

AlgNumZadane2

Paweł Luto, Mikołaj Kalejta

April 2025

Contents

1	Zadanie Z1 – Implementacja metody eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego	2
2	Zadanie Z2 — Implementacja rozwiązania układu równań dla funkcji potencjału $\phi(z)$	3
2.1	Zadanie 4 - Proszę porównać swoją implementację rozwiązywania układu równań z gotową implementacją biblioteczną	4
3	Zadanie Z5 — Proszę przygotować animację pokazującą w jaki sposób porusza się płyn według obliczonej funkcji potencjału	4

1 Zadanie Z1 – Implementacja metody eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego

W ramach zadania Z1 zaimplementowano algorytm eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego, dostosowany do rozwiązywania rzadkich układów równań liniowych postaci:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

gdzie $A \in R^{n \times n}$ jest macierzą rzadką, a $\mathbf{b} \in R^n$ jest wektorem wyrazów wolnych.

Macierz A została zaimplementowana w formacie LIL (List of Lists) z biblioteki `scipy.sparse`, co umożliwia efektywną modyfikację elementów macierzy w trakcie kolejnych kroków eliminacji.

Częściowy wybór elementu podstawowego został zrealizowany poprzez zamianę bieżącego wiersza z wierszem o największej (co do modułu) wartości w kolumnie poniżej głównej przekątnej. Taka strategia zwiększa stabilność numeryczną algorytmu oraz ogranicza ryzyko dzielenia przez małe liczby.

Po wykonaniu fazy eliminacji w przód, układ został rozwiązany metodą podstawiania wstecz:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j \right),$$

dla $i = n, n-1, \dots, 1$.

W celu weryfikacji poprawności zaimplementowanej metody eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego rozwiązano przykładowy układ równań liniowych postaci $Ax = b$:

$$\begin{aligned} 2.0x_1 - 1.0x_2 + 1.0x_3 + 3.0x_4 &= 5.0 \\ 1.0x_1 + 3.0x_2 + 2.0x_3 - 2.0x_4 &= 3.0 \\ 3.0x_1 + 1.0x_2 - 3.0x_3 + 1.0x_4 &= -1.0 \\ 2.0x_1 - 2.0x_2 + 4.0x_3 - 1.0x_4 &= 4.0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego układu metodą zaimplementowanej metody eliminacji Gaussa:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.4566 \\ x_2 &= 0.6712 \\ x_3 &= 1.3881 \\ x_4 &= 1.1233 \end{aligned}$$

Dla porównania, układ został również rozwiązany przy użyciu wbudowanej funkcji `spsolve` z biblioteki `SciPy`, która jest powszechnie stosowanym narzędziem do rozwiązywania rzadkich układów równań liniowych. Wyniki uzyskane metodą wbudowaną są identyczne:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.4566 \\ x_2 &= 0.6712 \\ x_3 &= 1.3881 \\ x_4 &= 1.1233 \end{aligned}$$

Wartości liczbowe, potwierdzają poprawność implementacji autorskiej metody eliminacji Gaussa.

2 Zadanie Z2 — Implementacja rozwiązania układu równań dla funkcji potencjału $\phi(z)$

W zadaniu Z2 celem było stworzenie i rozwiązanie układu równań liniowych dla funkcji potencjału $\phi(z)$, który modeluje zachowanie fali wodnej w kontekście propagacji fali w zbiorniku wodnym. Układ ten oparty jest na równaniach falowych, które są dyskretyzowane w przestrzeni z , a wynikiem jest funkcja potencjału $\phi(z)$, zależna od takich parametrów jak długość fali L , wysokość fali H , głębokość zbiornika h oraz okres fali T .

Rozwiązany układ wynika z jednowymiarowego równania Laplace’a:

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0,$$

które opisuje pionowy rozkład potencjału prędkości w wodzie. Równanie to zostało zdyskretyzowane za pomocą schematu różnic skończonych drugiego rzędu:

$$\frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta z^2} = 0,$$

co pozwoliło na zapisanie problemu w postaci układu równań liniowych.

W ramach implementacji zastosowano metodę eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego do rozwiązania układu równań. Funkcja `build_and_solve_wave_system` tworzy macierz współczynników A oraz wektor b , które są następnie wykorzystywane do rozwiązania układu za pomocą wcześniej zaimplementowanej metody eliminacji Gaussa.

Podstawowe kroki w rozwiązaniu obejmowały:

- Wyznaczenie macierzy współczynników A dla układu równań wynikających z dyskretyzacji równań falowych w przestrzeni z .
- Implementacja warunków brzegowych: przy dnie $\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$ oraz na powierzchni $\phi(z=0) = \frac{gH}{2\omega} \cdot \frac{\cosh(kh)}{\cosh(kh)}$, gdzie k to liczba falowa, a ω to częstotliwość kołowa.
- Rozwiązanie układu równań za pomocą metody eliminacji Gaussa.

Przykładowe parametry do obliczeń to:

$$N = 50, \quad L = 10, \quad H = 1, \quad h = 5, \quad T = 8$$

Rozwiązanie układu równań prowadzi do uzyskania wartości funkcji $\phi(z)$ w różnych punktach głębokości z . Wartości te mogą być interpretowane jako rozkład potencjału fali w wodzie dla zadanych parametrów.

Wyniki obliczeń, uzyskane za pomocą implementacji własnej, zostały porównane z rozwiązaniem uzyskanym metodą wbudowaną, co potwierdza poprawność zaimplementowanej funkcji.

Dla przykładu, wartości funkcji $\phi(z)$ uzyskane dla różnych głębokości z przy podanych parametrach przedstawiają się następująco:

$$\begin{array}{ll} z = -5.00, & \phi = 0.0000 \\ z = -4.90, & \phi = 0.1275 \\ z = -4.80, & \phi = 0.2549 \\ z = -4.69, & \phi = 0.3824 \\ z = -4.59, & \phi = 0.5098 \\ & \vdots \\ z = -0.41, & \phi = 5.7354 \\ z = -0.31, & \phi = 5.8629 \\ z = -0.20, & \phi = 5.9903 \\ z = -0.10, & \phi = 6.1178 \\ z = -0.00, & \phi = 6.2452 \end{array}$$

2.1 Zadanie 4 - Proszę porównać swoją implementację rozwiązywania układu równań z gotową implementacją biblioteczną

Porównanie tych wartości z rozwiązaniem uzyskanym przy użyciu funkcji `spsolve` z biblioteki SciPy pokazało minimalne różnice, co potwierdza, że implementacja autorska jest poprawna.

Dodatkowo, w ramach analizy rozwiązania, przeprowadzono wizualizację błędu między metodami oraz sprawdzono dokładność obliczeń w zależności od liczby punktów siatki N , co pozwoliło na lepsze zrozumienie wpływu rozdzielczości przestrzennej na wyniki.

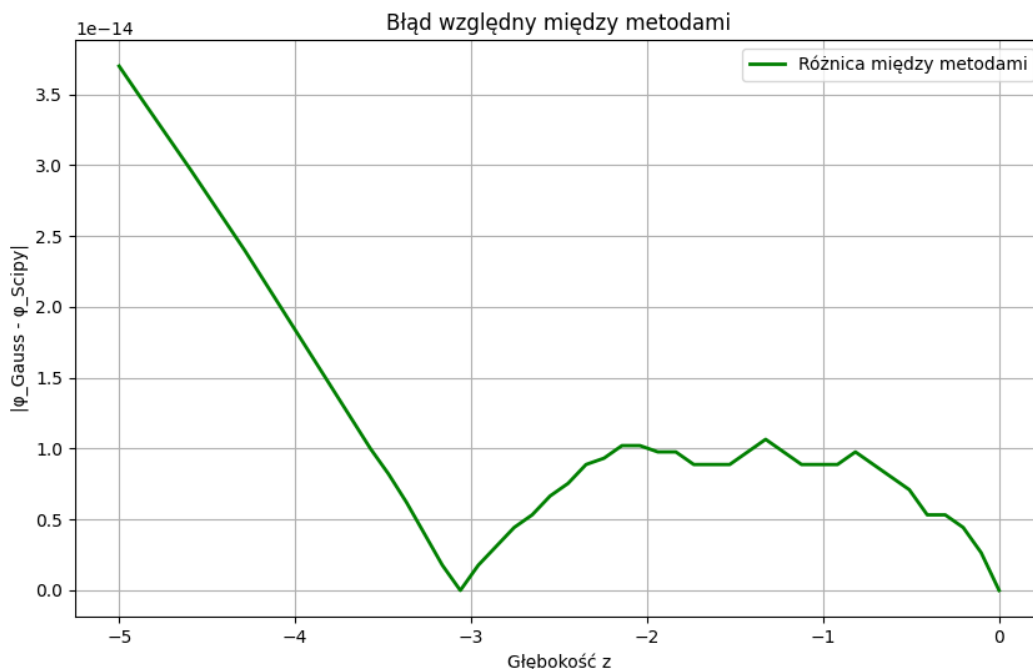


Figure 1: Wykres różnic metod

3 Zadanie Z5 — Proszę przygotować animację pokazującą w jaki sposób porusza się płyn według obliczonej funkcji potencjału

Animacja przedstawia realistyczny ruch cząstek w wodzie pod wpływem rozchodzącej się fali. Ruch pionowy cząstek wyznaczany jest na podstawie gradientu potencjału prędkości $\phi(z)$ obliczoną za pomocą funkcji `build_and_solve_wave_system()`. Przesunięcia mają postać sinusoidalną, zgodną z teorią fal liniowych – zależą od liczby falowej k , częstości kołowej ω oraz czasu t . Przesunięcia w poziomie i pionie odwzorowują eliptyczne trajektorie cząstek w wodzie pod działaniem propagującej się fali.

Animację zrealizowano w bibliotece `matplotlib.animation`. Zastosowano następujące kroki:

1. **Obliczenia:** Przygotowano siatkę cząsteczek i interpolowano pochodną potencjału $\frac{d\phi}{dz}$ dla uzyskania gładkiego ruchu.
2. **Animacja:** Użyto funkcji `FuncAnimation`, która animuje ruch cząsteczek wzdłuż osi poziomej x oraz głębokości z , symulując ruch cząsteczek w propagującej się fali wodnej.

Animacja została zapisana jako plik GIF i przedstawia realistyczny ruch cząsteczek w wodzie z falą propagującą się w kierunku poziomym.

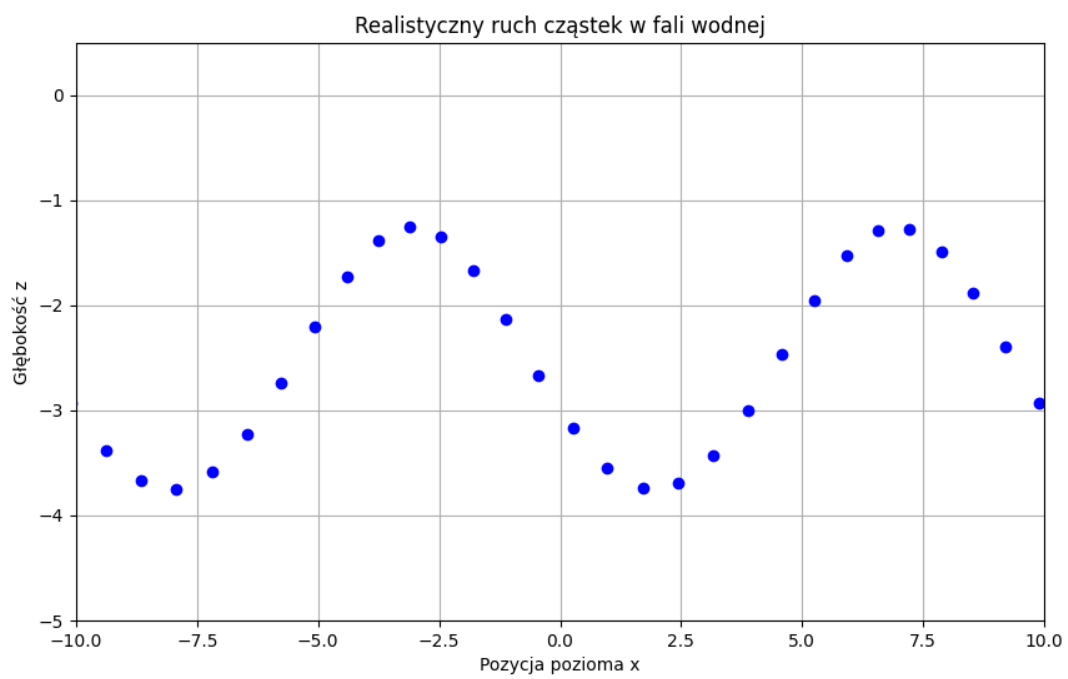


Figure 2: Zdjęcie poglądowe animacji