# Билеты к зачёту по математическому анализу

Коткин Михаил

15 февраля 2026 г.

## Содержание

# 1 Монотонность функции — определение, свойства, связь с чётностью и нечётностью. Монотонность композиции

Опр. функция f называется монотонно возрастающей если $\forall x_1, x_2 \in D_f$ : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ - строго возрастает; $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ - нестрого возрастает
Опр. функция f называется монотонно убывающей если $\forall x_1, x_2 \in D_f$ : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ - строго убывает; $\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ - нестрого убывает
Теорема(действия с возратающими функциями)Пусть функции f и g монотонно возрастают тогда:
1)c = const
если c > 0 h(x) = c * f(x) - возрастает
если c < 0 h(x) = c * f(x) - убывает
2)h(x) = f(x) + g(x) - возрастает
3)если $\forall x \in D_f \ f(x) \geq 0 \ \ \& \ \ \forall x \in D_g \ g(x) \geq 0$, то h(x) = f(x) * g(x) - возрастает
если $\forall x \in D_f \ f(x) \leq 0 \ \ \& \ \ \forall x \in D_g \ g(x) \leq 0$, то h(x) = f(x) * g(x) - убывает
4)если $\forall x \in D_f$ h(x) = $\frac{1}{f(x)}$ - убывает
Доказательство:
1)Пусть $x_1 < x_2 \ \forall x_1, x_2 \in D_g (D_g \subset D_f) : \ h(x_1) - h(x_2) = c * f(x_1) - c * f(x_2) = c * (f(x_1) - f(x_2)) < 0$(если c < 0) и > 0(если c > 0)
f $\uparrow \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ тогда при c > 0 $h \uparrow$, а при c < 0 $h \downarrow$
Замечание $\forall c \in \mathbb{R} \ f \uparrow \Rightarrow h(x) = f(x) + c, h \uparrow$
2)$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
$\forall x_1, x_2 \in D_g : x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$
$D_h = D_f \cap D_g$
$\forall x_1, x_2 \in D_h$ пусть $x_1 < x_2$ тогда:
$h(x_1) - h(x_2) = f(x_1) + g(x_1) - f(x_1) - g(x_2) = (f(x_1) - f(x_2)) + (g(x_1) - g(x_2))$ $< 0$(так как $f(x_1) - f(x_2) < 0 \ \ \& \ \ g(x_1) - g(x_2) < 0$) то есть $x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow h \uparrow$
ЗамечаниеДля разности h(x) = f(x) - g(x) - неверно
3)Пусть $x_1 < x_2 \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) < f(x_2)$
$x_1 < x_2 \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in D_g : g(x_1) < g(x_2)$
$D_h = D_f \cap D_g$ тогда $x_1, x_2 \in D_h$ и $x_1 < x_2$
$h(x_1) = f(x_1) * g(x_1), \ h(x_2) = f(x_2) * g(x_2)$

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leq f(x_1) < f(x_2) \\ 0 \leq g(x_1) < g(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow h \uparrow$$

$$\left.\begin{array}{c} f(x_1) < f(x_2) \leq 0 \\ g(x_1) < g(x_2) \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -f(x_1) > -f(x_2) \geq 0 \\ -g(x_1) > -g(x_2) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$$

$x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2) \Rightarrow h \downarrow$
4)$x_1 < x_2 \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) < f(x_2)$

$\forall x_1, x_2 \in D_h : x_1 < x_2$ если $0 < f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) < f(x_2))\ \frac{1}{f(x_2)} < \frac{1}{f(x_1)}$
если $f(x_1) < f(x_2) < 0 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2), h \downarrow$
Теорема(действия с убывающими функциями) Пусть функции f и g монотонно убывают тогда:
1)c = const
если c > 0 h(x) = c * f(x) - убывает
если c < 0 h(x) = c * f(x) - возрастает
2)h(x) = f(x) + g(x) - убывает
3)если $\forall x \in D_f\ f(x) \geq 0\ \ \&\ \ \forall x \in D_g\ g(x) \geq 0$, то h(x) = f(x) * g(x) - убывает
если $\forall x \in D_f\ f(x) \leq 0\ \ \&\ \ \forall x \in D_g\ g(x) \leq 0$, то h(x) = f(x) * g(x) - возрастает
4)$\forall x \in D_f$ h(x) = $\frac{1}{f(x)}$ - убывает

Доказательство:
аналогично теореме о действиях с возрастающими функциями
Связь монотонности с чётностью
Теорема1 Пусть f - чётная тогда f - монотонно возрастает на [a;b] тогда и только тогда, когда f монотонно убывает на [-b;-a]
Доказательство:
Возьмём $-b \leq x_1 < x_2 \leq -a \Leftrightarrow a \leq -x_2 < -x_1 \leq b \Leftrightarrow a \leq t_2 < t_1 \leq b$
$f \uparrow [a;b] \Rightarrow f(t_2) < f(t_1) \Rightarrow f(-x_2) < f(-x_1) \Rightarrow$(f - чётная) $f(x_2) < f(x_1)$
то есть $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \downarrow [-b;-a]$
Теорема2 Пусть f - нечётная тогда f возрастает на [a;b] тогда и только тогда когда она возрастает и на [-b;-a](для убывания тоже верно)
Доказательство:
Возьмём $-b \leq x_1 < x_2 \leq a \Leftrightarrow b \geq -x_1 > -x_2 \geq a \Rightarrow (f \uparrow [a;b]) f(-x_2) < f(-x_1) \Rightarrow$ (f — нечётная) $-f(x_2) < -f(x_1) \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$
то есть $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow [-b;-a]$
Теорема(монотонность композиции) Композиция двух функций одинаковой монотонности - возрастающая функция; композиция двух функций разной монотонности - убывающая функция
Доказательство:
z = h(x) = g(f(x)), y = f(x) тогда z = g(y)
1)$f \uparrow, g \downarrow\ h(x) = g(f(x)), h \downarrow$
$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
$\forall y_1, y_2 \in D_g : y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) < g(y_2)$
Пусть $\forall x_1, x_2 \in D_h : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) > g(y_2) \Leftrightarrow z_1 > z_2 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2)$ то есть $h \downarrow$ на $D_h$
2)$f \uparrow, g \uparrow\ h(x) = g(f(x)), h \uparrow$
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow y_1 > y_2 \Rightarrow g(y_1) < g(y_2) \Leftrightarrow z_1 < z_2$ то есть $h \uparrow$ на $D_h$

## 2 Ограниченность функции — определение, свойства

Опр. функция f называется ограниченной сверху если $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f : f(x) \leq m$
Опр. функция f называется ограниченной снизу если $\exists k \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f : f(x) \geq k$
Опр. функция f называется ограниченной если $\exists m > 0 : \forall x \in D_f :$
$|f(x)| \leq m$
Теорема Функция ограниченна тогда и только тогда, когда она ограниченна сверху и снизу(возможно она не нужна...)
Доказательство:
=>: (!)f - огр. $\Rightarrow$ f - огр. сверху и f - огр. снизу
f - огр. $\Leftrightarrow \exists m_0 > 0 : |f(x)| \leq m_0 \Leftrightarrow -m_0 \leq f(x) \leq m_0$
$\exists m = m_0, \exists k = -m_0 : \forall x \in D_f : f(x) \leq m \;\; \& \;\; f(x) \geq k$
<=: (!) f - огр. сверху и f - огр. снизу $\Rightarrow$ f - огр.
$\exists m \forall x \in D_f : f(x) \leq m$
$\exists k \forall x \in D_f : f(x) \geq k$
$M_0 = \max\{|m|, |k|\}$ тогда $|\mathrm{m}| \leq M_0$ и $|\mathrm{k}| \geq M_0$
$\forall x \in D_f - M_0 \leq -|k| \leq k \leq f(x) \leq m \leq |m| \leq |M_0|$
то есть $-M_0 \leq f(x) \leq M_0 \Leftrightarrow |f(x)| \leq M_0$
Теорема1. Пусть функции f и g ограниченны на множестве X тогда $\mathrm{h}_1(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{g}(\mathrm{x})$, $\mathrm{h}_2(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ - $\mathrm{g}(\mathrm{x})$, $\mathrm{h}_3(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ * $\mathrm{g}(\mathrm{x})$, $\mathrm{h}_4(\mathrm{x}) = |\mathrm{f}(\mathrm{x})|$ ограниченны на $D_f$
Доказательство:
$\exists m > 0 : \forall x \in X |f(x)| \leq m$
$\exists k > 0 : \forall x \in X |g(x)| \leq k$
$|h_1(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq m + k$
$|h_2(x)| = |f(x) + (-g(x))| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq m + k$
то есть $\exists m_1 = m + k > 0 : \forall x \in X |h_1(x)| \leq m_1 \;\; \& \;\; |h_2(x)| \leq m_1$
$|h_3(x)| = |f(x) * g(x)| = |f(x)| * |g(x)| < m * k$(так как $|f(x)| \leq m \;\; \& \;\; |g(x)| \leq k$)
то есть $\exists m_2 = m * k > 0 : \forall x \in X |h_3(x)| \leq m_2$
для $h_4$ - аналог ($|h_4(x)| = |f(x)| \leq m$)
Теорема2. Пусть функция f ограниченна на X и $\exists m > 0 : \forall x \in X |g(x)| > m$ тогда $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ - ограниченна на X
Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} |g(x)| > m \Leftrightarrow |\frac{1}{g(x)}| < \frac{1}{m} \\ \exists k > 0 \forall x \in X |f(x)| \leq k \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} * |f(x)| < \frac{k}{m}$$

$|h(x)| = |\frac{f(x)}{g(x)}| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \frac{k}{m}$
то есть $\exists m_0 = \frac{m}{k} : \forall x \in X |h(x)| < m_0$

# 3 Периодичность функции — определение, свойства

Опр. функция f называется периодической если $\exists T > 0$: 1)$\forall x \in D_f (x \pm T) \in D_f$
2)$\forall x \in D_f : f(x+T) = f(x-T) = f(x)$, T - период f
Замечание У функции может быть более одного периода. Если в множестве периодов существует наименьший, он назвается - главный
Теорема1 Если f периодична с периодом $T_0$, $T_0$ - главный период, то все её периоды имеют вид T = n$*T_0$, $n \in \mathbb{N}$
Доказатество:
1)(!) $T_0$ - период $\Rightarrow \boxed{n * T_0 = T}$ - тоже период
2)(!) P - период $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : P = n * T_0$
I) $T_0$ - период $\Leftrightarrow \forall x \in D_f (x \pm T_0) \in D_f \ \ \& \ \ \forall x \in D_f : f(x+T_0) = f(x-T_0) = f(x)$
T $= T_0 * n$
то есть (!) $\Leftrightarrow \forall x \in D_f (x \pm T) \in D_f \ \ \& \ \ \forall x \in D_f : f(x+T) = f(x-T) = f(x)$
ММИ:
1)n = 1: $x \in D_f \ \ \& \ \ (x \pm T_0) \in D_f \ \ \& \ \ f(x \pm T_0) = f(x)$
2)Пусть n = k: $x \in D_f \ \ \& \ \ (x \pm T_0 * k) \in D_f \ \ \& \ \ f(x \pm T_0 * k) = f(x)$
3)n = k + 1
(!) а)$x \in D_f \Rightarrow (x \pm (k+1) * T_0) \in D_f$
б)$x \in D_f \Rightarrow f(x \pm (k+1) * T_0) = f(x)$
$x \in D_f \Rightarrow (x \pm k * T_0) \in D_f \Rightarrow (x \pm k * T_0 \pm T_0) \in D_f (T_0$ - период$)$ $\Rightarrow (x \pm (k+1) * T_0) \in D_f$
$f(x \pm (k+1) * T_0) = f(x \pm k * T_0 \pm T_0) = f(x \pm k * T_0) = f(x)$
то есть $(k+1) * T_0$ - период
II)Пусть P - период $P \neq n * T_0, P > 0$
$\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ T = P - n * T_0 \quad n * T_0 < P < (n+1) * T_0$
$\forall x \in D_f : f(x \pm T) = f(x \pm P \mp n * T_0) = f(x \mp T_0 * n) = f(x)$
$T = P - n * T_0 < (n+1) * T_0 - n * T_0 = T_0$ то есть $\exists T < T_0$, T - период ?!!
Замечание Если $T_1$ и $T_2$ периоды функции f, то $\forall k, n \in \mathbb{N} : T = n * T_1 + k * T_2$ - тоже период
Теорема2. Если функции $f_1$ и $f_2$ заданные на $\mathbb{R}$ периодичны: $T_1$ - период $f_1$, $T_2$ - период $f_2$, то $F_1(x) = f_1(x) + f_2(x); F_2(x) = f_1(x) - f_2(x); F_3(x) = f_1(x) * f_2(x); F_4(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} (\forall x \in \mathbb{R} f_2(x) \neq 0)$ периодичны если периоды $T_1$ и $T_2$ соизмеримы то есть $\boxed{\dfrac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}^+}$
Доказательство:
$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+, \ p, q \in \mathbb{N} \Leftrightarrow p * T_2 = q * T_1 = T$
$F_1(x) = f_1(x) + f_2(x), D_{F_1} = \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R} : F_1(x \pm T) = f_1(x \pm T) + f_2(x \pm T) = f_1(x \pm q * T_1) + f_2(x \pm p * T_2) = f_1(x) + f_2(x) = F_1(x)$ то есть T - период функции $F_1$, для $F_2, F_3, F_4$ - аналогично

Теорема3 Пусть f периодична, T - её главный период, g(x) = f(t(x)), где t(x) = ax + b, a > 0 тогда g - периодическая с периодом $T_0 = \frac{T}{a}$
Доказательство:(!) $T_0$ - главный период g
1)(!)$T_0$ - период g
$x \in D_g \Leftrightarrow t(x) \in D_f \Leftrightarrow (ax+b) \in D_f \Leftrightarrow (ax+b \pm T) \in D_f \Leftrightarrow$
$(a(x \pm \frac{T}{a})+b) \in D_f \Leftrightarrow (a(x \pm T_0)+b) \in D_f \Leftrightarrow t(x \pm T_0) \in D_f \Leftrightarrow (x \pm T_0) \in D_g$
$g(x \pm T_0) = f(t(x \pm T_0)) = f(a(x \pm T_0)+b) = f(ax+b \pm aT_0) = f(ax+b+T) = f(ax+b) = f(t(x)) = g(x)$
2)Пусть P < $T_0$, P - период $\Rightarrow \forall x \in D_g : g(x+P) = g(x) = f(t(x+P)) = f(a(x+P)+b) = f(ax+b+aP)$
Но g(x) = f(t(x)) = f(ax + b) тогда f(ax + b + aP) = f(ax + b)
Пусть ax + b = t
$\forall t \in D_f : f(t+aP) = f(t) \Rightarrow aP$ - период f
$P < T_0 \Leftrightarrow aP < T$ ?!!

# 4 Взаимно-обратные функции — свойства, монотонность

Опр.Пусть f:X→Y биективная функция то есть $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, y = f(x) тогда соответствие сопоставляющее каждому y$\in E_f$ - x $\in D_f$ называется обратной функцией f$(g(y) = f^{-1}(y))$ то есть обратная функция сопоставляет каждому элементу в области значений его прообраз
Замечание.1)Графики обратных функция симметричны относительно прямой y = x
2)Точки пересечения с вертикальной осью графика исходной функции - точки пересечения с горизонтальной осью графика обратной функции
3)горизонтальная ассимптота становится вертикальной и наоборот
Теорема1$\forall x \in D_f : (f^{-1} \circ f)(x) = x$
$\forall y \in D_{f^{-1}} : (f \circ f^{-1})(y) = y$
Теорема2 Если f - нечётная и обратимая, то $f^{-1}$ тоже нечётная
Доказательство:
y = f(x) $f^{-1}(x) = x = g(y)$

f - нечётная $\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \forall x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f \\ \forall x \in D_f : f(-x) = -f(x) \end{array}\right\}$
(!) $\forall y \in D_g \Leftrightarrow -y \in D_f;\ E_g = D_f, D_g = E_f$
1)$\forall y \in D_g g(y) \in E_g \Leftrightarrow x \in E_g \Leftrightarrow x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f \Leftrightarrow f(-x) \in E_f \Leftrightarrow$
(f - нечёт.)$-f(x) \in E_f \Leftrightarrow -y \in E_f \Leftrightarrow -y \in D_g$
2)(!)$\forall y \in D_g\ g(-y) = -g(y)$
$g(-y) = g(-f(x)) = g(f(-x)) = -x = -g(y)$

Теорема3 Если f строго монотонна, то $f^{-1}$ тоже строго монотонна, причём сохраняет характер монотонности f

Доказательство:

y = f(x) $f^{-1}(x) = x = g(y)$

$f \uparrow \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Пусть $y_1 < y_2$ докажем, что $g(y_1) < g(y_2)$. Будем доказывать от противного

Пусть $y_1 < y_2 \;\&\; g(y_1) \geq g(y_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2 \;\&\; x_1 \geq x_2$

1)$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow y_1 = y_2$ ?!!

2)$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow y_1 > y_2$ ?!! то есть $g(y_1) < g(y_2)$

# 5 Определение предела функции в точке по Коши. Бесконечный предел и предел на бесконечность. Лемма о стабилизации знака, обобщение

Опр. $x_0$ называется предельной точкой множества A(точка включения) если в каждой окрестности $x_0$ существует хотябы одна точка, принадлежащая A, кроме $x_0$ $(\forall \delta > 0 \; \exists x \in A : |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in A)$

Опр.(по Коши) Пусть $x_0$ - предельная точка $D_f$, число A - называется пределом f в точке $x_0$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \exists x : |x - x_0| < \delta \;\;\&\;\; x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Опр.1$A = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Опр.2$A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Опр.3$A = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x < -\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Опр.4 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \;= \infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \;\&\; x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$

Опр.5 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \;= +\infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \;\&\; x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > \varepsilon$

Опр6. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \;= -\infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \;\&\; x \neq x_0 \Rightarrow$
$f(x) < -\varepsilon$

Опр7. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \;= \infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$

Опр.8 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \;= +\infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x| > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$

Опр.9 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \;= -\infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x| > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$

Опр.10 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \;= \infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$

Опр.11 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \;= +\infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$

Опр.12 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \;= -\infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$

Опр.13 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \;= \infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x < -\delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$

Опр.14 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \;= -\infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x < -\delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$

Опр.15 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : x < -\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$

Лемма(о стабилизации знака). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 : |x - x_0| < \delta\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > 0$

A $< 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 : |x - x_0| < \delta\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) < 0$

Общий случай:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, B < A\ \&\ A < C \Rightarrow 1)\exists\delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B$

$2)\exists\delta >) : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < C$

Доказательство:(общего случая)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |x - x_0| < \delta\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$

$B < A \Leftrightarrow A - B > 0$

Возьмём $\varepsilon_1 = A - B > 0 : \exists\delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > A - \varepsilon_1 = B$

Возьмём $\varepsilon_2 = C - A > 0 : \exists\delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow f(x) < A + \varepsilon_2 = C$

Замечание Лемма о стабилизации знака может не выполняться для предельной точки

# 6 Теорема о сжатой переменной. Теорема о локальной ограниченности функции. Предельный переход в неравенстве

Теорема(предельный переход в неравенстве) $D_f \cap D_g \neq \phi, \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B,\ \exists\delta_0 > 0 : |x - x_0| < \delta_0\ \&\ x \neq x_0$ тогда если f(x) $<$ g(x) $\Rightarrow A \leq B$

Доказательство:(от противного)

Пусть $A \leq B \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R} : A > C > B$(из аксиом $\mathbb{R}$)

$\exists\delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > C$

$\exists\delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow g(x) < C$

$$\exists\delta = min\{\delta_1; \delta_2; \delta_0\} : |x - x_0| < \delta\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x) > C \\ g(x) < C \\ f(x) < g(x) \end{matrix}\right\} ?!!$$

Теорема(о сжатой переменной) $D = D_g \cap D_f \cap D_h \neq \phi, x_0$ - предельная точка D; $\exists\delta_0 > 0 : |x - x_0| < \delta_0\ \&\ x \neq x_0, g(x) < f(x) < h(x)$ причём $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) A \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

Доказательство:

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = min\{\delta_0;\delta_1;\delta_2\} : |x-x_0| < \delta\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} g(x) > A-\varepsilon \\ h(x) < A+\varepsilon \\ g(x) < f(x) < h(x) \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow A-\varepsilon < g(x) < f(x) < h(x) < A+\varepsilon \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

Теорема(о локальной ограниченности)$x_0$ - предельная точка на $D_f$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то f - ограничена в некоторой окрестности точки $x_0$($\exists M_0 > 0 : \exists\delta > 0 : |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M_0$)

Доказательство:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ возьмём M > |A|$\Leftrightarrow -M < A < M, M > 0$

по лемме о стабилизации знака $\exists\delta_1 > 0 : |x-x_0| < \delta_1\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) < M$

$\exists\delta_2 : |x-x_0| < \delta_2\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > -M$

$\exists\delta = min\{\delta_1;\delta_2\} > 0 : |x-x_0| < \delta\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow -M < f(x) < M \Leftrightarrow |f(x)| < M$

Если $x_0 \in D_f$ то есть $\exists f(x_0) : M_0 = max\{M; |f(x_0)|\}$ тогда $\forall x \in D_f : |x-x_0| < \delta$

1)$x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)| < M \leq M_0$

2)$x = x_0 \Rightarrow |f(x_0)| \leq M_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M_0$

# 7 Определение предела функции по Гейне. Эквивалентность определений

Опр.(по Гейне) $x_0$ - предельная точка $D_f$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ если $\forall\{x_n\} : x_n \subset D_f\ \exists N : \forall n \geq N x_n \neq x_0, x_n \to x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\} \to A$

Теорема Два определения предела в точке(по Коши и по Гейне) равносильны

Доказательство:

1)опр. Коши $\Rightarrow$ опр. Гейне

Дано: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |x-x_0| < \delta\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$

Возьмём $\forall\{x_n\} \to x_0, x_n \subset D_f : \exists N : \forall n \geq N\ x_n \neq x_0$

то есть $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon_0\ \exists N_1 : \forall n \geq N_1 : |x_n - x_0| < \varepsilon_0$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |x-x_0| < \delta\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$ Пусть $\varepsilon_0 = \delta\ \exists N_1 : \forall n \geq N_1 : |x_n - x_0| < \delta$

$N_0 = max\{N; N_1\}$ тогда $\forall n \geq N_0 : |x_n - x_0| < \delta\ \&\ x_n \neq x_0 \Rightarrow |f(x_n)-A| < \varepsilon$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

2)опр. Гейне $\Rightarrow$ опр. Каши

от противного то есть $\neg$(опр. Каши) & (опр. Гейне)

$\neg(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \neq x_n, |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon) \Leftrightarrow$

$\exists\varepsilon_0 > 0\ \forall\delta > 0 : \exists x \neq x_0 : |x-x_0| < \delta\ \&\ |f(x)-A| \geq \varepsilon$

Возьмём $\varepsilon_0$ возьмём $\delta_1 : \exists x_1 \neq x_0 : |x_1 - x_0| < \delta_1\ \&\ |f(x_1)-A| \geq \varepsilon_0$

возьмём $\delta_2 :\ 0 < \delta_2 < \delta_1 :\ \exists x_2 \neq x_0 : |x_2 - x_0| < \delta_2\ \&\ |f(x_2)-A| \geq \varepsilon_0$

...
Построим $\{\delta_n\} \to 0$
$\forall n\ \exists x_n \neq x_0 : |x_n - x_0| < \delta_n\ \ \&\ \ |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$ тогда $0 < |x_n - x_0| < \delta_0 \to 0$
тогда по теореме о сжатой переменной $|x_n - x_0| \to 0 \Rightarrow$
$b_n = |x_n - x_0| \to 0 \Rightarrow \{x_n - x_0\} \to 0 \Rightarrow x_n \to x_0$
то есть $\forall n\ x_n \neq x_0\ \ \&\ \ x_n \to x_0 \Rightarrow$(по опр. Гейне)$\{f(x_n)\} \to A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N :$
$\forall n \geq N : |f(x_n) - A| < \varepsilon$ но $\exists\varepsilon_0 : \forall n\ |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$?!!

# 8 Теорема о действиях с пределами функций. Предел композиции функций

Теорема1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ = A\ \ \&\ \ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ = B \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))\ = A+B$
Доказательство:
Возьмём $\forall\{x_n\} \to x_0\ \exists :\ \forall n \geq N x_n \neq x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\} \to A\ \ \&\ \ \{g(x)\} \to B$
h(x) = f(x) + g(x); $h(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$
$\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)\ = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) + \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A + B$
тогда по опр. Гейне $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)\ = A + B$
Замечание Для предела разности, произведения и деления - аналогично
Теорема(о пределе композиции) Пусть h(x) = f(g(x)), $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ = b,$
$\lim\limits_{y\to b} f(y)\ = c,\ \exists\delta_0 > 0 : |x - x_0| < \delta_0\ \ \&\ \ x \neq x_0 \Rightarrow g(x) \neq b$
тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} h(x)\ = \lim\limits_{y\to b} f(y)\ = c$
Доказательство:
$\forall\{x_n\} \to x_0\ \exists N\ \forall n \geq N : x_n \neq x_0$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ = b\{g(x_n)\} \to b$ то есть $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)\ = b$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n\ = x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N : |x_n - x_0| < \varepsilon$
Для $\varepsilon = \delta_0\ \exists N \forall n \geq N\ |x_n - x_0| < \delta_0 \Rightarrow g(x_n) \neq b$ то есть $\{g(x_n\} \to b$ тогда
$\{y_n\} \to b\ \ \&\ \ y_n \neq b \Rightarrow \{f(y_n)\} \to c$ то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))\ = c$

# 9 Замечательный предел, связанный с e

Теорема $\lim\limits_{x\to\infty}(x + \dfrac{1}{x})^x\ = e$
Доказательство:
1)$\forall\{x_n\} \to +\infty\ \exists N :\ \forall k \geq N\ x_k > 1$
$n_k = [x_k]\ n_k \in \mathbb{N}\ n_k \leq x_k < n_k + 1(*)$
$\frac{1}{n_k+1} < \frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{n_k}(**)$
(**) $\Rightarrow (1+\frac{1}{n_k+1}) < (1+\frac{1}{x_k}) \leq (1+\frac{1}{x_k}) \Leftrightarrow (1+\frac{1}{n_k+1})^{n_k} < (1+\frac{1}{x_k})^{n_k} \leq (1+\frac{1}{x_k})^{n_k}$
$(1 + \frac{1}{n_k+1})^{n_k} < (1 + \frac{1}{x_k})^{n_k} \leq (1 + \frac{1}{x_k})^{x_k} < (1 + \frac{1}{x_k})^{n_k+1} \leq (1 + \frac{1}{n_k})^{n_k+1}$
(1 и 4 знаки по (**), 2 и 3 - по (*))

$y_k = (1+\frac{1}{x_k})^{x_k} \quad (1+\frac{1}{n_k+1})^{n_k} < y_k < (1+\frac{1}{n_k})^{n_k+1}$ по теореме о сжатой переменной $y_k \to e$

$\lim\limits_{n_k\to\infty}(1+\dfrac{1}{n_k})^{n_k+1} = \lim\limits_{n_k\to\infty}((1+\dfrac{1}{n_k})^{n_k} * (1+\dfrac{1}{n_k})) = e$

$y_k \to e \quad f(x) = (1+\frac{1}{x})^x \quad f(x_k) = y_k \to e$ то есть $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\dfrac{1}{x})^x = e$

$2)\forall\{x_n\} \to -\infty\ \exists N:\ \forall k \geq N\ x_k < -1$

$x_k = -y_k$ тогда $y_k \to -\infty$

$(1+\frac{1}{x_k})^{x_k} = (1+\frac{1}{y_k})^{-y_k} = e$

# 10 Односторонние пределы. Критерий существования предела в точке

Опр. Число A называется пределом функции f в $x_0$ справа если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, x_0$ - предельная точка на $D_f$

Опр. Число A называется пределом функции f в $x_0$ слева если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0 : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, x_0$ - предельная точка на $D_f$

Теорема $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A\ \&\ \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$

Доказательство:

=>: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |x - x_0| < \delta\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Пусть $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |x - x_0| < \delta\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$

Пусть $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |x - x_0| < \delta\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$

<=: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0\ x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 > 0\ x_0 - \delta_2 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

то есть $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = min\{\delta_1; \delta_2\}$

Пусть $|x - x_0| < \delta\ \&\ x \neq x_0 \Rightarrow x_0 < x < x_0 + \delta$ или $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow x_0 - \delta_2 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

# 11 Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sinx}{x} = 1$. Тригонометрические пределы

Теорема(I замечательный предел)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sinx}{x} = 1$ Доказательство:

1) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{sinx}{x} = 1 \Leftrightarrow \forall\{x_n\} \to 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ x_n > 0$

2) $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{sinx}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{sinx}{x} = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{sin(-x)}{-x} = \lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{sint}{t} = 1$

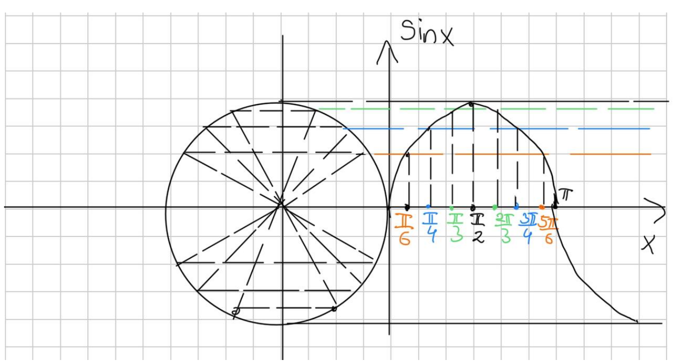
(второй переход возможен т. к. sin чётная функция)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sinx}{x} = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{sinx}{x} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{sinx}{x} = 1$

## 12 Свойства и графики прямых и обратных тригонометрических функций

Прямыу триногометрические функции

$\boxed{1}$ $y = sinx$




1)$\forall x \quad sin(-x) = -sinx$ то есть f - нечётная

2)$\forall x \; sin(x \pm 2\pi) = sin\, x \; T_0 = 2\pi$

3)$D_f = \mathbb{R}$

$E_f = [-1; 1]$

4)$f(x) = 0 \quad x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

график синуса - синусоида

5)монотоность (!) $\forall k \in \mathbb{Z} \; f \uparrow [-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$

$f \downarrow [\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k]$

Доказательство:

$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$

рассмотрим $sin\, x_1 - sin\, x_2 = 2sin\frac{x_1 - x_2}{2} cos\frac{x_1 + x_2}{2} < 0$

$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2} \;\; \& \;\; -\frac{\pi}{2} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \;\; \& \;\; -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 - x_2}{2} < 0 \Rightarrow$
$sin\, x_1 - sin\, x_2 < 0 \Rightarrow f(x) = sin\, x$

$\boxed{2}$ $y = cosx = sin(\frac{\pi}{2} - x)$

1)$D_f = \mathbb{R} \;\; E_f = [-1; 1]$

2)$\forall x \in \mathbb{R} \; cos(-x) = cos\, x$ то есть f - чётная

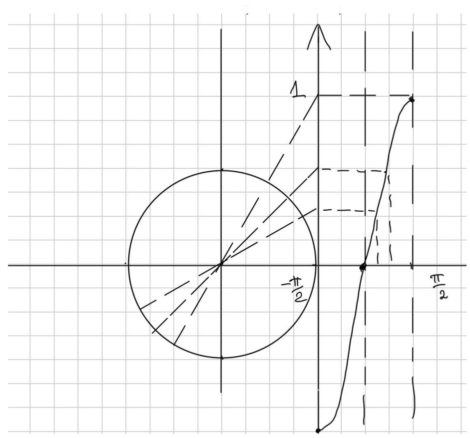
3)корни f(x) $= 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

4)периодичность $T_0 = 2\pi \; \forall x \; cos(x \pm 2\pi k) = cos\, x$

5)монотонность $g(x) = \frac{\pi}{2} - x, g \downarrow \quad y = sin(g(x)) \Rightarrow g \downarrow$ на $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$ & $g \uparrow$ на $[\pi + 2\pi k; 2\pi(k+1)]$

$\boxed{3}$ $y = tg\, x = \frac{sin\, x}{cos\, x}$

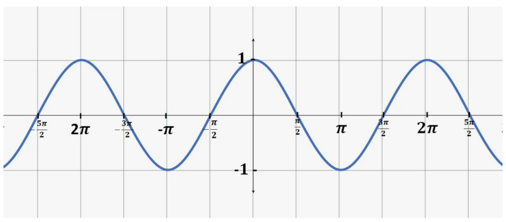
1)$D_f = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + 2\pi k\}$, $k \in \mathbb{Z}; E_f = \mathbb{R}$




2)$\forall x \in D_f :\ tg(-x) = -tg(x) \Rightarrow$ f - нечётная
3)корни $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
4)периодичность $T_0 = \pi\ \ \forall x \in D_f : f(x \pm \pi) = f(x)$
5)монотонность $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$
$tg\, x_1 - tg\, x_2 = \frac{sin(x_1 - x_2)}{cos\, x_1\, cos\, x_2} < 0$
$-\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}\ \ \&\ \ -\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < x_1 - x_1 < 0 \Rightarrow f \uparrow (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$
6)вертикальная асимптота $cosx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\ \ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{cosx} = \infty$
аналогично $x \to -\frac{\pi}{2} \Rightarrow tgx \to \infty$
7)график(развёртка)
$\boxed{4}$ $y = ctg\, x = tg(\frac{\pi}{2} - x)$
1)$D_f = \mathbb{R} \backslash \{\pi k\},\ k \in \mathbb{Z}$
2) $\forall x \in D_f\ \ \ f(-x) = -f(x)$, f — нечётная, но график не проходит через $(0; 0)$
3)корни $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
4)периодичность $T_0 = \pi$
5)монотоность $f \downarrow (\pi k; \pi + \pi k)$
6)вертикальная асимптота $sin\, x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k$
<u>Обратные триногометрические функции</u>
$\boxed{1}$ $f(x) = sinx|_{[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}$
$f^{-1}(x) = arcsin(x) = g(x)$
1)g - нечётная
2)$g \uparrow$
3)$D_g = [-1; 1]\ \ E_g = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
$\boxed{2}$ $f(x) = cosx|_{[0;\pi]}$
$f^{-1}(x) = arcos(x) = g(x)$
$D_f = [-1; 1]\ \ E_f = [0; \pi]$
$\forall x \in D_f : g(x) \geq 0$
$g \downarrow$

g(0)=$\frac{\pi}{2}$

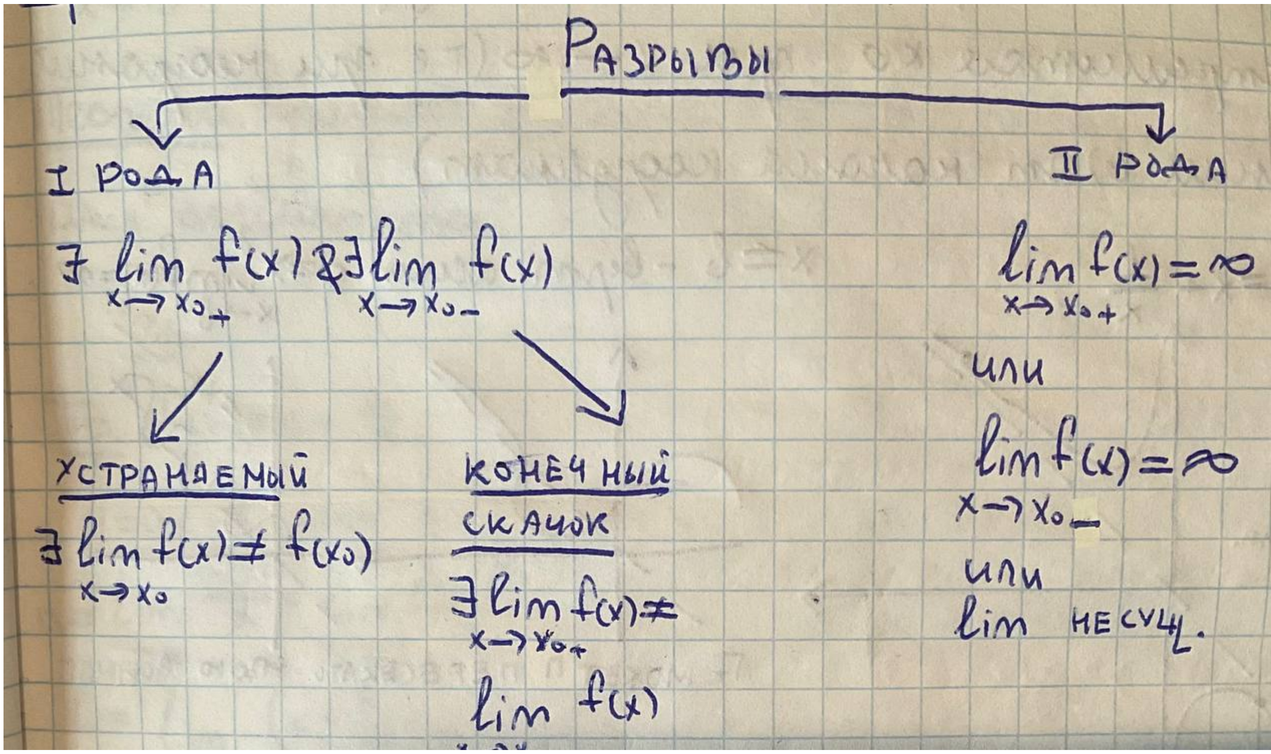
## 13 Равносильные определения непрерывности функции в точке. Виды разрывов




Опр.1 функция f называется непрерывной в точке $x_0$, если:
1)$\exists \delta > 0: \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D_f$
2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \ = f(x_0)$
Опр.2 функция f называется непрерывной в точке $x_0$, если:
1)$\exists \delta > 0: \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D_f$
2) $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) \ = \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) \ = f(x_0)$
Опр.3 функция f называется непрерывной в точке $x_0$, если:
1)$\exists \delta > 0: \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D_f$
2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) \ = 0$
Опр.4 функция f называется непрерывной в точке $x_0$, если:
1)$\exists \delta > 0: \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D_f$
2)$x = x_0 + \Delta x$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \ = 0$
Опр.5 функция f называется непрерывной в точке $x_0$, если:
1)$\exists \delta > 0: \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D_f$
2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f \ = 0$
Опр.6 функция f называется непрерывной в точке $x_0$, если:
1)$\exists \delta > 0: \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D_f$
2)$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Опр.7 функция f называется непрерывной в точке $x_0$, если:
1)$\exists \delta > 0: \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D_f$
2)$\forall \{x_n\} \to x_0 \ \ \{f(x_0)\} \to f(x_0)$

## 14 Действия с непрерывными функциями. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность композиции

Теорема Если функции f и g непрерывны $x_0$, то функции $F_1(x) = f(x) + g(x); F_2(x) = f(x) - g(x); F_3(x) = f(x) * g(x); F_4 = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$ - непрерывны $x_0$
Доказательство:




f и g непр. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ & $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$
по теореме о действиях с пределами: $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$ тогда $F_1$ непрерывна по определению, для $F_2, F_3, F_4$ - аналогично

Непрерывность элементарных функций:
1)f(x) = ax + b непр. т. к. $\forall x_0 : \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Доказательство:
а)a = 0 - верно(предел константы)
б)$a \neq 0 :\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$
Если $|x - x_0| < \delta$ & $x \neq x_0 \Rightarrow |a||x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - (ax_0 + b)| < \varepsilon$
2)f(x)=$ax^2 + bx + c$ пусть g(x) = bx + c - непр. по 1); h(x) = $ax^2$ -непрерывна как произведение непрерывных тогда f(x) непрерывна как сумма непрерывных
3)$f(x) = a_0 x^n + ... + a_n$ можно разбить на сумму непрерывных функций
4)$f(x) = \sqrt{ax + b}, x \geq -\frac{b}{a}$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{ax + b} = \sqrt{\lim\limits_{x \to x_0} (ax + b)} = \sqrt{ax_0 + b}$(доказано для последовательностей $\Rightarrow$ можно доказать по Гейне...)
5)f(x) = |ax + b|

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} |ax+b| = |\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)| = |ax_0+b|$(доказано для последовательностей $\Rightarrow$ можно доказать по Гейне...)
6)$f(x) = \sqrt[3]{ax+b}$
7)$f(x) = sin\, x$ $f(x) = cos\, x$ $f(x) = tg(x)$ $f(x) = ctg(x)$ - доказанно в последовательностях
Теорема(непрерывность композиции)Пусть f непрерывна в $x_0, f(x_0) = y_0$ g непрерывна в $y_0$ тогда h(x)=g(f(x)) непрерывна при $x = x_0$
Доказательство:
f непр. при x $=x_0$ : $\forall\varepsilon_0 > 0\ \exists\delta_0 > 0 : |x-x_0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon_0$
g непр. при y $=y_0$ : $\forall\varepsilon_1 > 0\ \exists\delta_1 > 0 : |y-y_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)-g(x_0)| < \varepsilon_1$
(!) h непр. при $x = x_0$ : $\forall\varepsilon_2 > 0\ \exists\delta_2 > 0 : |x-x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x)-h(x_0)| < \varepsilon_2$
$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_1 > 0 : |y-y_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(y)-g(y_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow |h(x)-h(x_0)| < \varepsilon(g(y) = g(f(x)) = h(x))$
Возьмём $\delta_1 = \varepsilon_0\ \exists\delta_0 : |x-x_0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \delta_1 \Leftrightarrow |y-y_0| < \delta_1 \Rightarrow |h(x)-h(x_0)| < \varepsilon_0$

## 15 Теорема о пределе монотонной функции. Непрерывность монотонной функции. Непрерывность обратной функции

Теорема о пределе монотонной функции Если функция f определена и монотонна на [a; b], то $\forall x_0 \in (a;b)\ \exists \lim\limits_{x\to x_0+} f(x); \exists \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$
Доказательство:
Пусть $f\uparrow$ на [a; b]
1)$\forall x_0 \in (a;b)\ \forall x \in [a;x_0) :\ a \le x < x_0 \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$ то есть f(x) ограниченна сверху на $[a;x_0) \Rightarrow \exists sup_{[a;x_0]} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x \in [a;x_0) : f(x) \le A$ &
$\forall\varepsilon > 0\ \exists x_1 \in [a;x_0) : f(x_1) > A + \varepsilon$
$a \le x_1 < x_0;\ \forall x \in (x_1;x_0)\ x_1 < x < x_0 \Rightarrow f(x_1) \le f(x) \le f(x_1)$
$A - \varepsilon < f(x_1) \le f(x) < A < A + \varepsilon$
Пусть $\delta = x_0 - x_1$ тогда $x_0 - \delta < x < x_0$
то есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists x_1 \in [a;x_0)\ \exists\delta = x - x_1 > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon$ то есть $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$

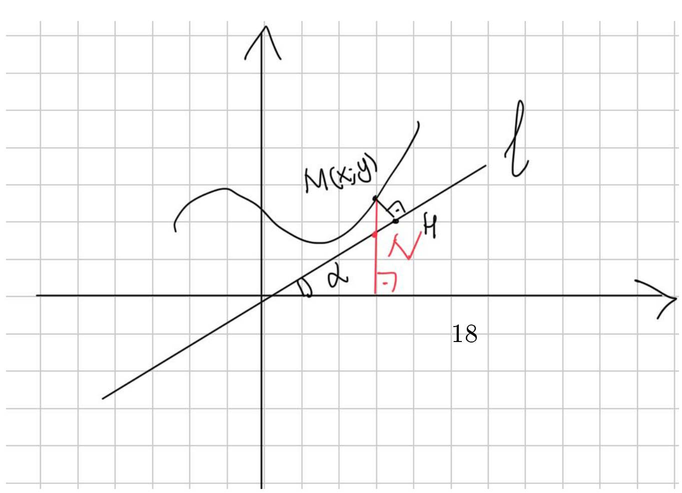
2)$\forall x_0 \in (a;b)\ \forall x \in (x_0;b]$
$f\uparrow \Leftrightarrow (x > x_0 \Rightarrow f(x) \ge f(x_0))$ то есть f(x) огр. снизу на $(x_0;b]$
$\Rightarrow \exists inf_{(x_0;b]} f(x) = B \Leftrightarrow \forall x \in (x_0;b] :\ f(x) \ge B$ & $\forall\varepsilon > 0\ \exists x_2 \in (x_0;b] : f(x_2) < B + \varepsilon$
$\forall\varepsilon > 0 \exists x_1 : x_0 < x_1 \le b\ \ \forall x \in (x_0;x_2) \Rightarrow x_0 < x < x_2\ \exists\delta x_2 - x_1 > 0$
$f\uparrow$: $f(x_0) \le f(x) \le f(x_2) \Rightarrow B - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le f(x_2) < B + \varepsilon$ то есть $\forall\varepsilon > 0 \exists x_2 \in (x_0;b]\ \exists\delta = x_2 - x_0 > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$ то есть $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = B$
Следствие $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = inf_{(x_0;b]} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = sup_{[a;x_0)} f(x)$

Замечание Монотонная функция может иметь разрывы только I рода
Следствие из теоремы Вейерштрассе Есди f непрерывна на отрезке, то её значения сплошь заполняют [f(a); f(b)].
Теорема(непрерывность монотонной функции) Если f монотонна на промежутке $<$a;b$>$ и f($<$a;b$>$) = $<$c;d$>$ то f - непрерывна
Доказательство:
Пусть $f \uparrow \Rightarrow \forall x_0 \in < a; b > \exists \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ & $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$
Пусть $\exists x_0 \in < a; b >$: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq f(x_0)$
$x < x_0 \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \Rightarrow f(x_0) \leq \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \Rightarrow f(x_0) < \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$
То есть $X_0 < x \Rightarrow f(x_0) < \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$
$\forall x > x_0 : \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = inf_{(x_0;b]} f(x) \Rightarrow f(x) \geq \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$
Пусть $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A$
$x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ то есть $f(x) \leq f(x_0) < A$ & $f(x_0) \geq f(x) \geq A$ ?!!
Теорема(Непрерывность обратной функции) Если f задана на $<$a; b$>$ $\rightarrow$ $<$c;d$>$ строго монотонна и непрерывна, то обратная функция тоже непрерывна и так же монотонна

# 16 Наклонная и вертикальная асимптоты к графику функции

Опр. прямая, заданная уравнением y = ax + b называется наклонной асимптотой к графику функции, если расстояние между этой прямой и графиком функции стремится к 0 при x стремящмся к бесконечности то есть при неограниченном удалении от начала координат
Опр1. Прямая называется вертикальной асимптотой к графику функции если расстояние между этой прямой и графиком стремится к бесконечности при x стремящмеся к b
Теорема прямая задааная уравнением y = ax + b является асимптотой к графику f тогда и только тогда $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ & $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax)$

Доказательство:




$l : y = ax + b, M(x; f(x)), \ N(x; l(x))$
$(MH) \perp l$
l - асимптота $\Leftrightarrow$
$|MH| \rightarrow 0$
$\lim\limits_{x \to \infty} |MH| = 0$
$\lim\limits_{x \to \infty} |MN| = 0 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)-l(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-l(x)) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0 \Leftrightarrow b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$
$|MN| = \frac{|MH|}{cos\,\alpha}$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ так как l - наклонная
$\Rightarrow cos\,\alpha \neq 0$
$\Leftrightarrow f(x) = ax+b+\alpha(x)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{ax+b+\alpha(x)}{x} = a$$

# 17 Теорема Больциано-Коши о непрерывности функции на отрезке

Первая теорема Больциано-Коши(о существовании корня) Пусть f заданна на [a;b] и непрерывна причём значения на концах отрезка имеют разные знаки(f(a)*f(b) $<$ 0) тогда существует корень на этом отрезке($\exists c \in (a;b) : f(c) = 0$)
Доказательство:
1)$a = a_0, \;\; b = b_0$
$c_0$ - середина $[a_0; b_0]$ а)$f(c_0) = 0$ - доказано
б)Если $f(c_0) > 0 \quad a_1 = a_0, b_1 = c_1$
в)Есть $f(x_0) < 0 \quad a_1 = c_0, b_1 = b_0$
2)$c_1$ - середина $[a_1; b_1]$
...
$\{[a_n; b_n]\}$ - последовательность вложенных отрезков
$|b_n - a_n| = \frac{|a-b|}{2^n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|b_n - a_n| = 0 \Rightarrow \exists! c \in [a_n; b_n]$
$\forall n : \; \{a_n\}\uparrow \& \;\; \{b_n\}\downarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{x\to\infty}b_n = c$
$\forall n \; f(a_n) < o \;\; \& \;\; f(b_n) > 0$
f - непр. на [a;b]$\Rightarrow$ а непр. в с $\Rightarrow \{a_n\} \to c \Rightarrow \{f(a_n)\} \to f(c)$
$\& \;\; \{b_n\} \to c \Rightarrow \{f(b_n)\} \to f(c)$
то есть $\exists \lim\limits_{n\to\infty}f(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}f(a_n) = f(c) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}f(a_n) \leq 0 \;\; \& \;\; \lim\limits_{n\to\infty}f(b_n) \geq 0$
то есть $f(c) \leq 0 \;\; \& \;\; f(c) \geq 0 \Rightarrow f(c) = 0$
Вторая теорем Бальциано-Коши Если f заданна на [a;b] и непрерывна на нём, то она принимает все значения от f(a) до f(b)
Доказательство:
$\forall c \in (f(a); f(b))$ (пусть f(a) $<$ f(b))
$g(x) = f(x) - c$ - непр.

$g(a) = f(a) - c$ & $g(b) = f(b) - c \Rightarrow f(a) < c < f(b) \Rightarrow g(a) < 0$ & $g(b) > 0 \Rightarrow \exists c \in (a;b) : g(c) = 0$ то есть g(c) = f(c) - c = 0

# 18 Теоремы Вейерштрассе о непрерывности функции на отрезке

Первая теорема Вейерштрассе Непрерывная на отрезке функция - ограниченна
$(f : [a;b] \to \mathbb{R} f$ - непр. $\Rightarrow \exists M, m : \forall x \in [a;b] m \leq f(x) \leq M)$
Доказательство:
Пусть $\exists \forall M > 0 \exists x \in [a;b] : \ |f(x)| > M$
возьмём $\forall M = n, n \in \mathbb{N}$
то есть $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a;b] : |f(x_n)| > n$
то есть $\forall n : \ a \leq x_n \leq b$ то есть $\{x_n\}$ - огр $\Rightarrow \exists \{x_{n_k}$ - сходящаяся
то есть $\exists x_0 : \{x_{n_k}\} \to x_0 \ a \leq x_{n_k} \leq b \ ; \ \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow a \leq x_0 \leq b$
f - непр. при $x = x_0 \Rightarrow \{x_{n_k}\} \to x_0 \Rightarrow \{f(x_{n_k}\} \to f(x_0)$
то есть $\{x_{n_k}\}$ сход $\Rightarrow$ огр. $\Leftrightarrow \forall k \ \exists M_0 > 0 : \ |f(x_{n_k})| \leq M_0$
пусть $N = [M_0] + 1$
$\forall k : |f(x_{n_k})| \leq M_0 < N_)$
$n_k \to \infty \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 : \ \forall k \geq k_0 : n_k > \varepsilon$
$\delta = N_0 \ \exists k_n \forall ] k \geq k_0 : n_k > N_0 \Rightarrow |f(x_{n_k})| < N_0 < n_k$
Но $\forall k \ |f(x_{n_k})| > n_k$ ?!!
Вторая теорема ВейерштрассеНепрерывная функция на [a;b] достигает своего наибольшего и наименьшего значения
Доказательство:
по I теореме Вейерштрассе f - огр. $\Rightarrow \exists M$ & $m : M = sup_{[a;b]} f(x)$,
$m = inf_{[a;b]} f(x)$
Пусть $M = sup_{[a;b]} f(x) \Leftrightarrow \forall x \in [a;b] f(x) \leq M$ & $\forall \varepsilon > 0 \exists x` \in [a;b] : \ f(x`) > M - \varepsilon$
Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in [a;b] : f(x_n) > N - \frac{1}{n}$
$\{x_n\}$ - огр, $\Rightarrow \exists \{x_{n_k}$ - сход.
то есть $\exists x_0 \in [a;b] : \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = x_0$
f - непр. при $x = x_0$ то есть $\{x_{n_k}\} \to x_0 \Rightarrow \{f(x_{n_k}\}$ то есть $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$
$\forall k : \ f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \geq M - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n_k} = M$
$\forall x_{n_k} \in [a;b] : \ f(x_{n_k}) \leq M$
$f(x_0) \leq M$ & $f(x_0) \geq M \Rightarrow f(x_0) = M$
то есть $\exists X_0 \in [a;b] f(x_0) = sup_{[a;b]} f(x)$
Пусть m $= inf_{[a;b]} f(x) \Leftrightarrow \forall x \in [a;b] f(x) \geq m$ & $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x`` \in [a;b] : \ f(x``) < m + \varepsilon$
...
$f(x_{n_k}) < m + \frac{1}{n_k}$

$f(x_0) \geq m$
...