

e = 2,71828

c. $\mu = \lambda$ dan $\sigma^2 = \lambda$

Distribusi Poisson

STUDI KASUS

Sejumlah y retak pada spesimen beton untuk sebuah jenis semen mengikuti distribusi poisson. Dengan pengamatan awal diketahui bahwa jumlah rata - rata keretakan setiap spesimen adalah 2,5. Tentukan peluang bahwa sebuah spesimen yang dipilih secara *random* memiliki jumlah keretakan 5.

SOLUSI :

$\mu = \lambda = 2{,}5$

Sehingga

$$P(Y = 5) = \frac{2{,}5^5 . e^{-2{,}5}}{5!} = 0{,}067$$

Distribusi Poisson

y	P(y)
0	0.018316
1	0.073263
2	0.146525
3	0.195367
4	0.195367
5	0.156293
6	0.104196
7	0.059540
8	0.029770
9	0.013231
10	0.005292
11	0.001925
12	0.000642
13	0.000197
14	0.000056
15	0.000015

STUDI KASUS

Rata-rata kedatangan truk setiap jam pada sebuah gudang bongkar muat adalah 4, maka kedatangan x truk dapat dinyatakan sebagai distribusi Poisson dengan rata-rata 4 yang dituliskan dengan :

$$P(Y = y) = \frac{e^{-4} 4^{y}}{y!}$$