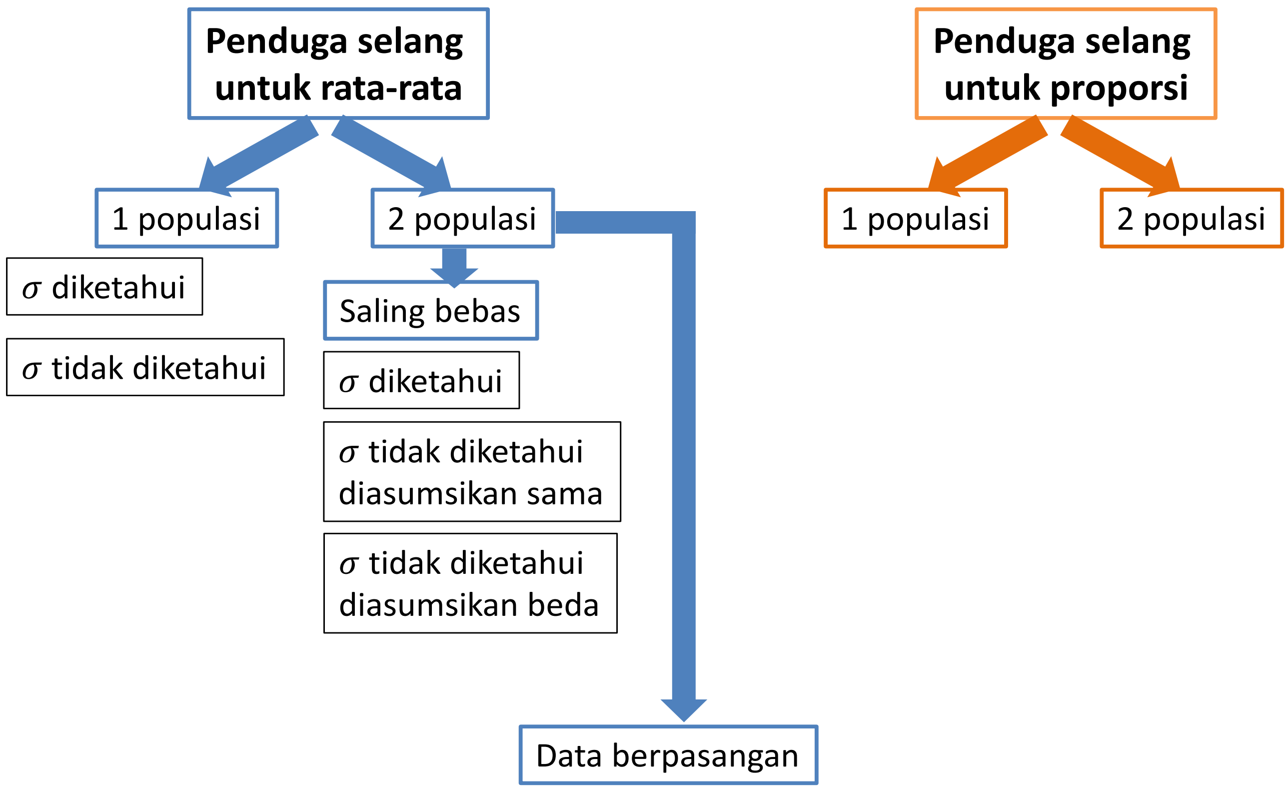
Metode Statistik 1

Statistika Inferensia

Pendugaan Titik dan Selang (Bagian 2)

Jenis Penduga Selang

Jenis Penduga Selang



Penduga Selang Untuk Rata-rata (μ)

- Akan ditentukan selang taksiran dari μ.
- Misalkan sampel diambil dari populasi normal atau jika tidak mempunyai ukuran sampel yang besar, selang kepercayaan untuk μ dapat dibuat dengan menggunakan distribusi sampel $\bar{x}$.
- Sesuai dengan teorema limit pusat, diharapkan distribusi sampel $\bar{x}$ akan mendekati normal dengan rataan $\mu_{\bar{x}} = \mu$ dan simpangan baku $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

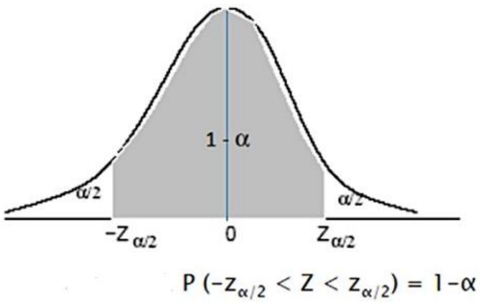
Pendugaan Titik untuk Rataan

Populasi	Penduganya
μ	$\bar{x}$
σ^2	$s^2 = \frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{n}$
cenderung akan menjadi penduga μ yang amat tepat, jika n (ukuran sampel) besar	

Penduga Selang Untuk Rata-rata (μ) (1 Populasi)

- Tulislah $z_{\alpha/2}$ untuk nilai z yang di sebelah kanannya terdapat daerah seluas $\alpha/2$,

- Selanjutnya peluang Z yang terletak antara $-z_{\alpha/2}$ dan $z_{\alpha/2}$ ditunjukkan pada kurva berikut:



$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

di mana:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

sehingga:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

atau dapat dituliskan:

$$\boxed{P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha}$$

Penduga Selang Untuk Rata-rata (μ) (1 Populasi)

Selang kepercayaan untuk μ bila σ diketahui :

Jika $\bar{x}$ adalah rataan dari sampel acak dengan ukuran n dari sebuah populasi dengan variansi σ^2, maka selang kepercayaan (1 - α) 100% dari μ adalah

$$\boxed{\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Dimana $z_{\alpha/2}$ adalah nilai z yang memberikan luas $\frac{\alpha}{2}$ sebelah kanan nilai tersebut.

Penduga Selang Untuk Rata-rata (μ) (1 Populasi)

Selang kepercayaan untuk μ bila σ tidak diketahui :

Jika $\bar{x}$ dan s adalah rataan dan simpangan baku dari sampel acak dari populasi normal dengan variansi σ^2 tidak diketahui, maka selang kepercayaan (1 - α) 100% dari μ adalah

$$\boxed{\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2};(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2};(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Dimana $t_{\alpha/2}$ adalah nilai t dengan $n-1$ derajat kebebasan yang memberikan luas $\frac{\alpha}{2}$ sebelah kanan nilai tersebut.

Penggunaan distribusi t untuk σ yang tidak diketahui berdasarkan anggapan bahwa sampel berasal dari populasi berdistribusi hamper normal (kurva berbentuk lonceng)

Contoh Soal Penduga Selang Untuk Rata-rata (μ) (1 Populasi)

Rata-rata nilai IPK 36 mahasiswa tingkat akhir adalah 3,6 dengan simpangan baku populasinya sebesar 0,3. Hitunglah selang kepercayaan 95% dan 99% untuk rata-rata seluruh mahasiswa tersebut.

Nilai duga μ adalah $\bar{x}$ = 3,6

- Nilai σ dapat diduga dengan s = 0,3 (n ≥ 30)
- Selang kepercayaan 95% (α = 5% = 0,05)
- Nilai z sebelah kanan = 0,025 (α/2) = -1,96
- Nilai z sebelah kiri = 0,975 = 1,96

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$3,6 - (1,96)\frac{0,3}{\sqrt{36}} < \mu < 3,6 + (1,96)\frac{0,3}{\sqrt{36}}$$

$$3,5 < \mu < 3,7$$

Contoh Soal Penduga Selang Untuk Rata-rata (μ) (1 Populasi)

- Selang kepercayaan 99% (α = 1% = 0,01)
- Nilai z sebelah kanan = 0,005 (α/2) = -2,57
- Nilai z sebelah kiri = 0,995 = 2,58

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$3{,}6 - (2{,}57)\frac{0{,}3}{\sqrt{36}} < \mu < 3{,}6 + (2{,}57)\frac{0{,}3}{\sqrt{36}}$$

$$3{,}47 < \mu < 3{,}73$$

Contoh Soal Penduga Selang Untuk Rata-rata (μ) (1 Populasi)

Terdapat tujuh botol berisi air mineral sebesar 9,8; 10,2; 10,4; 9,8; 10; 10,2 dan 9,6 liter. Tentukan selang kepercayaan 95% bagi nilai tengah isi semua botol. Asumsikan data menyebar normal.

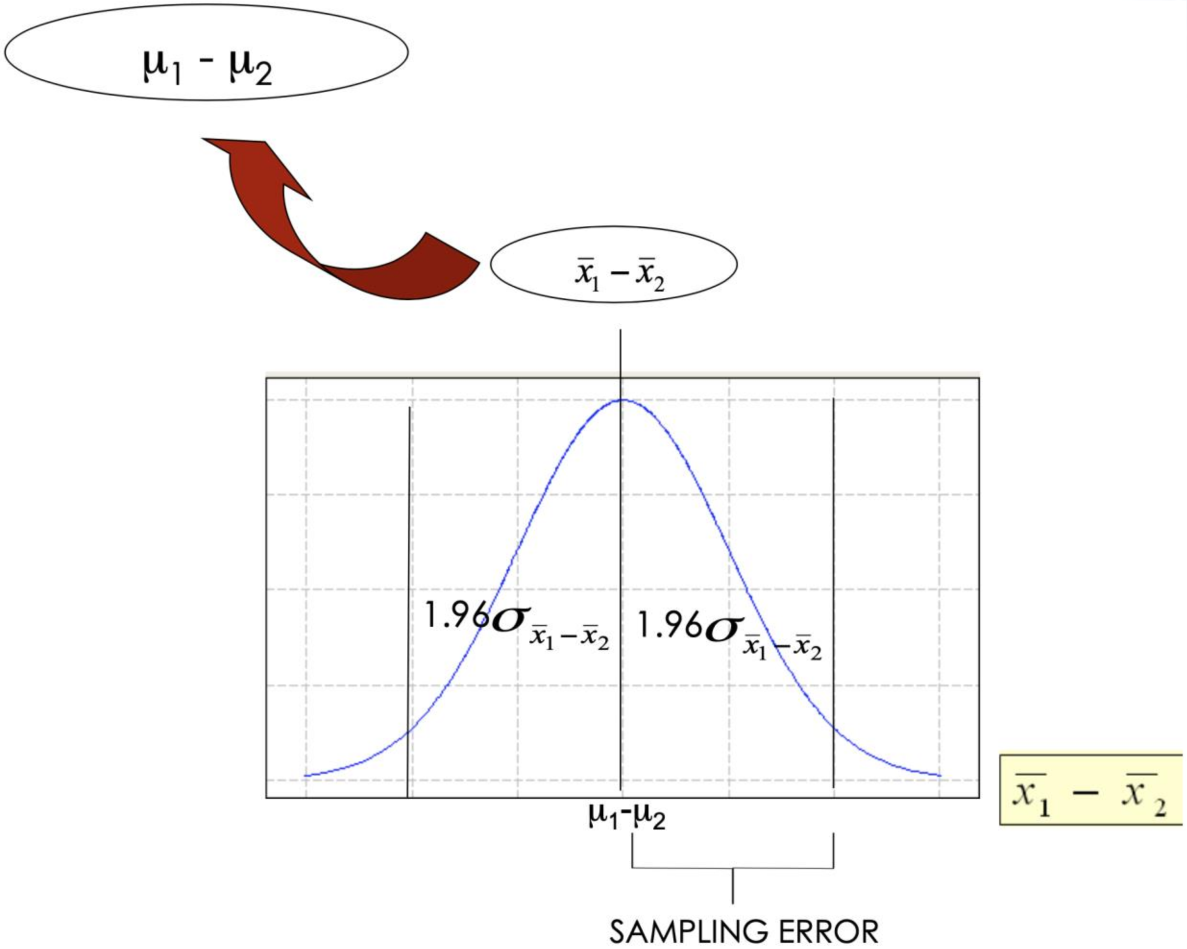
- Nilai $\bar{x} = 10$
- Nilai s = 0,283
- Selang kepercayaan 95% (α = 5% = 0,05)
- Nilai $t_{0,025} = 2{,}447$ untuk v = 6

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2};(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2};(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

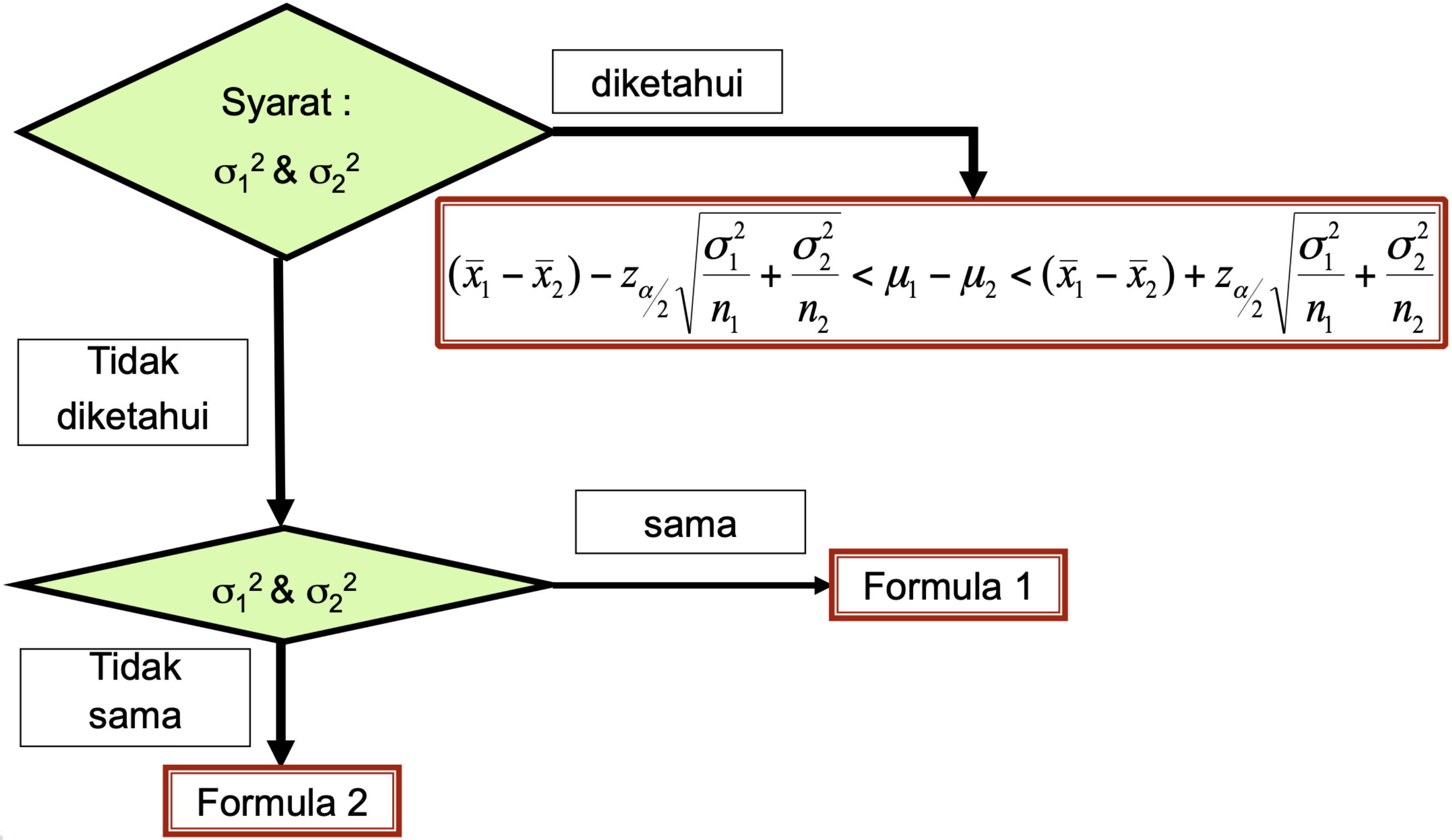
$$10 - 2{,}447 \frac{0{,}283}{\sqrt{7}} < \mu < 10 - 2{,}447 \frac{0{,}283}{\sqrt{7}}$$

$$9{,}74 < \mu < 10{,}26$$

Penduga Selang Untuk Selisih Rata-rata (μ)
(2 Populasi Saling Bebas)



Penduga Selang Untuk Selisih Rata-rata (μ)
(2 Populasi Saling Bebas)



Penduga Selang Untuk Selisih Rata-rata (μ) (2 Populasi Saling Bebas)

a. **Formula 1:**

Jika σ_1 dan σ_2 tdk diketahui dan diasumsikan sama:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2(v)} \sqrt{s_{gab}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2(v)} \sqrt{s_{gab}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

$$s_{gab}^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \text{ dan } v = n_1 + n_2 - 2$$

b. **Formula 2:**

Jika σ_1 dan σ_2 tdk diketahui dan diasumsikan tidak sama:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2(v)} \sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2(v)} \sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)}$$

$$v = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2 \right)^2}{\left[\left(s_1^2/n_1 \right)^2 / (n_1 - 1) \right] + \left[\left(s_2^2/n_2 \right)^2 / (n_2 - 1) \right]}$$

Note:
Berlaku juga untuk sampel kecil

Contoh Soal Penduga Selang Untuk Selisih Rata-rata (μ) (2 Populasi Saling Bebas)

Dua buah mesin A dan B dibandingkan dlm konsumsi BBM- nya. Random sampling mesin A sejumlah 50 dan B sejumlah 75 dipakai. Ternyata rata-rata konsumsi BBM mesin A adalah 36 mil/galon dan mesin B 42 mil/galon. Carilah interval kepercayaan 96% bagi μ_B- μ_A bilamana diketahui standard deviasi populasi bagi A= 6 mil/galon dan B = 8 mil/galon

Diket.

X_{sA}=36, X_{sB} = 42; n_A=50 dan n_B =75. σ_A=6 dan σ_B=8

Interval kepercayaan 96% bagi μ_B- μ_A :

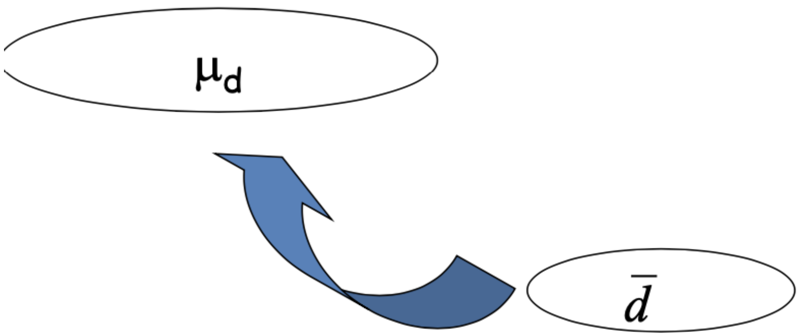
$$(\bar{x}_B - \bar{x}_A) - z_{0.02}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} < (\mu_B - \mu_A) < (\bar{x}_B - \bar{x}_A) + z_{0.02}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}$$

$$(42 - 36) - 2.05\sqrt{\frac{64}{75} + \frac{36}{50}} < (\mu_B - \mu_A) < (42 - 36) + 2.05\sqrt{\frac{64}{75} + \frac{36}{50}}$$

$3.43 < \mu_B - \mu_A < 8.57$.

Jadi beda rata2 konsumsi BBM antara mesin A dan mesin B berkisar antara 3.43 sampai 8.57 mil/galon

Penduga Selang Untuk Selisih Rata-rata (μ)
(2 Populasi Tidak Saling Bebas/ Data Berpasangan)



Dugaan selang → Selang kepercayaan (1-α)100% bagi $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$

$$\bar{d} - t_{\alpha/2(n-1)} \frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu_d < \bar{d} + t_{\alpha/2(n-1)} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

Pasangan data	**1**	**2**	**3**	**...**	**n**
Data awal (X1)	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n}
Data akhir (X2)	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}
d = X1 – X2	d_1	d_2	d_3	...	d_n

$$s_d^2 = \frac{\sum_i (d_i - \bar{d})^2}{n-1}; \; d_i = x_{1i} - x_{2i}$$

UNIVERSITAS TERBUKA

Contoh Soal Penduga Selang Untuk Selisih Rata-rata (μ)
(2 Populasi Tidak Saling Bebas/ Data Berpasangan)

- Suatu klub kesegaran jasmani ingin mengevaluasi program diet, kemudian dipilih secara acak 10 orang anggotanya untuk mengikuti program diet tersebut selama 3 bulan. Data yang diambil adalah berat badan sebelum dan sesudah program diet dilaksanakan, yaitu:

Berat Badan	Peserta									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sebelum (X1)	90	89	92	90	91	92	91	93	92	91
Sesudah (X2)	85	86	87	86	87	85	85	87	86	86
D=X1-X2	5	3	5	4	4	7	6	6	6	5

- Dugalah selang kepercayaan 95% bagi rata-rata selisih berat badan tersebut!

Contoh Soal Penduga Selang Untuk Selisih Rata-rata (μ)
(2 Populasi Tidak Saling Bebas/ Data Berpasangan)

- SK 95% bagi rata-rata selisih (μ_d) data berpasangan

$$\bar{d} - t_{\frac{\alpha}{2}(n-1)} \frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu_d < \bar{d} + t_{\frac{\alpha}{2}(n-1)} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

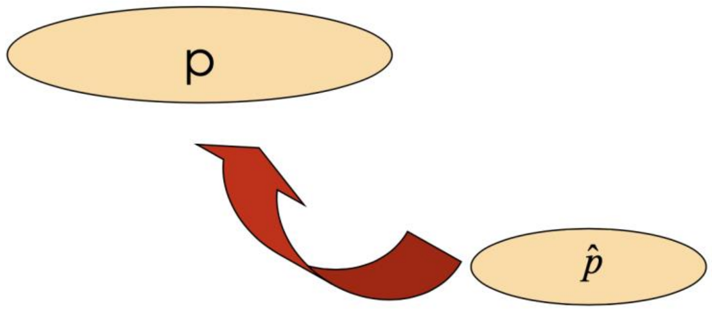
$$5.1 - t_{0.025(9)} \frac{1.197}{\sqrt{10}} < \mu_d < 5.1 + t_{0.025(9)} \frac{1.197}{\sqrt{10}}$$

$$5.1 - (2.262157)0.3785246 < \mu_d < 5.1 + (2.262157)0.3785246$$

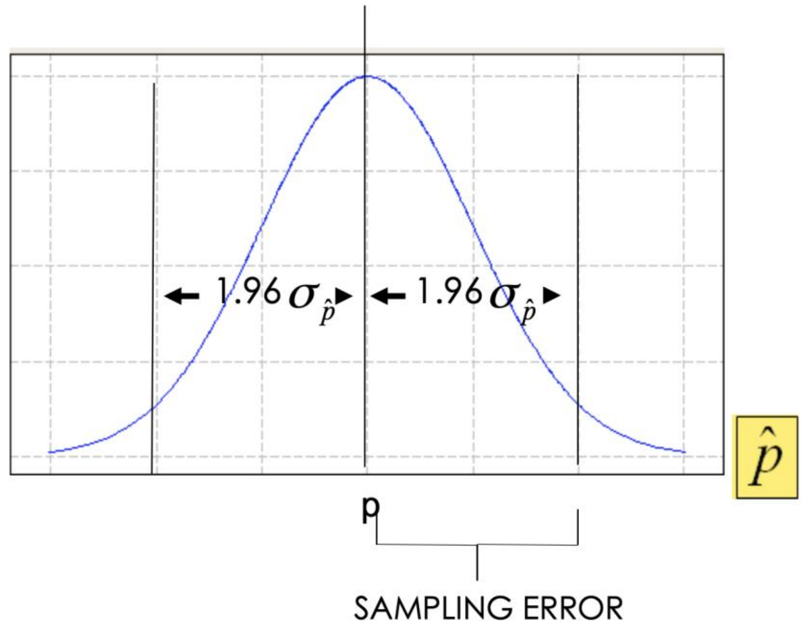
$$4.243718 < \mu_d < 5.956282$$

Jadi kita percaya bahwa pada selang 4.243718 sampai 5.956282 memuat rata-rata selisih berat badan sebelum dan setelah program diet pada α=5%

Penduga Selang Untuk Proporsi (p) (1 Populasi)



Proporsi $\hat{p}$ contoh merupakan PENDUGA tak bias bagi P



Penduga Selang Untuk Proporsi (p)
(1 Populasi)

Selang kepercayaan (1-α)100% bagi p

Sampel Besar

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < P < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Sampel Kecil

$$\hat{p} - t_{(\alpha/2;n-1)}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < P < \hat{p} + t_{(\alpha/2;n-1)}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Contoh Soal Penduga Selang Untuk Proporsi (p) (1 Populasi)

Dari sampel dengan n = 100 mahasiswa PTS "ABC". Ternyata 25 mahasiswa memiliki IPK ≥ 3. Buatlah dugaan untuk proporsi mahasiswa PTS "ABC" yang memiliki IPK ≥ 3 dengan interval keyakinan 95%.

Penyelesaian :

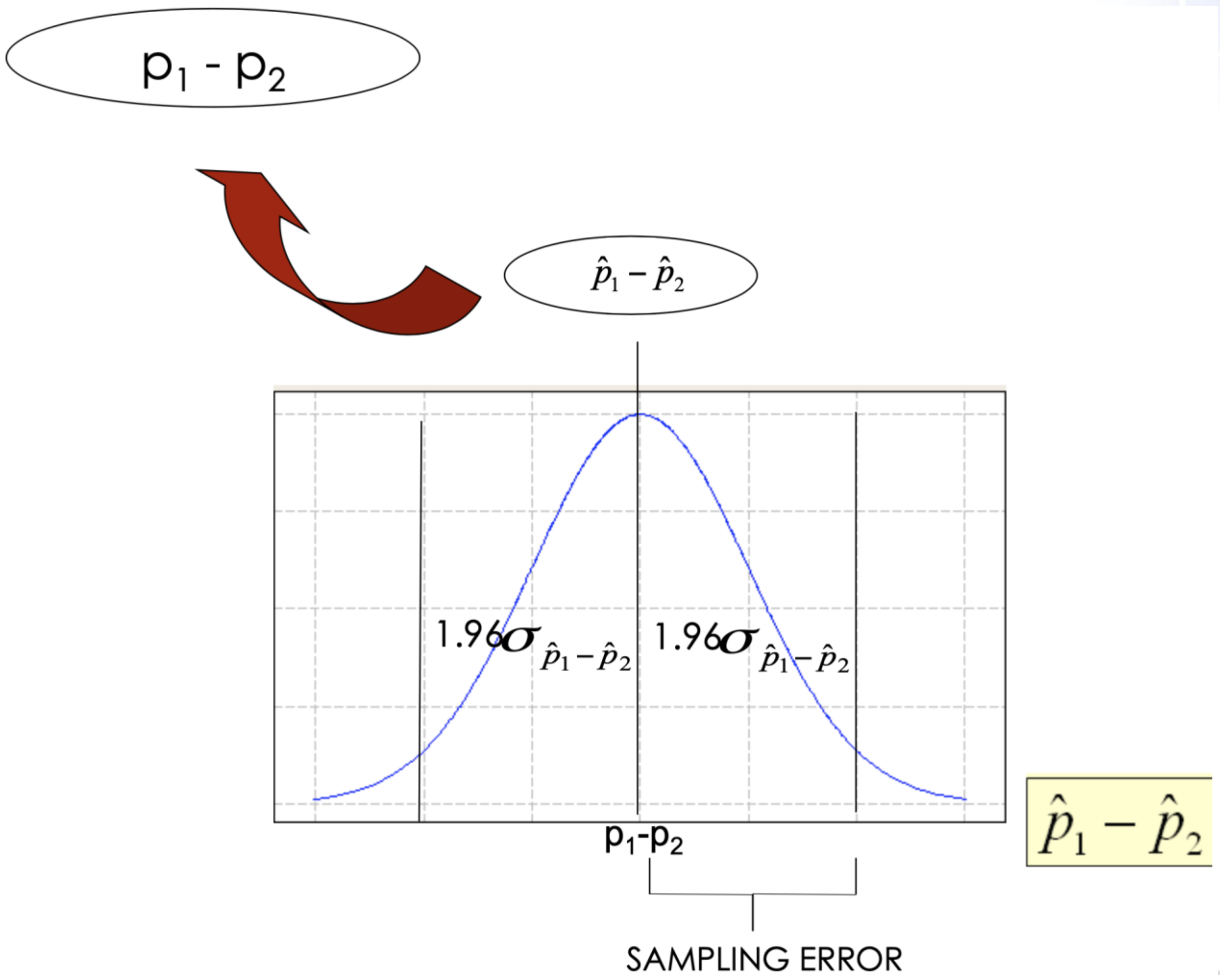
$$\bar{P} = \frac{x}{n} = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

$$UCL = \bar{P} + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} = 0{,}25 + 1{,}96. \sqrt{\frac{0{,}25(1-0{,}25)}{100}} = 0{,}335$$

$$LCL = \bar{P} - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} = 0{,}25 - 1{,}96. \sqrt{\frac{0{,}25(1-0{,}25)}{100}} = 0{,}206$$

Interval duga: p(0,206 < P < 0,335)

Penduga Selang Untuk Proporsi (p) (2 Populasi)



Penduga Selang Untuk Proporsi (p) (2 Populasi)

Selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ bagi $p_1 - p_2$

Sampel Besar

$$\boxed{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} < P1 - P2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$$

Sampel Kecil

$$\boxed{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - t_{\alpha/2;n1+n2-2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} < P1 - P2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + t_{\alpha/2;n1+n2-2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$$

Contoh Soal Penduga Selang Untuk Proporsi (p) (2 Populasi)

BKKBN melakukan penelitian di dua daerah (D1 dan D2) untuk mengetahui apakah ada perbedaan antara persentase penduduk yang setuju KB di daerah tersebut. Kemudian akan dibuat pendugaan interval mengenai besarnya selisih/perbedaan persentase tersebut. Di daerah D1 dan D2 masing-masing dilakukan wawancara terhadap 120 orang, antara lain menanyakan apakah mereka setuju KB atau tidak. Dari D1 ada 90 orang dan dari D2 ada 78 orang yang setuju KB.

Buatlah pendugaan interval dari perbedaan persentase tentang pendapat penduduk yang setuju dengan KB, di kedua daerah tersebut,dengan tingkat keyakinan sebesar 90%.

Contoh Soal Penduga Selang Untuk Proporsi (p) (2 Populasi)

Penyelesaian :

$$\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{90}{120} = 0,75, \quad \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{78}{120} = 0,65$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0,75 - 0,65 = 0,10$$

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} < p_1 - p_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

$$0,1 - 1,64\sqrt{\frac{0,75.\,0,25}{120} + \frac{0,65.0,35}{120}} < p1 - p2 < 0,1 + 1,64\sqrt{\frac{0,75.\,0,25}{120} + \frac{0,65.0,35}{120}}$$

$$0,1 - 1,64\ (0,059) < (P_1 - P_2) < 0,1 + 1,64\ (0,059)$$

$$0,003 < (P1 - P2) < 0,197$$

Sekian Penjelasan Pendugaan Titik dan Selang

Terima kasih telah menonton video ini…
Selamat belajar, semoga sukses ….

UNIVERSITAS TERBUKA