Algorytmy Numeryczne – Zadanie 3
Interpolacja

Łukasz Kuszner

7 kwietnia 2025

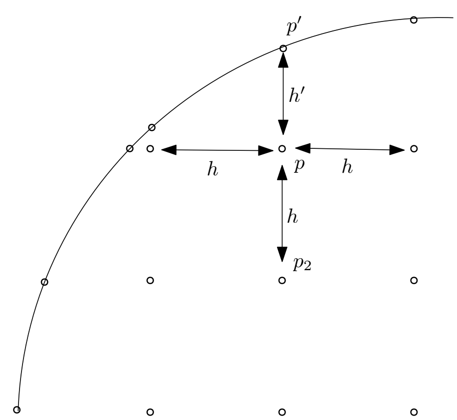
Dane jest zagadnienie brzegowe, w którym szukana jest funkcja rzeczywista z określona na kole jednostkowym $\mathcal{D}^2$ o środku w punkcie $(0,0)$, $z(x,y) : \mathcal{D}^2 \subset \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ spełniająca warunek Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Brzegiem jest zatem okrąg jednostkowy, a warunek brzegowy jest określony dla punktów (x,y), dla których $x^2 + y^2 = 1$.

Ustalmy krok siatki $h = 2/N$, co pozwala równo podzielić odcinki leżące na osiach układu i otrzymać siatkę jednostajną wewnątrz okręgu. Punkty brzegowe dopasowujemy do tego podziału jak na rysunku poniżej. Ponieważ blisko brzegu obszaru siatka nie jest jednostajna, to dopasowujemy do tej sytuacji przybliżenia drugiej pochodnej cząstkowej. Przykładowo dla punktu p, którego sąsiadem na brzegu jest p' a sąsiadem na dole jest punkt p_2 bierzemy[1]:

$$\frac{\partial^2 \bar{z}(p)}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h}\left(\frac{\partial \bar{z}(p)}{\partial y} - \frac{\partial \bar{z}(p_2)}{\partial y}\right) \approx \frac{1}{h}\left(\frac{\bar{z}(p') - \bar{z}(p)}{h'} - \frac{\bar{z}(p) - \bar{z}(p_2)}{h}\right).$$



Niech funkcja $\tilde{z}$ będzie przybliżeniem rozwiązania tego zagadnienia. Weźmy teraz obcięcia $\tilde{z}$ na odcinku $I_X = [(-1,0),(1,0)]$ oraz na odcinku $I_Y = [(0,-1),(0,1)]$ (przekroje wzdłuż osi OX i OY). Chcemy znać wartości funkcji $\tilde{z}$ na tych odcinkach również poza węzłami.

[1] Więcej na temat postępowania w przypadku nieregularnych obszarów wraz z dokładniejszym wyjaśnieniem można znaleźć w [1], podpunkt "Aproksymacja różnicowa zagadnienia Dirichleta".

Zadanie

Znając wartości funkcji z na okręgu jednostkowym, oblicz jej przybliżenie $\tilde{z}$ rozwiązując układ równań liniowych, a następnie zastosuj interpolację funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia do przybliżenia wartości obcięcia $\tilde{z}$ na odcinkach I_X i I_Y.

Elementy zadania:

Z1: Zbudować układ równań liniowych w zależności od zadanego parametru N opisujący wartości funkcji $z(x, y)$ w węzłach siatki (obowiązkowe).

Z2: Rozwiązać zbudowany układ równań metodą Gaussa (obowiązkowe) – można wykorzystać sprawdzony kod z zadania drugiego.

Z3: Przybliżyć przebieg obcięć funkcji: $z(x, 0) : I_X \to \mathcal{R}$ i $z(0, y) : I_Y \to \mathcal{R}$ stosując interpolację funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia (obowiązkowe).

Z4: Wypróbować metodę iteracyjną Gaussa-Seidela do rozwiązania układu równań z punktu 1 (+10% – nieobowiązkowe).

Z5: Wypróbować metodę iteracyjną Gaussa-Seidela do rozwiązania układu równań z punktu 3 (+10% – nieobowiązkowe).

Z6: Implementację metody iteracyjnej Gaussa-Seidela przeprowadzić korzystając z dedykowanej struktury danych dla macierzy rzadkich (+10% – nieobowiązkowe).

Ocena

Poprawnie wykonany projekt w wersji obowiązkowej (Z1-Z3) jest wart 80% punktów. Można otrzymać ponad 100%.

Sprawozdanie

W sprawozdaniu proszę przedstawić argumenty za poprawnością wykonanej implementacji, w tym wypróbować skuteczność tej metody, sprawdzając jej działanie dla trzech różnych funkcji spełniających warunek Laplace'a.

Praca zespołowa

Zadanie można wykonać w zespole dwu- lub trzyosobowym. W takim przypadku proszę dokładnie oznaczyć, jaki był zakres pracy członków zespołu. W oddaniu projektu musi uczestniczyć cały zespół.

Literatura

[1] Z. Fortuna, B. Macukow, J.Wąsowski, *Metody numeryczne*, WNT, Warszawa 2002.