Rachunek Macierzowy i Statystyka Wielowymiarowa

Raport z zadania 3. - Implementacja norm macierzowych, współczynników uwarunkowania oras SVD.

Wojciech Jasiński, Michał Stefanik

Wydział Informatyki
Akademia Górniczo Hutnicza
Kraków
17 kwietnia 2024

Spis treści

1 Wstęp

Należało zaimplementować:

- Normy macierzowe: $||A||_1$, $||A||_2$, $||A||_p$, $||A||_\infty$
- Współczynniki uwarunkowania: $cond_1(A)$, $cond_2(A)$, $cond_p(A)$, $cond_\infty(A)$
- Rozkład SVD macierzy

2 Dane techniczne

Używamy `np.ndarray` z biblioteki `numpy` do reprezentacji macierzy. Wszystkie funkcje przyjmują i zwracają macierze w tej postaci.

Do testów używamy macierzy o wymiarach 3x3:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

3 Normy macierzowe

3.1 Norma $||A||_1$

3.1.1 Algorytm

Wzór na tę normę to $||A||_1 = max_{j-1,\dots,n} \sum_{i=1,\dots,n} |a_{ij}|$. W prostszych słowach, jest to maksymalna suma wartości bezwzględnych w kolumnach macierzy.

3.1.2 Fragment kodu

```python
def matrix_norm_1(A: np.ndarray):
    return np.max(np.sum(np.abs(A), axis=0))
```

3.1.3 Wartość dla macierzy testowej

Dla macierzy testowej M wartość normy $||M||_1$ wynosi 15.

3.2 Norma $||A||_2$

3.2.1 Algorytm

Wzór na tę normę to $||A||_2 = |\lambda_1|$. W prostszych słowach, to największa co do modułu wartość własna macierzy.

3.2.2 Fragment kodu

```python
def matrix_norm_2(A: np.ndarray):
    return np.max(np.abs(np.linalg.eigvals(A)))
```

3.2.3 Wartość dla macierzy testowej

Dla macierzy testowej M wartość normy $||M||_2$ wynosi 15.

3.3 Norma $||A||_p$

Z definicji:

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

Dla $p \neq 1, 2, \infty$ wartości normy są NP-trudne do aproksymacji. Skoro nie możemy po prostu policzyć p-normy, użyjmy normy Schattena. Dla $p = 2$ przyjmuje ona postać normy Frobeniusa, dla $p = \infty$ normy spektralnej.

3.3.1 Fragment kodu

```
def matrix_norm_schatten(A: np.ndarray, p: int):
    return np.sum(np.abs(np.linalg.eigvals(A)) ** p) ** (1 / p)
```

3.3.2 Wartość dla macierzy testowej

Dla macierzy testowej M wartość normy Schattena $||M||_5$ wynosi 15.178.

3.4 Norma $||A||_\infty$

3.4.1 Algorytm

Wzór na tę normę to $||A||_\infty = max_{i=1,...,n} \sum_{j=1,...,n} |a_{ij}|$. W prostszych słowach, jest to maksymalna suma wartości bezwzględnych w wierszach macierzy.

3.4.2 Fragment kodu

```
def matrix_norm_inf(A: np.ndarray):
    return np.max(np.sum(np.abs(A), axis=1))
```

3.4.3 Wartość dla macierzy testowej

Dla macierzy testowej M wartość normy $||M||_\infty$ wynosi 15.

4 Współczynniki uwarunkowania

Współczynnik uwarunkowania danej macierzy A w p-normie definiujemy jako:

$$cond_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$$

Wartość ta odzwierciedla wrażliwość rozwiązania układu równań liniowych na perturbacje w danych wejściowych lub błędy.

4.1 Współczynnik uwarunkowania $cond_1(A)$

4.1.1 Fragment kodu

```
def matrix_cond_1(A: np.ndarray):
    return matrix_norm_1(A) * matrix_norm_1(np.linalg.inv(A))
```

4.1.2 Wartość dla macierzy testowej

Dla macierzy testowej M wartość współczynnika uwarunkowania $cond_1(A)$ wynosi 5.33

4.2 Współczynnik uwarunkowania $cond_2(A)$

```
def matrix_cond_2(A: np.ndarray):
    return matrix_norm_2(A) * matrix_norm_2(np.linalg.inv(A))
```

4.2.1 Wartość dla macierzy testowej

Dla macierzy testowej M wartość współczynnika uwarunkowania $cond_2(A)$ wynosi 4.33

4.3 Współczynnik uwarunkowania $cond_p(A)$

Z uwagi na NP-trudność aproksymacji p-norm macierzy dla $2 < p < \infty$, używamy wcześniej wspomnianej normy Schattena.

```
def matrix_cond_p(A: np.ndarray, p: int):
    return matrix_norm_schatten(A, p) * matrix_norm_schatten(np.linalg.inv(A), p)
```

4.3.1 Wartość dla macierzy testowej

Dla macierzy testowej M wartość współczynnika uwarunkowania $cond_p(A)$ wynosi 4.33

4.4 Współczynnik uwarunkowania $cond_\infty(A)$

```
def matrix_cond_inf(A: np.ndarray):
    return matrix_norm_inf(A) * matrix_norm_inf(np.linalg.inv(A))
```

4.4.1 Wartość dla macierzy testowej

Dla macierzy testowej M wartość współczynnika uwarunkowania $cond_\infty(A)$ wynosi 5.33

5 Rozkład SVD macierzy

5.1 Algorytm

Macierz A można zdekomponować na trzy macierze: U, S i V, takie że:

$$A = U \cdot S \cdot V^T$$

gdzie:

- U - macierz ortonormalna
- S - macierz diagonalna
- V - macierz ortonormalna

Macierz S zawiera wartości osobliwe macierzy A, a macierze U i V zawierają wektory własne macierzy odpowiednio AA^T oraz A^TA.

Macierz V znajdujemy jako macierz wektorów własnych macierzy A^TA. Następnie sortujemy wartości własne malejąco i tworzymy macierz V z wektorów własnych odpowiadających wartościom własnym w tej kolejności. Wartości własne dla tej macierzy pierwiastkujemy i tworzymy z nich macierz S.

Następnie obliczamy macierz U jako $U = A \cdot V \cdot S^{-1}$.

5.2 Fragment kodu

```
def SVD(A: np.ndarray):
    left_shape = A.shape[0]
    right_shape = A.shape[1]
    eigenvalues, V = np.linalg.eigh(np.dot(A.T, A))

    idx = np.argsort(eigenvalues)[::-1]
    eigenvalues = eigenvalues[idx]
    V = V[:, idx]

    singular_values = np.sqrt(eigenvalues)
    right_singular_vectors = V

    left_singular_vectors = np.dot(A, right_singular_vectors)

    with np.errstate(divide="ignore"):
        left_singular_vectors /= singular_values

    left_singular_vectors = left_singular_vectors[:, :left_shape]
    Sigma = np.diag(singular_values)[:left_shape, :right_shape]

    return left_singular_vectors, Sigma, right_singular_vectors.T
```

5.3 Wartość dla macierzy testowej

Dla macierzy testowej M otrzymujemy:

$$U = \begin{bmatrix} -0.45 & -0.89 \\ -0.98 & -.45 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V^T = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.5 \\ 0 & -0.8 & 0.4 \\ -0.67 & -.33 & 0.67 \end{bmatrix}$$

6 Wnioski

- W przypadku SVD zastosowana metoda pozwala nie szukać dwukrotnie wartości własnych, przez co może być szybsza.
- P-normy macierzowe dla p różnych od 1, 2, są ∞ rzadko używane z uwagi na niepraktyczne i trudne aproksymacje numeryczne. Żadna sprawdzana biblioteka do obliczeń numerycznych nie implementuje algorytmów aproksymacji tych norm.