

Билеты к зачёту по математическому анализу

Коткин Михаил

15 февраля 2026 г.

Содержание

1 Общие свойства последовательности — монотонность, ограниченность, понятие точных границ	3
2 Арифметическая прогрессия. Формула n-ного члена, характеристическое свойство, сумма первых n членов	4
3 Геометрическая прогрессия. Формула n-ного члена, характеристическое свойство, сумма первых n членов	5
4 Определение предела последовательности. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n $, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos a_n$ при условии $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$	6
5 Предельный переход в равенстве и неравенстве. Единственность предела. Теорема о сжатой переменной	7
6 Необходимый признак сходимости последовательности	8
7 Теорема Вейерштрассе о монотонности последовательности	9
8 Сходимость последовательностей $x_n = \frac{a^n}{n!}$, $y_n = \frac{n^a}{a^n}$, $z_n = \frac{n!}{n^n}$	9
9 Сходимость геометрической прогрессии при $ q < 1$. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии	10
10 Бесконечно малые последовательности, действия с ними	11
11 Бесконечно большие последовательности, свойства	12
12 Арифметические действия с пределами	13
13 Предел отношения многочленов	14
14 Сходимость последовательностей $(1 + \frac{1}{n})^n$, $(1 - \frac{1}{n})^n$, $c^{\frac{1}{n}}$, $n^{\frac{1}{n}}$	15

15	Подпоследовательность. Связь сходимости подпоследовательности со сходимостью последовательности	16
16	Лемма о вложенных промежутках (2 варианта)	16
17	Теорема Больцано-Вейерштрассе	17
18	Замечательный предел $\frac{\sin x_n}{x_n}$	18

1 Общие свойства последовательности — монотонность, ограниченность, понятие точных границ

Опр. Последовательность - это функция натурального аргумента

Свойства:

1) Монотонность

Опр.1 последовательность a_n называется монотонно возрастающей если $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} > a_n$ (\geq если возрастает не строго)

Опр.1 последовательность a_n называется монотонно убывающей если $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} < a_n$ (\leq если убывает не строго)

Опр.2 a_n монотонно возрастает тогда и только тогда $\forall n_1 > n_2 : a_{n_1} > a_{n_2}$
монотонно убывает тогда и только тогда $\forall n_1 < n_2 : a_{n_1} < a_{n_2}$

Докажем эквивалентность двух определений:

1) \Rightarrow : $\forall n a_{n+1} > a_n$

Пусть $n_1 > n_2$ тогда $n_2 < n_2 + 1 < n_2 + 2 < \dots \leq n_1 \Rightarrow a_{n_2+1} > a_{n_2}$
 $a_{n_2+2} > a_{n_2+1} > a_{n_2}$

...

$a_{n_1} \geq \dots > a_{n_2} \Rightarrow a_{n_1} > a_{n_2}$

2) \Leftarrow : $\forall n_1 > n_2 : a_{n_1} > a_{n_2}$

$\forall n + 1 > n$

$\Rightarrow a_{n+1} > a_n$

Опр. последовательность называется монотонно возрастающей с некоторого места если $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 : a_{n+1} > a_n$

/* отрицание монотонности по определению

$\exists n_1 > n_2 : a_{n_1} \leq a_{n_2} \ \& \ \exists n_3 > n_4 : a_{n_3} \geq a_{n_4}$ */

Опр. последовательность называется ограниченной если

$\exists M > 0 : \forall n |x_n| \leq M$

последовательность называется ограниченной сверху если $\exists M : \forall x_n \leq M$

последовательность называется ограниченной снизу если $\exists M : \forall x_n \geq M$

Опр. последовательность называется ограничена с некоторого места если

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \exists M > 0 : |x_n| \leq M$

Теорема1. x_n ограниченная тогда и только тогда когда ограничена снизу и сверху

Теорема2. x_n ограниченная тогда и только тогда когда она ограничена с некоторого места.

Доказательство:

\Rightarrow :

x_n ограничена $\Rightarrow \exists N = 1 : \exists M > 0 : \forall n \geq N |x_n| \leq M$

\Leftarrow :

x_n ограничена с некоторого места $\Rightarrow \exists N \forall n \geq N \exists M > 0 : |x_n| < M$

Пусть $M_0 = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, M)$

тогда $\forall n \in \mathbb{N}: n < N \Rightarrow |x_n| \leq M_0$

$n \geq M \Rightarrow |x_n| \leq M \leq M_0 \Rightarrow |x_n| \leq M_0$

Замечание Свойства ограниченных функций верны для ограниченных последовательностей

Опр. число А называется точной верхней границей(супремум) $A = \sup x_n$ если:

1) $\forall n x_n \leq A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N x_N > A - \varepsilon$

Опр. число В называется точной нижней границей(инфимум) $B = \inf x_n$ если:

1) $\forall n x_n \geq B$

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N x_N < \varepsilon + B$

2 Арифметическая прогрессия. Формула n-ного члена, характеристическое свойство, сумма первых n членов

Опр. a_n называется арифметической прогрессией если:

$\exists d \in \mathbb{R}: a_{n+1} = a_n + d$

$a_{n+1} = a_n + d$ (1)

$a_n = a_{n-1} + d \Leftrightarrow a_{n-1} = a_n - d$ (2)

из (1) и (2) $\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$ - характеристическое свойство

формула общего члена $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$ где d - разность прогрессии

Доказательство(ММИ)

1) $n = 1: a_1 = a_1$

2) $n = k: a_k = a_1 + (k-1)d$

3) $n = k + 1: a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd = a_1 + ((k-1) - 1)d$

Формула суммы первых n членов

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$

$\left. \begin{array}{l} a_2 = a_1 + d \\ a_{n-1} = a_n - d \end{array} \right\} \Rightarrow a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$

$a_3 = a_1 + 2d$ & $a_{n-2} = a_n - 2d \Rightarrow a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$

Доказательство(ММИ):

1) $n = 2: a_1 + a_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} 2$

2) $n = k: a_1 + a_2 + \dots + a_k = \frac{a_1 + a_k}{2} k$

3) $n = k + 1: (!) a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} = \frac{a_1 + a_{k+1}}{2} (k+1) = \frac{a_1 + a_{k+1}}{2} k + \frac{a_1 + a_{k+1}}{2}$

$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{a_1 + a_k}{2} k + a_k + d$

$a_{k+1} = a_k + d$

$a_1 + \dots + a_k + a_{k+1} = \frac{a_1 + a_k + d}{2} k + \frac{a_1 + a_k + d}{2} \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_k}{2} k + a_{k+1} = \frac{a_1 + a_k + d}{2} k + \frac{a_1 + a_k + d}{2}$

$\Leftrightarrow a_{k+1} = \frac{d}{2} k + \frac{a_1 + a_k + d}{2} \Leftrightarrow 2a_{k+1} = (kd + a_1) + (a_k + d) = a_{k+1}$

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{a_1+a_k}{2}k + a_k + d = \frac{(a_1+a_k)k+2a_k+d}{2} = \frac{1}{2}(a_1+a_k)k + a_1 + (k-1)d = \frac{1}{2}((a_1+a_k)k + a_1 + a_{k+1} + kd) = \frac{1}{2}((a_1+a_{k+1})k + a_1 + a_{k+1})$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{a_1+a_2}{2}n = \frac{a_1+a_1+(n-1)d}{2}n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2}n$$

3 Геометрическая прогрессия. Формула n-ного члена, характеристическое свойство, сумма первых n членов

Опр.числовая последовательность b_n называется геометрическая прогрессия если: 1) $\forall b_n \neq 0$

$$2)\exists q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall n b_{n+1} = b_n q$$

q - знаменатель прогрессии

Характеристическое свойство:

$$\forall n : |b_n| = \sqrt{b_{n+1}b_{n-1}} \Leftrightarrow b_n^2 = b_{n+1}b_{n-1}$$

$$b_{n+1} = b_n q \text{ \& } b_n = b_{n-1} q \Leftrightarrow b_{n-1} = \frac{b_n}{q} \Rightarrow b_{n+1}b_{n-1} = b_n^2$$

Формула общего члена:

$$\forall n \boxed{b_n = b_1 q^{n-1}}$$

Доказательство(ММИ):

$$1)n = 1 - \text{верно}$$

$$n = 2 - \text{верно}$$

$$2)b_{k+1} = b_1 q^{k-1}$$

$$3)(!)b_{k+1} = b_1 q^k$$

$$b_{k+1} = b_k q = b_1 q^{k-1} q = b_1 q^k$$

Формула суммы первых n членов:

$$\left. \begin{aligned} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1} \\ (q^{n-1} b_1 + q^{n-2} b_1 + \dots b_1) q \end{aligned} \right\} \oplus b_1 - q^n b_1 = S_n - S_n q \Leftrightarrow$$

$$S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n) \Leftrightarrow \boxed{S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Доказательство(ММИ):

$$1)k = 1 \text{ верно}$$

$$k = 2 \text{ верно}$$

$$2)S_k = \frac{b_1(q^k - 1)}{q - 1}$$

$$3)(!)S_{k+1} = b_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

$$S_{k+1} = S_k + b_{k+1} = b_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} + b_1 q^k = \frac{b_1}{q - 1} (q^{k+1} - 1 + q^{k+1} - q^k) = b_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

4 Определение предела последовательности. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos a_n$ при усло- **вии** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

Опр. число A называется пределом последовательности a_n при $n \rightarrow \infty$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |a_n - A| < \varepsilon$

Теорема1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$ Обратное не верно!

Доказательство:

Лемма $\forall a, b ||a| - |b|| \leq |a - b|$

Докажем: $||a| - |b|| \leq |a - b| \Leftrightarrow (||a| - |b||)^2 \leq |a - b|^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2|ab| \leq a^2 + b^2 - 2ab \Leftrightarrow ab \leq |ab|$

Докажем теорему: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N |a_n - A| < \varepsilon$

По лемме $||x_n| - |A|| \leq |x_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$

Теорема2. $\forall n a_n \geq 0 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A (A \geq 0) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$

Доказательство1:

Дано: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} < \varepsilon$

1.1) $A \neq 0 : \frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} < \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}}$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$: для него $\varepsilon_0 = \varepsilon \sqrt{A}$

$\exists N_0 : \forall n \geq N_0 |a_n - A| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow |a_n - A| < \varepsilon \sqrt{A} \Leftrightarrow \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} < \varepsilon$

тогда $\frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} < \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} < \varepsilon$

1.2) $A = 0 : \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 : \forall n \geq N_0 |a_n| < \varepsilon_0$

(!) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \sqrt{a_n} < \varepsilon \Leftrightarrow a_n < \varepsilon^2$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$ для него $\varepsilon_0 = \varepsilon^2$ тогда $\exists N_0 : \forall n \geq N_0 |a_n| < \varepsilon^2 \Leftrightarrow \sqrt{|a_n|} < \varepsilon$

Доказательство2:

Лемма $\forall a, b \geq 0 : |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|} \Leftrightarrow |\sqrt{a} - \sqrt{b}|^2 \leq |a - b| \Leftrightarrow$

$a - 2\sqrt{ab} + b \leq |a - b|$

2.1) $a > b$

$a + b + 2\sqrt{ab} \leq b - a \Leftrightarrow 2b \leq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{b} \leq \sqrt{a}$

2.2) $a < b$

$a + b - 2\sqrt{ab} \leq b - a \Leftrightarrow 2a \leq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq$

\sqrt{b}

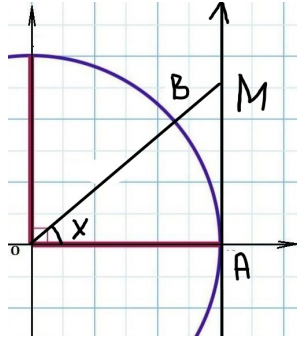
2.3) $a = b$

$0 = 0$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| < \varepsilon$

Возьмём $\varepsilon_0 = \varepsilon^2 \exists N_0 |a_n - A| < \varepsilon^2 \Leftrightarrow \sqrt{|a_n - A|} < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| < \varepsilon$

Лемма



$$\begin{aligned}
 & x \in [0; \frac{\pi}{2}) \\
 & \Delta OAB \subset \text{сектор } OAB \subset \Delta OAM \\
 & \Rightarrow S_{\Delta OAB} \leq S_{OAB} \leq S_{\Delta OAM} \\
 & \frac{1}{2} R^2 \sin x \leq \frac{1}{2} R^2 x \leq \frac{1}{2} R(R \operatorname{tg} x) \Leftrightarrow \\
 & \boxed{\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x}
 \end{aligned}$$

Замечание Если $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0]$ $\sin(-x) \leq -x \leq \operatorname{tg}(-x) \Leftrightarrow$

$$-\sin x \leq -x \leq -\operatorname{tg} x \Leftrightarrow |\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|$$

Теорема 2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n) = \sin A$

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \forall n \geq N |x_n - A| < \varepsilon$$

$$|\sin x_n - \sin A| = 2 \left| \sin\left(\frac{x_n - A}{2}\right) \cos\left(\frac{x_n + A}{2}\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{x_n - A}{2}\right) \right| \left| \cos\left(\frac{x_n + A}{2}\right) \right| \leq$$

$$2 \left| \sin\left(\frac{x_n - A}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \frac{x_n - A}{2} \right| = |x_n - A|$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N |\sin x_n - \sin A| \leq |x_n - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n) = \sin A$$

Теорема 3. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(x_n) = \cos A$

Доказательство

$$\text{Аналогично доказательству теоремы 2 } (\cos x_n - \cos A = -2 \sin\left(\frac{x_n - A}{2}\right) \sin\left(\frac{x_n + A}{2}\right))$$

5 Пределный переход в равенстве и неравенстве. Единственность предела. Теорема о сжатой переменной

Теорема (о единственности предела). Если последовательность сходится, то её предел единственный.

Доказательство

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \forall n \geq N_1 |x_n - A| < \varepsilon$$

$$A \neq B \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \forall n \geq N_2 |x_n - A| < \varepsilon$$

Пусть $A < B \Rightarrow \exists C : A < C < B$ (аксиомы \mathbb{R})

$$\left. \begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \\ C &> A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists N_1 : \forall n \geq N_1 x_n < C$$

$$\left. \begin{aligned} B &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \\ C &< B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists N_2 : \forall n \geq N_2 x_n > C$$

Пусть $N_0 = \max\{N_1; N_2\} \forall n \geq N_0 \Rightarrow n \geq N_0 \geq N_1 \ \& \ n \geq N_0 \geq N_2$

Тогда $x_n < C \ \& \ x_n > C$?!!

Теорема(предельный переход в равенстве). Если последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$ сходятся и $\forall n \ x_n = y_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

Доказательство

Следует из Теоремы о единственности предела

Теорема(предельный переход в неравенстве). Если последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$ сходятся и $\exists N : \forall n \geq N \ x_n < y_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

Доказательство:

От противного пусть $A > B \Rightarrow \exists C : A > C > B$, где $A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, B = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \ \& \ A < C \Rightarrow \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \ x_n > C$

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B \ \& \ B > C \Rightarrow \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \ y_n < C$

$N_0 = \max\{N_1; N_2; N\}$

$\forall n \geq N_0 \ x_n < y_n \ \& \ x_n > C \ \& \ y_n < C \Rightarrow C < x_n < y_n$

Теорема о сжатой переменной(теорема о двух мелиционерах) Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ такие, что $\exists N \ \forall n \geq N \ x_n < y_n < z_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, тогда

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$

Доказательство:

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \ \forall n \geq N_1 \ |x_n - A| < \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \ \forall n \geq N_2 \ |z_n - A| < \varepsilon$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$, для него $\exists N_1, N_2$

$\exists N_0 = \max\{N_1, N_2, N\} \ \forall n \geq N_0 \ A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < y_n < z_n <$

$A + \varepsilon \Rightarrow |y_n - A| < \varepsilon$

6 Необходимый признак сходимости последовательности

Теорема(необходимый признак сходимости последовательности \ достаточный признак ограниченности)
Сходящаяся последовательность ограничена. Обратное не верно!!!

Доказательство:

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

Возьмём $M > |A|$, т. е. $-M < -|A| \leq A \leq |A| < M$

$\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \ x_n < M$

$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \ x_n > -M$

$N = \max\{N_1; N_2\}$

$\forall n \geq N \ -M < x_n < M \Leftrightarrow \{x_n\}$ ограниченная с некоторого места $\Leftrightarrow \{x_n\}$ ограничена

7 Теорема Вейерштрассе о монотонности последовательности

Теорема Вейерштрассе. Монотонная ограниченная последовательность сходится. То есть если последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху или монотонно убывает и ограничена снизу, то она сходится

Доказательство

1) $\{x_n\} \uparrow$ & $\{x_n\}$ ограничена \Rightarrow (по аксиоме) $\exists \sup x_n, \inf x_n$

$A = \sup x_n \Leftrightarrow \forall n x_n \leq A$ & $\forall \varepsilon > 0 \exists N : x_N > A - \varepsilon$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0 \exists N : x_N > A - \varepsilon$

$\forall n \geq N x_n \geq x_N$ (т. к. $\{x_n\} \uparrow$)

$x_n \geq x_N > A - \varepsilon$

$\forall n : x_n \leq A < A + \varepsilon$

т. е. $\forall n \geq N A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

2) $\{x_n\} \downarrow$

$B = \inf x_n \Leftrightarrow \forall n x_n \geq B$ & $\forall \varepsilon > 0 \exists N x_N < B + \varepsilon$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N x_N < B + \varepsilon$

$\forall n \geq N \{x_n\} \downarrow x_n \leq x_N \Rightarrow x_N < B + \varepsilon$ & $\forall n x_n \leq B < B + \varepsilon$

Следствие Для монотонно возрастающей последовательности предел совпадает с верхней границей, для монотонно убывающей - с точной нижней границей

8 Сходимость последовательностей $x_n = \frac{a^n}{n!}, y_n = \frac{n^a}{a^n}, z_n = \frac{n!}{n^n}$

Теорема 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{a^n} = 0$

Доказательство:

$x_n = \frac{n^a}{a^n} \quad x_{n+1} = \frac{(n+1)^a}{a^{n+1}} = x_n \frac{1}{a} \left(\frac{n+1}{n} \right)^a$

$x_{n+1} - x_n = x_n \left(\frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^a - 1 \right) \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^a = 1 \text{ & } a > 0 \right)$

$\frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^a < 1 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n} \right)^a < a$

$\exists N : \forall n \geq N \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^a < 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow \{x_n\} \downarrow$ с некоторого места

$x_n > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

$x_{n+1} = x_n \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^a \text{ & } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = A \Rightarrow$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = A = \frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^a \Leftrightarrow A = A \frac{1}{a} \Leftrightarrow A = 0$

Теорема2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

Доказательство:

$$x_n = \frac{a^n}{n!} \quad x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{a}{n+1} = x_n \frac{a}{n+1}$$

$$-x_{n+1} + x_n = x_n \left(1 - \frac{a}{n+1}\right) = x_n \left(\frac{n+1-a}{n+1}\right)$$

$$\exists N : \forall n \geq N \quad n > a - 1 \quad x_n > x_{n+1}$$

$$x_{n+1} = x_n \frac{a}{n+1} \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} \quad \text{тогда} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$$

$$A \Leftrightarrow A * 0 = A \Leftrightarrow A = 0$$

Теорема3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Доказательство:

$$x_n = \frac{n!}{n^n} \quad x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!(n+1)n^n}{n^n(n+1)^{n+1}} = x_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$x_{n+1} - x_n = x_n \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n - 1\right)$$

$$(!) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - 1 < 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n < 1 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} < 1$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e} \quad \& \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \rightarrow 1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \exists N : \forall n \geq$$

$$N \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow$$

$$A = A \frac{1}{e} \Leftrightarrow A = 0$$

9 Сходимость геометрической прогрессии при $|q| < 1$. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Теорема $q = \text{const}, \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \quad |q^n| < \varepsilon$$

$$|q| < 1 (q = 1 \text{ очевидно верно}) \Leftrightarrow (q \neq 0) \frac{1}{|q|} > 1 \Leftrightarrow \exists a > 0 : \frac{1}{|q|} = a + 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1+a)^n \Leftrightarrow \frac{1}{|q|^n} = (1+a)^n \Leftrightarrow |q|^n = \frac{1}{(1+a)^n}$$

$$(1+a)^n \geq 1 + na > na \text{ (неравенство Бернулли)}$$

$$(1+a)^n > na \Leftrightarrow \frac{1}{(1+a)^n} < \frac{1}{na} \text{ т. е. } |q|^n < \frac{1}{na}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na} = 0 \quad 0 < |q|^n < \frac{1}{na} \text{ т. е. } \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0 \text{ (по теореме о сжатой переменной)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}, |q| < 1$

Доказательство:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{(1-q)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} \text{ (т. к. } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n - 1 = -1)$$

/* равенство возможно по теореме о действиях со сходящимися последовательностями ($\frac{b_1}{1-q}$ - коэффициент т. к. b_1, q - константы) */

/* Мы не можем оставить q^n в формуле т. к. не понятно, как возводить константу в бесконечно растущую степень */

10 Бесконечно малые последовательности, действия с ними

Опр. Последовательность, сходящаяся к 0 называется бесконечно малая.

Теорема1 x_n - бесконечно малая $\Leftrightarrow |x_n|$ - бесконечно малая.

Теорема2. $\{x_n\}, \{y_n\}$ - бесконечно малые $\Rightarrow \{x_n \pm y_n\}$ - бесконечно малая.

Обратное не верно.

Доказательство:

$$1) z_n = x_n + y_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 |x_n| < \varepsilon_1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon_2 > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 |y_n| < \varepsilon_2$$

$$z_n = x_n + y_n \text{ тогда } |z_n| = |x_n + y_n| \geq |x_n| + |y_n|$$

$$(!) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |z_n| < \varepsilon$$

$$\text{Возьмём } \varepsilon > 0 \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Найдём } N_2, N_1 : \forall n \geq N_1 |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ \& } \forall n \geq N_2 |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Пусть } N = \max\{N_1, N_2\}$$

$$\forall n \geq N |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ \& } |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ тогда } |z_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$2) z_n = x_n - y_n = x_n + (-y_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-y_n) = 0 \Rightarrow \{y_n\} - \text{бесконечно малая}$$

$$x_n + (-y_n) - \text{сумма бесконечно малых (смотри пункт 1)}$$

Теорема3. Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательности - бесконечно малая

Доказательство:

$$z_n = y_n * z_n \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 |x_n| < \varepsilon_1$$

$$\{y_n\} - \text{ограниченна} \Leftrightarrow \exists M > 0 : \forall n |y_n| \leq M$$

$$|z_n| = |x_n * y_n| = |x_n| |y_n|$$

$$(!) \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N |z_n| < \varepsilon$$

$$\text{Возьмём } \varepsilon > 0 \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} \forall n |y_n| \leq M$$

$$\exists N_1 \forall n \geq N_1 |x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ тогда } |z_n| = |x_n| |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} M \text{ т. е. } |z_n| < \varepsilon \text{ т. е.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

Следствие1. Произведение двух бесконечно малых - бесконечно малое.

Доказательство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \ \& \ A > 0 \Rightarrow \exists N_1 \ \forall n \geq N_1 \ y_n < A$$

$$B < 0 \Rightarrow \exists N_2 \ \forall n \geq N_2 \ y_n > B$$

Пусть $N = \max\{N_1; N_2\} \Rightarrow \forall n \geq N \ B < y_n < A \Rightarrow \{y_n\}$ - ограниченная тогда можно применить теорему 3.

Следствие2. Произведение конечного числа бесконечно малых - бесконечно малое.

Утв. Отношение бесконечно малых не обладает свойством сходимости.

11 Бесконечно большие последовательности, свойства

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ |x_n| > \varepsilon \Leftrightarrow x_n > \varepsilon \vee x_n < -\varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ |x_n| > \varepsilon \Leftrightarrow x_n > \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ |x_n| > \varepsilon \Leftrightarrow x_n < -\varepsilon$$

Теорема1 (связь бесконечно больших и бесконечно малых). x_n - бесконечно

большая $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ - бесконечно малая.

Доказательство:

$$\Rightarrow: \text{Возьмём } \forall \varepsilon_1 > 0 \text{ для него } \varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_1} \ \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \ |x_n| > \frac{1}{\varepsilon_1} \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon_1$$

\Leftarrow : аналогично

Теорема2. Если $\{x_n\}, \{y_n\}$ бесконечно большие одного знака, то их сумма - бесконечно большая.

Доказательство:

$$\text{Пусть } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \ \& \ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

$$(!) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty$$

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists N_1 \ \forall n \geq N_1 \ x_n > \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \ \exists N_2 \ \forall n \geq N_2 \ y_n > \varepsilon_2$$

$$\text{Возьмём } \forall \varepsilon > 0 \ \varepsilon_1 = \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \ x_n > \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \ y_n > \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N = \max\{N_1; N_2\}$$

$$\forall n \geq N$$

$$\left. \begin{array}{l} x_n > \frac{\varepsilon}{2} \\ y_n > \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \oplus \Rightarrow x_n + y_n > \varepsilon$$

для остальных случаев аналогично.

Теорема3. Если $\{x_n\}, \{y_n\}$ - бесконечно большие, то $\{x_n * y_n\}$ - бесконечно большая

Доказательство:

$$\text{Возьмём } \frac{1}{x_n * y_n} = \frac{1}{x_n} \frac{1}{y_n}$$

$\{x_n\}$ бесконечно большая $\Leftrightarrow \{\frac{1}{x_n}\}$ - бесконечно малая

$\{y_n\}$ бесконечно большая $\Leftrightarrow \{\frac{1}{y_n}\}$ - бесконечно малая

$\Rightarrow \{\frac{1}{x_n} \frac{1}{y_n}\}$ - бесконечно малая $\Leftrightarrow \{x_n * y_n\}$ - бесконечно большая

Теорема4. Если $\{x_n\}$ бесконечно большая, $\{y_n\}$ - сходящаяся $\Rightarrow \{x_n + y_n\}$ - бесконечно большая

Доказательство:

$\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Leftrightarrow \forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1 \forall n \geq N_1 \boxed{|x_n| > \varepsilon_1}$

$\{y_n\}$ - сходящаяся $\Rightarrow \{y_n\}$ - ограниченная $\Rightarrow \exists M > 0 \forall n |y_n| < M \Leftrightarrow$

$$\boxed{-|y_n| > -M}$$

$$\Rightarrow |x_n| - |y_n| > \varepsilon_1 - M$$

$$(!) \forall \varepsilon > 0 : \exists N \forall n \geq N |x_n + y_n| > \varepsilon$$

Возьмём $\varepsilon_1 = M + \varepsilon$

для него $\exists N : \forall n \geq N |x_n + y_n| \geq |x_n| - |y_n| > \varepsilon_1 - M \Leftrightarrow |x_n + y_n| > \varepsilon$

Теорема5. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, а $\{y_n\}$ - сходящаяся, то $\{\frac{y_n}{x_n}\}$ - бесконечно малая.

Доказательство:

$\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ - бесконечно малая

$\frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{x_n} y_n \Leftrightarrow$ бесконечно малая (бесконечно малая * ограниченная)

Теорема6. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, а $\{y_n\}$ - сходящаяся, но не бесконечно малая, то $\{x_n * y_n\}$ - бесконечно большая

Доказательство:

...

12 Арифметические действия с пределами

Лемма $\{x_n\}$ - сходится к $A \Leftrightarrow \{x_n - A\}$ - бесконечно малая т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - A) = 0$

Теорема1 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ & $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B$

Доказательство:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n = x_n - A - \text{бесконечно малая} \\ \beta_n = y_n - B - \text{бесконечно малая} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x_n = \alpha_n + A \\ y_n = \beta_n + B \end{array} \right\} \oplus \Rightarrow x_n \pm y_n = (\alpha_n \pm \beta_n) + A \pm B \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B \quad (\text{по лемме})$$

Теорема2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n * y_n = A * B$

Доказательство:

$$\left. \begin{array}{l} x_n = \alpha_n + A \\ y_n = \beta_n + B \end{array} \right\} x_n * y_n = (\alpha_n + A)(\beta_n + B) = AB + \alpha_n \beta_n + \alpha_n B + \beta_n A =$$

$$AB + \gamma_n (\text{конечная сумма бесконечно малых}) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n * y_n = A * B$$

Лемма1. Если $\{x_n\}$ сходится и не бесконечно малая, то $\exists r > 0 : \exists N : \forall n \geq N |x_n| > r$

Доказательство:

$$r = \frac{|A|}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$A - \frac{|A|}{2} < x_n < \frac{|A|}{2} + A$$

$$A > 0: \frac{A}{2} < x_n < \frac{3A}{2} \Rightarrow |x_n| > \frac{A}{2} = \frac{|A|}{2} = r$$

$$A < 0: \frac{3A}{2} < x_n < \frac{A}{2} \Rightarrow -x_n > -\frac{A}{2} \Leftrightarrow |x_n| > \frac{|A|}{2} = r$$

Лемма2 Если $\{x_n\}$ сходящаяся и не бесконечно малая, то $\frac{1}{x_n}$ - ограничена ($|x_n| < r \Rightarrow |\frac{1}{x_n}| < \frac{1}{r}$)

Теорема4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ & $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{x_n}{y_n}) = \frac{A}{B}$ ($\{x_n\}, \{y_n\}$ - не бесконечно малые)

Доказательство:

по Лемме1 $\exists r > 0 \exists N \forall n \geq N |y_n| > r$

$$x_n = \alpha_n + A \text{ \& } y_n = \beta_n + B$$

Рассмотрим $\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B} = \frac{x_n B - y_n A}{y_n B} = \frac{1}{B} \frac{1}{y_n} (x_n B - y_n A) = \gamma_n$ - бесконечно малая

$\frac{1}{B} - const$ & $\frac{1}{y_n}$ - ограничена по Лемме2

$$\text{Рассмотрим } z_n = -x_n B - y_n A = BA - AB = 0$$

$$\text{тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{x_n}{y_n}) = \frac{A}{B}$$

13 Предел отношения многочленов

$P(n)$ многочлен, $\deg P(n) = k$

$Q(n)$ многочлен, $\deg Q(n) = l$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P(n)}{Q(n)} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 n^k + \dots + a_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (b_0 n^l + \dots + b_l)}$$

$$\text{Если } k = l: \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P(n)}{Q(n)} \right) = \frac{a_0}{b_0}$$

$$\text{Если } k < l: \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P(n)}{Q(n)} \right) = 0$$

Если $k > l$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P(n)}{Q(n)} \right) = \infty$

Доказательство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p(n)}{Q(n)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 n^{l-k} + \dots + \frac{b_l}{n^k}} \right)$$

Если $k = l$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P(n)}{Q(n)} \right) = \frac{a_0}{b_0}$

Если $k < l$, $l - k > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P(n)}{Q(n)} \right) = 0$ (сходящаяся/бесконечно большая \rightarrow бесконечно малая)

Если $k > l$, $l - k < 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P(n)}{Q(n)} \right) = \infty$ (сходящаяся/бесконечно малая \rightarrow бесконечно большая)

14 Сходимость последовательностей $(1 + \frac{1}{n})^n$, $(1 - \frac{1}{n})^n$, $c^{\frac{1}{n}}$, $n^{\frac{1}{n}}$

Теорема1. $\forall c > 0 \ c = const \ \lim_{n \rightarrow \infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$

Доказательство:

1) $c = 1$ выполняется

2) $c > 1 \Leftrightarrow c^{\frac{1}{n}} > 1$

Пусть $\alpha_n = c^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$ тогда $c^{\frac{1}{n}} = \alpha_n + 1 \Leftrightarrow$

$c = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + \alpha_n n > n \alpha_n$ (первое неравенство - неравенство Бернулли)

т. о. $0 < \alpha_n < \frac{c}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ (теорема о сжатой переменной) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$

3) $c < 1 \ \lim_{n \rightarrow \infty} c^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\frac{1}{c})^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{c})^{\frac{1}{n}}} = 1$

Теорема2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

Лемма $\forall x > 0 : (1 + x)^n > \frac{(n-1)n}{2} x^2$

Доказательство Леммы

ММИ/расписать через бином Ньютона

Доказательство теоремы:

$n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} > 1$

Пусть $\alpha_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 > 0 \Leftrightarrow n^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n \Leftrightarrow n = (1 + \alpha_n)^n > \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2$ (Лемма2)

$n - 1 \geq \frac{n}{2} \Rightarrow n > \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2 > \frac{n^2}{4} \alpha_n^2$ Итого: $0 < \alpha_n < \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

Теорема3. $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ сходится

Доказательство:

Рассмотрим $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ Докажем, что $\{y_n\} \downarrow$

Рассмотрим $\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = \frac{n^2}{n^2-1} \cdot \frac{n-1}{n} = (1 + \frac{1}{n^2-1})^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq$
 $(1 + \frac{1}{n-1})^{\frac{n-1}{n}} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 1$ (первое неравенство - Неравенство Бернулли)

т. е. $\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1$

т. е. $\{y_n\}$ убывает и ограничена снизу тогда по теореме Вейерштрассе

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n} = e - \text{число Эйлера}$$

/* $e = 2,718281828...$ также можно вычислить как сумму ряда $\frac{1}{n!}$ */

Теорема 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$

Доказательство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{1}{n^2})^n}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n^2})^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$$

$a_n = (1 - \frac{1}{n^2}) \geq 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$ (первое неравенство - Бернулли)

т. е. $1 - \frac{1}{n} \leq a_n \leq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

$$\underline{\text{УТВ.}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{y_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

15 Подпоследовательность. Связь сходимости подпоследовательности со сходимостью последовательности

Опр. Подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ для $\{x_n\}$ называется бесконечная последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ (номера идут по возрастанию)

Теорема 1 Любая подпоследовательность сохраняет монотонность и её характер от исходной последовательности

Доказательство:

...

16 Лемма о вложенных промежутках (2 варианта)

Лемма о вложенных промежутках. Пусть даны $\{x_n\}$ возрастающая и $\{y_n\}$ убывающая и $\forall n \ x_n < y_n$ причём $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| \rightarrow 0$ тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

Доказательство:

$$\forall x_1 \leq x_n < y_n \leq y_1$$

$\{x_n\} \uparrow$ и ограничена сверху \Rightarrow (по теореме Вейерштрассе) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$\{y_n\} \downarrow$ и ограничена снизу \Rightarrow (по теореме Вейерштрассе) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

Теорема Кантора о стягивающихся отрезках Пусть имеется бесконечная последовательность вложенных промежутков $([x_1; y_1] \supset [x_2; y_2] \supset \dots \supset [x_n; y_n] \supset \dots)$ причём $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$ тогда $\exists! C : \forall n C \in [x_n; y_n]$

Доказательство:

1) существование

$$\{x_n\} \uparrow \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n\} = C$$

$$\{y_n\} \downarrow \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf\{y_n\} = C$$

т. е. $\forall n x_n \leq C \leq y_n$

2) Единственность

Пусть $\exists C_1 \neq C$ & $C_1 \in [x_n; y_n]$

$$\forall n : C \in [x_n; y_n] \Leftrightarrow x_n \leq C \leq y_n (1)$$

$$\forall n : C_1 \in [x_n; y_n] \Leftrightarrow -y_n \leq -C_1 \leq -x_n (2)$$

Сложим (1) и (2): $x_n - y_n \leq C - C_1 \leq y_n - x_n$ тогда по теореме о сжатой переменной $\lim_{n \rightarrow \infty} (C - C_1) = 0$ и $C - C_1 = \text{const} \Rightarrow C - C_1 = 0 \Leftrightarrow C = C_1$

17 Теорема Больцано-Вейерштрассе

Теорема Больцано-Вейерштрассе Из Любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Доказательство: (Методом Больцано - методом половинного деления)

$\{x_n\}$ ограниченная $\Rightarrow \exists a, b \forall n a \leq x_n \leq$

$$[a_1; b_1] \supset [a; b] \quad x_{n_1} \in [a_1; b_1]$$

$$[a_2; b_2] \supset [a; b] \quad x_{n_2} \in [a_2; b_2]$$

...

$$[a_n; b_n] \supset [a; b] \quad x_{n_k} \in [a_n; b_n]$$

...

$$|a_n - b_n| = \frac{|a-b|}{2^n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow (\text{по лемме о вложенных промежутках}) \exists! C =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\text{т. е. } \forall k a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = C$$

18 Замечательный предел $\frac{\sin x_n}{x_n}$

Теорема(первый замечательный предел) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} =$

1

Доказательство:

1) $x_n > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \exists N : \forall n \geq N \ 0 < x_n < \frac{\pi}{2}$
 $\sin x_n \leq x_n \leq \operatorname{tg} x_n \mid \div \sin x_n > 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x_n}{\sin x_n} \leq \frac{x_n}{\cos x_n} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \right.$
 $\left. \lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n = 1 \right)$ тогда по теореме о сжатой переменной $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$
 2) $x_n < 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \exists N : \forall n \geq N \ -\frac{\pi}{2} < x_n < 0$
 $\sin(-x_n) \leq -x_n \leq \operatorname{tg}(-x_n) \Leftrightarrow -\sin x_n \leq -x_n \leq -\operatorname{tg} x_n \mid \div -\sin x_n > 0$
 $\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x_n}{\sin x_n} \leq \frac{1}{\cos x_n}$ тогда по теореме о сжатой переменной

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

3)знакопеременная последовательность

"докажем позже"...