

AlgNumZadanie3

Paweł Luto, Mikołaj Kalejta

May 2025

Contents

1	Wstęp	2
2	Zadania Z1–Z3: Rozwiązanie zbudowanych układów równań i interpolacja przekrojów używając metody Gaussa	2
2.1	Cel i założenia	2
2.2	Z1: Budowa układu równań liniowych	2
2.3	Z2: Rozwiązanie układu metodą eliminacji Gaussa	3
2.4	Z3: Interpolacja przekrojów funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia	5
3	Zadania Z4–Z5: Rozwiązanie zbudowanych układów równań i interpolacja przekrojów używając metody iteracyjnej	6
3.1	Z4: Rozwiązanie układu metodą iteracyjną Gaussa-Seidela	6
3.2	Z5: Interpolacja przekrojów funkcji uzyskanej metodą iteracyjną	6
4	Porównanie obu metod	7

1 Wstęp

Celem ćwiczenia było numeryczne rozwiązanie równania Laplace'a

$$\Delta z = 0$$

na kole jednostkowym za pomocą metody różnic skończonych. Rozwiązanie zostało podzielone na kilka etapów (Z1–Z5), zgodnie z treścią zadań. W ramach pracy przeanalizowano również dokładność oraz zastosowano interpolację splajnami trzeciego stopnia w przekrojach rozwiązania.

2 Zadania Z1–Z3: Rozwiązanie zbudowanych układów równań i interpolacja przekrojów używając metody Gaussa

2.1 Cel i założenia

Celem części Z1–Z3 było rozwiązanie zagadnienia brzegowego Laplace'a:

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

w obszarze koła jednostkowego $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$ z określonymi warunkami brzegowymi $z(x, y) = g(x, y)$ dla $x^2 + y^2 = 1$. W ramach zadania wykonano trzy etapy:

- Z1: Zbudowano układ równań liniowych dyskretyzujący problem dla siatki o kroku $h = 2/N$,
- Z2: Rozwiązano ten układ metodą eliminacji Gaussa,
- Z3: Przybliżono wartości przekrojów funkcji $z(x, y)$ wzdłuż osi OX i OY za pomocą funkcji sklepanych trzeciego stopnia.

2.2 Z1: Budowa układu równań liniowych

Siatkę obliczeniową utworzono, wybierając punkty wewnątrz koła jednostkowego w oparciu o krok $h = 2/N$, gdzie N to liczba podziałów przedziału $[-1, 1]$. Uwzględniono tylko te punkty, dla których $x^2 + y^2 \leq 1$.

Dla każdego wewnętrznego punktu siatki zastosowano pięciopunktowy schemat różnic skończonych:

$$\frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{h^2} + \frac{z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

co daje:

$$-4z_{i,j} + z_{i+1,j} + z_{i-1,j} + z_{i,j+1} + z_{i,j-1} = 0$$

W przypadku, gdy sąsiad danego punktu znajdował się poza dziedziną (ale na brzegu), jego wartość zastępowano warunkiem brzegowym. Ostatecznie skonstruowano układ równań w postaci:

$$A \cdot \vec{z} = \vec{b}$$

gdzie:

- A – macierz współczynników (rzadka, symetryczna, dodatnio określona),
- \vec{z} – wektor wartości funkcji w punktach siatki,
- \vec{b} – wektor wynikający z warunków brzegowych.

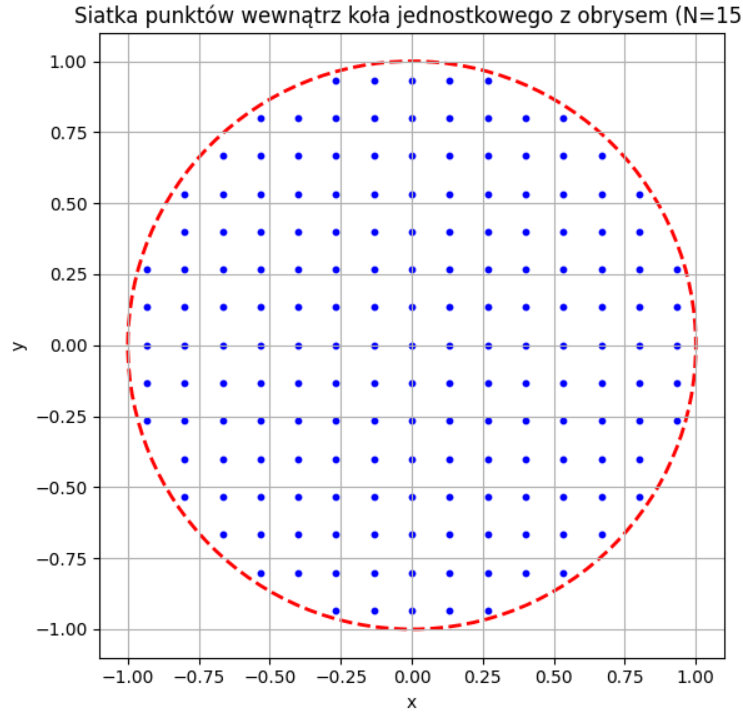


Figure 1: Siatka punktów wewnątrz koła jednostkowego (przykład dla $N=15$)

2.3 Z2: Rozwiązanie układu metodą eliminacji Gaussa

Po utworzeniu układu równań rozwiązano go metodą eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego. W wyniku otrzymano przybliżone wartości funkcji $z(x, y)$ w punktach siatki. Następnie dane te przekształcono z postaci wektorowej do dwuwymiarowej siatki $z[i, j]$ odzwierciedlającej rozkład funkcji w dziedzinie.

Poniżej przedstawiono wykresy przekrojów funkcji wzdłuż osi OX i OY (czyli $z(x, 0)$ i $z(0, y)$):

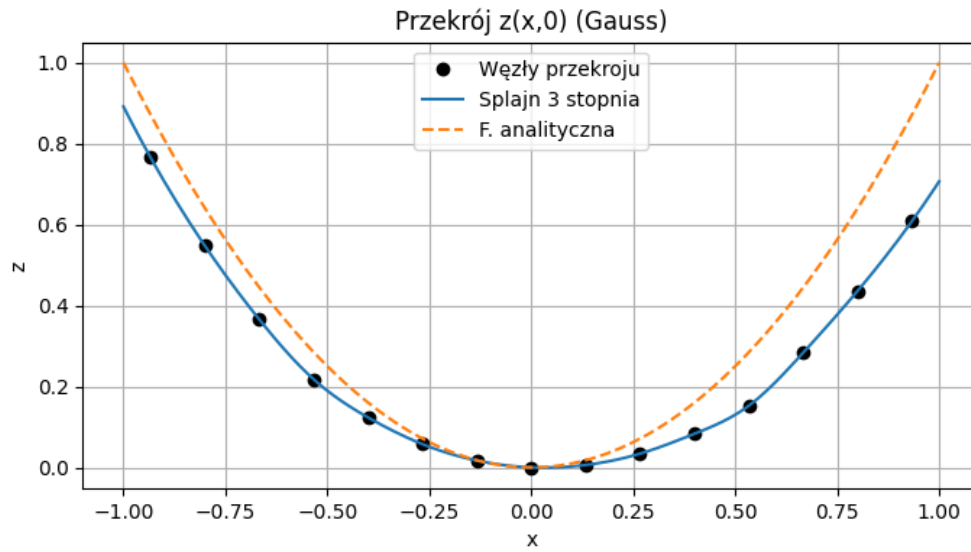


Figure 2: Przekrój $z(x, 0)$ uzyskany metodą Gaussa

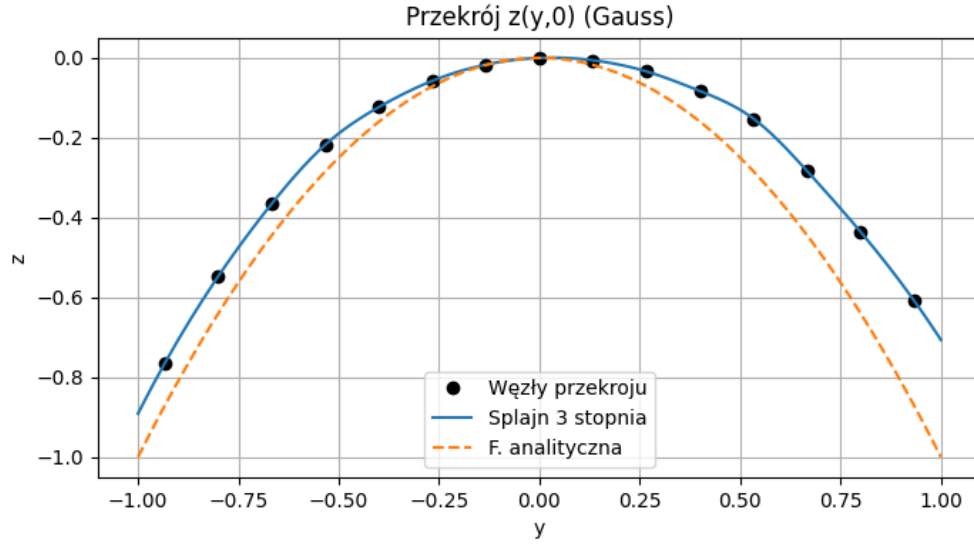


Figure 3: Przekrój $z(0, y)$ uzyskany metodą Gaussa

Oba wykresy pokazują wysoką zgodność z rozwiązaniem analitycznym w środkowej części dziedziny. Odchylenia przy brzegach wynikają z efektów numerycznych oraz interpolacji.

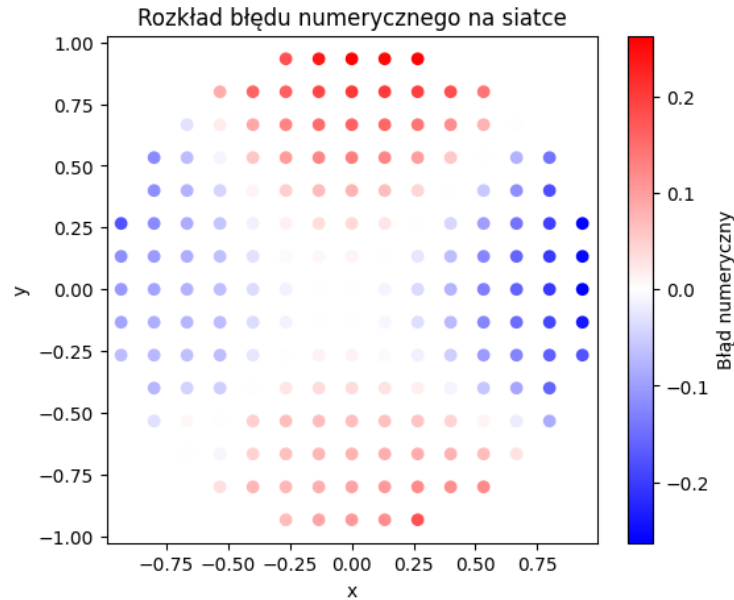


Figure 4: Rozkład błędu numerycznego między rozwiązaniem analitycznym a numerycznym.

Wykres przedstawia rozkład błędu numerycznego na siatce obliczeniowej. Największe odchylenia występują przy brzegach dziedziny, szczególnie w górnej i bocznej części siatki. Błąd ma charakter naprzemienny – dodatni i ujemny – co może wskazywać na efekty związane z interpolacją lub przybliżeniem brzegowym. W centrum dziedziny błąd jest bliski zeru, co świadczy o dobrej dokładności numerycznej w tym obszarze.

2.4 Z3: Interpolacja przekrojów funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia

Aby uzyskać gładki przebieg funkcji pomiędzy punktami siatki, przeprowadzono interpolację splajnem ku-bicznym wzdłuż przekrojów:

$$z(x, 0): I_X \rightarrow R, \quad z(0, y): I_Y \rightarrow R$$

Dla danych w punktach siatki x_i (dla $y = 0$) oraz y_j (dla $x = 0$) skonstruowano funkcje sklepane w postaci:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Interpolację przeprowadzono za pomocą gotowej biblioteki ('`scipy.interpolate.CubicSpline`'), zapewniającej ciągłość pochodnych do drugiego rzędu. Poniżej przedstawiono wyniki interpolacji:

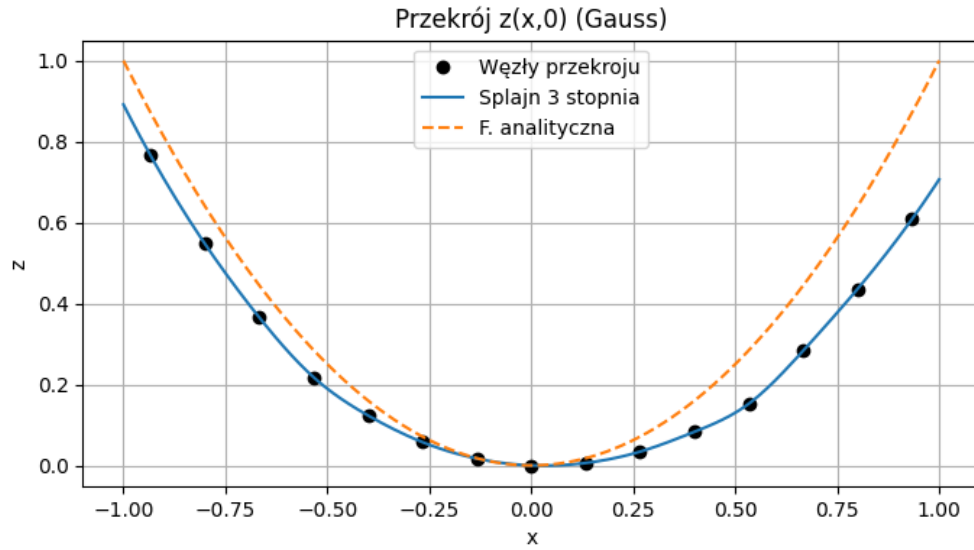


Figure 5: Interpolacja przekroju $z(x, 0)$ splajnem trzeciego stopnia

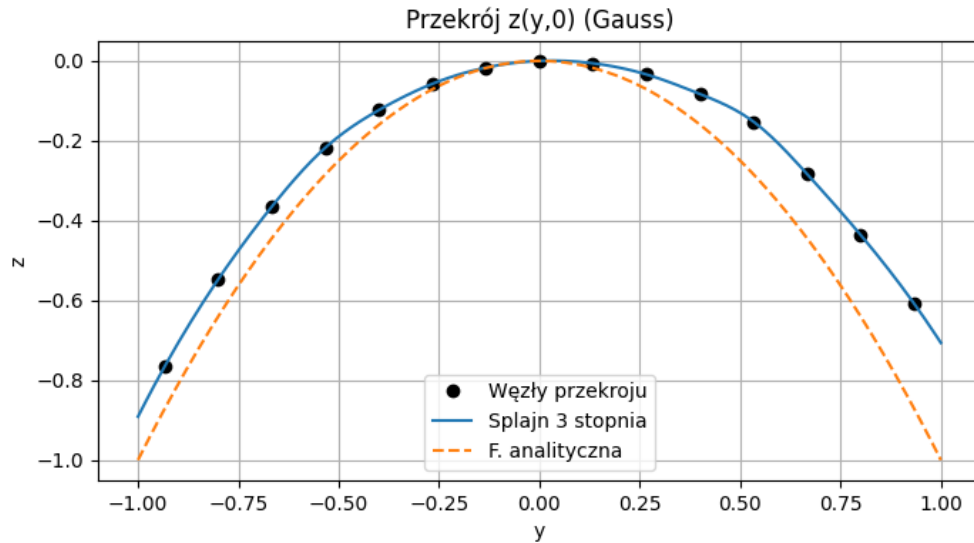


Figure 6: Interpolacja przekroju $z(0, y)$ splajnem trzeciego stopnia

3 Zadania Z4-Z5: Rozwiązanie zbudowanych układów równań i interpolacja przekrojów używając metody iteracyjnej

3.1 Z4: Rozwiązanie układu metodą iteracyjną Gaussa-Seidela

W tej części rozwiązano ten sam układ równań $A \cdot \vec{z} = \vec{b}$, jednak zamiast metody eliminacji Gaussa zastosowano iteracyjną metodę Gaussa-Seidela. Metoda ta polega na kolejnych iteracjach, w których każda nowa wartość $z_{i,j}^{(k+1)}$ obliczana jest na podstawie najnowszych dostępnych przybliżeń pozostałych wartości $z_{i,j}$.

Iterację prowadzono do momentu spełnienia kryterium zbieżności:

$$\|z^{(k+1)} - z^{(k)}\|_{\infty} < \varepsilon$$

gdzie $\varepsilon = 10^{-6}$. Początkowe przybliżenie ustalono jako wektor zerowy.

Wyniki zostały przekształcone do formy siatki dwuwymiarowej $z[i, j]$. Porównanie rozwiązania numerycznego z analitycznym przedstawiono na poniższym wykresie:

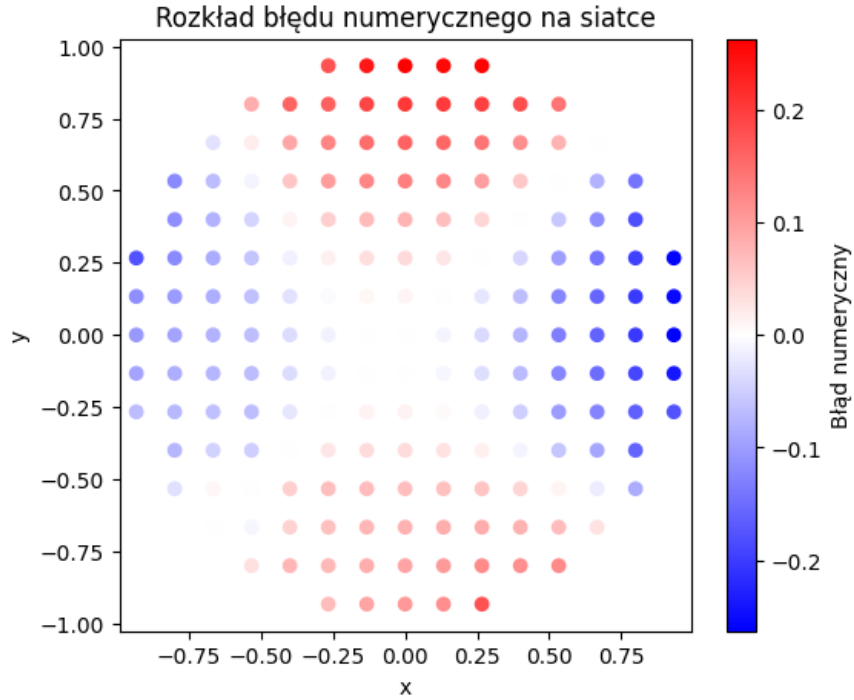


Figure 7: Rozkład błęd numerycznych metody Gaussa-Seidela względem rozwiązania analitycznego.

Wykres przedstawia rozkład błęd numerycznych na siatce dla metody Gaussa-Seidela. Podobnie jak w przypadku metody Gaussa, największe odchylenia od wartości analitycznych występują na brzegach dziedziny. Błąd ma symetryczny rozkład względem osi x i y , przy czym w centralnej części siatki jego wartość pozostaje bliska zero. Metoda Gaussa-Seidela również zapewnia wysoką dokładność w środku dziedziny, lecz wykazuje nieco inne rozmieszczenie stref maksymalnych błędów w porównaniu z klasyczną metodą.

3.2 Z5: Interpolacja przekrojów funkcji uzyskanej metodą iteracyjną

Podobnie jak w części Z3, przeprowadzono interpolację splajnem trzeciego stopnia dla przekrojów $z(x, 0)$ oraz $z(0, y)$, tym razem na podstawie danych otrzymanych metodą Gaussa-Seidela.

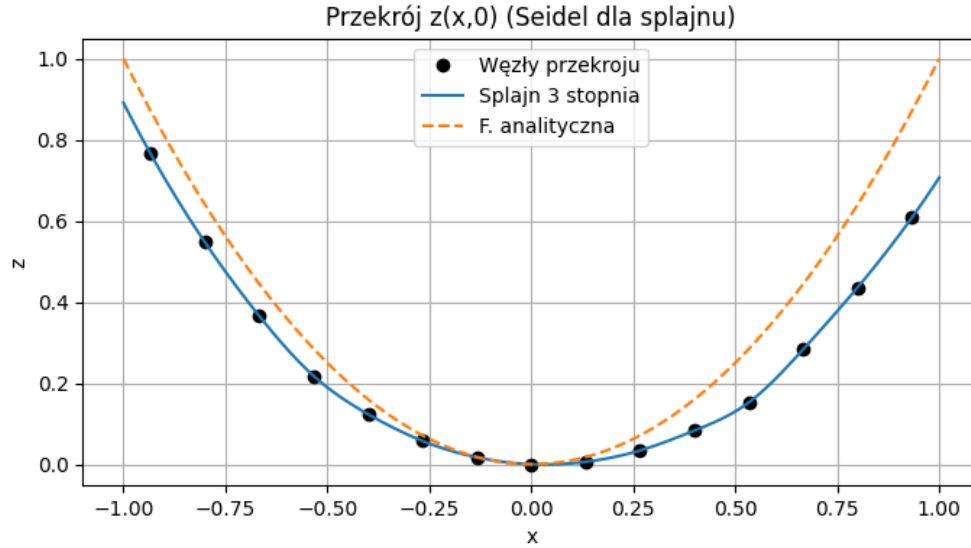


Figure 8: Interpolacja przekroju $z(x,0)$ (metoda Gaussa-Seidela)

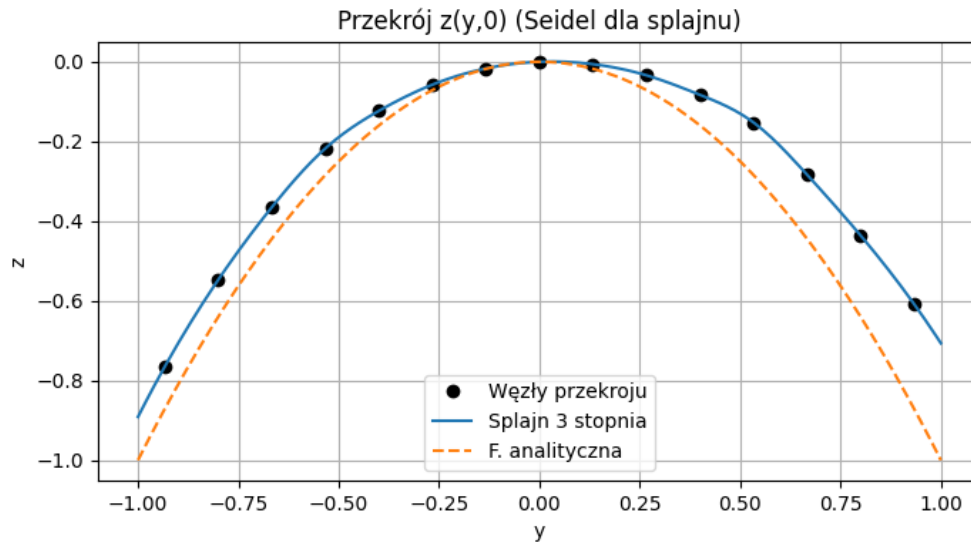


Figure 9: Interpolacja przekroju $z(0,y)$ (metoda Gaussa-Seidela)

4 Porównanie obu metod

Aby porównać metody eliminacji Gaussa i iteracyjną metodę Gaussa-Seidela dla równania Laplace'a w kole jednostkowym, przeprowadzono następujące testy:

- Pomiar czasu działania w zależności od liczby węzłów siatki N .
- Obliczenie błędu maksymalnego względem funkcji analitycznej.
- Porównanie różnic w rozwiązaniach obu metod na tej samej siatce.

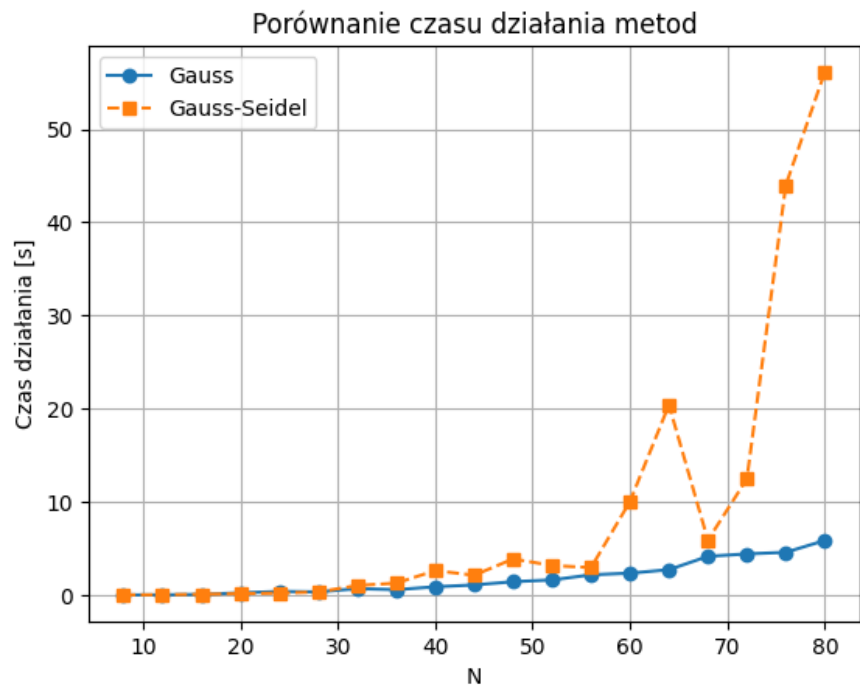


Figure 10: Porównanie czasu działania metod Gaussa i Gaussa-Seidela

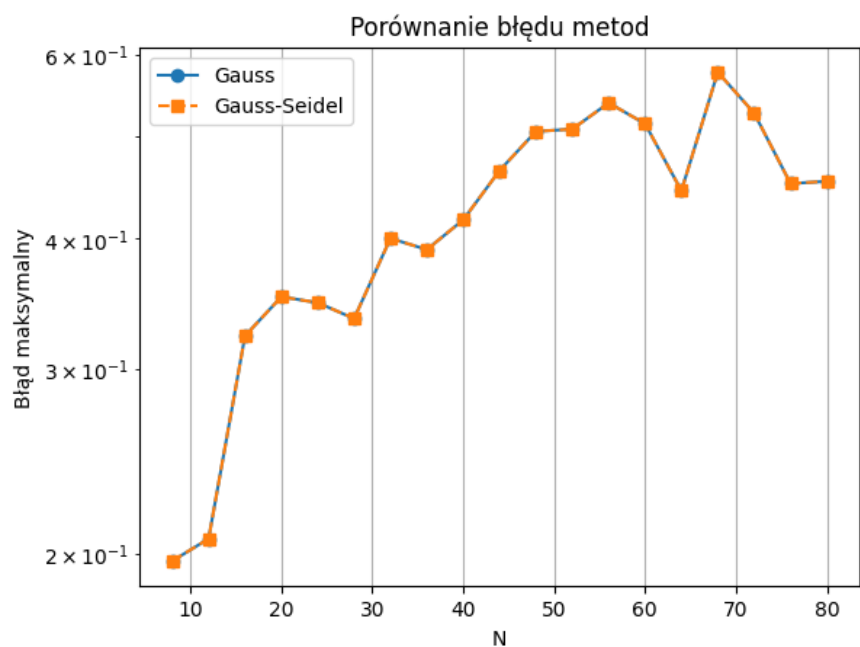


Figure 11: Porównanie błędu maksymalnego obu metod

Na podstawie przeprowadzonych testów można sformułować następujące wnioski:

- Obie metody dają bardzo zbliżone rozwiązania
- Błąd numeryczny względem rozwiązania analitycznego jest niemal identyczny dla obu metod i maleje wraz ze wzrostem liczby węzłów siatki N .

- Główna różnica dotyczy czasu działania: metoda eliminacji Gaussa-Seidela charakteryzuje się znacznie większą złożonością obliczeniową i dla dużych N staje się bardzo kosztowna obliczeniowo.
- Metoda Gaussa-Seidela, mimo że iteracyjna, konverguje stosunkowo szybko i okazuje się znacznie bardziej efektywna czasowo dla większych siatek.

W związku z powyższym, w zastosowaniach wymagających dużych siatek (wysoka rozdzielczość), metoda Gaussa-Seidela wydaje się bardziej praktyczna z uwagi na mniejsze zapotrzebowanie na zasoby obliczeniowe, przy zachowaniu porównywalnej dokładności.