Билеты к зачёту по математическому анализу

Коткин Михаил

18 февраля 2026 г.

Содержание

1 Общие свойства последовательности — монотонность, ограниченность, понятие точных границ

Опр. Последовательность - это функция натурального аргумента

Свойства:
1)Монотонность
Опр.1 последовательность a_n называется монотонно возрастающей если
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} > a_n (\geq$ если возрастает не строго)
Опр.1 последовательность a_n называется монотонно убывающей если
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} < a_n (\leq$ если возрастает не строго)
Опр.2a_n монотонно возрастает тогда и только тогда $\forall\ n_1 > n_2\ : a_{n1} > a_{n2}$
монотонно убывает тогда и только тогда $\forall\ n_1 < n_2\ : a_{n1} < a_{n2}$
Докажем эквивалентность двух определений:
1)=>: $\forall n\ a_{n+1} > a_n$
Пусть $n_1 > n_2$ тогда $n_2 < n_2 + 1 < n_2 + 2 < ... \leq n_1 \Rightarrow a_{n_2+1} > a_{n_2}$
$a_{n_2+2} > a_{n_2+1} > a_{n_2}$
...
$a_{n_1} \geq ... > a_{n_2} \Rightarrow a_{n_1} > a_{n_2}$

2)<=: $\forall n_1 > n_2 : a_{n_1} > a_{n_2}$
$\forall$ n + 1 > n
$\Rightarrow a_{n+1} > a_n$
Опр. последовательность называется монотонно возрастающей с некоторого места
если $\exists\ N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 : a_{n+1} > a_n$
/* отрицание монотонности по определению
$\exists n_1 > n_2 : a_{n_1} \leq a_{n_2}\ \&\ \exists n_3 > n_4 : a_{n_3} \geq a_{n_4}$*/
Опр. последовательность называется ограниченной если
$\exists M > 0 : \forall n |x_n| \leq M$
последовательность называется ограниченной сверху если $\exists M :\ \forall x_n \leq M$
последовательность называется ограниченной снизу если $\exists M :\ \forall x_n \geq M$
Опр. последовательность называется ограничена с некоторого места если
$\exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N\ \exists M > 0 : |x_n| \leq M$
Теорема1. x_n ограниченная тогда и только тогда когда ограничена снизу и сверху
Теорема2. x_n ограниченная тогда и только тогда когда она ограниченна с некоторого места.
Доказательство:
=>:
x_n ограниченна$\Rightarrow \exists N = 1 :\ \exists M > 0 :\ \forall n \geq N\ |x_n| \leq M$

<=:
x_n ограниченна с некоторого места $\Rightarrow\ \exists N\ \forall n \geq N\ \exists M > 0 :\ |x_n| < M$
Пусть $M_0 = max(|x_1|, |x_2|...|x_{N-1}|, M)$

тогда $\forall n \in \mathbb{N}$: $n < N \ \Rightarrow\ |x_n| \leq M_0$
$n \geq M \ \Rightarrow\ |x_n| \leq M \leq M_0 \ \Rightarrow |x_n| \leq M_0$
Замечание Свойства ограниченных функций верны для ограниченных последовательностей
Опр. число А называется точной верхней границей(супремум) $A = sup\, x_n$ если:
1)$\forall n\ x_n \leq A$
2)$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N\ x_N > A - \varepsilon$
Опр. число B называется точной нижней границей(инфимум) $B = Inf\, x_n$ если:
1)$\forall n\ x_n \geq B$
2)$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N\ x_N < \varepsilon + B$

2 Арифметическая прогрессия. Формула n-ного члена, характерестическое свойство, сумма первых n членов

Опр. a_n называется арифметической прогрессией если:
$\exists d \in \mathbb{R}:\ a_{n+1} = a_n + d$
$a_{n+1} = a_n + d$ (1)
$a_n = a_{n-1} + d \ \Leftrightarrow a_{n-1} = a_n - d$ (2)
из (1) и (2) $\boxed{a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$ - характерестическое свойство
формула общего члена $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$ где d - разность прогрессии
Доказательство:(ММИ)
1)n = 1: $a_1 = a_1$
2)n = k: $a_k = a_1 + (k-1)d$
3)n = k + 1: $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd = a_1 + ((k-1)-1)d$
Формула суммы первых n членов
$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$

$$\left.\begin{array}{c} a_2 = a_1 + d \\ a_{n-1} = a_n - d \end{array}\right\} \Rightarrow a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$$

$a_3 = a_1 + 2d$ & $a_{n-2} = a_n - 2d \Rightarrow a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$
Доказательство(ММИ):
1)n = 2 $a_1 + a_2 = \frac{a_1+a_2}{2}2$
2)n = k $a_1 + a_2 + ... + a_k = \frac{a_1+a_k}{2}k$
3)n = k + 1: (!) $a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} = \frac{a_1+a_{k+1}}{2}(k+1) = \frac{a_1+a_{k+1}}{2}k + \frac{a_1+a_k+d}{2}$
$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{a_1+a_k}{2}k + a_k + d$
$a_{k+1} = a_k + d$
$a_1 + ... + a_k + a_{k+1} = \frac{a_1+a_k+d}{2}k + \frac{a_1+a_k+d}{2} \Leftrightarrow \frac{a_1+a_k}{2}k + a_{k+1} = \frac{a_1+a_k+d}{2}k + \frac{a_1+a_k+d}{2}$
$\Leftrightarrow a_{k+1} = \frac{d}{2}k + \frac{a_1+a_k+d}{2} \Leftrightarrow 2a_{k+1} = (kd + a_1) + (a_k + d) = a_{k+1}$

$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{a_1+a_k}{2}k + a_k + d = \frac{(a_1+a_k)k+2a_k+d}{2} = \frac{1}{2}(a_1+a_k)k + a_1 + (k-1)d = \frac{1}{2}((a_1+a_k)k + a_1 + a_{k+1} + kd) = \frac{1}{2}((a_1+a_{k+1})k + a_1 + a_{k+1})$

$\boxed{S_n = \dfrac{a_1+a_n}{2}n}$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$S_n = \frac{a_1+a_2}{2}n = \frac{a_1+a_1+(n-1)d}{2}n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2}n$

3 Геометрическая прогрессия. Формула n-ного члена, характерестическое свойство, сумма первых n членов

Опр.числовая последовательность b_n называется геометрическая прогрессия если: 1)$\forall\ b_n \neq 0$

2)$\exists q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall n\ b_{n+1} = b_n q$

q - знаменатель прогрессии

Характерестическое свойство:

$\forall n:\ |b_n| = \sqrt{b_{n+1}b_{n-1}} \Leftrightarrow b_n^2 = b_{n+1}b_{n-1}$

$b_{n+1} = b_n q\ \ \&\ \ b_n = b_{n-1}q \Leftrightarrow b_{n-1} = \frac{b_n}{q} \Rightarrow b_{n+1}b_{n-1} = b_n^2$

Формула общего члена:

$\forall n\ \boxed{b_n = b_1 q^{n-1}}$

Доказательство(ММИ):

1)n = 1 - верно

n = 2 - верно

2)$b_{k+1} = b_1 q^{k-1}$

3)(!)$b_{k+1} = b_1 q^k$

$b_{k+1} = b_k q = b_1 q^{k-1} q = b_1 q^k$

Формула суммы первых n членов:

$$\left.\begin{array}{c} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + ... + b_1 q^{n-1} \\ (q^{n-1}b_1 + q^{n-2}b_1 + ...b_1)q \end{array}\right\} \oplus\ \ b_1 - q^n b_1 = S_n - S_n q \Leftrightarrow$$

$S_n(1-q) = b_1(1-q^n) \Leftrightarrow \boxed{S_n = \dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}}$

Доказательство(ММИ):

1)k = 1 верно

k = 2 верно

2)$S_k = \frac{b_1(q^k-1)}{q-1}$

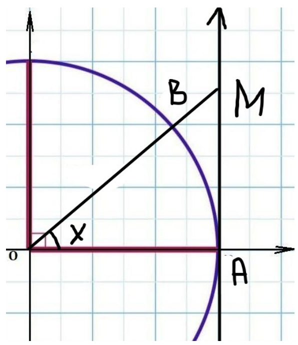
3)(!)$S_{k+1} = b_1\frac{q^{k+1}-1}{q-1}$

$S_{k+1} = S_k + b_{k+1} = b_1\frac{q^{k+1}-1}{q-1} + b_1 q^k = \frac{b_1}{q-1}(q^{k-1} + q^{k-1} - q^k) = b_1\frac{q^{k+1}-1}{q-1}$

4 Определение предела последовательности. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}$, $\lim_{n\to\infty} sin\, a_n$, $\lim_{n\to\infty} cos\, a_n$ при условии $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

Опр. число А называется пределом последовательности a_n при $n \to \infty$
$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - A| < \varepsilon$
Теорема1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$ Обратное не верно!
Доказательство:
Лемма $\forall\ a, b\ ||a| - |b|| \leq |a - b|$
Докажем: $||a| - |b|| \leq |a - b| \Leftrightarrow (||a| - |b||)^2 \leq |a - b|^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2|ab| \leq a^2 + b^2 - 2ab \Leftrightarrow ab \leq |ab|$
Докажем теорему: $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N\ |a_n - A| < \varepsilon$
По лемме $||x_n| - |A|| \leq |x_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$
Теорема2.$\forall n\ a_n \geq 0\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A\ (A \geq 0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$
Доказательство1:
Дано: $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} < \varepsilon$
1.1)$A \neq 0 : \frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} < \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}}$
Возьмём $\forall\varepsilon > 0 :$ для него $\varepsilon_0 = \varepsilon\sqrt{A}$
$\exists N_0 :\ \forall n \geq N_0\ |a_n - A| < \varepsilon_0\ \Leftrightarrow |a_n - A| < \varepsilon\sqrt{A}\ \Leftrightarrow \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} < \varepsilon$
тогда $\frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} < \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} < \varepsilon$
1.2)А $= 0$: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_0 :\ \forall n \geq N_0\ \ |a_n| < \varepsilon_0$
(!)$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \sqrt{a_n} < \varepsilon \Leftrightarrow a_n < \varepsilon^2$
Возьмём $\forall\varepsilon > 0$ для него $\varepsilon_0 = \varepsilon^2$ тогда $\exists N_0 :\ \forall n \geq N_0\ |a_n| < \varepsilon^2 \Leftrightarrow \sqrt{|a_n|} < \varepsilon$
Доказательство2:
Лемма $\forall a, b \geq 0 :\ |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|} \Leftrightarrow |\sqrt{a} - \sqrt{b}|^2 \leq |a - b| \Leftrightarrow$
$a - 2\sqrt{ab} + b \leq |a - b|$
2.1) a $>$ b
a $+$ b $+ 2\sqrt{ab} \leq b - a \Leftrightarrow 2b \leq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{b} \leq \sqrt{a}$
2.2) a $<$ b
a $+$ b -$2\sqrt{ab} \leq b - a \Leftrightarrow 2a \leq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq$
$\sqrt{b}$
2.3)a $=$ b
$0 = 0$
Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| < \varepsilon$
Возьмём $\varepsilon_0 = \varepsilon^2\ \exists N_0\ |a_n - A| < \varepsilon^2 \Leftrightarrow \sqrt{|a_n - A|} < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| < \varepsilon$

Лемма



x $\in [0; \frac{\pi}{2})$
$\Delta OAB \subset$ сектор OAB $\subset\ \Delta OAM$
$\Rightarrow S_{\Delta OAB} \leq S_{OAB} \leq S_{\Delta OAM}$
$\frac{1}{2}R^2 sin\, x \leq \frac{1}{2}R^2 x \leq \frac{1}{2}R(R\, tg\, x) \ \Leftrightarrow$
$\boxed{sin\, x \leq x \leq tg\, x}$

Замечание Если $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0]$ $\ sin\,(-x) \leq -x \leq tg\,(-x) \Leftrightarrow$
$-\,sin\, x \leq -x \leq -tg\, x \Leftrightarrow |sin\, x| \leq |x| \leq |tg\, x|$
Теорема2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} sin(x_n) = sin\, A$
Доказательство:
$\forall\varepsilon > 0 :\ \exists n\ \forall n \geq N\ |x_n - A| < \varepsilon$
$|sin\, x_n\ -\ sin\, A| = 2|sin(\frac{x_n - A}{2})cos(\frac{x_n + A}{2})| = 2|sin(\frac{x_n - A}{2})||cos(\frac{x_n + A}{2})| \leq$
$2|sin(\frac{x_n - A}{2})| \leq 2|\frac{x_n - A}{2}| = |x_n - A|$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n \geq N\, |sin\, x_n - sin\, A| \leq |x_n - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} sin(x_n) = sin\, A$
Теорема3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} cos(x_n) = cos\, A$
Доказательство
Аналогично доказательству теоремы 2 ($cos\, x_n - cos\, A = -2sin(\frac{x_n - A}{2})sin(\frac{x_n + A}{2})$)

5 Предельный переход в равенстве и неравенстве. Единственность предела. Теорема о сжатой переменной

Теорема(о единственности приедела). Если последовательность сходится, то её предел единственный.
Доказательство
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n \geq N_1\ |x_n - A| < \varepsilon$
$A \neq B\ \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = B \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n \geq N_2\ |x_n - A| < \varepsilon$
Пусть A $<$ B $\Rightarrow \exists C :\ A < C < B$(аксиомы $\mathbb{R}$)

$$\left.\begin{matrix} A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \\ C > A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists\ N_1 :\ \forall n \geq N_1\ x_n < C$$

$$\left.\begin{matrix} B = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \\ C < B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists\ N_2 :\ \forall n \geq N_2\ x_n > C$$

Пусть $N_0 = max\{N_1; N_2\}$ $\forall n \geq N_0 \Rightarrow n \geq N_0 \geq N_1$ & $n \geq N_0 \geq N_2$
Тогда $x_n < C$ & $x_n > C$?!!
Теорема(предельный переход в равенстве). Если последовательности$\{x_n\}, \{y_n\}$ сходятся и $\forall n$ $x_n = y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
Доказательство
Следует из Теоремы о единственности предела
Теорема(предельный переход в неравенстве). Если последовательности$\{x_n\}, \{y_n\}$ сходятся и $\exists N: \forall n \geq N x_n < y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
Доказательство:
От противного пусть A $>$ B $\Rightarrow \exists C : A > C > B$, где $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n, B = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ & $A < C \Rightarrow \exists N_1: \forall n \geq N_1$ $x_n > C$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ & $B > C \Rightarrow \exists N_2: \forall n \geq N_2$ $y_n < C$
$N_0 = max\{N_1; N_2; N\}$
$\forall n \geq N_0$ $x_n < y_n$ & $x_n > C$ & $y_n < C \Rightarrow C < x_n < y_n$
Теорема о сжатой переменной(теорема о двух мелиционерах) Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ такие, что $\exists N$ $\forall n \geq N$ $x_n < y_n < z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$
Доказательство:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ $\exists N_1$ $\forall n \geq N_1$ $|x_n - A| < \varepsilon$
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ $\exists N_2$ $\forall n \geq N_2$ $|z_n - A| < \varepsilon$
Возьмём $\forall\varepsilon > 0$, для него $\exists N_1, N_2$
$\exists N_0 = max\{N_1, N_2, N\}$ $\forall n \geq N_0$ $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < y_n < z_n < A + \varepsilon \Rightarrow |y_n - A| < \varepsilon$

6 Необходимый признак сходимости последовательности

Теорема(необходимый признак сходимости последовательности \ достаточный признак ограниченно
Сходящаяся последовательность ограниченна. Обратное не верно!!!
Доказательство:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$
Возьмём M $>$ |A|, т. е. $-M < -|A| \leq A \leq |A| < M$
$\exists N_1: \forall n \geq N_1$ $x_n < M$
$\exists N_2: \forall n \geq N_2$ $x_n > -M$
$N = max\{N_1; N_2\}$
$\forall n \geq N$ $-M < x_n < M \Leftrightarrow \{x_n\}$ ограниченная с некоторого места $\Leftrightarrow \{x_n\}$ ограниченна

7 Теорема Вейерштрассе о монотонности последовательности

Теорема Вейерштрассе. Монотонная ограниченная последовательность сходится. То есть если последовательность монотонно возрастает и ограниченна сверху или монотонно убывает и ограниченна снизу, то она сходится
Доказательство
1)$\{x_n\}\uparrow \&\ \{x_n\}$ ограниченна $\Rightarrow$(по аксиоме) $\exists\, Sup\, x_n, Inf\, x_n$
$A = Sup\, x_n \Leftrightarrow \forall n\ x_n \le A\ \ \&\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N:\ x_N > A - \ \varepsilon$
Возьмём $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ x_N > A - \varepsilon$
$\forall n \ge N\ x_n \ge x_N$(т. к. $\{x_n\}\uparrow$)
$x_n \ge x_N > A - \varepsilon$
$\forall n:\ x_n \le A < A + \varepsilon$
т. е. $\forall n \ge N\ A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$
2)$\{x_n\}\downarrow$
$B = Inf\, x_n \Leftrightarrow \forall n\ x_n \ge B\ \ \&\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N x_N < B + \varepsilon$
Возьмём $\forall \varepsilon > 0$
$\exists N\ x_N < B + \varepsilon$
$\forall n \ge N\ \{x_n\}\downarrow\ x_n \le x_N \Rightarrow x_N < B + \varepsilon\ \ \&\ \forall n\ x_n \le B > B - \varepsilon$
Следствие Для монотонно возрастающей последовательности предел совпадает с верхней границей, для монотонно убывающей - с точной нижней границей

8 Сходимость последовательностей $x_n = \frac{a^n}{n!}$, $y_n = \frac{n^a}{a^n}$, $z_n = \frac{n!}{n^n}$

Теорема1 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{a^n} = 0$
Доказательство:
$x_n = \frac{n^a}{a^n}\ \ x_{n+1} = \frac{(n+1)^a}{a^{n+1}} = x_n \frac{1}{a}(\frac{n+1}{n})^a$
$x_{n+1} - x_n = x_n(\frac{1}{a}(1+\frac{1}{n})^a - 1)\ \ (\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^a\ = 1\ \ \&\ \ a > 0)$
$\frac{1}{a}(1+\frac{1}{n})^a < 1 \Leftrightarrow (1+\frac{1}{n})^a < a$
$\exists N:\ \forall n \ge N\ \ \frac{1}{a}(1+\frac{1}{n})^a < 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow \{x_n\}\downarrow$ с некоторого места
$x_n > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$
$x_{n+1} = x_n\frac{1}{a}(1+\frac{1}{n})^a\ \ \&\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A \Rightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A = \dfrac{1}{a}\lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^a \Leftrightarrow A = A\dfrac{1}{a}1 \Leftrightarrow A = 0$

Теорема2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$
Доказательство:
$x_n = \frac{a^n}{n!} \quad x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n}{n!}\frac{a}{n+1} = x_n\frac{a}{n+1}$
$-x_{n+1} + x_n = x_n(1 - \frac{a}{n+1}) = x_n(\frac{n+1+a}{n+1})$
$\exists N:\ \forall n \geq N\ n > a-1\ x_n > x_{n+1}$
$x_{n+1} = x_n\frac{a}{n+1}\ \&\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$ тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow A*0 = A \Leftrightarrow A = 0$
Теорема3 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$
Доказательство:
$x_n = \frac{n!}{n^n} \quad x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!(n+1)n^n}{n^n(n+1)^{n+1}} = x_n(\frac{n}{n+1})^n$
$x_{n+1} - x_n = x_n((\frac{n}{n+1})^n - 1)$
$(!)(1+\frac{1}{n+1}) - 1 < 0 \Leftrightarrow (1-\frac{1}{n+1})^n < 1 \Leftrightarrow (1-\frac{1}{n+1})^{n+1}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} < 1$
$(\lim\limits_{n\to\infty}(1 - \dfrac{1}{n+1})^{n+1} = \dfrac{1}{e}\ \ \&\ \ \dfrac{1}{1-\frac{1}{n+1}} \to 1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{e}1 < 1 \Rightarrow \exists N:\ \forall n \geq N\ (1 - \dfrac{1}{n+1})^n < 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n+1})^n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow A = A\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow A = 0$

9 Сходимость геометрической прогрессии при |q| < 1. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Теорема q = const, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, |q| < 1
Доказательство:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geq N\ |q^n| < \varepsilon$
|q| < 1(q = 1 очевидно верно)$\Leftrightarrow$ $(q \neq 0)\frac{1}{|q|} > 1 \Leftrightarrow \exists a > 0:\ \frac{1}{|q|} = a+1 \Leftrightarrow (\frac{1}{|q|})^n = (1+a)^n \Leftrightarrow \frac{1}{|q|^n} = (1+a)^n \Leftrightarrow |q|^n = \frac{1}{(1+a)^n}$
$(1+a)^n \geq 1 + na > na$(неравенство Бернулли)
$(1+a)^n > na \Leftrightarrow \frac{1}{(1+a)^n} < \frac{1}{na}$ т. е. $|q|^n < \frac{1}{na}$
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{na} = 0 \quad 0 < |q|^n < \dfrac{1}{na}$ т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n = 0$(по теореме о сжатой переменной) $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$
Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$, $|q| < 1$
Доказательство:

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{(1-q)}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}$(т. к. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n - 1 = -1$)
/* равенство возможно по теореме о действиях со сходящимися последовательностями($\frac{b_1}{1-q}$ - коэффицент т. к. b_1, q - константы) */
/* Мы не можем оставить q^n в формуле т. к. не понятно, как возводить константу в бесконечно растущую степень */

10 Бесконечно малые последовательности, действия с ними

Опр. Последовательность, сходящаяся к 0 называется бесконечно малая.
Теорема1x_n - бесконечно малая $\Leftrightarrow |x_n|$ - бесконечно малая.
Теорема2.$\{x_n\}, \{y_n\}$ - бесконечно малые $\Rightarrow \{x_n \pm y_n\}$ - бесконечно малая. Обратное не верно.
Доказательство:
1)$z_n = x_n + y_n$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon_1 > 0\ \exists N_1 :\ \forall n \geq N_1\ |x_n| < \varepsilon_1$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon_2 > 0\ \exists N_2 :\ \forall n \geq N_2\ |y_n| < \varepsilon_2$
$z_n = x_n + y_n$ тогда $|z_n| = |x_n + y_n| \geq |x_n| + |y_n|$
(!) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ |z_n| < \varepsilon$
Возьмём $\forall\varepsilon > 0 \varepsilon_1 = \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$
Найдём $N_2, N_1 :\ \forall n \geq N_1\ |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ \&\ \forall n \geq N_2\ |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
Пусть $N = max\{N_1, N_2\}$
$\forall n \geq N |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ \&\ |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ тогда $|z_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2)$z_n = x_n - y_n = x_n + (-y_n)$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (-y_n) = 0 \Rightarrow \{y_n\}$ - бсконечно малая
$x_n + (-y_n)$ - сумма бесконечно малых(смотри пункт 1)
Теорема3. Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательности - бесконечно малая
Доказательство:
$z_n = y_n * z_n \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon_1 > 0\ \exists N_1 :\ \forall n \geq N_1\ |x_n| < \varepsilon_1$
$\{y_n\}$ - ограниченна $\Leftrightarrow \exists M > 0 :\ \forall n\ |y_n| \leq M$
$|z_n| = |x_n * y_n| = |x_n||y_n|$
(!)$\forall\varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n \geq N\ |z_n| < \varepsilon$
Возьмём $\varepsilon > 0\ \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}\ \forall n\ |y_n| \leq M$
$\exists N_1\ \forall n \geq N_1\ \ |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ тогда $|z_n| = |x_n||y_n| > \frac{\varepsilon}{M}M$ т. е. $|z_n| < \varepsilon$ т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$

Следствие1. Произведение двух бесконечно малых - бесконечно малое.
Доказательство:
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \;\&\; A > 0 \Rightarrow \exists N_1\ \forall n \geq N_1\ y_n < A$
$B < 0 \Rightarrow \exists N_2\ \forall n \geq N_2\ y_n > B$
Пусть $N = max\{N_1; N_2\} \Rightarrow \forall n \geq N\ B < y_n < A \Rightarrow \{y_n\}$ - ограниченная тогда можно применить теорему 3.
Сдедствие2. Произведение конечного числа бесконечно малых - бесконечно малое.
Утв.Отношение бесконечно малых не обдадает свойством сходимости.

11 Бесконечно большие последовательности, свойства

Опр.Последовательность $\{x_n\}$называется бесконечно большой если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ |x_n| > \varepsilon \Leftrightarrow x_n > \varepsilon \vee x_n < -\varepsilon$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ |x_n| > \varepsilon \Leftrightarrow x_n > \varepsilon$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ |x_n| > \varepsilon \Leftrightarrow x_n < -\varepsilon$
Теорема1(связь бесконечно больших и бесконечно малых). x_n - бесконечно большпя $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ - бесконечно малая.
Доказательство:
=>: Возьмём $\forall\varepsilon_1 > 0$ для него $\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_1}\ \exists N_1 :\ \forall n \geq N_1\ |x_n| > \frac{1}{\varepsilon_1} \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon_1$
<=: аналогично
Теорема2. Если $\{x_n\}, \{y_n\}$ бесконечно большие одного знака, то их сумма - бесконечно большая.
Доказательство:
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \;\&\; \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$
(!) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$
$\forall\varepsilon_1 > 0\ \exists N_1\ \forall n \geq N_1\ x_n > \varepsilon_1$
$\forall\varepsilon_2 > 0\ \exists N_2\ \forall n \geq N_2\ y_n > \varepsilon_2$
Возьмём $\forall\varepsilon > 0\ \varepsilon_1 = \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$
$\exists N_1 :\ \forall n \geq N_1\ x_n > \frac{\varepsilon}{2}$
$\exists N_2 :\ \forall n \geq N_2\ x_n > \frac{\varepsilon}{2}$
$\exists N = max\{N_1; N_2\}$
$\forall n \geq N$
$$\left.\begin{matrix} x_n > \frac{\varepsilon}{2} \\ y_n > \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}\right\} \oplus \Rightarrow x_n + y_n > \varepsilon$$
для остальных случаев аналогично.

Теорема3. Если $\{x_n\}, \{y_n\}$ - бесконечно большие, то $\{x_n * y_n\}$ - бесконечно большая
Доказательство:
Возьмём $\frac{1}{x_n * y_n} = \frac{1}{x_n} \frac{1}{y_n}$
$\{x_n\}$ бесконечно большая $\Leftrightarrow \{\frac{1}{x_n}\}$ - бесконечно малая
$\{y_n\}$ бесконечно большая $\Leftrightarrow \{\frac{1}{y_n}\}$ - бесконечно малая
$\Rightarrow \{\frac{1}{x_n} \frac{1}{y_n}\}$ - бесконечно малая $\Leftrightarrow \{x_n * y_n\}$ - бесконечно большая
Теорема4. Если $\{x_n\}$ бесконечно большая,$\{y_n\}$ - сходящаяся $\Rightarrow \{x_n + y_n\}$ - бесконечно большая
Доказательство:
$\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon_1 > 0\ \exists N_1\ \forall n \geq N_1\ \boxed{|x_n| > \varepsilon_1}$
$\{y_n\}$ - сходящаяся $\Rightarrow$ $\{y_n\}$ - ограниченная $\Rightarrow \exists M > 0\ \forall n\ |y_n| < M \Leftrightarrow$ $\boxed{-|y_n| > -M}$
$\Rightarrow |x_n| - |y_n| > \varepsilon_1 - M$
(!)$\forall \varepsilon > 0 :\ \exists N\ \forall n \geq N\ |x_n + y_n| > \varepsilon$
Возьмём $\varepsilon_1 = M + \varepsilon$
для него $\exists N :\ \forall n \geq N\ |x_n + y_n| \geq |x_n| - |y_n| > \varepsilon_1 - M \Leftrightarrow |x_n + y_n| > \varepsilon$
Теорема5. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, а $\{y_n\}$ - сходящаяся, то $\{\frac{y_n}{x_n}\}$ - бесконечно малая.
Доказательство:
$\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ - бесконечно малая
$\frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{x_n} y_n \Leftrightarrow$ бесконечно малая(бесконечно малая*ограниченная)
Теорема6. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, а $\{y_n\}$ — сходящаяся, но не бесконечно малая, то $\{x_n * y_n\}$ - бесконечно большая
Доказательство:
...

12 Арифметические действия с пределами

Лемма$\{x_n\}$ - сходится к А $\Leftrightarrow \{x_n - A\}$ - бесконечно малая т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (x_n - A) = 0$
Теорема1 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A\ \&\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B$
Доказательство:
$$\left.\begin{array}{l} \alpha_n = x_n - A - \text{бесконечно малая} \\ \beta_n = y_n - B - \text{бесконечно малая} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_n = \alpha_n + A \\ y_n = \beta_n + B \end{array}\right\} \oplus\ \Rightarrow x_n \pm y_n = (\alpha_n \pm \beta_n) + A \pm B \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B \quad \text{(по лемме)}$$

Теорема2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n * y_n = A * B$
Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} x_n = \alpha_n + A \\ y_n = \beta_n + B \end{array}\right\} x_n * y_n = (\alpha_n + A)(\beta_n + B) = AB + \alpha_n\beta_n + \alpha_n B + \beta_n A =$$
$AB + \gamma_n$(конечная сумма бесконечно малых) $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n * y_n = A * B$

Лемма1. Если $\{x_n\}$ сходится и не бесконечно малая, то $\exists r > 0 :\ \exists N :\ \forall n \geq N\ |x_n| > r$

Доказательство:

$r = \frac{|A|}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon \Leftrightarrow$

$$A - \frac{|A|}{2} < x_n < \frac{|A|}{2} + A$$

A $>$ 0: $\frac{A}{2} < x_n < \frac{3A}{2} \Rightarrow |x_n| > \frac{A}{2} = \frac{|A|}{2} = r$

A $<$ 0: $\frac{3A}{2} < x_n < \frac{A}{2} \Rightarrow -x_n > -\frac{A}{2} \Leftrightarrow |x_n| > \frac{|A|}{2} = r$

Лемма2 Если $\{x_n\}$ сходящаяся и не бесконечно малая, то $\frac{1}{x_n}$ - ограниченна($|x_n| < r \Rightarrow |\frac{1}{x_n}| < \frac{1}{r}$)

Теорема4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ & $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{x_n}{y_n}) = \dfrac{A}{B}$ ($\{x_n\}, \{y_n\}$ - не бесконечно малые)

Доказательство:

по Лемме1 $\exists\ r > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ |y_n| > r$

$x_n = \alpha_n + A$ & $y_n = \beta_n + B$

Рассмотрим $\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B} = \frac{x_n B - y_n A}{y_n B} = \frac{1}{B}\frac{1}{y_n}(x_n B - y_n A) = \gamma_n$ - бесконечно малая

$\frac{1}{B} - const$ & $\frac{1}{y_n}$ - ограниченна по Лемме2

Рассмотрим $z_n = -x_n B - y_n A = BA - AB = 0$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{x_n}{y_n}) = \dfrac{A}{B}$

13 Предел отношения многочленов

P(n) многочлен, deg P(n) = k

Q(n) многочлен, deg Q(n) = l

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{p(n)}{Q(n)}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_0 n^k + ... + a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_0 n^l + ... + b_l)}$$

Если k = l: $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{P(n)}{Q(n)}) = \dfrac{a_0}{b_0}$

Если k $<$ l: $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{P(n)}{Q(n)}) = 0$

Если k > l: $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{P(n)}{Q(n)}) = \infty$

Доказательство:

$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{p(n)}{Q(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{a_0 + \frac{a_1}{n} + ... + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 n^{l-k} + ... + \frac{b_l}{n^k}})$

Если k = l: $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{P(n)}{Q(n)}) = \dfrac{a_0}{b_0}$

Если k < l, l - k > 0: $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{P(n)}{Q(n)}) = 0$ (сходящаяся/бесконечно большая -> бесконечно малая)

Если k > l, l - k < 0: $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{P(n)}{Q(n)}) = \infty$(сходящаяся/бесконечно малая -> бесконечно большая)

14 Сходимость последовательностей $(1+\frac{1}{n})^n$, $(1-\frac{1}{n})^n$, $c^{\frac{1}{n}}$, $n^{\frac{1}{n}}$

Теорема1. $\forall c > 0\ c = const\ \lim\limits_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$

Доказательство:

1)c = 1 выполняется

2)c > 1 $\Leftrightarrow c^{\frac{1}{n}} > 1$

Пусть $\alpha_n = c^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$ тогда $c^{\frac{1}{n}} = \alpha_n + 1 \Leftrightarrow$

$c = (1+\alpha_n)^n \geq 1 + \alpha_n n > n\alpha_n$(первое нераверавенство - неравенство Бернулли)

т. о. 0 <$\alpha_n < \frac{c}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$(теорема о сжатой переменной) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}}$

3)c < 1 $\lim\limits_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(\frac{1}{c})^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{c})^{\frac{1}{n}}} = 1$

Теорема2. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

Лемма $\forall x > 0 : (1+x)^n > \frac{(n-1)n}{2}x^2$

Доказательство Леммы

ММИ/расписать через бином Ньютона

Доказательство теоремы:

n > 1 $\Rightarrow \sqrt[n]{n} > 1$

Пусть $\alpha_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 > 0 \Leftrightarrow n^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n \Leftrightarrow n = (1+\alpha_n)^n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$(Лемма2)

$n - 1 \geq \frac{n}{2} \Rightarrow n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 > \frac{n^2}{4}\alpha_n^2$ Итого: $0 < \alpha_n < \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

Теорема3. $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ сходится

Доказательство:
Рассмотрим $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ Докажем, что $\{y_n\}\downarrow$
Рассмотрим $\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = \frac{n^2}{n^2-1}^{2}\frac{n-1}{n} = (1+\frac{1}{n^2-1})^{n+1}\frac{n-1}{n} \geq$
$(1+\frac{1}{n-1})\frac{n-1}{n} = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n} = 1$(первое неравенство - Неравенство Бернулли)
т. е. $\frac{y_n-1}{y_n} > 1$
т. е. $\{y_n\}$ убывает и ограниченна снизу тогда по теореме Вейерштрассе $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n} = e$ - число Эйлера
/* e = 2,718281828... также можно вычислить как сумму ряда $\frac{1}{n!}$ */
Теорема4. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^n = \dfrac{1}{e}$
Доказательство:

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{n^2})^n}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n^2})^n}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$$

$a_n = (1-\frac{1}{n^2}) \geq 1-\frac{n}{n^2} = 1-\frac{1}{n}$(первое неравенство - Бернулли)
т. е. $1-\frac{1}{n} \leq a_n \leq 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
Утв. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$

15 Подпоследовательность. Связь сходимости подпоследовательности со сходимостью последовательности

Опр. Подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ для $\{x_n\}$ называется бесконечная последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}..., x_{n_k}$(номера идут по возрастанию)
Теорема1Любая подпоследовательность сохраняет монотонность и её характер от исходной последовательности
Доказательство:
...

16 Лемма о вложенных промежутках (2 варианта)

Лемма о вложенных промежутках. Пусть даны $\{x_n\}$ возрастающая и $\{y_n\}$ убывающая и $\forall n\ x_n < y_n$ причём $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n - y_n| \to 0$ тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

Доказательство:
$\forall x_1 \leq x_n < y_n \leq y_1$
$\{x_n\} \uparrow$ и ограниченна сверху $\Rightarrow$(по теореме Вейерштрассе) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
$\{y_n\} \downarrow$ и ограниченна снизу $\Rightarrow$(по теореме Вейерштрассе) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
Теорема Кантора о стягивающихся отрезках Пусть имеется бесконечная последовательность вложенных промежутков($[x_1; y_1] \supset [x_2; y_2] \supset ... \supset [x_n; y_n] \supset$ ...) причём $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ тогда $\exists ! C: \ \forall n \ C \in [x_n; y_n]$
Доказательство:
1)существование
$\{x_n\} \uparrow \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = sup\{x_n\} = C$
$\{y_n\} \downarrow \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = Inf\{y_n\} = C$
т. е $\forall n \ x_n \leq C \leq y_n$
2)Единственность
Пусть $\exists C_1 \neq C \ \& \ C_1 \in [x_n; y_n]$
$\forall n: \ C \in [x_n; y_n] \Leftrightarrow x_n \leq C \leq y_n(1)$
$\forall n: \ C_1 \in [x_n; y_n] \Leftrightarrow -y_n \leq -C_1 \leq -x_n(2)$
Сложим (1) и (2): $x_n - y_n \leq C - C_1 \leq y_n - x_n$ тогда по теореме о сжатой переменной $\lim\limits_{n\to\infty}(C - C_1) = 0$ и $C - C_1 - const \Rightarrow C - C_1 = 0 \Leftrightarrow C = C_1$

17 Теорема Больциано-Вейерштрассе

Теорема Больциано-Вейерштрассе Из Любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность
Доказательство:(Методом Больциано - мотодом половинного деления)
$\{x_n\}$ ограниченная $\Rightarrow \exists a, b \ \forall n \ a \leq x_n \leq$
$[a_1; b_1] \supset [a; b] \quad x_{n_1} \in [a_1; b_1]$
$[a_2; b_2] \supset [a; b] \quad x_{n_2} \in [a_2; b_2]$
...
$[a_n; b_n] \supset [a; b] \quad x_{n_k} \in [a_n k; b_n k]$
...
$|a_n - b_n| = \frac{|a-b|}{2^n} \to 0(n \to \infty) \Rightarrow$(по лемме о вложенных промежутках)$\exists ! C = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
т. е. $\forall k \ a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = C$

18 Замечательный предел $\frac{sin\, x_n}{x_n}$

Теорема(первый замечательный предел) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{sin\, x_n}{x_n} = 1$

Доказательство:

1)$x_n > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ $\exists N:\ \forall n \geq N$ $0 < x_n < \dfrac{\pi}{2}$

$sin\, x_n \leq x_n \leq tg\, x_n| \div sin\, x_n > 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x_n}{sin\, x_n} \leq \frac{x_n}{cos\, x_n}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} cos\, x_n = 1$) тогда по теореме о сжатой переменной $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{sin\, x_n}{x_n} = 1$

2)$x_n < 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ $\exists N:\ \forall n \geq N$ $-\dfrac{\pi}{2} < x_n < 0$

$sin(-x_n) \leq -x_n \leq tg(-x_n) \Leftrightarrow -sin\, x_n \leq -x_n \leq -tg\, x_n| \div -sin\, x_n > 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x_n}{sin\, x_n} \leq \frac{1}{cos\, x_n}$ тогда по теореме о сжатой переменной

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sin\, x_n}{x_n} = 1$$

3)знакопеременная последовательность

"докажем позже"...