

Билеты к зачёту по математическому анализу

Коткин Михаил

18 февраля 2026 г.

Содержание

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Монотонность функции — определение, свойства, связь с чётностью и нечётностью. Монотонность композиции | 3 |
| 2 | Ограниченность функции — определение, свойства | 5 |
| 3 | Периодичность функции — определение, свойства | 6 |
| 4 | Взаимно-обратные функции — свойства, монотонность | 7 |
| 5 | Определение предела функции в точке по Коши. Бесконечный предел и предел на бесконечность. Лемма о стабилизации знака, обобщение | 8 |
| 6 | Теорема о сжатой переменной. Теорема о локальной ограниченности функции. Предельный переход в неравенстве | 9 |
| 7 | Определение предела функции по Гейне. Эквивалентность определений | 10 |
| 8 | Теорема о действиях с пределами функций. Предел композиции функций | 11 |
| 9 | Замечательный предел, связанный с e | 11 |
| 10 | Односторонние пределы. Критерий существования предела в точке | 12 |
| 11 | Первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Тригонометрические пределы | 12 |
| 12 | Свойства и графики прямых и обратных тригонометрических функций | 13 |

| | | |
|----|--|----|
| 13 | Равносильные определения непрерывности функции в точке. Виды разрывов | 15 |
| 14 | Действия с непрерывными функциями. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность композиции | 15 |
| 15 | Теорема о пределе монотонной функции. Непрерывность монотонной функции. Непрерывность обратной функции | 17 |
| 16 | Наклонная и вертикальная асимптоты к графику функции | 18 |
| 17 | Теорема Больцано-Коши о непрерывности функции на отрезке | 19 |
| 18 | Теоремы Вейерштрассе о непрерывности функции на отрезке | 20 |

1 Монотонность функции — определение, свойства, связь с чётностью и нечётностью. Монотонность композиции

Опр. функция f называется монотонно возрастающей если $\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ - строго возрастает; $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ - нестрого возрастает

Опр. функция f называется монотонно убывающей если $\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ - строго убывает; $\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ - нестрого убывает

Теорема(действия с возрастающими функциями) Пусть функции f и g монотонно возрастают тогда:

1) $c = \text{const}$

если $c > 0$ $h(x) = c * f(x)$ - возрастает

если $c < 0$ $h(x) = c * f(x)$ - убывает

2) $h(x) = f(x) + g(x)$ - возрастает

3) если $\forall x \in D_f f(x) \geq 0$ & $\forall x \in D_g g(x) \geq 0$, то $h(x) = f(x) * g(x)$ - возрастает

если $\forall x \in D_f f(x) \leq 0$ & $\forall x \in D_g g(x) \leq 0$, то $h(x) = f(x) * g(x)$ - убывает

4) если $\forall x \in D_f h(x) = \frac{1}{f(x)}$ - убывает

Доказательство:

1) Пусть $x_1 < x_2 \forall x_1, x_2 \in D_g (D_g \subset D_f) : h(x_1) - h(x_2) = c * f(x_1) - c * f(x_2) = c * (f(x_1) - f(x_2)) < 0$ (если $c < 0$) и > 0 (если $c > 0$)

$f \uparrow \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ тогда при $c > 0$ $h \uparrow$, а при $c < 0$ $h \downarrow$

Замечание $\forall c \in \mathbb{R} f \uparrow \Rightarrow h(x) = f(x) + c, h \uparrow$

2) $\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\forall x_1, x_2 \in D_g : x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$

$D_h = D_f \cap D_g$

$\forall x_1, x_2 \in D_h$ пусть $x_1 < x_2$ тогда:

$h(x_1) - h(x_2) = f(x_1) + g(x_1) - f(x_2) - g(x_2) = (f(x_1) - f(x_2)) + (g(x_1) - g(x_2)) < 0$ (так как $f(x_1) - f(x_2) < 0$ & $g(x_1) - g(x_2) < 0$) то есть $x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow h \uparrow$

Замечание Для разности $h(x) = f(x) - g(x)$ - неверно

3) Пусть $x_1 < x_2 \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) < f(x_2)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in D_g : g(x_1) < g(x_2)$

$D_h = D_f \cap D_g$ тогда $x_1, x_2 \in D_h$ и $x_1 < x_2$

$h(x_1) = f(x_1) * g(x_1), h(x_2) = f(x_2) * g(x_2)$

$\left. \begin{array}{l} 0 \leq f(x_1) < f(x_2) \\ 0 \leq g(x_1) < g(x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow h \uparrow$

$\left. \begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2) \leq 0 \\ g(x_1) < g(x_2) \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -f(x_1) > -f(x_2) \geq 0 \\ -g(x_1) > -g(x_2) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2) \Rightarrow h \downarrow$

4) $x_1 < x_2 \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) < f(x_2)$

$\forall x_1, x_2 \in D_h : x_1 < x_2$ если $0 < f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) < f(x_2)) \frac{1}{f(x_2)} < \frac{1}{f(x_1)}$
 если $f(x_1) < f(x_2) < 0 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2), h \downarrow$

Теорема(действия с убывающими функциями) Пусть функции f и g монотонно убывают тогда:

1) $c = \text{const}$

если $c > 0$ $h(x) = c * f(x)$ - убывает

если $c < 0$ $h(x) = c * f(x)$ - возрастает

2) $h(x) = f(x) + g(x)$ - убывает

3) если $\forall x \in D_f f(x) \geq 0$ & $\forall x \in D_g g(x) \geq 0$, то $h(x) = f(x) * g(x)$ - убывает

если $\forall x \in D_f f(x) \leq 0$ & $\forall x \in D_g g(x) \leq 0$, то $h(x) = f(x) * g(x)$ - возрастает

4) $\forall x \in D_f h(x) = \frac{1}{f(x)}$ - убывает

Доказательство:

аналогично теореме о действиях с возрастающими функциями

Связь монотонности с чётностью

Теорема1 Пусть f - чётная тогда f - монотонно возрастает на $[a; b]$ тогда и только тогда, когда f монотонно убывает на $[-b; -a]$

Доказательство:

Возьмём $-b \leq x_1 < x_2 \leq -a \Leftrightarrow a \leq -x_2 < -x_1 \leq b \Leftrightarrow a \leq t_2 < t_1 \leq b$

$f \uparrow [a; b] \Rightarrow f(t_2) < f(t_1) \Rightarrow f(-x_2) < f(-x_1) \Rightarrow (f - \text{чётная}) f(x_2) < f(x_1)$

то есть $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \downarrow [-b; -a]$

Теорема2 Пусть f - нечётная тогда f возрастает на $[a; b]$ тогда и только тогда когда она возрастает и на $[-b; -a]$ (для убывания тоже верно)

Доказательство:

Возьмём $-b \leq x_1 < x_2 \leq a \Leftrightarrow b \geq -x_1 > -x_2 \geq a \Rightarrow (f \uparrow [a; b]) f(-x_2) <$

$f(-x_1) \Rightarrow (f - \text{нечётная}) -f(x_2) < -f(x_1) \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$

то есть $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow [-b; -a]$

Теорема(монотонность композиции) Композиция двух функций одинаковой монотонности - возрастающая функция; композиция двух функций разной монотонности - убывающая функция

Доказательство:

$z = h(x) = g(f(x)), y = f(x)$ тогда $z = g(y)$

1) $f \uparrow, g \downarrow h(x) = g(f(x)), h \downarrow$

$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\forall y_1, y_2 \in D_g : y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) < g(y_2)$

Пусть $\forall x_1, x_2 \in D_h : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) > g(y_2) \Leftrightarrow$

$z_1 > z_2 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2)$ то есть $h \downarrow$ на D_h

2) $f \uparrow, g \uparrow h(x) = g(f(x)), h \uparrow$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow y_1 > y_2 \Rightarrow g(y_1) < g(y_2) \Leftrightarrow z_1 < z_2$ то есть $h \uparrow$ на D_h

2 Ограниченность функции — определение, свойства

Опр. функция f называется ограниченной сверху если $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f : f(x) \leq m$

Опр. функция f называется ограниченной снизу если $\exists k \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f : f(x) \geq k$

Опр. функция f называется ограниченной если $\exists m > 0 : \forall x \in D_f : |f(x)| \leq m$

Теорема Функция ограничена тогда и только тогда, когда она ограничена сверху и снизу (возможно она не нужна...)

Доказательство:

\Rightarrow : (!) f - огр. $\Rightarrow f$ - огр. сверху и f - огр. снизу

f - огр. $\Leftrightarrow \exists m_0 > 0 : |f(x)| \leq m_0 \Leftrightarrow -m_0 \leq f(x) \leq m_0$

$\exists m = m_0, \exists k = -m_0 : \forall x \in D_f : f(x) \leq m \ \& \ f(x) \geq k$

\Leftarrow : (!) f - огр. сверху и f - огр. снизу $\Rightarrow f$ - огр.

$\exists m \forall x \in D_f : f(x) \leq m$

$\exists k \forall x \in D_f : f(x) \geq k$

$M_0 = \max\{|m|, |k|\}$ тогда $|m| \leq M_0$ и $|k| \geq M_0$

$\forall x \in D_f - M_0 \leq -|k| \leq k \leq f(x) \leq m \leq |m| \leq |M_0|$

то есть $-M_0 \leq f(x) \leq M_0 \Leftrightarrow |f(x)| \leq M_0$

Теорема1. Пусть функции f и g ограничены на множестве X тогда $h_1(x) = f(x) + g(x)$, $h_2(x) = f(x) - g(x)$, $h_3(x) = f(x) * g(x)$, $h_4(x) = |f(x)|$ ограничены на D_f

Доказательство:

$\exists m > 0 : \forall x \in X |f(x)| \leq m$

$\exists k > 0 : \forall x \in X |g(x)| \leq k$

$|h_1(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq m + k$

$|h_2(x)| = |f(x) + (-g(x))| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq m + k$

то есть $\exists m_1 = m + k > 0 : \forall x \in X |h_1(x)| \leq m_1 \ \& \ |h_2(x)| \leq m_1$

$|h_3(x)| = |f(x) * g(x)| = |f(x)| * |g(x)| < m * k$ (так как $|f(x)| \leq m \ \& \ |g(x)| \leq k$)

то есть $\exists m_2 = m * k > 0 : \forall x \in X |h_3(x)| \leq m_2$

для h_4 - аналог ($|h_4(x)| = |f(x)| \leq m$)

Теорема2. Пусть функция f ограничена на X и $\exists m > 0 : \forall x \in X |g(x)| > m$

тогда $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ - ограничена на X

Доказательство:

$$\left. \begin{array}{l} |g(x)| > m \Leftrightarrow \left| \frac{1}{g(x)} \right| < \frac{1}{m} \\ \exists k > 0 \forall x \in X |f(x)| \leq k \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} \right| * |f(x)| < \frac{k}{m}$$

$$|h(x)| = \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \frac{k}{m}$$

то есть $\exists m_0 = \frac{m}{k} : \forall x \in X |h(x)| < m_0$

3 Периодичность функции — определение, свойства

Опр. функция f называется периодической если $\exists T > 0: 1) \forall x \in D_f (x \pm T) \in D_f$

2) $\forall x \in D_f : f(x + T) = f(x - T) = f(x)$, T - период f

Замечание У функции может быть более одного периода. Если в множестве периодов существует наименьший, он называется - главный

Теорема1 Если f периодична с периодом T_0 , T_0 - главный период, то все её периоды имеют вид $T = n * T_0$, $n \in \mathbb{N}$

Доказательство:

1)(!) T_0 - период $\Rightarrow \boxed{n * T_0 = T}$ - тоже период

2)(!) P - период $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : P = n * T_0$

I) T_0 - период $\Leftrightarrow \forall x \in D_f (x \pm T_0) \in D_f$ & $\forall x \in D_f : f(x + T_0) = f(x - T_0) = f(x)$

$T = T_0 * n$

то есть (!) $\Leftrightarrow \forall x \in D_f (x \pm T) \in D_f$ & $\forall x \in D_f : f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

ММИ:

1) $n = 1: x \in D_f$ & $(x \pm T_0) \in D_f$ & $f(x \pm T_0) = f(x)$

2)Пусть $n = k: x \in D_f$ & $(x \pm T_0 * k) \in D_f$ & $f(x \pm T_0 * k) = f(x)$

3) $n = k + 1$

(!) а) $x \in D_f \Rightarrow (x \pm (k + 1) * T_0) \in D_f$

б) $x \in D_f \Rightarrow f(x \pm (k + 1) * T_0) = f(x)$

$x \in D_f \Rightarrow (x \pm k * T_0) \in D_f \Rightarrow (x \pm k * T_0 \pm T_0) \in D_f (T_0$ - период)
 $\Rightarrow (x \pm (k + 1) * T_0) \in D_f$

$f(x \pm (k + 1) * T_0) = f(x \pm k * T_0 \pm T_0) = f(x \pm k * T_0) = f(x)$

то есть $(k + 1) * T_0$ - период

II)Пусть P - период $P \neq n * T_0, P > 0$

$\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\} T = P - n * T_0 \quad n * T_0 < P < (n + 1) * T_0$

$\forall x \in D_f : f(x \pm T) = f(x \pm P \mp n * T_0) = f(x \mp T_0 * n) = f(x)$

$T = P - n * T_0 < (n + 1) * T_0 - n * T_0 = T_0$ то есть $\exists T < T_0$, T - период ?!!

Замечание Если T_1 и T_2 периоды функции f , то $\forall k, n \in \mathbb{N} : T = n * T_1 + k * T_2$ - тоже период

Теорема2. Если функции f_1 и f_2 заданные на \mathbb{R} периодичны: T_1 - период f_1 , T_2 - период f_2 , то $F_1(x) = f_1(x) + f_2(x); F_2(x) = f_1(x) - f_2(x); F_3(x) = f_1(x) * f_2(x); F_4(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} (\forall x \in \mathbb{R} f_2(x) \neq 0)$ периодичны если периоды T_1 и

T_2 соизмеримы то есть $\boxed{\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}^+}$

Доказательство:

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+, p, q \in \mathbb{N} \Leftrightarrow p * T_2 = q * T_1 = T$

$F_1(x) = f_1(x) + f_2(x), D_{F_1} = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} : F_1(x \pm T) = f_1(x \pm T) + f_2(x \pm T) = f_1(x \pm q * T_1) + f_2(x \pm p * T_2) = f_1(x) + f_2(x) = F_1(x)$ то есть T - период функции F_1 , для F_2, F_3, F_4 - аналогично

Теорема3 Пусть f периодична, T - её главный период, $g(x) = f(t(x))$, где $t(x) = ax + b$, $a > 0$ тогда g - периодическая с периодом $T_0 = \frac{T}{a}$

Доказательство:(!) T_0 - главный период g

1)(!) T_0 - период g

$$x \in D_g \Leftrightarrow t(x) \in D_f \Leftrightarrow (ax + b) \in D_f \Leftrightarrow (ax + b \pm T) \in D_f \Leftrightarrow$$

$$(a(x \pm \frac{T}{a}) + b) \in D_f \Leftrightarrow (a(x \pm T_0) + b) \in D_f \Leftrightarrow t(x \pm T_0) \in D_f \Leftrightarrow (x \pm T_0) \in D_g$$

$$g(x \pm T_0) = f(t(x \pm T_0)) = f(a(x \pm T_0) + b) = f(ax + b \pm aT_0) = f(ax + b + T) = f(ax + b) = f(t(x)) = g(x)$$

$$2) \text{ Пусть } P < T_0, P - \text{период} \Rightarrow \forall x \in D_g : g(x + P) = g(x) = f(t(x + P)) = f(a(x + P) + b) = f(ax + b + aP)$$

$$\text{Но } g(x) = f(t(x)) = f(ax + b) \text{ тогда } f(ax + b + aP) = f(ax + b)$$

$$\text{Пусть } ax + b = t$$

$$\forall t \in D_f : f(t + aP) = f(t) \Rightarrow aP - \text{период } f$$

$$P < T_0 \Leftrightarrow aP < T \text{ ?!!}$$

4 Взаимно-обратные функции — свойства, монотонность

Опр. Пусть $f: X \rightarrow Y$ биективная функция то есть $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, $y = f(x)$ тогда соответствие сопоставляющее каждому $y \in E_f$ - $x \in D_f$ называется обратной функцией $f(g(y) = f^{-1}(y))$ то есть обратная функция сопоставляет каждому элементу в области значений его прообраз
Замечание.1) Графики обратных функция симметричны относительно прямой $y = x$

2) Точки пересечения с вертикальной осью графика исходной функции - точки пересечения с горизонтальной осью графика обратной функции

3) горизонтальная асимптота становится вертикальной и наоборот

$$\text{Теорема1} \forall x \in D_f : (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$\forall y \in D_{f^{-1}} : (f \circ f^{-1})(y) = y$$

Теорема2 Если f - нечётная и обратимая, то f^{-1} тоже нечётная

Доказательство:

$$y = f(x) \quad f^{-1}(x) = x = g(y)$$

$$\left. \begin{aligned} f - \text{нечётная} \Leftrightarrow \quad & \forall x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f \\ & \forall x \in D_f : f(-x) = -f(x) \end{aligned} \right\}$$

$$(!) \forall y \in D_g \Leftrightarrow -y \in D_f; E_g = D_f, D_g = E_f$$

$$1) \forall y \in D_g g(y) \in E_g \Leftrightarrow x \in E_g \Leftrightarrow x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f \Leftrightarrow f(-x) \in E_f \Leftrightarrow$$

$$(f - \text{нечёт.}) -f(x) \in E_f \Leftrightarrow -y \in E_f \Leftrightarrow -y \in D_g$$

$$2) (!) \forall y \in D_g g(-y) = -g(y)$$

$$g(-y) = g(-f(x)) = g(f(-x)) = -x = -g(y)$$

Теорема 3 Если f строго монотонна, то f^{-1} тоже строго монотонна, причём сохраняет характер монотонности f

Доказательство:

$$y = f(x) \quad f^{-1}(y) = x = g(y)$$

$$f \uparrow \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Пусть $y_1 < y_2$ докажем, что $g(y_1) < g(y_2)$. Будем доказывать от противного

Пусть $y_1 < y_2$ & $g(y_1) \geq g(y_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2$ & $x_1 \geq x_2$

$$1) x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow y_1 = y_2 \quad ???$$

$$2) x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow y_1 > y_2 \quad ??? \text{ то есть } g(y_1) < g(y_2)$$

5 Определение предела функции в точке по Коши. Бесконечный предел и предел на бесконечность. Лемма о стабилизации знака, обобщение

Опр. x_0 называется предельной точкой множества A (точка включения) если в каждой окрестности x_0 существует хотя бы одна точка, принадлежащая A , кроме x_0 ($\forall \delta > 0 \exists x \in A : |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in A$)

Опр. (по Коши) Пусть x_0 - предельная точка D_f , число A - называется пределом f в точке x_0 если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \exists x : |x - x_0| < \delta$ & $x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$$\text{Опр.1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\text{Опр.2} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\text{Опр.3} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x < -\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\text{Опр.4} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \text{ \& } x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$$

$$\text{Опр.5} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ \& } x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > \varepsilon$$

$$\text{Опр.6} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \text{ \& } x \neq x_0 \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

$$\text{Опр.7} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$$

$$\text{Опр.8} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x| > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$$

$$\text{Опр.9} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x| > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

$$\text{Опр.10} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$$

$$\text{Опр.11} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$$

$$\text{Опр.12} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

$$\text{Опр.13} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x < -\delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$$

$$\text{Опр.14} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x < -\delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

Опр.15 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x < -\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$

Лемма(о стабилизации знака). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > 0$

$A < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) < 0$

Общий случай:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, B < A \ \& \ A < C \Rightarrow 1) \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B$

$2) \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < C$

Доказательство:(общего случая)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$

$A + \varepsilon$

$B < A \Leftrightarrow A - B > 0$

Возьмём $\varepsilon_1 = A - B > 0 : \exists \delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > A - \varepsilon_1 = B$

Возьмём $\varepsilon_2 = C - A > 0 : \exists \delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow f(x) < A + \varepsilon_2 = C$

Замечание Лемма о стабилизации знака может не выполняться для предельной точки

6 Теорема о сжатой переменной. Теорема о локальной ограниченности функции. Предельный переход в неравенстве

Теорема(предельный переход в неравенстве) $D_f \cap D_g \neq \emptyset, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$

$A,$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, \exists \delta_0 > 0 : |x - x_0| < \delta_0 \ \& \ x \neq x_0$ тогда если $f(x) < g(x)$

$\Rightarrow A \leq B$

Доказательство:(от противного)

Пусть $A \leq B \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R} : A > C > B$ (из аксиом \mathbb{R})

$\exists \delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1 \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > C$

$\exists \delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow g(x) < C$

$\left. \begin{aligned} \exists \delta = \min\{\delta_1; \delta_2; \delta_0\} : |x - x_0| < \delta \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow \\ f(x) > C \\ g(x) < C \\ f(x) < g(x) \end{aligned} \right\} \text{?!}$

Теорема(о сжатой переменной) $D = D_g \cap D_f \cap D_h \neq \emptyset, x_0$ - предельная точка D ; $\exists \delta_0 > 0 : |x - x_0| < \delta_0 \ \& \ x \neq x_0, g(x) < f(x) < h(x)$ причём

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

Доказательство:

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1 \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon$

$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon$

$$\left. \begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min\{\delta_0; \delta_1; \delta_2\} : |x - x_0| < \delta \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow \\ & \begin{aligned} & g(x) > A - \varepsilon \\ & h(x) < A + \varepsilon \\ & g(x) < f(x) < h(x) \end{aligned} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow A - \varepsilon < g(x) < f(x) < h(x) < A + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Теорема (о локальной ограниченности) x_0 - предельная точка на D_f , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то f - ограничена в некоторой окрестности точки x_0 ($\exists M_0 > 0 : \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M_0$)

Доказательство:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ возьмём $M > |A| \Leftrightarrow -M < A < M, M > 0$
 по лемме о стабилизации знака $\exists \delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1 \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) < M$
 $\exists \delta_2 : |x - x_0| < \delta_2 \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > -M$
 $\exists \delta = \min\{\delta_1; \delta_2\} > 0 : |x - x_0| < \delta \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow -M < f(x) < M \Leftrightarrow |f(x)| < M$
 Если $x_0 \in D_f$ то есть $\exists f(x_0) : M_0 = \max\{M; |f(x_0)|\}$ тогда $\forall x \in D_f : |x - x_0| < \delta$
 1) $x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)| < M \leq M_0$
 2) $x = x_0 \Rightarrow |f(x_0)| \leq M_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M_0$

7 Определение предела функции по Гейне. Эквивалентность определений

Опр. (по Гейне) x_0 - предельная точка D_f , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ если $\forall \{x_n\} : x_n \in D_f \ \exists N : \forall n \geq N x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow A$

Теорема Два определения предела в точке (по Коши и по Гейне) равносильны

Доказательство:

1) опр. Коши \Rightarrow опр. Гейне

Дано: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Возьмём $\forall \{x_n\} \rightarrow x_0, x_n \in D_f : \exists N : \forall n \geq N x_n \neq x_0$

то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon_0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 : |x_n - x_0| < \varepsilon_0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ Пусть $\varepsilon_0 = \delta \ \exists N_1 :$

$\forall n \geq N_1 : |x_n - x_0| < \delta$

$N_0 = \max\{N; N_1\}$ тогда $\forall n \geq N_0 : |x_n - x_0| < \delta \ \& \ x_n \neq x_0 \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$

то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

2) опр. Гейне \Rightarrow опр. Коши

от противного то есть \neg (опр. Коши) $\ \& \$ (опр. Гейне)

$\neg(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \neq x_n, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow$

$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 : \exists x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - A| \geq \varepsilon$

Возьмём ε_0 возьмём $\delta_1 : \exists x_1 \neq x_0 : |x_1 - x_0| < \delta_1 \ \& \ |f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$

возьмём $\delta_2 : 0 < \delta_2 < \delta_1 : \exists x_2 \neq x_0 : |x_2 - x_0| < \delta_2 \ \& \ |f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$

...

Построим $\{\delta_n\} \rightarrow 0$

$\forall n \exists x_n \neq x_0 : |x_n - x_0| < \delta_n \ \& \ |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$ тогда $0 < |x_n - x_0| < \delta_0 \rightarrow 0$
тогда по теореме о сжатой переменной $|x_n - x_0| \rightarrow 0 \Rightarrow$

$b_n = |x_n - x_0| \rightarrow 0 \Rightarrow \{x_n - x_0\} \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow x_0$

то есть $\forall n \ x_n \neq x_0 \ \& \ x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow$ (по опр. Гейне) $\{f(x_n)\} \rightarrow A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N :$

$\forall n \geq N : |f(x_n) - A| < \varepsilon$ но $\exists \varepsilon_0 : \forall n |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$??!

8 Теорема о действиях с пределами функций. Предел композиции функций

Теорема1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$

Доказательство:

Возьмём $\forall \{x_n\} \rightarrow x_0 \exists : \forall n \geq N x_n \neq x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow A \ \& \ \{g(x_n)\} \rightarrow B$

$h(x) = f(x) + g(x); h(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A + B$

тогда по опр. Гейне $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A + B$

Замечание Для предела разности, произведения и деления - аналогично

Теорема(о пределе композиции) Пусть $h(x) = f(g(x)), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b,$

$\lim_{y \rightarrow b} f(y) = c, \exists \delta_0 > 0 : |x - x_0| < \delta_0 \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow g(x) \neq b$

тогда $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(y) = c$

Доказательство:

$\forall \{x_n\} \rightarrow x_0 \exists N \forall n \geq N : x_n \neq x_0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \{g(x_n)\} \rightarrow b$ то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = b$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : |x_n - x_0| < \varepsilon$

Для $\varepsilon = \delta_0 \exists N \forall n \geq N |x_n - x_0| < \delta_0 \Rightarrow g(x_n) \neq b$ то есть $\{g(x_n)\} \rightarrow b$ тогда

$\{y_n\} \rightarrow b \ \& \ y_n \neq b \Rightarrow \{f(y_n)\} \rightarrow c$ то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = c$

9 Замечательный предел, связанный с e

Теорема $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \frac{1}{x})^x = e$

Доказательство:

1) $\forall \{x_n\} \rightarrow +\infty \exists N : \forall k \geq N x_k > 1$

$n_k = [x_k] \ n_k \in \mathbb{N} \ n_k \leq x_k < n_k + 1 (*)$

$\frac{1}{n_k + 1} < \frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{n_k} (**)$

$(**) \Rightarrow (1 + \frac{1}{n_k + 1}) < (1 + \frac{1}{x_k}) \leq (1 + \frac{1}{n_k}) \Leftrightarrow (1 + \frac{1}{n_k + 1})^{n_k} < (1 + \frac{1}{x_k})^{n_k} \leq (1 + \frac{1}{n_k})^{n_k}$

$(1 + \frac{1}{n_k + 1})^{n_k} < (1 + \frac{1}{x_k})^{n_k} \leq (1 + \frac{1}{x_k})^{x_k} < (1 + \frac{1}{x_k})^{n_k + 1} \leq (1 + \frac{1}{n_k})^{n_k + 1}$

(1 и 4 знаки по (**), 2 и 3 - по (*))

$y_k = (1 + \frac{1}{x_k})^{x_k} \quad (1 + \frac{1}{n_k+1})^{n_k} < y_k < (1 + \frac{1}{n_k})^{n_k+1}$ по теореме о сжатой переменной $y_k \rightarrow e$
 $\lim_{n_k \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n_k})^{n_k+1} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} ((1 + \frac{1}{n_k})^{n_k} * (1 + \frac{1}{n_k})) = e$
 $y_k \rightarrow e \quad f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x \quad f(x_k) = y_k \rightarrow e$ то есть $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \frac{1}{x})^x = e$
 2) $\forall \{x_n\} \rightarrow -\infty \exists N : \forall k \geq N \quad x_k < -1$
 $x_k = -y_k$ тогда $y_k \rightarrow -\infty$
 $(1 + \frac{1}{x_k})^{x_k} = (1 + \frac{1}{y_k})^{-y_k} = e$

10 Односторонние пределы. Критерий существования предела в точке

Опр. Число A называется пределом функции f в x_0 справа если $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, x_0$ - предельная точка на D_f
 Опр. Число A называется пределом функции f в x_0 слева если $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists \delta > 0 : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, x_0$ - предельная точка на D_f
 Теорема $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A$
Доказательство:
 $=>: \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
 Пусть $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |x - x_0| < \delta \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A$
 Пусть $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |x - x_0| < \delta \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A$
 $<=: \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \quad x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \quad x_0 - \delta_2 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
 то есть $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$
 Пусть $|x - x_0| < \delta \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow x_0 < x < x_0 + \delta$ или $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow x_0 <$
 $x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
 $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow x_0 - \delta_2 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

11 Первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Тригонометрические пределы

Теорема(I замечательный предел) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ Доказательство:
 1) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \rightarrow 0 \exists N \forall n \geq N \quad x_n > 0$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

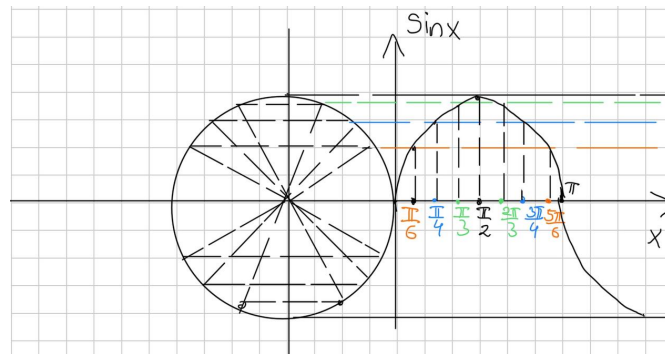
(второй переход возможен т. к. \sin чётная функция)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

12 Свойства и графики прямых и обратных тригонометрических функций

Прямые тригонометрические функции

$$\boxed{1} y = \sin x$$



1) $\forall x \sin(-x) = -\sin x$ то есть f - нечётная

2) $\forall x \sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ $T_0 = 2\pi$

3) $D_f = \mathbb{R}$

$E_f = [-1; 1]$

4) $f(x) = 0$ $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

график синуса - синусоида

5) монотонность (!) $\forall k \in \mathbb{Z} f \uparrow [-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$

$f \downarrow [\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k]$

Доказательство:

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$$

рассмотрим $\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} < 0$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2} \ \& \ -\frac{\pi}{2} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 - x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \ \& \ -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\sin x_1 - \sin x_2 < 0 \Rightarrow f(x) = \sin x$$

$$\boxed{2} y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

1) $D_f = \mathbb{R}$ $E_f = [-1; 1]$

2) $\forall x \in \mathbb{R} \cos(-x) = \cos x$ то есть f - чётная

3) корни $f(x) = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

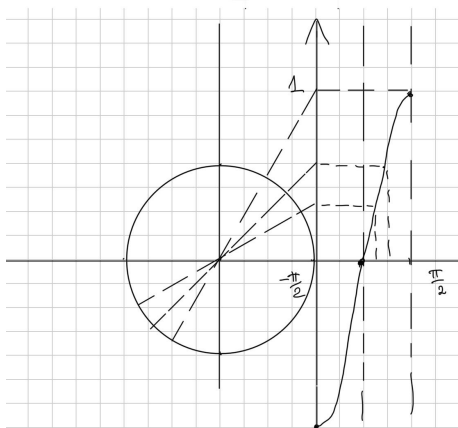
4) периодичность $T_0 = 2\pi \ \forall x \cos(x \pm 2\pi k) = \cos x$

5) монотонность $g(x) = \frac{\pi}{2} - x, g \downarrow \ y = \sin(g(x)) \Rightarrow g \downarrow$ на $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$ &

$g \uparrow$ на $[\pi + 2\pi k; 2\pi(k+1)]$

$$\boxed{3} y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1) D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2\pi k\}, k \in \mathbb{Z}; E_f = \mathbb{R}$$



$$2) \forall x \in D_f : tg(-x) = -tg(x) \Rightarrow f - \text{нечётная}$$

$$3) \text{корни } x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$4) \text{периодичность } T_0 = \pi \quad \forall x \in D_f : f(x \pm \pi) = f(x)$$

$$5) \text{монотонность } -\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$$

$$tg x_1 - tg x_2 = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\cos x_1 \cos x_2} < 0$$

$$-\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2} \quad \& \quad -\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow f \uparrow (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$$

$$6) \text{вертикальная асимптота } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \infty$$

$$\text{аналогично } x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \Rightarrow tg x \rightarrow \infty$$

$$7) \text{график (развёртка)}$$

$$\boxed{4} \quad y = ctg x = tg(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$1) D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi k\}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \forall x \in D_f \quad f(-x) = -f(x), f - \text{нечётная, но график не проходит через } (0; 0)$$

$$3) \text{корни } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$4) \text{периодичность } T_0 = \pi$$

$$5) \text{монотонность } f \downarrow (\pi k; \pi + \pi k)$$

$$6) \text{вертикальная асимптота } \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k$$

Обратные тригонометрические функции

$$\boxed{1} \quad f(x) = \sin x|_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}$$

$$f^{-1}(x) = \arcsin(x) = g(x)$$

$$1) g - \text{нечётная}$$

$$2) g \uparrow$$

$$3) D_g = [-1; 1] \quad E_g = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = \cos x|_{[0; \pi]}$$

$$f^{-1}(x) = \arccos(x) = g(x)$$

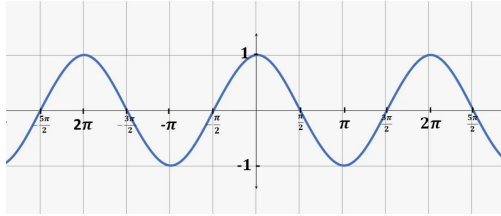
$$D_f = [-1; 1] \quad E_f = [0; \pi]$$

$$\forall x \in D_f : g(x) \geq 0$$

$$g \downarrow$$

$$g(0) = \frac{\pi}{2}$$

13 Равносильные определения непрерывности функции в точке. Виды разрывов



Опр.1 функция f называется непрерывной в точке x_0 , если:

$$1) \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D_f$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Опр.2 функция f называется непрерывной в точке x_0 , если:

$$1) \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D_f$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$$

Опр.3 функция f называется непрерывной в точке x_0 , если:

$$1) \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D_f$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

Опр.4 функция f называется непрерывной в точке x_0 , если:

$$1) \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D_f$$

$$2) x = x_0 + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

Опр.5 функция f называется непрерывной в точке x_0 , если:

$$1) \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D_f$$

$$2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

Опр.6 функция f называется непрерывной в точке x_0 , если:

$$1) \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D_f$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Опр.7 функция f называется непрерывной в точке x_0 , если:

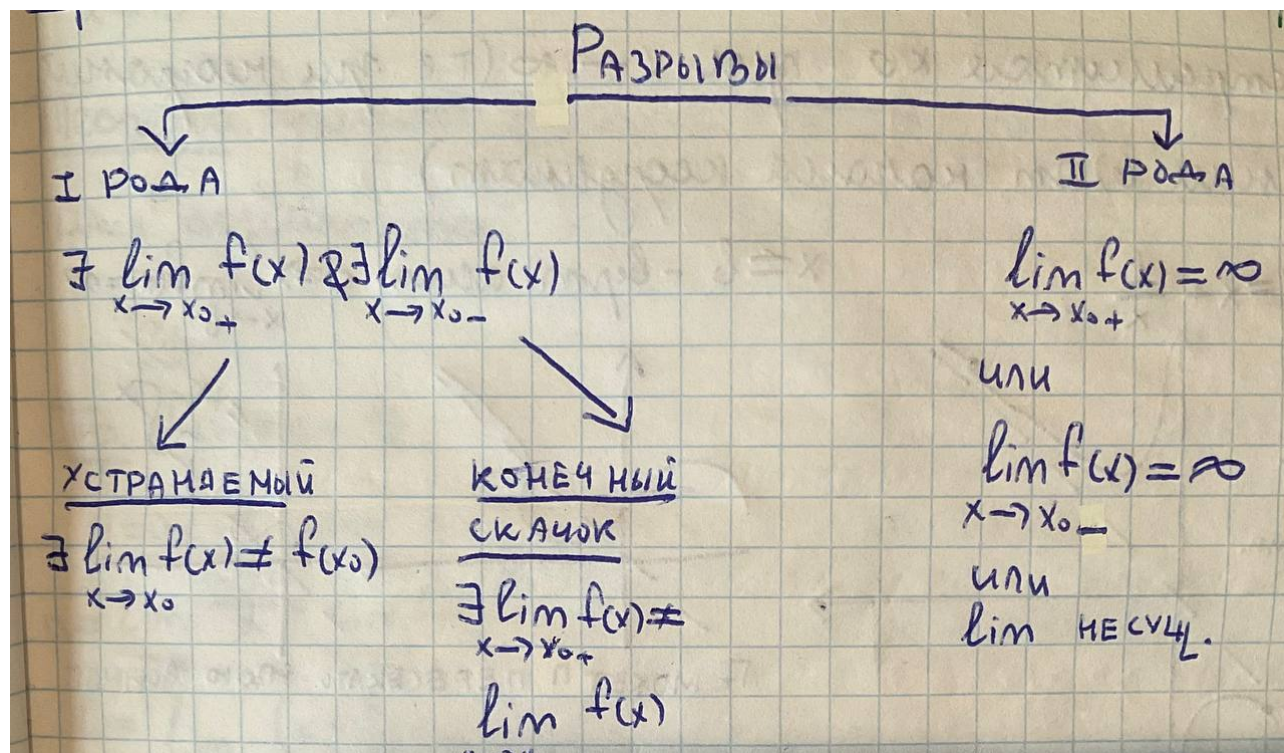
$$1) \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D_f$$

$$2) \forall \{x_n\} \rightarrow x_0 \quad \{f(x_n)\} \rightarrow f(x_0)$$

14 Действия с непрерывными функциями. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность композиции

Теорема Если функции f и g непрерывны x_0 , то функции $F_1(x) = f(x) + g(x)$; $F_2(x) = f(x) - g(x)$; $F_3(x) = f(x) * g(x)$; $F_4 = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ - непрерывны x_0

Доказательство:



f и g непр. $\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ & $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$

по теореме о действиях с пределами: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$ тогда F_1 непрерывна по определению, для F_2, F_3, F_4 - аналогично

Непрерывность элементарных функций:

1) $f(x) = ax + b$ непр. т. к. $\forall x_0 : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Доказательство:

а) $a = 0$ - верно (предел константы)

б) $a \neq 0 : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$

Если $|x - x_0| < \delta$ & $x \neq x_0 \Rightarrow |a||x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - (ax_0 + b)| < \varepsilon$

2) $f(x) = ax^2 + bx + c$ пусть $g(x) = bx + c$ - непр. по 1); $h(x) = ax^2$ - непрерывна как произведение непрерывных тогда $f(x)$ непрерывна как сумма непрерывных

3) $f(x) = a_0x^n + \dots + a_n$ можно разбить на сумму непрерывных функций

4) $f(x) = \sqrt{ax + b}, x \geq -\frac{b}{a}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{ax + b} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b)} = \sqrt{ax_0 + b}$ (доказано для последовательностей \Rightarrow можно доказать по Гейне...)

5) $f(x) = |ax + b|$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} |ax + b| = \lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b) = |ax_0 + b|$ (доказано для последовательностей \Rightarrow можно доказать по Гейне...)

$$6) f(x) = \sqrt[3]{ax + b}$$

7) $f(x) = \sin x$ $f(x) = \cos x$ $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$ - доказанно в последовательностях

Теорема (непрерывность композиции) Пусть f непрерывна в x_0 , $f(x_0) = y_0$ g непрерывна в y_0 тогда $h(x) = g(f(x))$ непрерывна при $x = x_0$

Доказательство:

f непр. при $x = x_0$: $\forall \varepsilon_0 > 0 \exists \delta_0 > 0 : |x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0$

g непр. при $y = y_0$: $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0 : |y - y_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon_1$

(!) h непр. при $x = x_0$: $\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon_2$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : |y - y_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon (g(y) = g(f(x)) = h(x))$

Возьмём $\delta_1 = \varepsilon_0 \exists \delta_0 : |x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_1 \Leftrightarrow |y - y_0| < \delta_1 \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon_0$

15 Теорема о пределе монотонной функции. Непрерывность монотонной функции. Непрерывность обратной функции

Теорема о пределе монотонной функции Если функция f определена и монотонна на $[a; b]$, то $\forall x_0 \in (a; b) \exists \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x); \exists \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$

Доказательство:

Пусть $f \uparrow$ на $[a; b]$

1) $\forall x_0 \in (a; b) \forall x \in [a; x_0) : a \leq x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ то есть $f(x)$ ограничена сверху на $[a; x_0) \Rightarrow \exists \sup_{[a; x_0)} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x \in [a; x_0) : f(x) \leq A$ & $\forall \varepsilon > 0 \exists x_1 \in [a; x_0) : f(x_1) > A - \varepsilon$

$a \leq x_1 < x_0; \forall x \in (x_1; x_0) x_1 < x < x_0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0)$

$A - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) < A < A + \varepsilon$

Пусть $\delta = x_0 - x_1$ тогда $x_0 - \delta < x < x_0$

то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists x_1 \in [a; x_0) \exists \delta = x_0 - x_1 > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon$ то есть $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A$

2) $\forall x_0 \in (a; b) \forall x \in (x_0; b] : x_0 < x \leq b$

$f \uparrow \Leftrightarrow (x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0))$ то есть $f(x)$ огр. снизу на $(x_0; b]$

$\Rightarrow \exists \inf_{(x_0; b]} f(x) = B \Leftrightarrow \forall x \in (x_0; b] : f(x) \geq B$ & $\forall \varepsilon > 0 \exists x_2 \in (x_0; b] : f(x_2) < B + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1 : x_0 < x_1 \leq b \forall x \in (x_0; x_2) x_0 < x < x_2 \exists \delta x_2 - x_1 > 0$

$f \uparrow : f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_2) \Rightarrow B - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_2) < B + \varepsilon$ то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists x_2 \in (x_0; b] \exists \delta = x_2 - x_0 > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$ то есть $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = B$

Следствие $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \inf_{(x_0; b]} f(x)$ & $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \sup_{[a; x_0)} f(x)$

Замечание Монотонная функция может иметь разрывы только I рода

Следствие из теоремы Вейерштрассе Если f непрерывна на отрезке, то её значения сплошь заполняют $[f(a); f(b)]$.

Теорема (непрерывность монотонной функции) Если f монотонна на промежутке $\langle a; b \rangle$ и $f(\langle a; b \rangle) = \langle c; d \rangle$ то f - непрерывна

Доказательство:

Пусть $f \uparrow \Rightarrow \forall x_0 \in \langle a; b \rangle \exists \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$

Пусть $\exists x_0 \in \langle a; b \rangle: \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \neq f(x_0)$

$x < x_0 \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \Rightarrow f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \Rightarrow f(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$

То есть $x_0 < x \Rightarrow f(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$

$\forall x > x_0: \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \inf_{x \in (x_0; b]} f(x) \Rightarrow f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A$

$x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ то есть $f(x) \leq f(x_0) < A \ \& \ f(x_0) \geq f(x) \geq A$?!!

Теорема (Непрерывность обратной функции) Если f задана на $\langle a; b \rangle \rightarrow \langle c; d \rangle$ строго монотонна и непрерывна, то обратная функция тоже непрерывна и так же монотонна

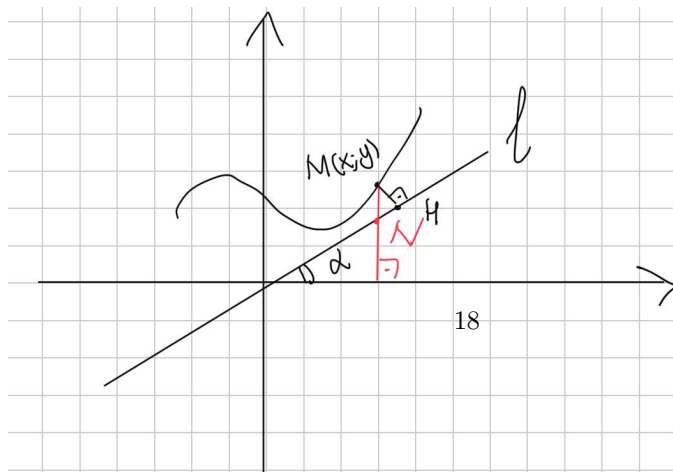
16 Наклонная и вертикальная асимптоты к графику функции

Опр. прямая, заданная уравнением $y = ax + b$ называется наклонной асимптотой к графику функции, если расстояние между этой прямой и графиком функции стремится к 0 при x стремящемся к бесконечности то есть при неограниченном удалении от начала координат

Опр1. Прямая называется вертикальной асимптотой к графику функции если расстояние между этой прямой и графиком стремится к бесконечности при x стремящемся к b

Теорема прямая заданная уравнением $y = ax + b$ является асимптотой к графику f тогда и только тогда $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \ \& \ b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$

Доказательство:



$l : y = ax + b, M(x; f(x)), N(x; l(x))$
 $(MH) \perp l$
 l - асимптота \Leftrightarrow
 $|MH| \rightarrow 0$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} |MH| = 0$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} |MN| = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - l(x)| = \\
& 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \\
& l(x)) = 0 \Leftrightarrow \\
& \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + \\
& b)) = 0 \Leftrightarrow b = \\
& \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) \\
& |MN| = \frac{|MH|}{\cos \alpha} \quad \alpha \neq \\
& \frac{\pi}{2} \text{ так как } l - \text{ на-} \\
& \text{клонная}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = ax + b + \alpha(x) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b + \alpha(x)}{x} = a$$

17 Теорема Больцано-Коши о непрерывности функции на отрезке

Первая теорема Больцано-Коши (о существовании корня) Пусть f задана на $[a; b]$ и непрерывна причём значения на концах отрезка имеют разные знаки ($f(a) \cdot f(b) < 0$) тогда существует корень на этом отрезке ($\exists c \in (a; b) : f(c) = 0$)

Доказательство:

$$1) a = a_0, \quad b = b_0$$

$$c_0 - \text{середина } [a_0; b_0] \quad a) f(c_0) = 0 - \text{доказано}$$

$$\text{б) Если } f(c_0) > 0 \quad a_1 = a_0, b_1 = c_1$$

$$\text{в) Если } f(c_0) < 0 \quad a_1 = c_0, b_1 = b_0$$

$$2) c_1 - \text{середина } [a_1; b_1]$$

...

$\{[a_n; b_n]\}$ - последовательность вложенных отрезков

$$|b_n - a_n| = \frac{|a-b|}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = 0 \Rightarrow \exists! c \in [a_n; b_n]$$

$$\forall n : \{a_n\} \uparrow \& \{b_n\} \downarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} b_n = c$$

$$\forall n \quad f(a_n) < 0 \& f(b_n) > 0$$

$$f - \text{непр. на } [a; b] \Rightarrow \text{а непр. в } c \Rightarrow \{a_n\} \rightarrow c \Rightarrow \{f(a_n)\} \rightarrow f(c)$$

$$\& \{b_n\} \rightarrow c \Rightarrow \{f(b_n)\} \rightarrow f(c)$$

$$\text{то есть } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \& \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$$

$$\text{то есть } f(c) \leq 0 \& f(c) \geq 0 \Rightarrow f(c) = 0$$

Вторая теорема Больцано-Коши Если f заданна на $[a; b]$ и непрерывна на нём, то она принимает все значения от $f(a)$ до $f(b)$

Доказательство:

$$\forall c \in (f(a); f(b)) \quad (\text{пусть } f(a) < f(b))$$

$$g(x) = f(x) - c - \text{непр.}$$

$g(a) = f(a) - c$ & $g(b) = f(b) - c \Rightarrow f(a) < c < f(b) \Rightarrow g(a) < 0$ & $g(b) > 0 \Rightarrow \exists c \in (a; b) : g(c) = 0$ то есть $g(c) = f(c) - c = 0$

18 Теоремы Вейерштрассе о непрерывности функции на отрезке

Первая теорема Вейерштрассе Непрерывная на отрезке функция - ограниченна

$(f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R})$ - непр. $\Rightarrow \exists M, m : \forall x \in [a; b] m \leq f(x) \leq M$

Доказательство:

Пусть $\exists \forall M > 0 \exists x \in [a; b] : |f(x)| > M$

возьмём $\forall M = n, n \in \mathbb{N}$

то есть $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a; b] : |f(x_n)| > n$

то есть $\forall n : a \leq x_n \leq b$ то есть $\{x_n\}$ - огр $\Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}$ - сходящаяся

то есть $\exists x_0 : \{x_{n_k}\} \rightarrow x_0$ $a \leq x_{n_k} \leq b$; $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow a \leq x_0 \leq b$

f - непр. при $x = x_0 \Rightarrow \{x_{n_k}\} \rightarrow x_0 \Rightarrow \{f(x_{n_k})\} \rightarrow f(x_0)$

то есть $\{x_{n_k}\}$ сход \Rightarrow огр. $\Leftrightarrow \forall k \exists M_0 > 0 : |f(x_{n_k})| \leq M_0$

пусть $N = [M_0] + 1$

$\forall k : |f(x_{n_k})| \leq M_0 < N$

$n_k \rightarrow \infty \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : \forall k \geq k_0 : n_k > \varepsilon$

$\delta = N_0 \exists k_0 \forall k \geq k_0 : n_k > N_0 \Rightarrow |f(x_{n_k})| < N_0 < n_k$

Но $\forall k |f(x_{n_k})| > n_k$?!!

Вторая теорема Вейерштрассе Непрерывная функция на $[a; b]$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения

Доказательство:

по I теореме Вейерштрассе f - огр. $\Rightarrow \exists M$ & $m : M = \sup_{[a; b]} f(x)$,

$m = \inf_{[a; b]} f(x)$

Пусть $M = \sup_{[a; b]} f(x) \Leftrightarrow \forall x \in [a; b] f(x) \leq M$ & $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in [a; b] : f(x') > M - \varepsilon$

Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a; b] : f(x_n) > M - \frac{1}{n}$

$\{x_n\}$ - огр, $\Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}$ - сход.

то есть $\exists x_0 \in [a; b] : \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$

f - непр. при $x = x_0$ то есть $\{x_{n_k}\} \rightarrow x_0 \Rightarrow \{f(x_{n_k})\}$ то есть $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$

$\forall k : f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \geq M - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} = M$

$\forall x_{n_k} \in [a; b] : f(x_{n_k}) \leq M$

$f(x_0) \leq M$ & $f(x_0) \geq M \Rightarrow f(x_0) = M$

то есть $\exists x_0 \in [a; b] f(x_0) = \sup_{[a; b]} f(x)$

Пусть $m = \inf_{[a; b]} f(x) \Leftrightarrow \forall x \in [a; b] f(x) \geq m$ & $\forall \varepsilon > 0 \exists x'' \in [a; b] : f(x'') < m + \varepsilon$

...

$f(x_{n_k}) < m + \frac{1}{n_k}$

$$f(x_0) \geq m$$

...