تمرین سری ۱ - سوال ۲

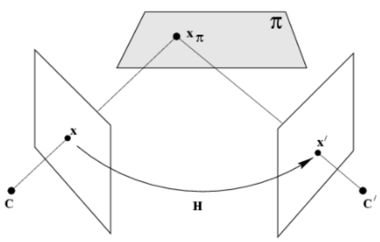
محمدجواد شریعتی
96100414

برای این تمرین از فرمولی که در اسلاید زیر آمده است استفاده کردم:

Homography induced by a plane

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}\,\mathbf{x}$$

Homography



$$n_1 X + n_2 Y + n_3 Z + d = 0$$

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^t \quad \|\mathbf{n}\| = 1$$

d = distance to the origin

$$\boldsymbol{\pi} = [\mathbf{n}^t, d]^t$$

$$\mathbf{X} \in \boldsymbol{\pi} \Leftrightarrow \boldsymbol{\pi}^t\,\mathbf{X} = 0$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}\,[\mathbf{I} \mid \mathbf{0}]\,\mathbf{X}_\pi \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{K}'\,[\mathbf{R} \mid \mathbf{t}]\,\mathbf{X}_\pi$$

$$\mathbf{X}_\pi = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}} \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{Z}\,\mathbf{K}\,[\mathbf{I} \mid \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z}\mathbf{K}\,\bar{\mathbf{X}} \Longrightarrow \bar{\mathbf{X}} = Z\,\mathbf{K}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\boldsymbol{\pi}^t\ \mathbf{X}_\pi = [\boldsymbol{n}^t, \mathrm{d}] \begin{bmatrix} Z\mathbf{K}^{-1}\mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} = Z\mathbf{n}^t\mathbf{K}^{-1}\mathbf{x} + d = \mathbf{0} \Longrightarrow Z = -\frac{d}{\mathbf{n}^t\mathbf{K}^{-1}\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{K}'\,[\mathbf{R} \mid \mathbf{t}]\,\mathbf{X}_\pi = \mathbf{K}'\,[\mathbf{R} \mid \mathbf{t}] \begin{bmatrix} -\dfrac{d\,\mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{x}}{\mathbf{n}^t\,\mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{x}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [\mathbf{K}'\mathbf{R} \mid \mathbf{K}'\mathbf{t}] \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{x} \\ -\dfrac{\mathbf{n}^t\,\mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{x}}{d} \end{bmatrix} = \mathbf{K}'\,\mathbf{R}\,\mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{x} - \frac{\mathbf{K}'\,\mathbf{t}\,\mathbf{n}^t\,\mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{x}}{d}$$

$$= \mathbf{K}'\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{t}\mathbf{n}^\mathbf{t}}{d}\right)\mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{x}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}'\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{t}\mathbf{n}^\mathbf{t}}{d}\right)\mathbf{K}^{-1}$$

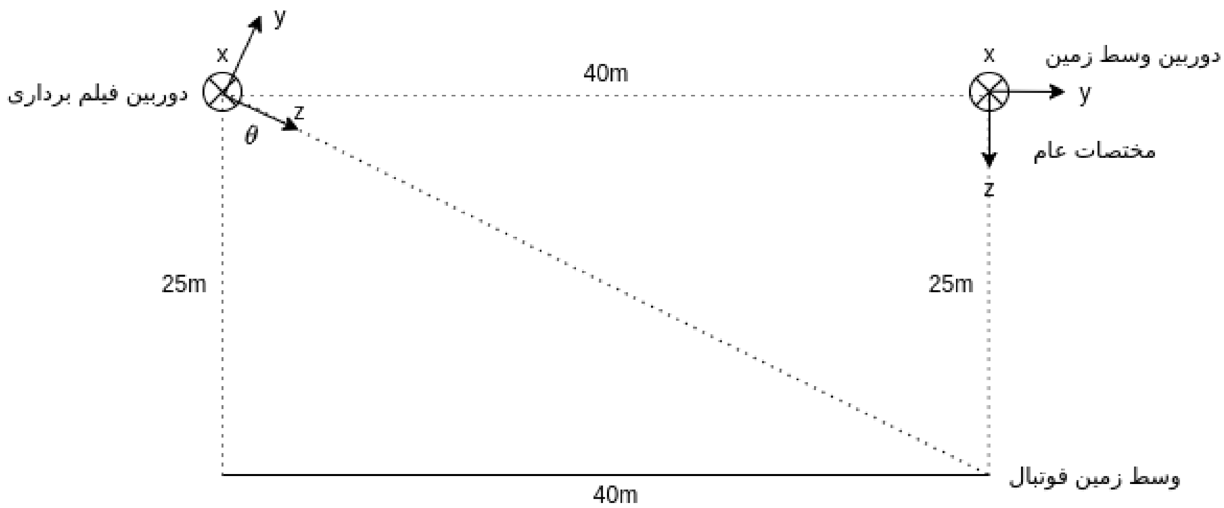
Homography induced by a plane

در واقع ما x که مختصات عکس مربوط به دوربین c است را داریم و می‌خواهیم متناظر آن را (x') بدست آوریم که از زاویه دوربین c' است. لازمه استفاده از این فرمول این موارد است:

- All points on the same plane
- Objects very far away
- Pure rotation

در این مساله هم چون که لوگو بر روی یک صفحه صاف (زمین فوتبال) است، پس می‌توان از این فرمول بهره برد.
ابتدا بایستی پارامترهای به کار رفته در این فرمول را بیابیم و با جایگذاری در آن، ماتریس هموگرافی را بدست میاوریم.

شکل زیر موقعیت دوربین‌ها را نشان می‌دهد:



دوربینی که وسط زمین قرار دارد را دوربین اصلی (و دستگاه مختصات آن را دستگاه مختصات عام) میگیریم. برای اینکه دستگاه مختصات دوربین کنار زمین را بر دستگاه مختصات دوربین اصلی منطبق کنیم، به transformation در جهت محور Y ها نیاز داریم. پس ماتریس C چنین می‌شود:

```
C = np.array([
    [0],
    [-40],
    [0]
])
```

همچنین به یک دوران نیازمندیم. برای بدست آوردن cos و sin زاویه انتقال، از اینکه ۴۰ متر از دوربین اصلی فاصله داریم و ارتفاع از زمین ۲۵ متر است می‌توان استفاده کرد. بدین ترتیب بدست می‌آوریم:

$$cos(\theta) = \frac{25}{\sqrt{25^2 + 40^2}} = 0.52999894$$

$$sin(\theta) = \frac{40}{\sqrt{25^2 + 40^2}} = 0.847998304$$

پس ماتریس دوران ما بدین شکل می‌شود:

```
R = np.array([
    [1, 0, 0],
    [0, 0.52999894, 0.847998304],
    [0, -0.847998304, 0.52999894]
])
```

ماتریس t که برابر RC- است را حال می‌توان بدست آورد:

```
t = - np.matmul(R, C)
```

ماتریس‌های کالیبراسیون دوربین ها هم بدین شکل خواهند بود:

```
k1 = np.array([
    [500, 0, 280],
    [0, 500, 2390],
    [0, 0, 1]
])
```

```
k2 = np.array([
    [500, 0, 128],
    [0, 500, 128],
    [0, 0, 1]
])
```

فاصله کانونی هردو ماتریس طبق سوال ۵۰۰ است. Px و Py دوربین کنار زمین را می‌توان از عکس لوگو بدست آورد.
چون این عکس 256*256 است پس وسط آن یعنی نقطه (128,128) را به عنوان Px و Py می‌دهیم. برای دوربین دیگر پس از warp کردن Px و Py آن را بدست آوردم.
مورد دیگر بردار n است که این درواقع بردار نرمال صفحه ما در مختصات عام است که در اینجا برابر $z = 25$ است.
پس چنین داریم:

```
n_T = np.array([[0, 0, -1]])
d = 25
```

حال تمام پارامترهای لازم برای بدست آوردن ماتریس هموگرافی را داریم:

```
H = np.matmul(np.matmul(k2, R - (np.matmul(t, n_T) / d)), np.linalg.inv(k1))
H_inverse = np.linalg.inv(H)
```

که بدین ترتیب خود ماتریس هموگرافی و سپس معکوس آن را بدست می‌آوریم. ماتریس هموگرافی حاصله چنین است:

```
[[ 1.00000000e+00 -2.17087566e-01  1.33009094e+02]
 [ 0.00000000e+00  3.12911374e-01 -5.69006862e+00]
 [ 0.00000000e+00 -1.69599661e-03  3.22663355e+00]]
```

این ماتریس درواقع نگاشت از دوربین وسط زمین به دوربین کنار زمین است. ولی ما یک نگاشت از دوربین کنار زمین به وسط زمین می‌خواهیم. پس کافی است از معکوس آن استفاده کنیم:

```
[[ 1.00000000e+00  4.74879050e-01 -4.03848152e+01]
 [ 0.00000000e+00  3.22663355e+00  5.69006862e+00]
 [ 0.00000000e+00  1.69599661e-03  3.12911374e-01]]
```

با استفاده از تابع warpPerspective تصویر دوربین وسط زمین را بدست می‌اوریم:

```
im_dst = cv2.warpPerspective(logo, H_inverse, (560, 1130))
cv2.imwrite("out/res12.jpg", im_dst)
```