ITMO University
Software Engineering

Математический анализ

Лектор: Ржонсницкая Ю. Б.

1st Year, Spring Semester

Написан: Коткин Михаил, M3100

Содержание

1. Интегрирование функций одной переменной

1.1. Неопределённый интеграл. Свойства

Определение: Функция $F(x)$ перевообразная для $f(x)$ на (a, b) если $\forall x \in (a, b) : F'(x) = f(x)$

Пример: $f(x) = \cos(x)$ первообразные к ней:
$F_1(x) = \sin(x)$ и $F_2(x) = \sin(x) + 2$ то есть первообразная определяется неоднозначно

Замечание: Важно, что первообразная именно на интервале

Теорема 1

Если $F(x)$ первообразная для $f(x)$ на (a, b) тогда любая другая первообразная $\Phi(x) = F(x) + C$

Доказательство:
Рассмотрим функцию $\Psi(x) = (F(x) - \Phi(x))$ и возьмём её производную на (a, b) :
$\Psi'(x) = (F'(x) - \Phi'(x)) = f(x) - f(x) + C' = 0$
Тогда по теореме Лагранжа $F(x) - \Phi(x) = \text{const}$ а значит $\Phi(x)$ представима в виде $F(x) + \text{const}$ ■

Определение: Неопределённый интеграл - это совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на (a, b)

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Таблица интегралов:

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\text{tg}(x) + C$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\text{ctg}(x) + C$
$\text{sh}(x)$	$\text{ch}(x) + C$
$\text{ch}(x)$	$\text{sh}(x) + C$

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\frac{1}{a}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\frac{1}{x^2-a^2}$	Высокий логарифм $\frac{1}{a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm k^2}}$	Длинный логарифм $\ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm k^2}\rvert+C$

Свойства неопределённого интеграла:

$$1)\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x) \qquad 2)d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$$

$$3)\int dF(x)=F(x)+C \qquad 4)\text{линейность}\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$$

Доказательство:

- Свойства 1-3 доказываются просто по определению
- Докажем свойство 4, для этого продеференцируем обе части равенства:

$$\frac{d}{dx}\left(\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx\right)=\frac{d}{dx}\left(\alpha\int f(x)dx\right)+\frac{d}{dx}\left(\beta\int g(x)dx\right)\text{ по формуле производной суммы}$$

$$\alpha f(x)+\beta g(x)=\alpha\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)+\beta\frac{d}{dx}\left(\int g(x)dx\right)=\alpha f(x)+\beta g(x)\text{ по первому свойству}$$

Замечание: Из 4 свойства следует, что интеграл - линейный оператор

1.2. Вычисление неопределённого интеграла заменой переменной. Интегрирование по частям

Теорема 2

Пусть $x=\varphi(t)$ определённая и дифференцируемая на (a,b). X - множество значений $\varphi(t)$ на котором определеная $f(x)$ с первообразной $F(x)$.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}=F(\varphi(t))+C$$

Доказательство:

$$\int f(\varphi(t))\underbrace{\varphi'(t)dt}_{d\varphi}=\int f(\varphi)d\varphi=F(\varphi)+C$$

Пример:$_1$

$$\int\cos(5x+4)dx=\begin{bmatrix}t=5x+4\\dt=5dx\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\int\cos(5x+4)5dx=\frac{1}{5}\int\cos(t)dt=\frac{1}{5}\sin(t)+C=\frac{1}{5}\sin(5x+4)+C$$

Пример:$_2$(занесение под знак дифференциала)

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x^2+1| + C$$

Теорема 3

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые на (a, b) Тогда

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Доказательство:

Вспомним формулы для производной и дифференциала произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

Возьмём неопределённый интеграл от обеих частей равенства:

$$\int d(uv) = \int (udv + vdu) = \int udv + \int vdu \text{ по свойсву линейности}$$

$$\text{По свойству неопределённого интеграла: } \int d(uv) = uv$$

$$uv = \int udv + \int vdu \Leftrightarrow \int udv = uv - \int vdu \qquad \blacksquare$$

Пример:$_1$

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x \\ dv = e^x dx \end{bmatrix} = e^x x - \int e^x dx = e^x x - e^x + C$$

Пример:$_2$

$$\int \ln(x)dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x) \\ dv = dx \end{bmatrix} = \ln(x)x - \int x\frac{1}{x}dx = \ln(x)x - x + C$$

Пример:$_3$(циклические интегралы)

$$I = \int e^x \cos(x)dx = \begin{bmatrix} u = e^x \\ dv = \cos dx \end{bmatrix} = e^x \sin(x) - \int \sin(x)e^x dx = \begin{bmatrix} u = e^x \\ dv = \sin dx \end{bmatrix} =$$

$$e^x \sin(x) - \left(-e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)dx\right) = e^x \sin(x) - (-e^x \cos(x) + I)$$

получили равенство из которого можно найти I:

$$I = e^x \sin(x) - (-e^x \cos(x) + I) \Leftrightarrow I = \frac{e^x \sin(x) + e^x \cos(x)}{2} + C$$

1.3. Формула Эйлера и правило Лейбница для вычисления неопределённого интеграла

Вспомним формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Тогда функция $f(x) = e^x \cos(x) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}e^x\right) = \mathrm{Re}\left(e^{x(i+1)}\right)$

$$\int e^x \cos(x)dx = \mathrm{Re}\left(\int e^{x(i+1)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+i}e^{x(1+i)}\right) + C = \mathrm{Re}\left(\frac{1-i}{2}e^x(\cos(x) + i\sin(x))\right) = \frac{1}{2}e^x\cos(x) + \frac{1}{2}e^x\sin(x) + C$$

> **Теорема 4**
>
> (**Правило Лейбница**) Пусть $f(x, \alpha)$ функция, зависящая от переменной x и параметра $\alpha . f(x,\alpha)$ и $f'_\alpha(x,\alpha)$ - непрерывны на $[a, d] \times [c, d]$.
>
> $$\text{Тогда } \Phi(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx \text{ диффериенцируема по } \alpha \text{ и } \Phi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^b f(x,\alpha)dx\right) = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx$$

Докажем мы эту теорему позже, а пока применем ее для нахождения неопределённого интеграла

Пример:

1. $\int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + C$
2. $\frac{d}{d\alpha}\left(\int e^{\alpha x}dx\right) = \int (e^{\alpha x})'_\alpha dx = \int xe^{\alpha x}dx$
3. $\frac{d}{d\alpha}\left(\int \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}dx\right) = -\frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x} + \frac{x}{\alpha}e^{\alpha x} \Longrightarrow \int xe^{\alpha x}dx = -\frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x} + \frac{x}{\alpha}e^{\alpha x} + C$

1.4. Интегрирование рациональных дробей