Introduction à l'imagerie numérique

3I022-fev2018

Transformée de Fourier

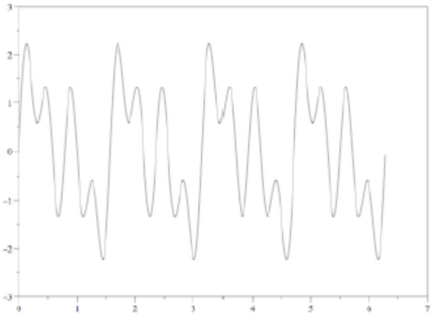
Licence d'informatique

Février 2018

Transformée de Fourier 1D

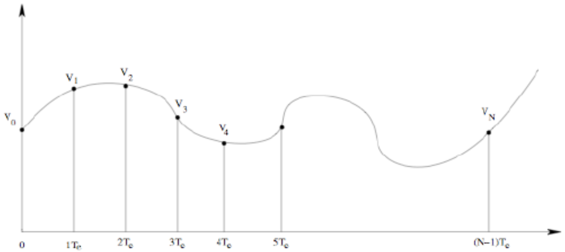
- Tout signal (fonction périodique) peut être représenté par une somme de sinusoïdes à différentes fréquences
- Problème : comment retrouver les fréquences à partir d'un signal ?

Exemple (signal $s(t) = sin(4t) + sin(8t) + sin(16t)$)



Cas des signaux discrets 1D

- On peut également décomposer un signal discret en sinusoïdes discrètes
- Il faut dans ce cas échantillonner le signal en N échantillons selon un pas d'échantillonnage T_e



Transformée de Fourier discrète 1D

- Soit une séquence de N échantillons $x(n)$, $n \in \{0, \cdots, N-1\}$
- La transformée de Fourier discrète de ce signal est définie par :

$$
\begin{aligned}
TF(n \mapsto x(n))(k) &= TF(x)(k) = X(k) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\cos\left(2\pi \frac{kn}{N}\right) - i \sin\left(2\pi \frac{kn}{N}\right) \right]
\end{aligned}
$$

avec $k \in \{-\frac{N}{2}, \cdots, \frac{N}{2} - 1\}$

- La T.F. discrète coïncide avec la T.F. continue du signal continu aux points d'échantillonnage

Spectre d'amplitude 1D

- X est complexe, il possède :
  - une partie réelle paire :

$$X_r(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(2\pi \frac{kn}{N}\right)$$

  - une partie imaginaire impaire :

$$X_i(k) = -\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin\left(2\pi \frac{kn}{N}\right)$$

- Pour le visualiser, on calcule son module $|X|$, ou spectre d'amplitude, donné par :

$$|X(k)| = \sqrt{X_r^2(k) + X_i^2(k)}$$

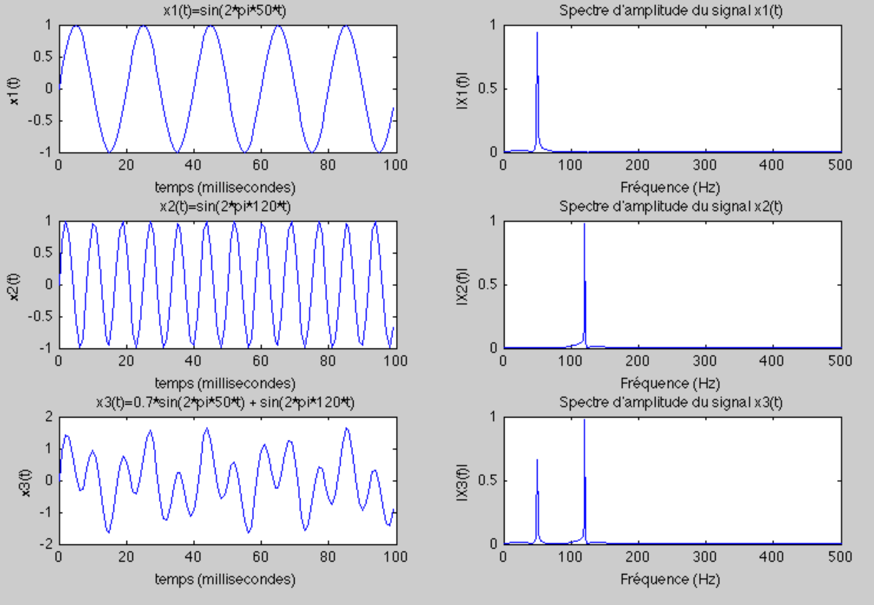
Spectre d'amplitude 1D

- Le spectre d'amplitude :
  - informe sur la présence et l'importance de certaines fréquences dans le signal de départ ;
  - met en avant les amplitudes fortes dans le signal.
- Une fréquence particulière, la fréquence de base, ou fréquence fondamentale, est donnée par :

$$X(0) \quad = \quad \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\cos\left(-2\pi\frac{0n}{N}\right) - i\sin\left(2\pi\frac{0n}{N}\right)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

- Les valeurs $|X(k)|$ sont en général très grandes : on visualise $\log(1+|X(k)|)$
- $|X|$ est symétrique par rapport à $X(0)$: on le visualise entre 0 et $\frac{N}{2}$

Spectre d'amplitude : exemples



Spectre de phase 1D

- X est complexe, on peut aussi visualiser son spectre de phase $\Phi(X)$ donné par :

$$\Phi(X(k)) = \tan^{-1}\left(\frac{X_i(k)}{X_r(k)}\right)$$

- Le spectre de phase donne une information sur le décalage de phase par rapport à l'origine d'une fonction sinusoïde

Transformée de Fourier discrète 1D inverse

- Permet de reconstruire le signal temporel $x(n)$ à partir du signal fréquentiel $X(f)$ par :

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X(k) e^{2\pi i \frac{nk}{N}} \\
&= \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X(k) \left[\cos\left(2\pi \frac{nk}{N}\right) + i \sin\left(2\pi \frac{nk}{N}\right) \right]
\end{aligned}
$$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier discrète 1D

- Linéarité : $TF(A \times x)(k) = A \times TF(x)(k)$, A constante, x signal

Fonction	1	2	3	4
sin(x)	4.918E-15	1.5700054 - 499.74658i	- 0.0041958 + 0.6677689i	- 0.0035387 + 0.3754570i
10*sin(x)	3.970E-14	15.700054 - 4997.4658i	- 0.0419577 + 6.6776887i	- 0.0353870 + 3.7545703i

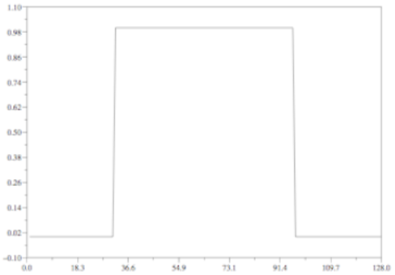
- Linéarité : $TF(\sum_{i=1}^{n} x_i)(k) = \sum_{i=1}^{n} TF(x_i)(k)$, n signaux x_i

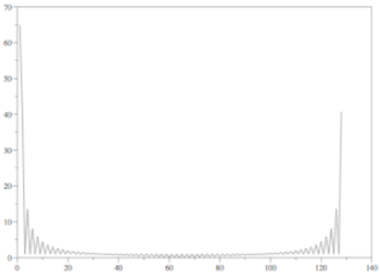
Fonction	1	2	3	4
sin(x)+sin(2x)	9.971E-15	1.5720962 - 500.41213i	3.1357839 - 499.06894i	- 0.0148778 + 1.5785346i
sin(x)	4.918E-15	1.5700054 - 499.74658i	- 0.0041958 + 0.6677689i	- 0.0035387 + 0.3754570i
sin(2x)	6.811E-15	0.0020909 - 0.6655456i	3.1399797 - 499.73671i	- 0.0113391 + 1.2030776i

- Si $x(n)$ est réelle paire, alors $X(k)$ l'est aussi (idem pour TF)
- Si $x(n)$ est réelle impaire, alors $X(k)$ est imaginaire pure et impaire (idem pour TF)

Cas particulier de la fonction carré 1D

- Une transition brutale verticale se décompose en une infinité de sinusoïdes verticales pondérées (spectre infini)
- En fait, un simple calcul montre que la T.F. de la fonction carré est le sinus cardinal : $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$





Le filtrage fréquentiel 1D

- Il existe un autre type de filtrage : le filtrage fréquentiel (très relié au filtrage spatial ...) grâce à la propriété du produit de convolution :

$$
\begin{aligned}
TF(x \star y)(k) &= X(k)Y(k) \\
TF(x \times y)(k) &= X \star Y(k)
\end{aligned}
$$

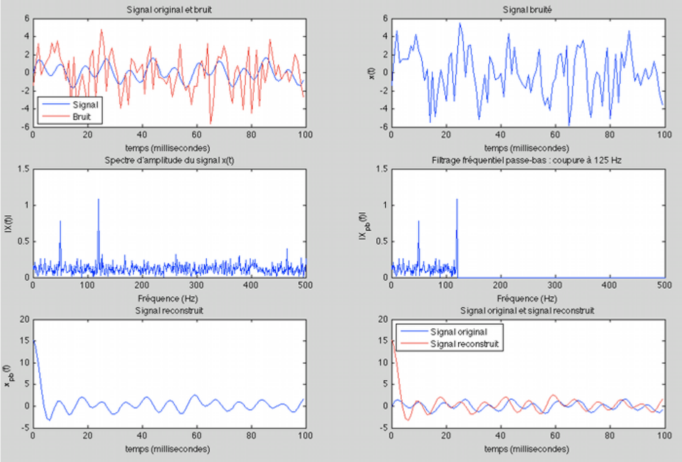
  $\hookrightarrow$ un produit de convolution dans le domaine spatial correspond à un produit dans le domaine fréquentiel
- Domaines d'application du filtrage fréquentiel 1D :
  - lissage ;
  - restauration ;
  - classification ;
  - ...

Les filtres fréquentiels 1D

- Principe général du filtrage fréquentiel :
  1. Calculer la transformée de Fourier $X(k)$ du signal $x(n)$ à filtrer
  2. Calculer la transformée de Fourier $H(k)$ du filtre $h(n)$
  3. Multiplier les spectres $X_{\text{filtré}}(k) = X(k)H(k)$
  4. Calculer la transformée de Fourier inverse du spectre obtenu pour obtenir le signal filtré $x_{\text{filtré}}(n)$
- Trois grandes familles de filtres fréquentiels :
  - Les filtres passe-bas : conservent les basses fréquences et éliminent les hautes
  - Les filtres passe-haut : conservent les hautes fréquences et éliminent les basses
  - Les filtres passe-bande (ou coupe-bande) : ne conservent que certaines bandes de fréquences
- Un signal de période faible a une grande fréquence (et réciproquement) : $f = \frac{1}{T}$

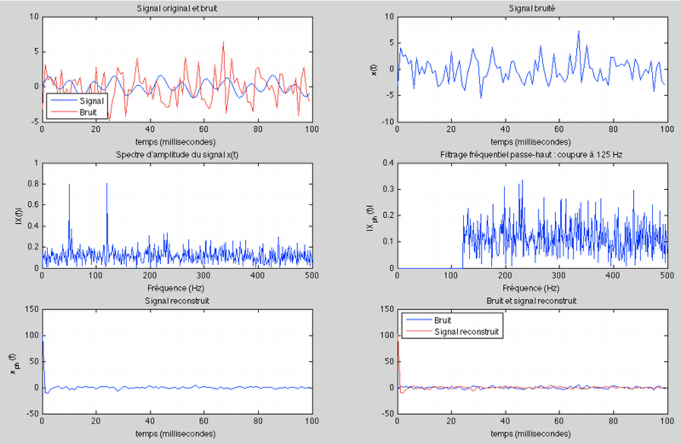
Filtrage passe-bas 1D

- Garder les basses fréquences du spectre de Fourier du signal
- Le signal est reconstruit par DFT inverse sans ses hautes fréquences, mais avec sa fréquence fondamentale



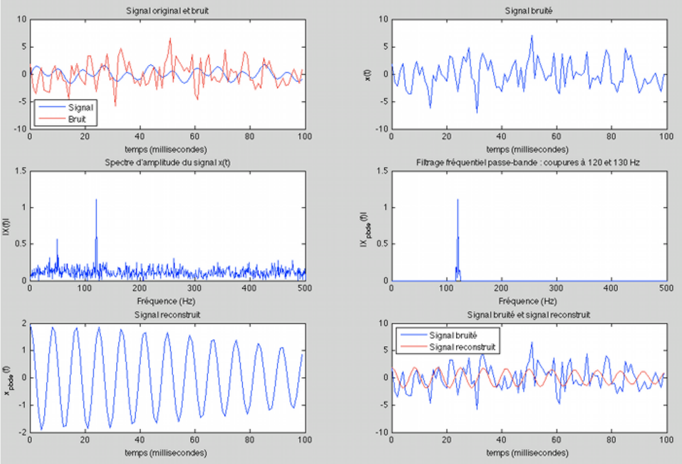
Filtrage passe-haut 1D

- Garder les hautes fréquences du spectre de Fourier du signal
- Le signal est reconstruit par DFT inverse sans ses basses fréquences, donc sans sa fréquence fondamentale

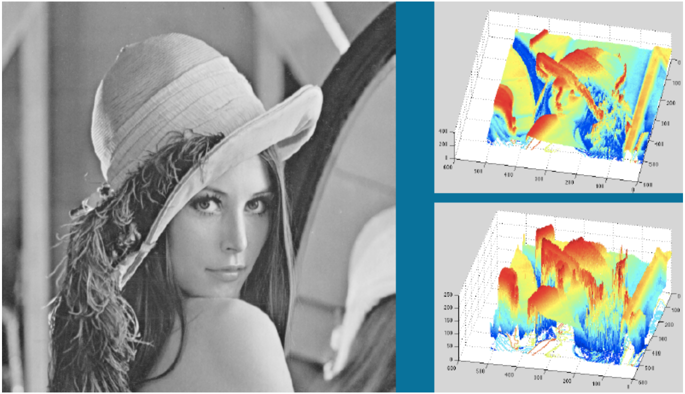


Filtrage passe-bande 1D

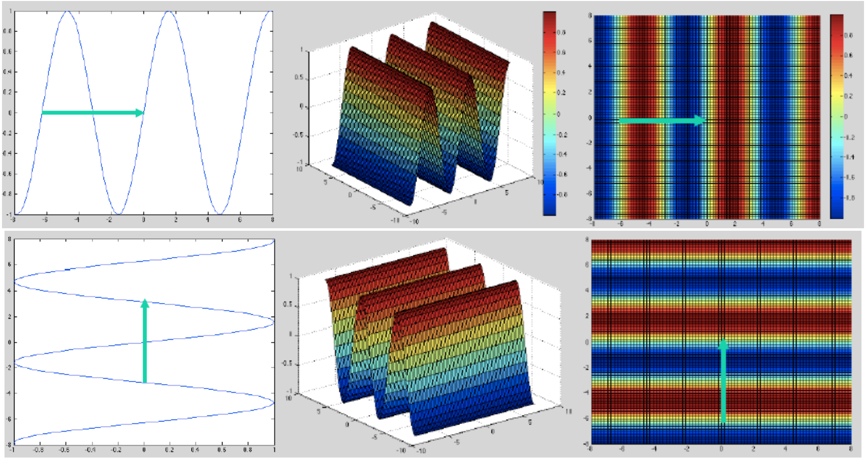
- Garder une bande de fréquences du spectre de Fourier du signal
- Le signal est reconstruit par DFT inverse sans cette bande de fréquences



C’est quoi un “signal image” ?

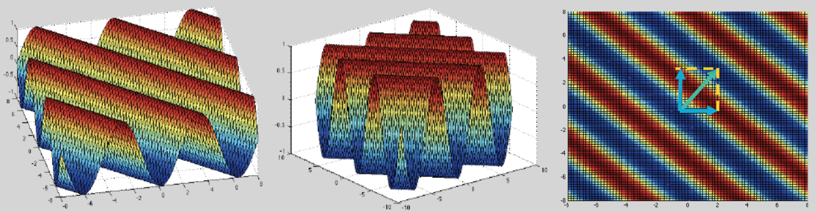


Extension du 1D vers le 2D : la sinusoïde



Extension du 1D vers le 2D : la sinusoïde

- Une sinusoïde 1D horizontale possède une fréquence horizontale *u*
- Une sinusoïde 1D verticale possède une fréquence verticale *v*
- Une sinusoïde 2D verticale possède une fréquence horizontale *u* et une fréquence verticale *v*



Transformée de Fourier discrète 2D

- Elle permet de passer du domaine spatial vers le domaine fréquentiel
- La transformée de Fourier discrète $F(u,v)$ d'un signal 2D $f(x,y)$ (image) est définie par :

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\left[\cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)\right) - i\sin\left(2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

avec $u \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1]$ et $v \in [-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}-1]$

Spectre d'amplitude 2D

- $X(u,v)$ est complexe, il possède :
  - une partie réelle paire :

$$X_r(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$$

  - une partie imaginaire impaire

$$X_i(u,v) = -\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \sin\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$$

- Pour le visualiser, on calcule son module $|X|$, ou spectre d'amplitude, donné par :

$$|X(u,v)| = \sqrt{X_r^2(u,v) + X_i^2(u,v)}$$

Spectre d'amplitude 2D : un exemple sur une image réelle

Propriétés de la transformée de Fourier 2D

- $F(0,0)$ représente la composante continue, ou fréquence fondamentale, de la *DFT* et est donnée par :

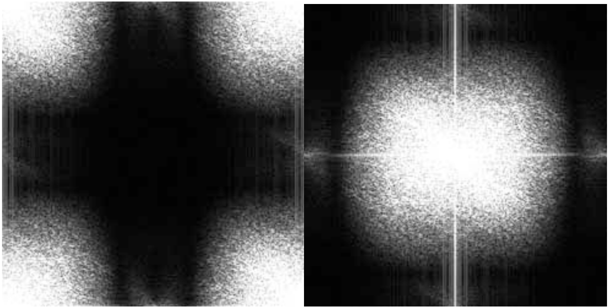
$$
\begin{aligned}
F(0,0) &= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\left[\cos\left(2\pi\left(\frac{0x}{M}+\frac{0y}{N}\right)\right) - i\sin\left(2\pi\left(\frac{0x}{M}+\frac{0y}{N}\right)\right)\right] \\
&= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)
\end{aligned}
$$

- La *DFT* 2D est séparable : deux transformées 1D (sur les lignes puis sur les colonnes de l'image, ou inverse)
- Si l'image est paire (resp. impaire), sa *DFT* est réelle pure (resp. imaginaire pure)
- On peut visualiser aussi le spectre de phase (difficile à interpréter) donné par :

$$
\Phi(X(u,v)) = \tan^{-1}\left(\frac{X_i(u,v)}{X_r(u,v)}\right)
$$

Spectre d'amplitude centré

- Pour plus de lisibilité, on a l'habitude de centrer le spectre d'amplitude
- $F(0,0)$ se retrouve au centre de l'image
- Les basses fréquences se retrouvent au centre de l'image, les hautes aux bords



Transformée de Fourier discrète 2D inverse

- Elle permet de passer du domaine fréquentiel vers le domaine spatial
- La transformée de Fourier discrète inverse restitue le signal 2D $f(x, y)$ (image) par :

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \sum_{u=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{v=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} F(u,v) e^{2\pi i (\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\
&= \sum_{u=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{v=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} F(u,v) \left[\cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right) + i \sin\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

Propriétés de la *DFT* : convolution

- Faire un produit de convolution dans le domaine spatial revient à faire un produit dans le domaine fréquentiel :

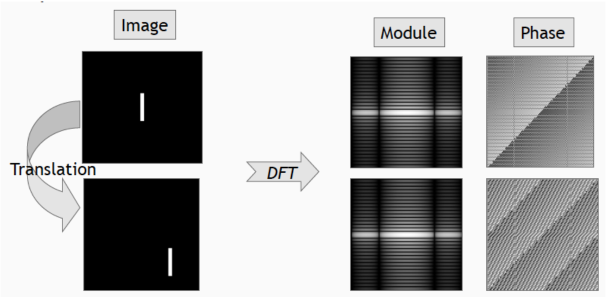
$$\begin{aligned} TF(f \star g)(u,v) &= F(u,v) \times G(u,v) \\ TF(f \times g)(u,v) &= F \star G(u,v) \end{aligned}$$

- Propriété essentielle en traitement d'image : un filtrage spatial (par convolution) et un filtrage fréquentiel sont équivalents

Propriétés de la *DFT* : translation

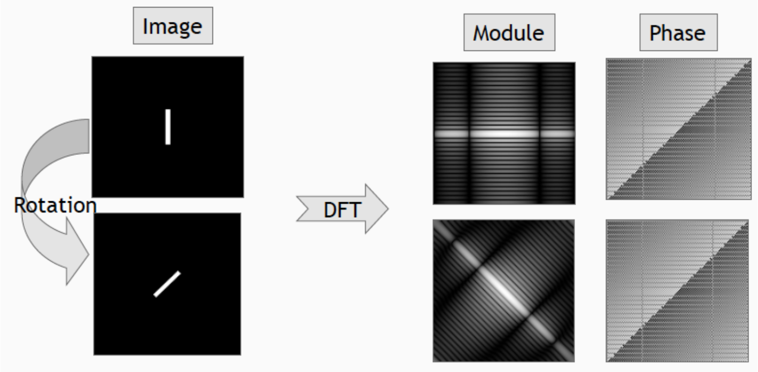
- Le spectre d'amplitude est invariant aux translations, à la différence de la phase :

$$\mathrm{DFT}(f(x-a, y-b)) \quad = \quad F(u, v)e^{-2\pi i(ua+vb)}$$



Propriétés de la *DFT* : rotation

- Le spectre d'amplitude conserve les propriétés de rotation :

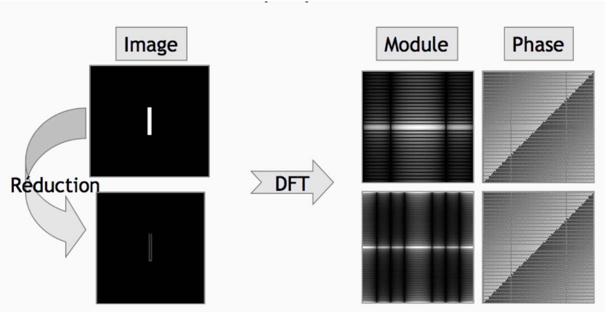


Propriétés de la *DFT* : changement d'échelle

- Une dillatation spatiale engendre une contraction fréquentielle, et réciproquement :

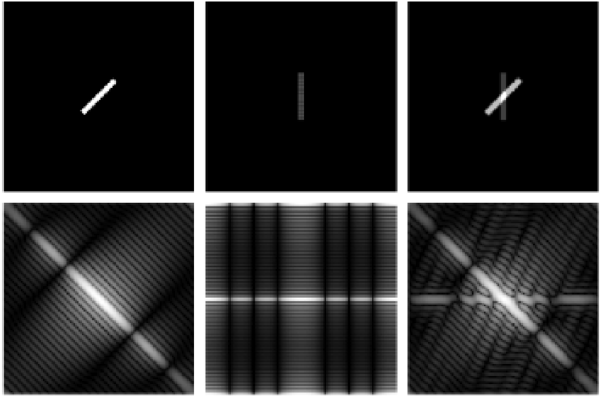
$$\mathrm{DFT}(f(\alpha x, \beta y)) = \frac{1}{|\alpha\beta|} F\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v}{\beta}\right)$$

$$\mathrm{DFT}\left(\frac{1}{|\alpha\beta|} f\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right)\right) = F(\alpha u, \beta v)$$



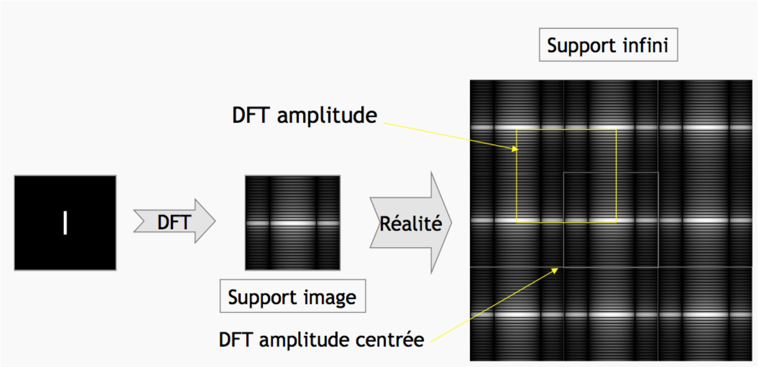
Propriétés de la *DFT* : linéarité

$$\text{DFT}\left(\alpha f(n,m) + \beta g(n,m)\right) \quad = \quad \alpha F(u,v) + \beta G(u,v)$$



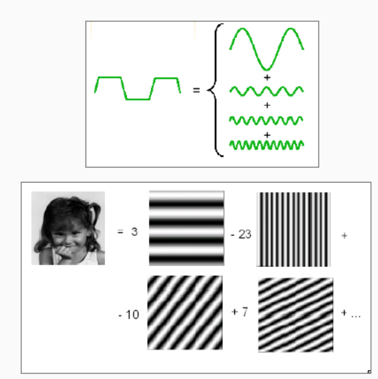
Propriétés de la *DFT* : périodicité

- On peut évaluer la *DFT* en n'importe quelle fréquence spatiale (u, v) : le spectre se répète à l'infini



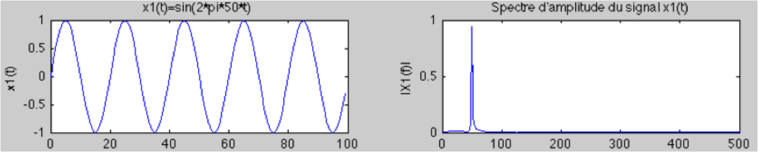
Pourquoi on calcule la *DFT* d'une image ?

- Pour la décomposer en un ensemble de sinusoïdes 2D, chacune ayant une fréquence horizontale *u* et une fréquence verticale *v*
- La somme pondérée de ces sinusoïde doit donne l'image originale !



Comment voit-on ces sinusoïdes 2D dans le spectre d'amplitude ?

- Un petit rappel du 1D : une sinusoïde 1D à la fréquence u se caractérise dans le spectre d'amplitude 1D par un “pic” localisé en u



$\hookrightarrow$ Il y a autant de sinusoïdes 1D dans le signal que de “pics” dans le spectre d'amplitude 1D

- Une sinusoïde 2D va se caractériser par un “point non noir” dans le spectre 2D (image), et leur position indique les fréquences de ces sinusoïdes
  $\hookrightarrow$ Il y a autant de sinusoïdes 2D dans le signal que de “points non noirs” dans le spectre d'amplitude 1D

Quelques propriétés liées à l'image

- La période minimale d'un signal image est de 2 (pixels), soit le passage d'un pixel à l'autre : la fréquence maximale est donc $u_{\max} = v_{\max} = \frac{1}{2}$
  $\hookrightarrow$ Les fréquences du module du spectre d'une image varient sur l'intervalle $[-0.5, 0.5]$
- Pour une sinusoïde de période (T_x, T_y), on a les fréquences normalisées $(u = \frac{1}{T_x}, v = \frac{1}{T_y})$
- La fréquence fondamentale $F(0,0)$ code la somme des valeurs des pixels de l'image

Décomposition en images de base

- La *DFT* transforme l'image en une somme pondérée d'images de base sinusoïdales $a_{u,v}(n,m)$ de fréquences u et v définies par :

$$a_{u,v}(x,y) = \left[\cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)\right) - i\sin\left(2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)\right)\right]$$

- On calcule ainsi quelques images de base :

$$\begin{aligned}
a_{0,0}(x,y) &= 1\\
a_{1,0}(x,y) &= \cos\left(2\pi\frac{x}{M}\right) - i\sin\left(2\pi\frac{x}{M}\right)\\
a_{1,1}(x,y) &= \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{M}+\frac{y}{N}\right)\right) - i\sin\left(2\pi\left(\frac{x}{M}+\frac{y}{N}\right)\right)
\end{aligned}$$

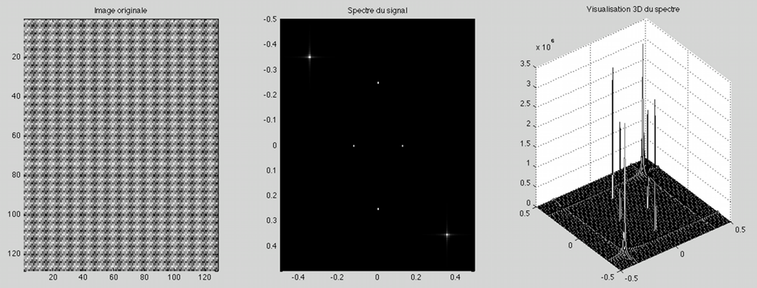
Décomposition en images de base

- L'image est la somme pondérée d'images de base $a_{u,v}(x, y)$
- Si $a_{u,v}(x, y)$ décompose cette image, alors le pixel (u, v) du spectre de l'image n'est pas noir (i.e. non nul)

Exemple ($f(x, y) = \alpha a_{u_1,v_1}(x, y) + \beta a_{u_2,v_2}(x, y) + \gamma a_{u_3,v_3}(x, y)$)

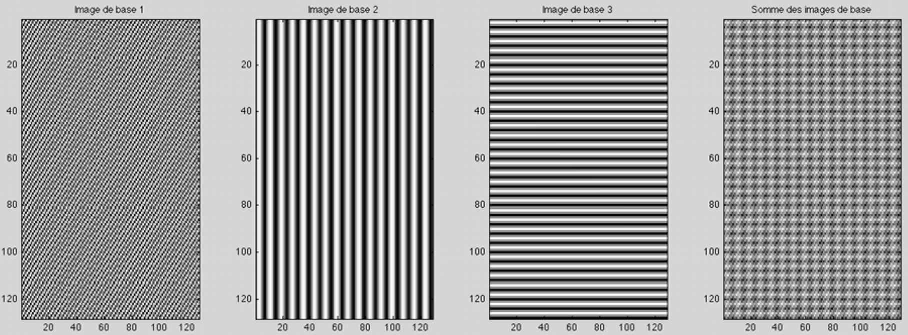
- *les pixels (u_1, v_1), (u_2, v_2) et (u_3, v_3) du spectre sont allumés*
- *leur intensité, dans l'image du spectre, est proportionnelle, respectivement à α, β et γ*

Un premier exemple

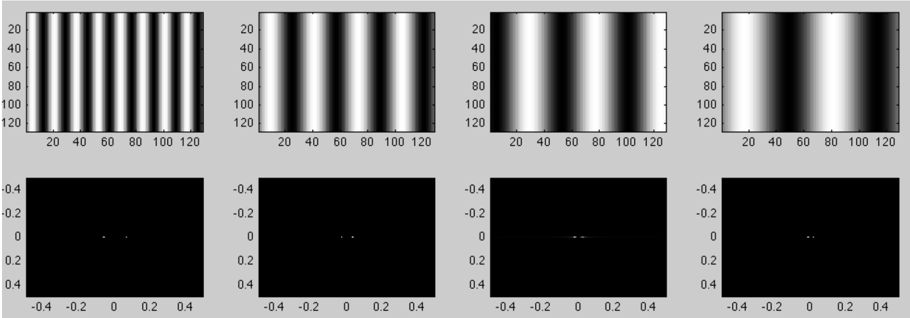


- On distingue 6 pics, donc 3 images de bases appartiennent à l'image originale
- Les coordonnées des points sont : $(0, 0.25)$, $(0.125, 0)$ et $(0.33, 0.33)$
- Les images de base sont donc : $a_{0,0.25}(x, y)$, $a_{0.125,0}(x, y)$ et $a_{0.33,0.33}(x, y)$, d'amplitudes respectives 200, 150 et 100

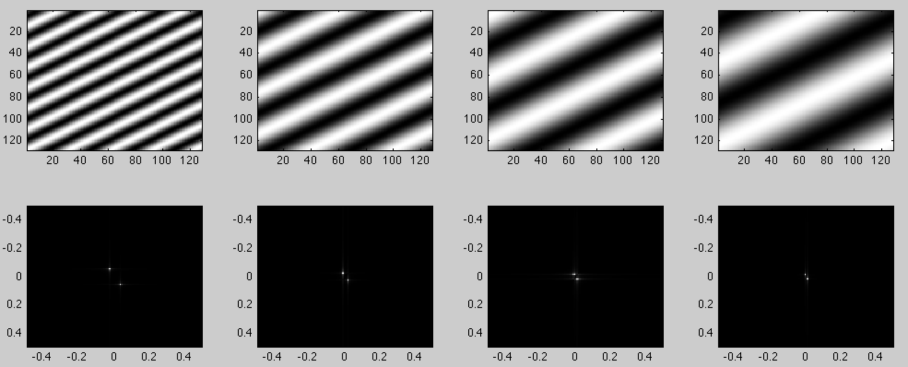
Un premier exemple



Variation de la période de la sinusoïde



Variation de l'orientation de la sinusoïde



Cas de la fonction échelon

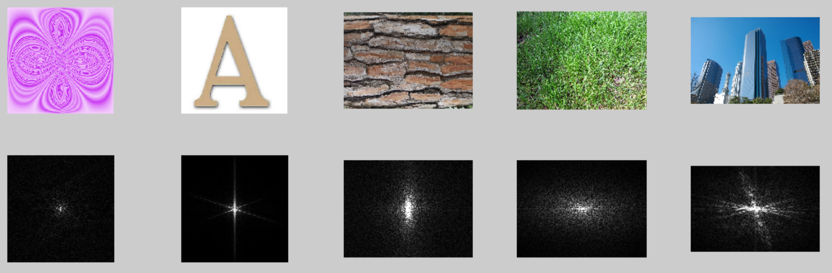
- Échelon vertical :

$$f(x,y) = \begin{cases} 255 & \text{si} \quad y < S_y \quad \forall x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cas de la fonction échelon : interprétation

- Une transition brutale verticale se décompose en une infinité de sinusoïdes verticales ($v = 0$) pondérées (le spectre s'étale et devient infini). Cette caractéristique est visible au niveau du spectre d'amplitude
- Les pics de la DFT sont régulièrement espacés car le motif de l'image originale est régulier. Il se décompose sur des sinusoïdes de fréquences multiples de la fréquence de répétition
- Pour l'échelon horizontal le spectre est le même, à $\frac{\pi}{2}$ près

Exemples sur des images réelles



- Les lignes directrices fortement représentées dans les images sont mises en valeur (à $-\frac{\pi}{2}$ près) dans les spectres

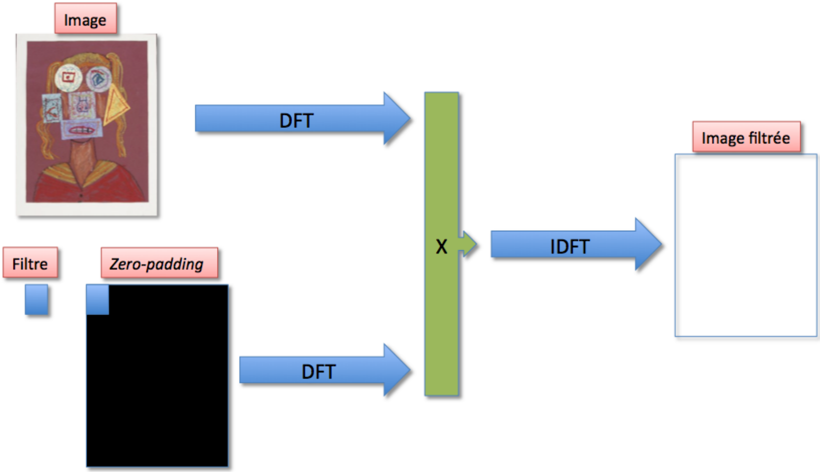
Utilisation de la transformée de Fourier discrète 2D

- Outil très utile en traitement d'images
- On observe les caractéristiques fréquentielles des images
- Domaines d'application :
  - Filtrage : lissage, augmentation de la netteté
  - Restauration : élimination des dégradations
  - Classification : distinction de différents types d'images
  - Compression : utilisée mais il existe des transformées plus adaptées
  - ...

Filtrage fréquentiel d'images

- Schéma général
- Principe
- Types de filtres
- Exemple d'application

Filtrage fréquentiel : schéma général

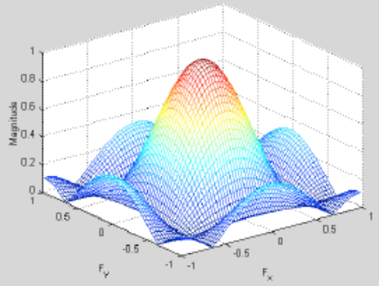


Principe

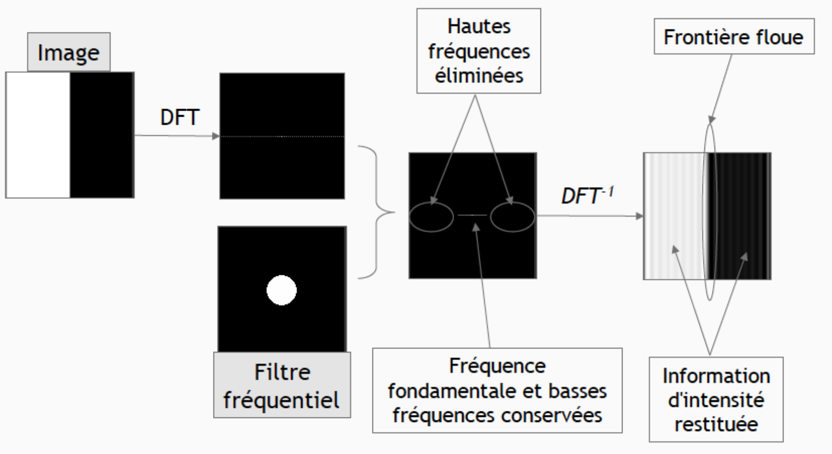
- Dans le domaine fréquentiel, on travaille sur les *DFT*
  - L'équivalent d'une convolution spatiale revient à faire un produit des *DFT*
  - L'image et le filtre doivent avoir la même taille
- Filtre spatial (ex. matrice de poids)
  - Le ramener à la taille de l'image à filtrer (méthode du *zero-padding* : compléter par des 0)
  - Calculer sa *DFT*
  - On obtient sa fonction de transfert, ou encore un filtre fréquentiel
- Filtrage fréquentiel : multiplier la *DFT* de l'image par celle du filtre
- Effectuer la *DFT inverse* pour pouvoir visualiser l'image filtrée dans le domaine spatial

Filtrage passe-bas : propriétés

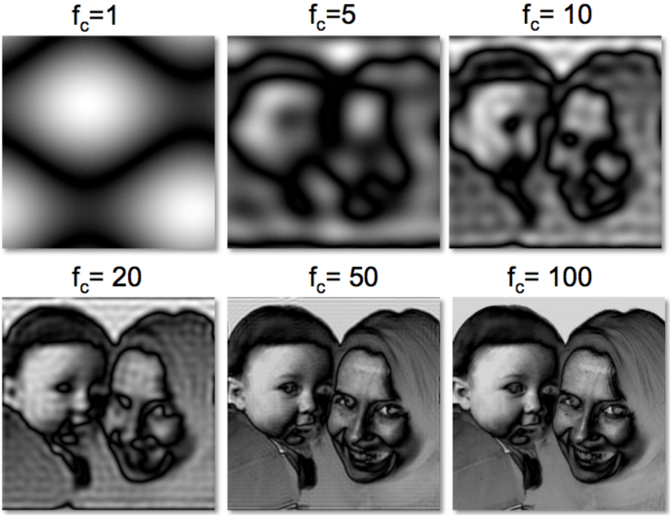
- Basses fréquences et fréquence fondamentale conservées : l'information d'intensité est restituée lors de la reconstruction de l'image (*DFT* inverse)
- Hautes fréquences éliminée : les changements brusques d'intensité (bruit, frontières, . . .) sont atténuées voire éliminées
- Etalement des frontières



Filtrage passe-bas : exemple

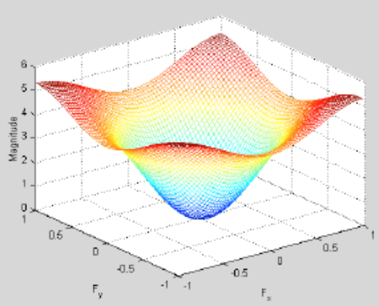


Rôle de la fréquence de coupure sur le filtrage passe-bas

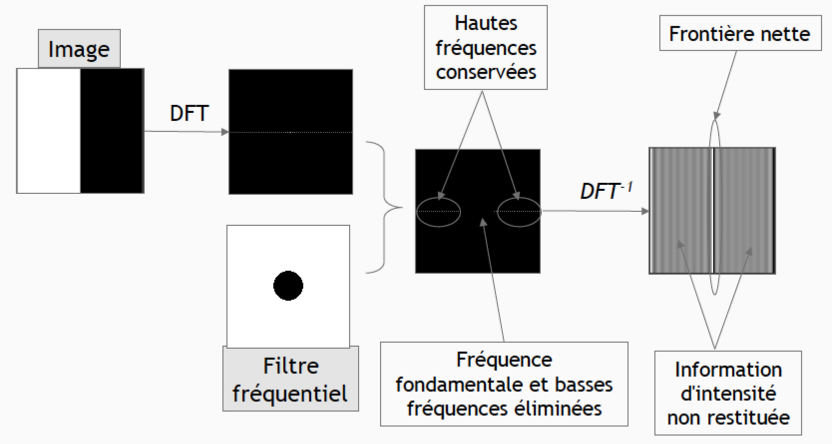


Filtrage passe-haut : propriétés

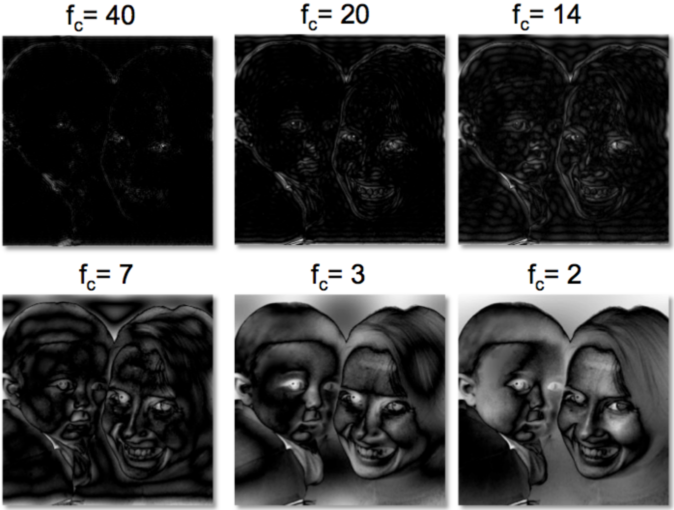
- Basses fréquences et fréquence fondamentale éliminées : l'information d'intensité est enlevée lors de la reconstruction de l'image (*DFT* inverse)
- Hautes fréquences préservées : les changements brusques d'intensité (bruit, frontières, . . .) sont mis en évidence



Filtrage passe-haut : exemple

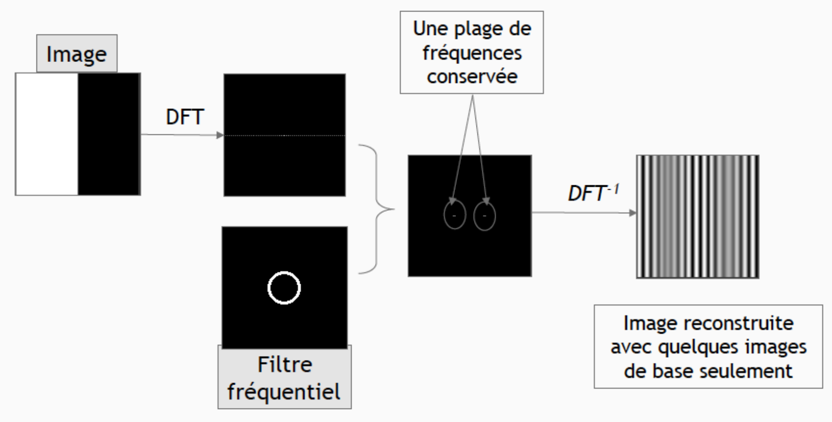


Rôle de la fréquence de coupure sur le filtrage passe-haut



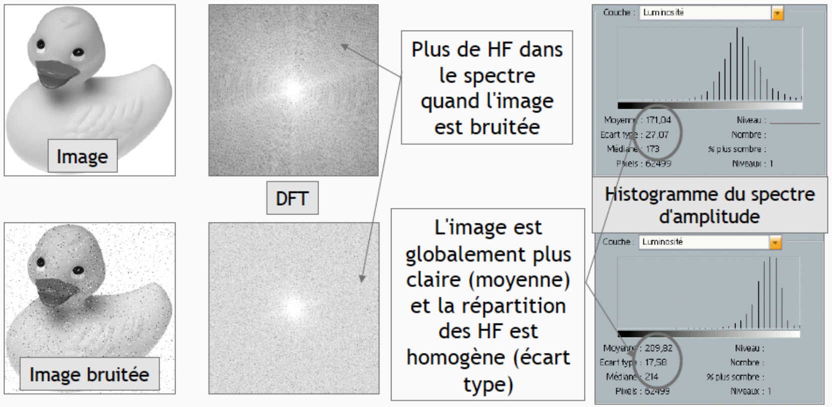
Filtrage passe-bande : propriétés

- Permet de ne conserver que quelques fréquences (plage de fréquences) : l'image reconstruite est une combinaison d'un nombre réduit d'images de base (sinusoïdes)



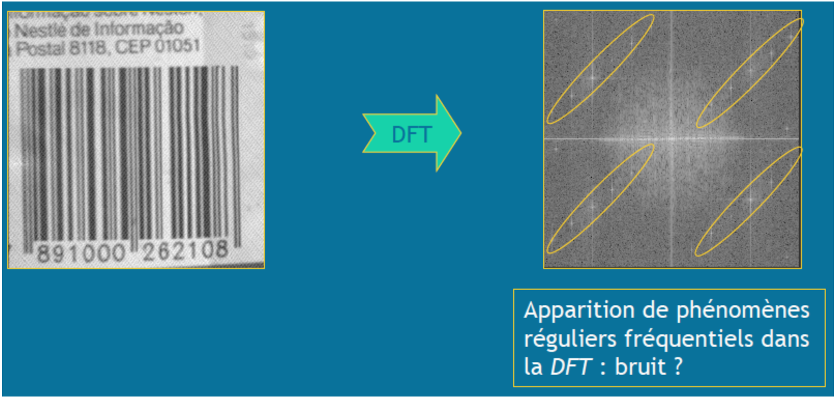
Caractéristiques fréquentielles du bruit

- Le bruit est une haute fréquence



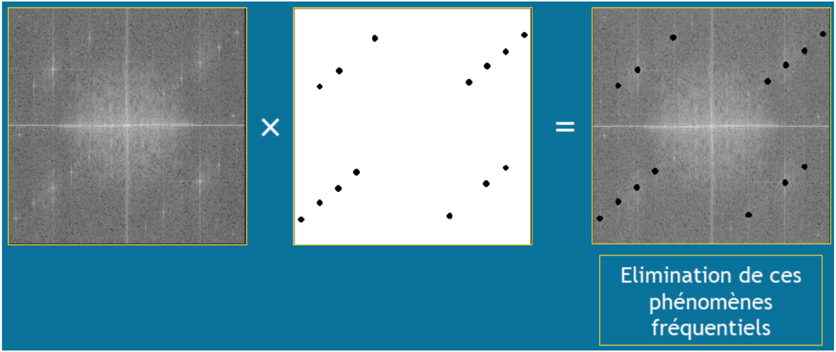
Exemple d'application du filtrage fréquentiel : élimination de bruit

- Etape 1 : observation et analyse



Exemple d'application de filtrage fréquentiel : élimination de bruit

- Etape 2 : filtrage fréquentiel



Exemple d’application de filtrage fréquentiel : élimination de bruit

- Etape 3 : résultat

La transformée de Fourier en pratique

- Première étape : calcul de la T.F. (partie réelle, partie imaginaire) :

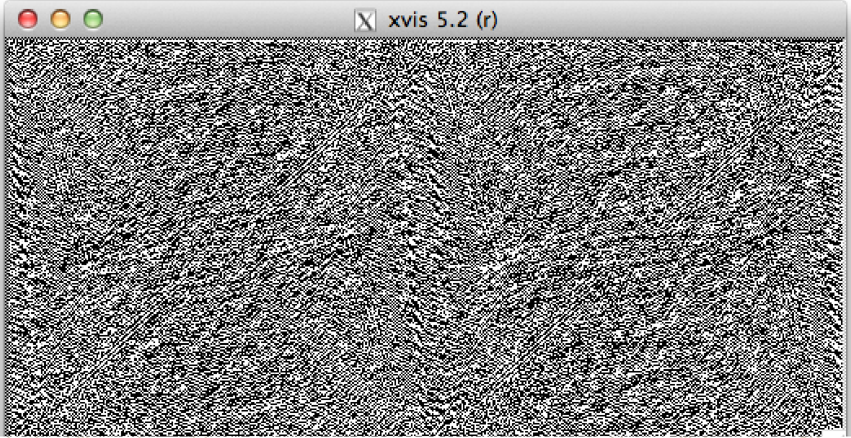
```
> rdf lena.inr r i
rdf erreur Inrimage no 3 status 0 (0x0)
!! Image en 2**n exig?e
rdf erreur Inrimage no 3 status 0 (0x0)
!! Image en 2**n exig?e
> par lena.inr
lena.png -F=Inrimage -hdr=1 -x 600 -y 600 -v 3 -f -o 1
```

- Fast Fourier Transform (taille du domaine en puissance de 2) !

```
> par cameraman.inr
cameraman.inr -F=Inrimage -hdr=1 -x 256 -y 256 -f -o 1
> rdf cameraman.inr r i
> par r i
r -F=Inrimage -hdr=1 -x 256 -y 256 -rdecm -o 4
i -F=Inrimage -hdr=1 -x 256 -y 256 -rdecm -o 4
```

La transformée de Fourier en pratique

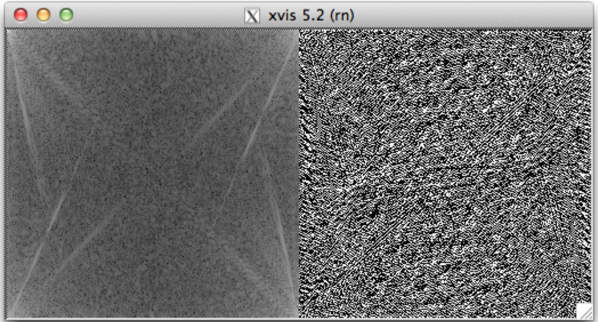
```
> ical r i
r:          -1754.408447      0.835293  42892.511719
i:          -5611.016113      0.000000   5611.016602
> xvis -nu -grp 2 -hz 2 r i
```



La transformée de Fourier en pratique

- Étape 2 : représentation spectre - phase.

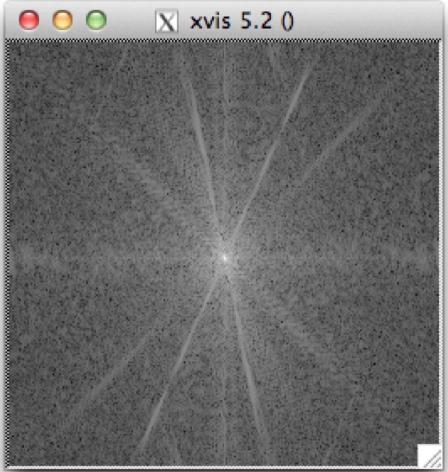
```
> ri r i
> ical r i
r:              0.102184       22.034374   42892.511719
i:             -3.141584        0.000144       3.141593
> lo r | norma > rn
> xvis -nu -grp 2 -hz 2 rn i
```



La transformée de Fourier en pratique

- La FFT décentre les images.

```
> ce rn | xvis -nu
```



La transformée de Fourier en pratique

- Étape 4 : reconstruction de l'image depuis sa transformée de Fourier.
  - Commande `ma` (réciproque de la commande *ri*).
  - Commande `idf` : transformée de Fourier inverse. 4 arguments : partie réelle de l'entrée, partie imaginaire de l'entrée, partie réelle de la sortie et partie imaginaire de la sortie.
- Question : sur l'exemple précédent, que contiendra le dernier argument de la commande `idf` ?