שיטות הקירובים

Walter Gautschi

- אלגברה לינארית: פתרון למערכת משוואות, למצוא ערכים עצמיים, ...
- אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$

  או $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
- אינטרפולציה: נתונות נקודות וערכים בנקודות האלה, למצוא פונקציה שתעבור דרך הנקודות:
- קירוב פונקציות: קירוב פונקציה לפונקציה שקרובה אליה מסוג מסוים (למשל פולינום).

- בהמשך בוח"ן
- משוואות דיפרנציאליות

חישובי [illegible]

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^*\subseteq\mathbb{R}$ סופיים - מספרים שאפשר לייצג

$x\in\mathbb{R}$, יש לו קירוב $x^*\in\mathbb{R}^*$, $0\in\mathbb{R}^*$

$0^*=0$.

$\frac{|x-x^*|}{|x|}$ - דיוק יחסי.

נניח שיודעים לחשב את $f(x)$

איך אני הדיוק פה x מול להצפי.ר

עם אובדנות הדיוק?

$f(x^*) = f(x')$, $f(x)$, x, x^*

עבור x' קיים ש $|x'-x| \le |x^*-x|$

$$\left|\frac{f(x^*)-f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x')-f(x)}{f(x)}\right| =$$

$$\left|\frac{(f(x')-f(x))(x'-x)\cdot x}{(x'-x)\cdot x\, f(x)}\right| \le \frac{|x^*-x|}{|x|}\cdot$$

$$\left|\frac{(f(x')-f(x))\cdot x}{(x'-x)\cdot f(x)}\right| \approx \underbrace{\left|\frac{x\, f'(x)}{f(x)}\right|}_{\kappa}\cdot\frac{|x^*-x|}{|x|}$$

<u>הגדרה:</u> <u>מספר המצב</u> של f

ב- x (condition number) הוא

$$\operatorname{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

(תחת הנחה ש- $x, f(x) \neq 0$)

<u>דוגמא:</u> $f(x) = ax+b$,

$$\operatorname{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot a}{ax+b} \right| = \left| 1 - \frac{b}{ax+b} \right|$$

<u>דוגמא:</u> חישובים תלויים לכל n

נחשב את הערך

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\, dt$$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{t+5} = \ln(t+5) \Big|_0^1 = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{\boxed{t^{n+1}}}{t+5}\,dt = \int_0^1 t^n \cdot \frac{t+5-5}{t+5}\,dt =$$

$$\underbrace{-5\int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt}_{I_n} + \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \underline{\underline{-5 I_n + \frac{1}{n+1}}}$$

$$I_n = f_n(I_0) \qquad \underline{f_n(x) = (-5)^n x + b_n}$$

כאשר כלשהו $b_n \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{cond}(f_n)(I_0) = \left| \frac{I_0 \, f_n'(I_0)}{I_n} \right| =$$

$$5^n \cdot \left| \frac{I_0}{I_n} \right| \geq \underline{\underline{5^n}}$$

$$I_n = \frac{I_{n+1} - \frac{1}{n+1}}{-5}$$

$k >> n$

$n-k < 0$

$$I_n = g_n(\underline{I_k})$$

$$g_n^{(x)} = (-5)^{\underbrace{n-k}} x + c_n$$

$$\operatorname{cond}(g_n)(I_k) = \left| \frac{I_k \cdot -5^{n-k}}{I_n} \right| =$$

$$5^{n-k} \left| \frac{I_k}{I_n} \right| \leq \underline{\underline{5^{n-k}}}$$

≤ 1

שקילות במימד נמוך גבוה.

$(x_1^*,\dots,x_n^*) \longleftarrow (x_1,\dots,x_n)$

הגדרה: יהי V מרחב לינארי

מעל $\mathbb{R}$, נורמה על V היא

$=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0\}$

פונקציה $\|\cdot\|: V\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ש-

1. אם $\|v\|=0$ אז $v=0$
2. לכל $a\in\mathbb{R}, v\in V$ $\|av\|=|a|\cdot\|v\|$
3. לכל $u,v\in V$ $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$

מרחב לינארי V ביחד עם נורמה

נקרא **מרחב נורמי!**

דוגמאות: $V=\mathbb{R}^d$, $p \geq 1$ קבוע

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$$

(תרגיל: נורמה)

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_1 = \sum |x_i|$$

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$$

"$p=\infty$"

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_\infty = \sup\{|x_i|\}$$

בהינתן נורמה $\|\cdot\|$ על V,

נגדיר מטריקה על V:

$$d(u,v)=\|u-v\|$$

אם $v_i \in V$ סדרה, (v_i) **מתכנסת**

ל-v אם $\|v_i - v\| \to 0$.

טענה: יהי V מרחב וקטורי עם

שתי נורמות $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$

אז שני התנאים הבאים שקולים

1. לכל סדרה (v_i) ו-$v \in V$

$\|v_i - v\|_1 \to 0$ אמ"מ $\|v_i - v\|_2 \to 0$

2. יש קבוע $C > 0$ כך שלכל

$v \in V$, $\frac{1}{C}\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C\|v\|_1$

עובדה: כל הנורמות על $\mathbb{R}^d$

הן שקולות.

אפשר לחשוב נורמה $\|\cdot\|$ על $\mathbb{R}^d$

ולהגדיר את הדיוק היחסי

ע"י $\frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$

נניח ש $T: V \to U$ מעתקה

לינארית ובמרחבי נורמות $\|\cdot\|_U$

של U ו- $\|\cdot\|_V$ של V.

רוצים לחשב את ההשפעה של

הפעלת T על הדיוק היחסי:

$$\frac{\|Tx^*-Tx\|_V}{\|Tx\|_V} = \frac{\|T(x^*-x)\|_V}{\|T(x)\|_V} =$$

$$= \frac{\|T(x^*-x)\|_V \cdot \|x^*-x\|_U \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V \, \|x^*-x\|_U \, \|x\|_U} \le \frac{\|T\| \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V} \cdot \frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$$

תהא $T: V \to U$ העתקה לינארית

בין שני מרחבי נורמה, נגדיר

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_U}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V = 1} \|T(x)\|_U$$

$Hom(U,V)$ - העתקות הלינאריות החסומות. $T \mapsto \|T\|$ נורמה

במרחב הזה

נגדיר מספר המצב של T

בנקודה x הוא

$$cond(T)(x) = \frac{\|x\| \cdot \|T\|}{\|T(x)\|}$$

אם T הפיכה, ונרצה לרשום $x = T^{-1}(y)$

$\mathrm{cond}(T) :=$

$$\boxed{\sup_x \mathrm{cond}(T)(x) = \|T\| \cdot \|T^{-1}\|} \quad \text{נכון}$$

נניח ויש לפתור משוואה

$Tx=b$, מה הטעות היחסית

שנובעת עקב הקירוב של b

ע"י b^*?

<u>מטריצת הילברט!</u>

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

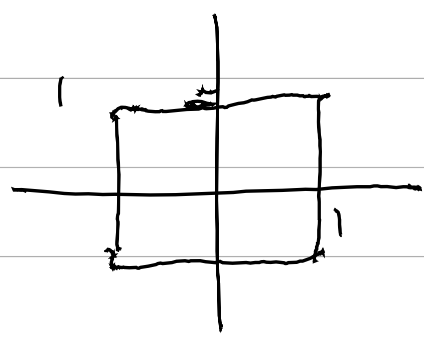
$$\mathrm{cond}_2 T_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^{4n+4}}{2^{15/4} \cdot \sqrt{\pi n}}$$

העתקה לינארית $T: U \to V$

$U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$ $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

אז T מיוצגת ע"י

מטריצה $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$.



$$\|T\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \frac{|x|\,|f'(x)|}{|f(x)|}$$

$x = 17$

$y = -17+\varepsilon$

$2\cdot 17 = 34$

$T: U \to V \qquad . \; V, \|\cdot\|$

$$\|T\| = \sup_{|u|=1} \|Tu\|$$

$$\mathrm{cond}(T)(u) = \frac{\|u\|\cdot\|T\|}{\|Tu\|} \le \|T^{-1}\|\cdot\|T\|$$

$$\|T^{-1}\|\cdot\|T\| = \mathrm{cond}(T)$$

[1.1] $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ תרגיל 3

$f(x,y) = x+y$

$$\mathrm{cond}(f)(x,y) = \frac{\|\langle x,y\rangle\|\cdot\|f\|}{|x+y|} = \frac{\max(|x|,|y|)\cdot 2}{(x+y)}$$

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ .2

$x^* \in \mathbb{R}^{*n}, \ x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\|f(x^*)-f(x)\|}{\|f(x)\|} =$$

$= \varepsilon$

$$\frac{\|f(x^*)-f(x)\| \cdot \|x\| \cdot \|x^*-x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x\| \cdot \|x^*-x\|} \approx$$

$$\frac{\|df(x)(x^*-x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x^*-x\|} \cdot \varepsilon \le \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|} \cdot \varepsilon$$

הגדרה:

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|}$$

עוד נזכיר: לפונקציה של $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

יש m פ' $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

ונוכל לדבר על ההתניה החלקית של

f_i לפי של x_j, נקבל מטריצה

$$\left(\operatorname{cond}_{x_j}(f_i)\right)_{i,j}$$

<u>3 דוגמא:</u> $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$df=\begin{pmatrix}-\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2}\\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2}\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{cond}(f)(x,y) = ? \quad \frac{\max(|x|,|y|)\cdot \max\left(\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2}\right)}{\max\left(\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|,\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\right)}$$

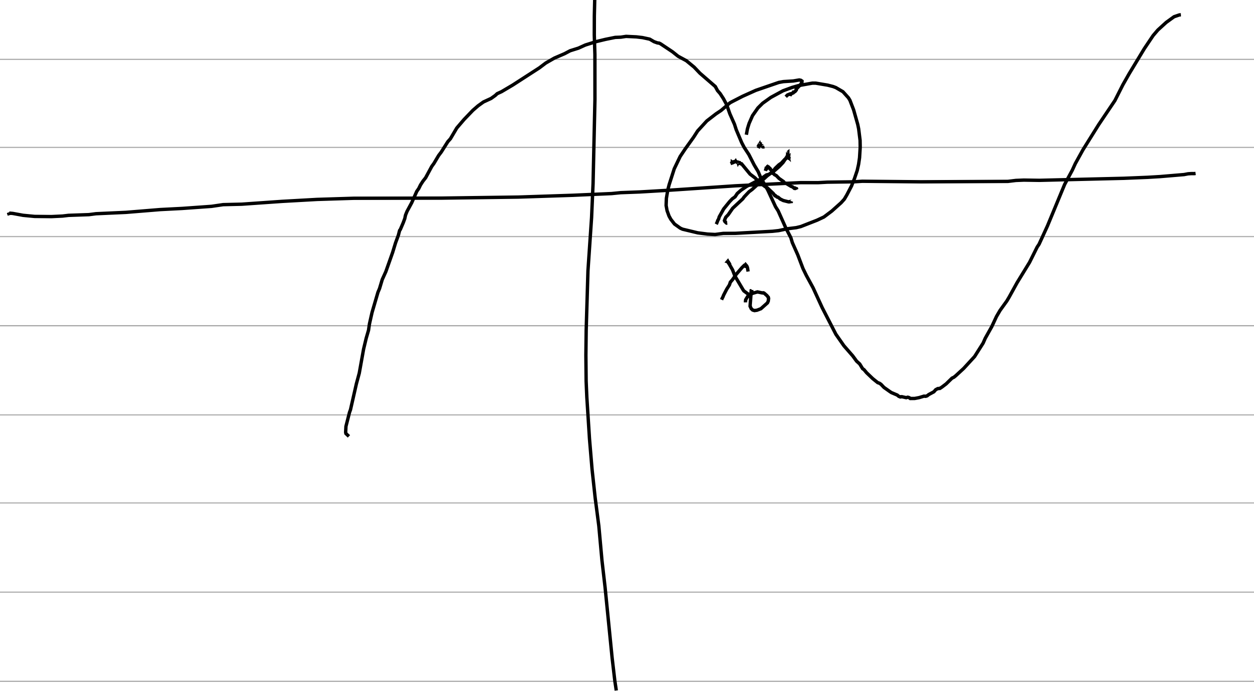
$$f_1(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

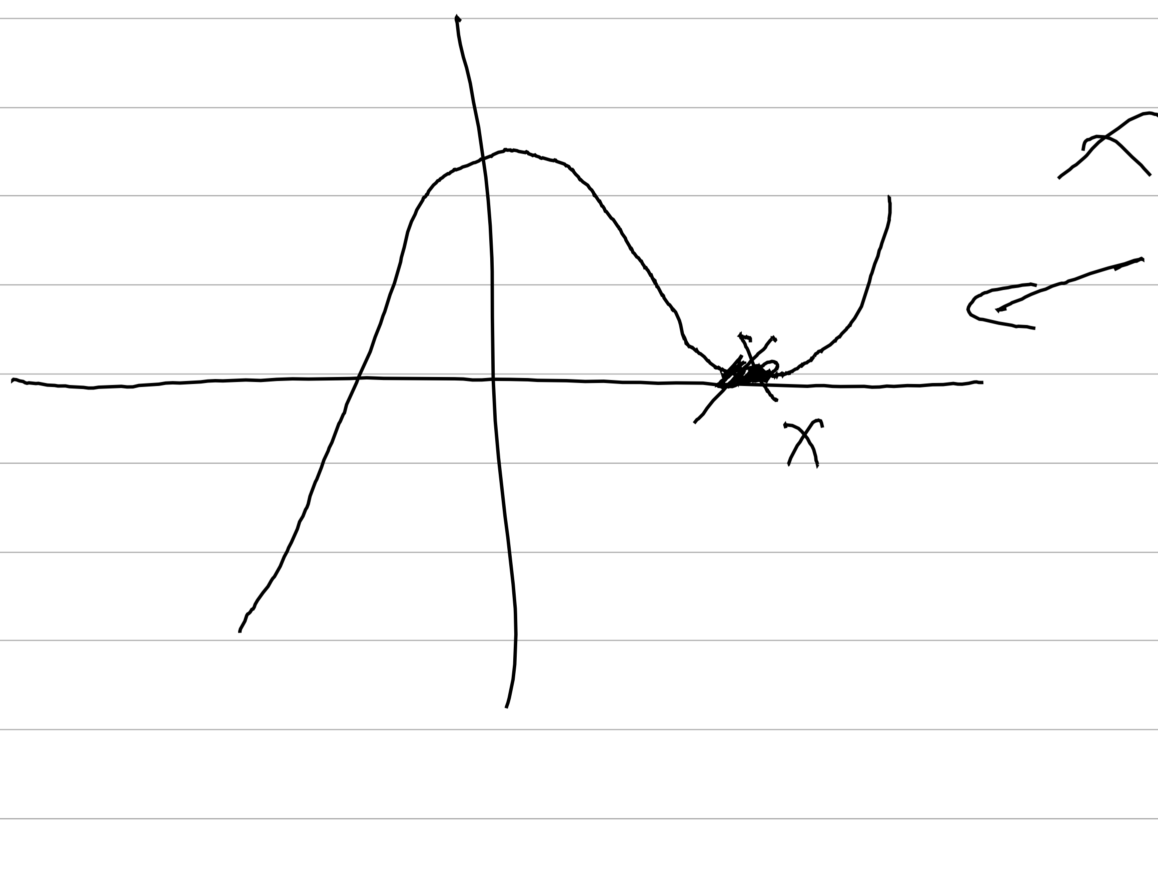
$$\mathrm{cond}_x(f_1) = \frac{|x|\cdot\frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|} \qquad \frac{|y|\cdot\frac{1}{y^2}}{\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|}$$

$$\frac{|y|}{|x+y|} \qquad \frac{|x|}{|x+y|}$$

$$\mathrm{cond}_x(f_2) = \frac{|x|\cdot\frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|} = \frac{|y|}{|x-y|} \qquad \frac{|y|\,\frac{1}{y^2}}{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|} = \frac{|x|}{|x-y|}$$

דוגמא:





קוקצים דרגה n

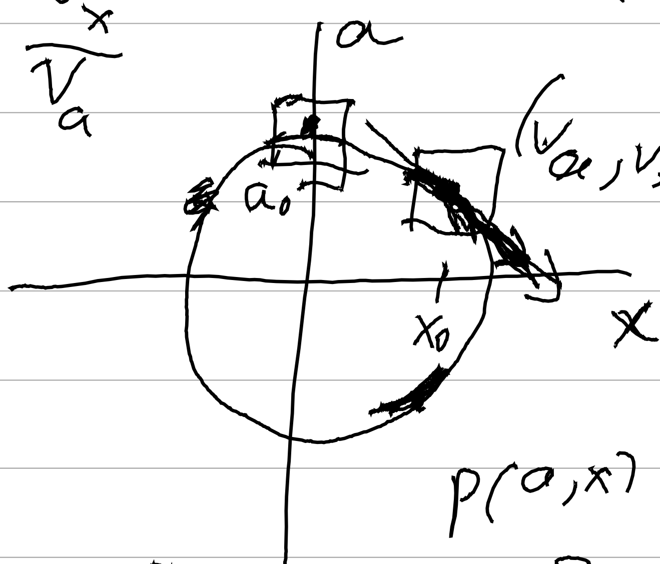
$$P_n(\bar{a}, X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

$$P_n(\bar{a^0}, \underline{\underline{x_0}}) = 0 \qquad x_0, \; \bar{a^0}$$

$\approx$

$$\underline{F(x,y) = x^2 + y^2}$$

$$\frac{v_x}{v_a}$$



$a_0 = 1$

$x = 0$

$p(a, x)$ $\boxed{\dfrac{\partial p}{\partial x} = 2x}$

$$a^2 + x^2 = 1 \qquad \underline{\underline{a^2 + x^2 - 1 = 0}}$$

$$x = x(a) \qquad p(a, x(a)) = 0$$

$$x_0 = x(a_0) \qquad x = \sqrt{1 - a^2}$$

$$F(a, x) = 0 \qquad F(a_0, x_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial X}(a_0, x_0) \neq 0 \Rightarrow X = X(a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial a} \Big/ \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$df \cdot \begin{pmatrix} v_a \\ v_x \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_x \end{pmatrix} = 0$$

$$v_a \frac{\partial f}{\partial a} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$x = x(\bar{a})$$

$$\mathrm{cond}_{a_i}(x) = \frac{|a_i| \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial a_i}\right|}{|x|} = \frac{|a_i| \cdot |x^i|}{|x| \cdot |p'(x)|}$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_i} = -\frac{\partial p / \partial a_i}{\partial p / \partial x} =$$

$$\frac{x^i}{\sum j a_j x^{j-1}} = \frac{x^i}{p'(x)}$$

הדוגמא של ווילקינסון:

$$p(x) = (x-1) \cdots (x-n)$$

השגיאה הכללית:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f^*: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$

$f(x)$ $\qquad$ $f^*(x^*)$

הנחה: $f^*(x^*) = f(x')$ עבור x' כלשהו

$$\frac{|f^*(x^*) - f(x)|}{|f(x)|} = \frac{|f(x') - f(x^*) + f(x^*) - f(x)|}{|f(x)|} \leq$$

$$\frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x)|} + \frac{|f(x^*) - f(x)|}{f(x)}$$

$$\frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x)|} \approx \frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x^*)|} \leq$$

$$\underbrace{\operatorname{cond}(f)(x^*)}_{\operatorname{cond}(f)(x)} \cdot \boxed{\frac{|x' - x^*|}{|x^*|}}$$

נס' המצב של הפולינום f^*

הגי/

$$\operatorname{cond}(f^*)(x^*) = \inf_{f(x') = f^*(x^*)} \frac{|x' - x^*|}{|x^*|}$$

$$\underline{\operatorname{cond}(f)(x)} \left(\frac{|x - x^*|}{|x|} + \operatorname{cond}(f^*)(x^*) \right)$$

קירובים לפונקציות ואינטרפולציה

$f: X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה
$\underline{\underline{f}} \quad\quad \mathbb{C}$

רוצים לקרב אותה ע"י
פונקציות פשוטות,

A מרחב וקטורי של פונקציות על
מרחב "מטרי" X. למשל

X - תת-קבוצה סגורה וחסומה ב-$\mathbb{R}^n$

X - קבוצה סופית

$A = C(X)$ פונקציות רציפות מ-X
ל-$\mathbb{R}$ או ל-$\mathbb{C}$.

$P \subseteq \mathcal{A}$ תת מרחב של הפונקציות

שבעצמתן מקרבים.

למשל: P - פולינומים.

מה זה לקרב? למדוד את

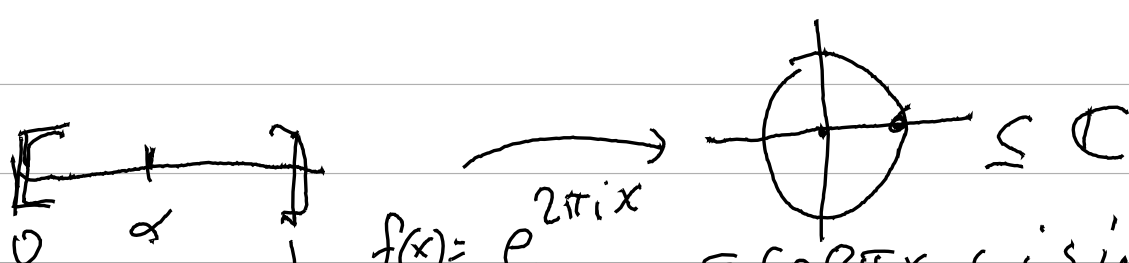
המרחק הקרוב ביותר ב-P

לפונקציה $f \in \mathcal{A}$ ביחס לנורמה נתונה

$\|\ \|$ של $\mathcal{A}$.

יהי $X=$ המעגל: הקטע $[0,1]$

שבו זיהינו את 1 ו-0.



$f(x) = e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$

י. מרחב מעל $\mathbb{C}$ בערכים של ז'ד'

$\cos(2\pi nx)$ ו- $\sin(2\pi nx)$ הוא אלגברה
$n\in\mathbb{Z}$

(סגור תחת כפל)

$\{e^{2\pi i nx}\}$

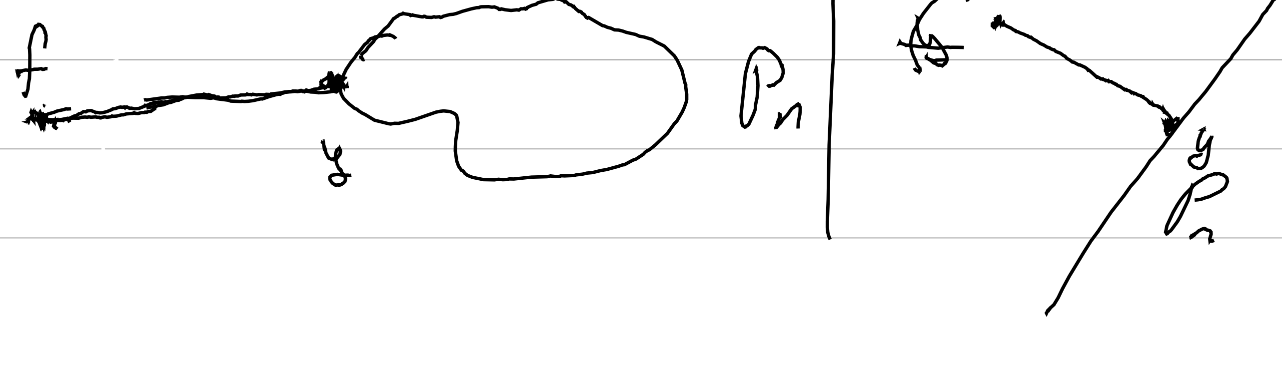
$P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots$, $P=\bigcup P_i$

הג' מרחבים ממ'מי 0 לפ' רציפ':

לכל $f\in A$ ולכל $\varepsilon>0$ יש n

כך ש- $d(f,P_n)<\varepsilon$

$$d(f,P_n)=\inf_{y\in P_n} d(f,y)=\inf_{y\in P_n}\|f-y\|$$



על $C(X)$ יש נורמה טבעית

נורמת הסופרימום:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$$

<u>משפט סטון-ויירשטראס:</u> אם

$P \subseteq C(X)$ תת-אלגברה (סגורה תחת כפל, מכילה את הפונקציות הקבועות) ולכל $x \neq y$ יש $p \in P$ כך ש- $\underline{p(x) \neq p(y)}$ (מפרידה נקודות) אז P <u>צפופה ב-$C(X)$</u>

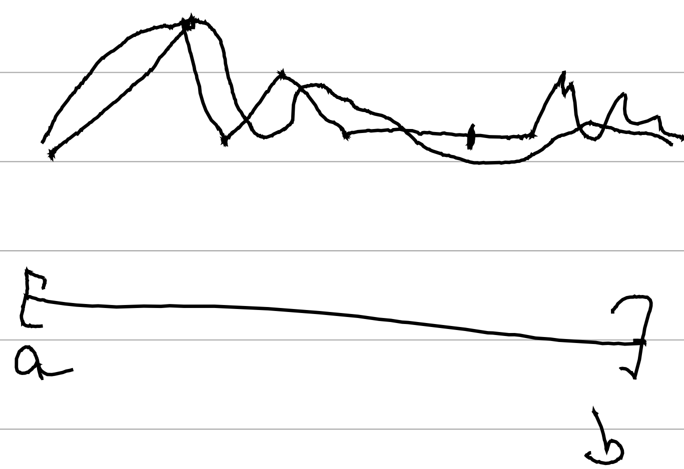
<u>דוגמא:</u> $X = [a,b]$ ו- P פולינומים במשתנה אחד. אז $P \subseteq C(X)$ תת-אלגברה מפרידה נקודות ולכן צפופה

P צפופה ב- $C(X)$: לכל f ב- $C(X)$

ולכל $\varepsilon>0$ יש $p\in P$ כך ש-

$$\|f-p\|<\varepsilon$$

כלומר לכל $x\in X$ $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.



במקרה המרוכב, P צריכה להיות

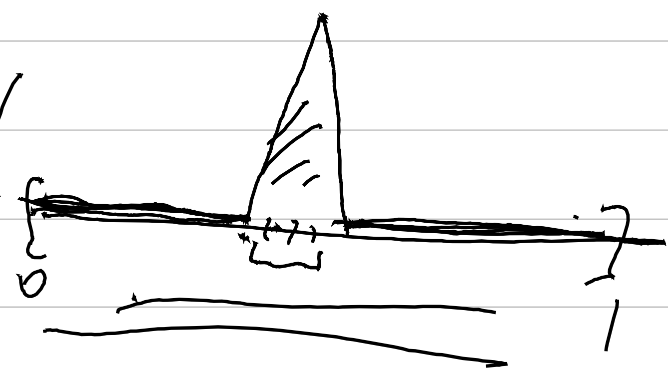
סגורה תחת הצמדה

דוגמא: כל פונקציה רציפה

ב- C ניתנת לקירוב ע"י

פונקציות טריגונומטריות:

סת

$\sup\Big($  $\Big) = 1$

$\mathbb{R}^n$ לכל $1 \le p \le \infty$ יש נורמה $\|\cdot\|_p$

$\|\bar{x}\|_\infty = \max(|x_i|)$

$\|\bar{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$ $\qquad 1 \le p < \infty$

טענה X קבוצה סגורה נורמת

הפורמות בין $\|\cdot\|_\infty$

נניח ש- X סגורה אז מתפלגה

קורדינטות של הן גם סגורות ב-$\mathbb{R}^n$.

(זה מרחב ~~סגור~~ קומפקטי מיקום כולל)

נגדיר $\|\cdot\|_2 : C(X) \to \mathbb{R}$

(הנורמה L_2).

על ידי

$$\|f\|_2 = \sqrt[2]{\int_X |f|^2}$$

אם $X=\{1,\dots,n\}$ עם נק׳ים.

זוהי הנורמה L_2 הקודמת

באופן יותר כללי, אפשר לקבוע

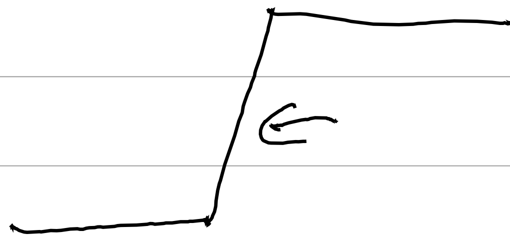
פונקציה חיובית $w : X \to \mathbb{R}$ ולהגדיר

$$\|f\|_{w,2} = \sqrt[2]{\int_X |f|^2 \cdot w}$$

יש

$$\|f\|_2^2 = \int_X |f|^2 \le \sup_X |f|^2 \cdot \boxed{\int_X 1} =$$

$\|f\|_\infty^2$

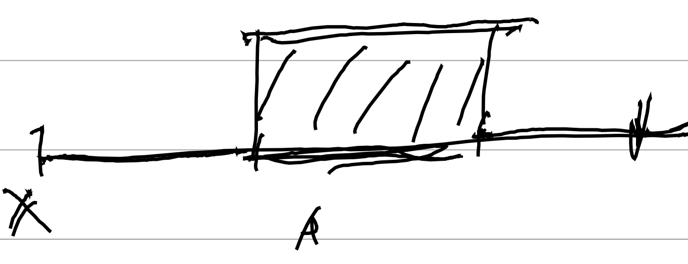


הב' ורציפות צפיפות קב'

הקונבולוציות.

X $\qquad f : X \to \mathbb{R}$

$A \subseteq X$ $\qquad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$



$\int_X 1_A =$ הנפח
של A

[illegible] קבוצה סופית X [illegible] נקודות

נותנת מידת ספירה

$$\int_X f := \sum_{x\in X} f(x) \qquad f: X \to \mathbb{R}$$

[illegible] $f: X \to \mathbb{R}$ $X = \{1, \dots, n\}$

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |f(i)|^p}$$

תהי V מרחב וקטורי מעל

$\mathbb{C}$ או $k = \mathbb{R}$, <u>מכפלה פנימית</u> על V

היא פונקציה $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to k$

כך ש:

1. לכל $u\in V$, הפ' $v\mapsto\langle v,\underline{u}\rangle$

היא לינארית

2. לכל $u,v\in V$, $\underline{\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}}$

בפרט לכל $u\in V$, $\langle u,u\rangle\in\mathbb{R}$

3. אם $u\neq 0$ אז $\langle u,u\rangle>0$

ש"נ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על V

אז הפונקציה $v\mapsto\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$

היא נורמה על V.

במקרה הממשי, לכל $u,v\in V$

$$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=$$

$$\|u\|^2+\|v\|^2+\underline{2\langle u,v\rangle}$$

הנורמה מגיעה ממכפלה פנימית

אם ורק אם

$$(u,v) \mapsto \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}$$

היא מכפלה פנימית.

עבור $p \neq 2$, נורמות $\|\cdot\|_p$

על $C(X)$ היא

$$(u,v) \mapsto \int_X u \cdot \bar{v}$$

באמצעות מכפלה פנימית נוכל

למדוד זוויות. בפרט, וקטורים

u,v הם ניצבים אם $\langle u,v \rangle = 0$.

אם $v_1,\dots,v_n$ ניצבים בזוגות

אזי

$$\|\sum a_i v_i\|^2 = \sum a_i^2 \|v_i\|^2$$

(הוכחה של המסקנה שהבטחנו).

נניח ש- A קבוצת הפונקציות הממשיות הרציפות על X, ו- $P=\bigcup P_i$ תת-מרחב, ונתונה מכפלה פנימית על A. נניח שבחרנו בסיס $\{\pi_i\}$ ל- P_n [אורתונורמלי מתאים]

ו- $f\in A$.

$$T(c_1,\dots,c_m) =$$

$$\|f-\sum c_i\pi_i\|^2 = \langle f-\sum c_i\pi_i, f-\sum c_i\pi_i\rangle =$$

$$\|f\|^2 - 2\sum c_i\langle f,\pi_i\rangle + \sum c_i c_j\langle \pi_i,\pi_j\rangle$$

המינימום היחיד של T מתקבל

במקום שבו כל הנגזרות של

T לפי ה-c_i הן 0.

$$0 = \frac{\partial T}{\partial c_k} = -2\langle f,\pi_k\rangle + 2\sum c_j\langle \pi_k,\pi_j\rangle$$

$$\sum c_j\langle \pi_k,\pi_j\rangle = \langle f,\pi_k\rangle$$

מקבלים מערכת משוואות

$$A\tilde{c} = b$$

כאשר $b_i = \langle f, \pi_i \rangle$

ו- $A = \left(\langle \pi_i, \pi_j \rangle \right)_{i,j}$

A מטריצה סימטרית וחיובית:

$(x,y) \mapsto \underline{\underline{\langle x, Ay \rangle}}$ ← מכפלה פנימית הסטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$

היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$

כלומר, לכל $\bar{x} \neq 0$ אז

$$\underline{\underline{\bar{x} \cdot A \bar{x} > 0}}$$

כי

$$\bar{x} \cdot A \bar{x} = \sum_{i,j} x_i x_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle = \underline{\underline{\left\| \sum x_i \pi_i \right\|^2}}$$

$\{\pi_i\}$ בסיס ולכן $\sum x_i \pi_i \neq 0$ אם $\bar{x} \neq 0$.

בגבכת, A הפיכה לפי ז'

פתרון למערכת.

$(\pi_i)_{i\ge 0}$

$$A = \left(\langle \pi_i, \pi_j \rangle\right)_{0\le i,j\le n}$$

$A\bar{c} = \bar{b}$ $\qquad \bar{b} = \langle f, \pi_i \rangle$

למשל: $\pi_i = t^{i}$ על $[0,1]$

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\cdot g \, dt$$

$$\langle \pi_{i+1}, \pi_{j+1}\rangle = \int_0^1 t^{i+j}\, dt = \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{i+j+1}$$

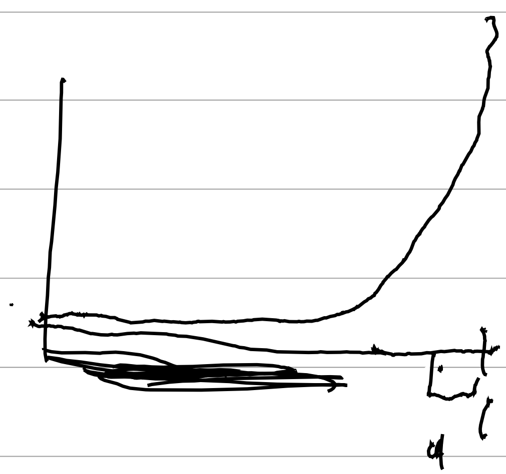
$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

<u>קריטי:</u> הבעיה <u>$H_n \bar{c} = \bar{b}$</u>

זו בעיה (שינוי קטן ב-$\bar{b}$

עלול לגרום לסטיה גדולה ב-$\bar{c}$).

<u>$[0,1]$</u> t^i



t^i

פתרון: לעבוד עם בסיס

אורתוגונלי (או אורתונורמלי):

$\langle \pi_i, \pi_j \rangle = 0 \quad i \neq j \quad (\langle \pi_i, \pi_i \rangle = 1)$

$$f = \sum \underbrace{a_i} \pi_i$$

$$\langle f, \pi_i \rangle = a_i \langle \pi_i, \pi_i \rangle$$

מה אם רק בסיס: גם

$\pi_1, \pi_2, \ldots$

נמצא לכל בסיס אורתוגונלי

עם יהי

$$\hat{\pi}_1 = \pi_1$$

$$\hat{\pi}_{k+1} = \pi_{k+1} - \sum \frac{\langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2} \hat{\pi}_i$$

$$\langle \hat{\pi}_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle - \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = 0$$

$P = \bigcup P_i \qquad P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots$

$P_i = \{$ פולינומים ממעלה $\leq i \}$

$\dim(P_i) = i$

$\operatorname{span}(\langle \pi_i \rangle_{i \leq n}) = \operatorname{span}(\langle \hat{\pi}_i \rangle_{i \leq n})$

$\hat{\pi}_i \in P_i$ | פולינום מתוקן ממעלה i.

$$\hat{\pi}_{i+1} = t\hat{\pi}_i - \alpha_i \hat{\pi}_i + \sum_{j=0}^{i-1} b_j \hat{\pi}_j =$$

$$(t - \alpha_i)\hat{\pi}_i + \beta_i \cdot \hat{\pi}_{i-1} + \sum_{j=0}^{i-2} b_j \hat{\pi}_j$$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\langle \hat{\pi}_{i+1}, \hat{\pi}_i \rangle} = \langle (t - \alpha_i)\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle \Rightarrow$$

$$\alpha_i \cdot \|\hat{\pi}_i\|^2 = \langle t\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2}$$

$$0 = \langle (t-\gamma_i)\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle + \beta_i \|\hat{\pi}_{i-1}\|^2 \Rightarrow$$

$$\beta_i = - \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} =$$

$$- \frac{\langle \hat{\pi}_i , t\hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} = - \frac{\|\hat{\pi}_i\|^2}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2}$$

$$\hat{\pi}_{i+1} = (t-\gamma_i)\hat{\pi}_i + \beta_i \hat{\pi}_{i-1}$$

הערה: אם הקטע סימטרי סביב 0

הוא מהצורה $[-a, a]$

והמשקל היא סימטרית $w(t)=w(-t)$

$$\left[\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\cdot \overline{g(t)}\,\underline{w(t)}\,dt\right]$$

אזי π_k פ' זוגית עבור k

זוגי ופ' אי-זוגית ל-n אי זוגי.

לכן במקרה הזה $\alpha_i=0$.

דוגמא: בקטע $[-1,1]$ ועם $w\equiv 1$

נקבל (משפחת רודריגס)

$$\pi_k(t)=\frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k$$

כדי להראות ש- π_k אורתוג'

לכל π_i עבור $i<k$, מספיק להראות

$$0 = \langle \pi_k, t^i \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k \cdot t^i \, dt =$$

$$\dots = 0$$

$$\pi_0 = 1 \quad , \quad \pi_1 = \frac{1}{2}\left(t^2-1\right)' = t$$

$$\pi_2 = \left[\left(t^2-1\right)^2\right]'' \cdot \frac{2}{4!} = \frac{1}{12} \cdot \left(\left(t^2-1\right)^2\right)''$$

$$\pi_k = t^k + \mu_k t^{k-2} + \dots$$

$$\pi_{k+1} = t \cdot \pi_k + \beta_k \cdot \pi_{k-1} \Rightarrow \boxed{\beta_k} = \frac{\pi_{k+1} - t\pi_k}{\pi_{k-1}}$$

$$\beta_k = \mu_k - \mu_{k+1}$$

$$\mu_k = \frac{k(k-1)}{2(2k-1)} \Rightarrow$$

$$\beta_k = \frac{1}{4 - k^{-2}}$$

<u>תזכורת:</u> פולינומים טריגונומטריים

פ' מחזוריות עם מחזור 1

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(t+1) = f(t)$

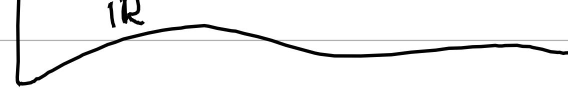
לכל t.

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(0) = f(1)$

$$i \sin(2\pi t) + \cos(2\pi t) = e^{2\pi i t}$$

(=)

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)$$



$\underline{\underline{g : S^1 \to \mathbb{C}}}$

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

$$E : [0,1] \to S^1$$

$$E(t) = e^{2\pi i t}$$

$g : S^1 \to \mathbb{C} \rightsquigarrow g \circ E$ פ' מחזורית.

$$\int_{S^1} g := \int_0^1 g \circ E \, dt$$

אם $z,w \in S^1$ אז $z \cdot w \in S^1$

נקבע $a \in S^1$ ונגדיר

$$g_a(z) = g(a \cdot z)$$

צ"ל $\int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g$

תרגיל: נניח ש- $g: S^1 \to \mathbb{C}^*$

מקיימת: $g(z\cdot w)=g(z)\cdot g(w)$

צ״ל: א. אם $g(z)=1$ לכל z

צ״ל $\int_{S^1} g = 1$

ב. אחרת $\int_{S^1} g = 0$

הוכחה לב׳, קל יותר

ב. יש $a \in S^1$ כך ש- $g(a) \neq 1$

$g_a(x)=g(ax)=g(a)\,g(x)$

צ״ל

$$\int_{S^1} g = \int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g(a)\cdot g = \underbrace{g(a)}_{\neq 1} \int_{S^1} g$$

צ״ל $\int_{S^1} g = 0$.

לכל $n\in\mathbb{Z}$ הפ' $g_n(x)=x^n$

מקיימות את התנאים של הנ"ל

כי $g_n\cdot g_m=g_{n+m}$ ו- $\overline{g_n(x)}=g_{-n}(x)$

איך יש להגדיר מכפלה פנימית

על $\mathbb{C}(S^1)$ ע"י

$$\langle f,g\rangle=\int_{S^1} f\cdot\overline{g}$$

איך הוכחנו אז: זו מערכת

אורתונורמלית.

מצד שני המרחב שנפרש ע"י

ה-g-ים סגור תחת כפל (תת-אלגברה).

הקבוצה הזו נקראת פולינומים
טריגונומטריים.

נשים לב ש-

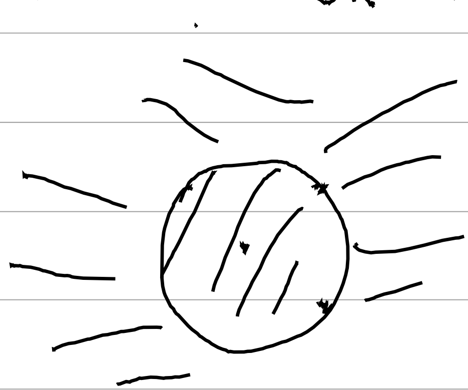
$$0 = \int_{S^1} x^n = \int_0^1 e^{2\pi i n t}\,dt = \int \underline{\cos 2\pi i n t} + i\,\underline{\sin 2\pi n t} = 0$$

תרגיל:

$$\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$$

$x \sim y$ אם $x = y$ או $x = \frac{1}{y}$

$$X = \mathbb{C}^*/\sim \qquad g_n\left(\tfrac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} \sim x^n = g_n(x)$$



$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{C}^* \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\bar{g}_n} & X \end{array}$$

$\pi(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \in \mathbb{C}$

אם $z \in S^1$ לכל

$\pi(z) = Re(z)$

אם

$\pi(S^1) = [-1,1] = X_0$

$\pi(x) = \pi(\frac{1}{x})$

$$g_n\left(\overbrace{\frac{x+\frac{1}{x}}{2}}^{\pi(x)}\right) = \frac{x^n + \frac{1}{x^n}}{2} = \pi(g_n(x))$$

אם h פ' על X נגדיר

$$* = \int_{X_0} h = \int_{S^1} h \circ \pi = \int_{S^1} h\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)$$

$$\int_0^1 h(Re(e^{2\pi i t}))\,dt = \int_0^1 h\cos(2\pi t)\,dt$$

$y = \cos(2\pi t) \qquad dy = -2\pi \sin(2\pi t)\,dt =$

$$dy = -2\pi \sqrt{1-y^2}\, dt$$

$$x = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} h(y) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$ s/c

~~אנ~~ הן $\bar{g}_n$ נקראים פולינומי

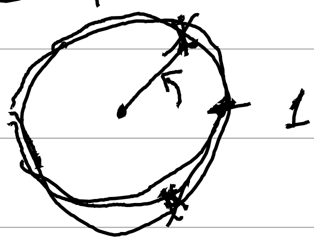
צ'בישב. הפתרון שהם מערכת

אורתונורמלית עבור

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f\cdot g \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$

$$\bar{g}_n(\cos 2\pi t) = \cos 2\pi n t$$

$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$



$$\sin 2\pi t = \sqrt{1 - y^2}$$
$$0 \le t \le \tfrac{1}{2}$$

$$\downarrow p$$

$$X = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$$

$$p(z) = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \quad \left(= \frac{z + \bar{z}}{2} = \operatorname{Re}(z) \text{ on } S^1 \right)$$

$$f : X \to \mathbb{C}$$

$$y = \cos 2\pi t$$
$$dy = -2\pi \sin 2\pi t \, dt$$

$$\int_X f := \int_{S^1} f \circ p = \int_0^1 f \circ p \circ e^{2\pi i t} \, dt =$$

$$\int_0^1 f(\cos 2\pi t) \, dt = 2 \int_0^{1/2} f(\cos 2\pi t) \, dt =$$

$$2\int_{1}^{-1} f(y)\cdot\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(y)\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "\varphi_n"', "x \mapsto x^n"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S^1 \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "T_n"'] & X
\end{tikzcd}$$

$$\varphi_n(x) = x^n$$

$$T_n\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) = \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2}$$

$$\underline{\int_X T_n} = \int_{S^1} T_n\circ p = \underline{\int_{S^1} \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2}} =$$

$$\begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{S^1}\varphi_n\bar{\varphi}_m =$$

$$\int \varphi_n\varphi_{-m} = \int \varphi_{n-m}$$

$$\left(T_n \cdot T_m\right)\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = \left(\frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{2}\right)\left(\frac{z^m + \frac{1}{z^m}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z^{m+n} + \frac{1}{z^{m+n}} + z^{n-m} + z^{m-n}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(T_{n+m}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) + T_{n-m}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\right)$$

$$\int T_n \cdot T_m = \frac{1}{2}\left(\int T_{n+m} + \int T_{n-m}\right) =$$

$$\int \begin{cases} 1/2 & n = \pm m \neq 0 \\ 1 & n = m = 0 \\ 0 & |n| \neq |m| \end{cases}$$

$$T_n = T_{-n}$$

$T_0 = 1 \qquad T_0\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) = 1$

$T_1\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \qquad T_1(z) = z$

$T_n \cdot T_1 = \frac{1}{2}\left(T_{n+1} + T_{n-1}\right) \Rightarrow$

$T_{n+1}(z) = 2z\, T_n(z) - T_{n-1}(z)$

$T_2(z) = 2z^2 - 1$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$

$\cos(nt) = T_n(\cos t)$

1. T_n ממעלה n, המקדם של
z^n הוא 2^n

אינטרפולציה

נתונים ערכי פונקציה f

במספר סופי של נקודות

$c_0,\dots,c_n \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

רוצים לקרב את f על ידי

פולינום ממעלה n.

המרחב של פ' ממעלת $c_0,\dots,c_n$

ממימד $n+1$, עם בסיס

$$\delta_i(c_j) = \begin{cases} 1 & j=i \\ 0 & j\neq i \end{cases}$$

כולם ממעלה n

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x-c_j)}{\prod_{j\neq i}(c_i-c_j)} \in P_n$$

$f(c_i) = f_i \Rightarrow$

$$f \sim \underline{\underline{\underline{\sum f_i \, l_i}}} = \Pi_{\bar{c}}(f)$$

$$\Pi_{\bar{c}} : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$$

$$\sup_{\|f\|=1} \|\Pi_{\bar{c}}(f)\| = \sup_{\|f\|=1} \left| \sum f_i \, l_i \right| =$$

$$= \sum_{i=0} \|l_i\|$$

$$\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|$$

$\hat{p}_n$ – הקירוב הכי טוב ל-f

ב-$\mathbb{P}_n$

$$\|f-\Pi_c(f)\| = \|f-\hat{p}_n-\Pi_c(f-\hat{p}_n)\|$$

$$\le \|f-\hat{p}_n\| + \|\Pi_c\|\,\|f-\hat{p}_n\| =$$

$$\boxed{(1+\|\Pi_c\|)\,\|f-\hat{p}_n\|}$$

הערכת השגיאה בנוסחת הלגרנז':

f פ' ~~רציפה~~ ב $C^{n+1}[a,b]$

(גזירה ברציפות $n+1$ פעמים)

$$(f-\Pi_c(f))(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)$$

(תלוי ב-x)

טענה: יש ξ עבורו ש

נכון $\left(f \in C^{n+1}[a,b]\right)$

הוכחה: נגדיר $c_i \neq x$

$$G(t) = f(t) - \Pi_c(f)(t) - \frac{f(x) - \Pi_c(f)(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)} \prod_{i=0}^{n}(t-c_i) \qquad (*)$$

האפסים של G הם לפחות

c_i ,$i=0,\dots,n$ ו-x.

משפט רול: ל-$G^{(n+1)}$

יש אפס ξ.

נגזור את (*) $n+1$ פעמים:

$$G^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)! \cdot \frac{f(x) - \pi_c(f)}{\prod_{i=0}(x - c_i)}$$

נציב $t = \xi$

$\xi \in [a,b]$

([illegible] [illegible] ש- $[a,b]$

[illegible] [illegible] ב x, c_i

<u>הערות:</u> לנסות לנחזו/

o ∃ כל בחירה של $\bar{c}^{(n)} \in [a,b]$ של נקודות

c ים אינטרפולציה שכן ופולינומיאליות:

$\Pi_{c^{(n)}}(f) \to f$

עבור פונקציות f מספיק

חלקות.

$$\|f - \Pi_{\bar{c}^{(n)}}(f)\| \le \underbrace{\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \prod_i (x - c_i^{(n)})}$$

$$\le \frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1}$$

$M_{n+1}(f)$ חסם על הנגזרת ה-$n+1$ של f ב-$[a,b]$

אם רוצים ש-

$$\underbrace{\frac{M_n(f)\cdot(b-a)^n}{n!}} \to 0$$

$\bar{c}$ נקודות אינטרפולציה $c_i \in [a,b]$

$$\underline{\|f-\pi_{\bar{c}}(f)\|} \le \left| \boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}} \cdot \boxed{\prod_i (x-c_i)} \right| \le \boxed{\frac{M_{n+1}\cdot(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

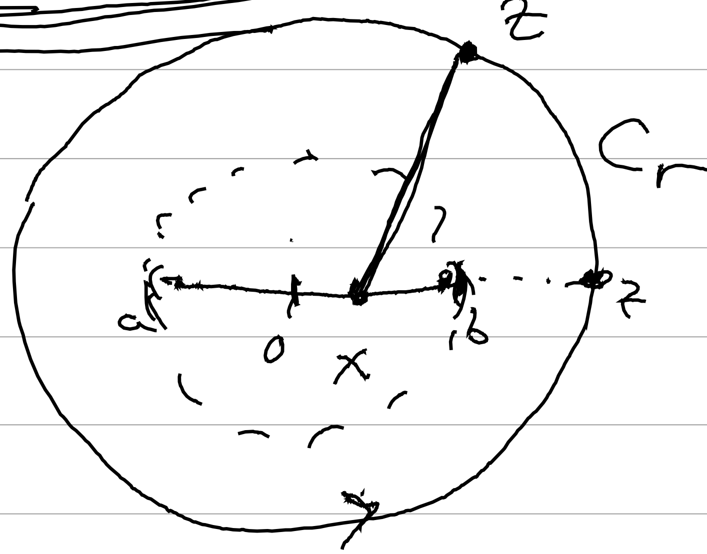
$$M_n = \|\underline{f^{(n)}}\|_\infty$$

f פ' מרוכבת אנליטית

טענה קודם: אם f אנליטית

אז

$$f^{(k)}(x)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{(z-x)^{k+1}}\,dz$$



$a=-b$

$$\int_{C_r}\frac{1}{z}=2\pi i$$

$$\gamma(t)=re^{2\pi i t}$$

$$\|z-x\|\geq r-b$$

$$\Rightarrow$$

$$\|f^{(k)}(x)\|\leq\frac{k!}{2\pi}\,\frac{\cancel{M}N}{(r-b)^{k+1}}\cdot 2\pi r \Rightarrow$$

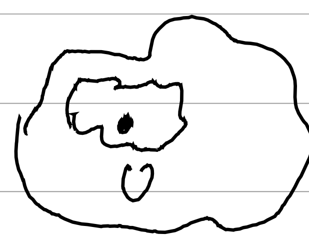
$$\frac{u_n \cdot (2b)^n}{n!} \le \frac{\frac{n! \cdot \cancel{u_0}^{\,M}}{(r-b)^{n+1}} \cdot r \cdot (2b)^n}{n!} =$$

$$\frac{\cancel{u_0}^{\,M} \cdot r}{r-b} \cdot \left(\frac{2b}{r-b}\right)^n \longrightarrow 0$$

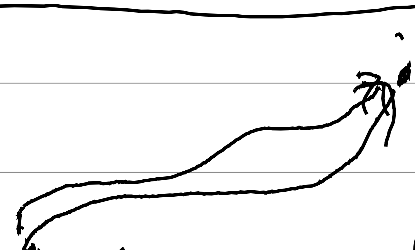
$$\frac{2b}{r-b} < 1$$

$$r > 3b$$

$$\frac{1}{z}$$



$\neq \mathbb{C}$



γ

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(f \circ \gamma)'$?

$\gamma : (a, b) \to \mathbb{C}$

מהו הפולינום המתוקן ממעלה

n שערכו $\|\cdot\|_\infty$ (על $[-1,1]$)

מינימלית?

אם p פולינום מתוקן ממעלה

n כך ש- $\|p\|_\infty = |p(a_i)|$ עבור

$p(a_i) = -p(a_{i+1})$

$n+1$ נקודות a_i של p

הוא הפולינום עם $\|p\|_\infty$ מינימלית

הוכחה, נניח ש- $\|q\| < \|p\|$

אז $p = q$ ב- n נקודות.

טענה: <u>פולינומי צ'בישף המתוקנים</u>

שורשים את הקשה:

$$\underline{\underline{T_n(\operatorname{Re} z) = \underline{\operatorname{Re}(z^n)}}}$$

$\underline{k = 0, \dots, n-1}$

$x = \operatorname{Re} z$

$= T_n(x) = 0$

$\operatorname{Re} z^n$

$\Rightarrow$

$x = \cos\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)$

$z^n = \pm i$

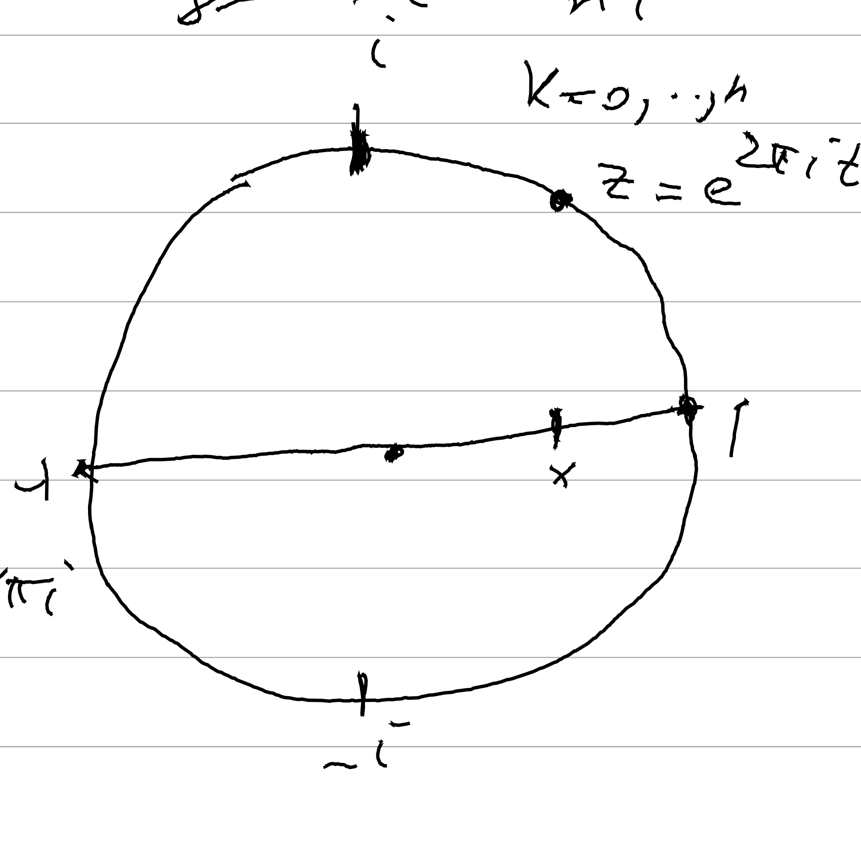
$y = \cos\left(\pi \frac{k}{n}\right)$

$z^n = i \iff$

$e^{2\pi i n t} = i$

$2\pi i n t = \frac{\pi i}{2} + \cancel{2}k\pi i$

$\Rightarrow t = \frac{2k+1}{4n}$



המסקנה: המקדם העליון של

T_n הוא 2^{n-1}

נ/כ $\mathring{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n$ פולי' מתוקן

ממעלה n, $\|\mathring{T}_n\| = \frac{1}{2^{n-1}}$ שמתקבל

בנקודות $a_i = \cos\left(\frac{\pi i}{n}\right)$

$n \geq i \geq 0$. עם סימנים מתחלפים

$\mathring{T}_n$ עם נורמה מינימלי

מינימלית בין הפ' המתוקנים

ממעלה n - לכן אם $c_i^{(n)}$ מקדם

נ/כ בסיס של T_n אז

$$\|f - \Pi_{\bar{c}(n)}(f)\| \le \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \cdot \|\tilde{T}_n\|_\infty =$$

$$\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

$c_0, c_1, \ldots$ סדרה אינסופית

$p_0, p_1, \ldots$ $\deg(p_i) \le i$

δ_i

p_i

$$p_{i+1}(x) = p_i(x) + a_{i+1} \cdot (x-c_0) \cdots (x-c_i)$$

$$a_{i+1}(c_{i+1}-c_0)\dots(c_{i+1}-c_i)=f_{i+1}-p_i(f_{i+1})$$

$$a_{i+1}=\frac{f_{i+1}-p_i(f_{i+1})}{(c_{i+1}-c_0)\dots(c_{i+1}-c_i)}=$$

$$[c_0,\dots,c_{i+1}]f$$

$$[c_0,\dots,c_{i+1}]f=\frac{[c_0,\dots,c_i]f-[c_1,\dots,c_{i+1}]f}{c_{i+1}-c_0}$$

$\underline{c}=c_0,\dots,c_{i+1}$, $\hat{c}_j=c_0,\dots,\cancel{c_j},\dots,c_{i+1}$

$$p_{\underline{c}}(x)\overset{\text{sync}}{=}p_{\hat{c}_{i+1}}-\frac{(x-c_0)}{c_{i+1}-c_0}\left(p_{\hat{c}_{i+1}}-p_{\hat{c}_0}\right)=:q(x)$$

s.t. $0 < j < i+1$ $\forall C$: 'N' 33

$$q(c_j) = f_j = P_{\hat{c}}(c_j)$$

$$q(c_0) = P_{\hat{c}_{i+1}}(c_0) = f_0 = P_{\hat{c}}(c_0)$$

$$q(c_{i+1}) = P_{\hat{c}_{i+1}}(c_{i+1}) - (P_{\hat{c}_{i+1}}(c_{i+1}) -$$

$$P_{\hat{c}_0}(c_{i+1})) = P_{\hat{c}_0}(c_{i+1}) = f_{i+1} - P_{\hat{c}}(c_{i+1})$$

$c \quad f$

$c_0 \quad f_0$

$c_1 \quad f_1 \quad [c_0, c_1]f$

$c_2 \quad f_2 \quad [c_1, c_2]f \quad [c_0, c_1, c_2]f$

$c_3 \quad f_3 \quad [c_2, c_3]f \quad [c_1, c_2, c_3]f \quad [c]f$

$c_4 \quad f_4$

$$\boxed{[c_1, c_2, c_3]f} = \frac{[c_2, c_3]f - [c_1, c_2]f}{c_3 - c_1}$$

$\bar{c} = c_0, \ldots, c_i$

$$p_{\bar{c}}(x) = \underbrace{p_{\hat{c}_i}(x)}_{i} + [\bar{c}]f \cdot \prod_{j<i}(x - c_j)$$

$$\|p_{\bar{c}}(x) - p_{\hat{c}_i}(x)\| = \|\boxed{[\bar{c}]f} \prod (x - c_j)\|$$

$$\leq \boxed{\frac{p_{\bar{c}}^{(i+1)}(\xi)}{(i+1)!}} \cdot \prod (x - c_i)\|$$

$\underline{\underline{f}}$ $\left.\begin{matrix} c_0, c_1, \ldots, c_n \\ f_0, f_1, \ldots, f_n \end{matrix}\right]$

$P_{\bar{c}}(x) = [\bar{c}]f \, x^n + \ldots =$

$[\bar{c}]f(x - c_0)\ldots(x - c_n) + P_{\hat{c}_n}$

$\hat{c}_i = \{c_0, \ldots, c_n\} \setminus \{c_i\}$

$$[\bar{c}]f = \frac{[\hat{c}_0]f - [\hat{c}_n]f}{c_n - c_0}$$

$c_0, \dots, c_n$

$f_0, \dots, f_n$

$\underline{\underline{\bar{c}}} = 3\cdot[1] + [3] + 2[5]$

1	1	1	3	5	5	c_i
2	4	0	1	6	7	

$p(1)=2,\quad p'(1)=4,\quad p''(1)=0$

$p(3)=1,\quad p(5)=6,\quad p'(5)=7$

$p_{\bar{c}}(x) = ([\bar{c}]f)\cdot x^{n} + \dots$

$\hat{c}_i = \bar{c} - [c_i]$ [illegible] $\sim c$ [illegible] $[c_i]$

$\bar{c} = \sum n_i [c_i] \qquad \deg(\bar{c}) = \sum n_i = n$

הגדרה: אם $c_i \neq c_j$ אז

$$\underline{[\bar{c}]f} = \frac{[\hat{c}_i]f - [\hat{c}_j]f}{c_j - c_i}$$

הערה:

$$\bar{c} = \sum_{k=1}^{m} n_k [c_k]$$

$$n = \deg(\bar{c}) = \sum n_i$$

אינדוקציה על $N(\bar{c}) = n - m$

אם $n - m > 0$ אז יש $n_k > 1$

$$d = d_\varepsilon = \bar{c} - [c_k] + [c_k + \varepsilon]$$

אם $\varepsilon > 0$ מספיק קטן אז

$$N(d) < N(\bar{c})$$

הוכחה לינארית

$$\underline{[\bar d]f} = \frac{[\bar d_i]f - [\bar d_j]f}{d_j - d_i}$$

$[\bar c]f$ רציפה בכל אחת מהנקודות

כי: הגדרנו לפי בעזרת הנגזרת

מספיק להראות ש-

$$[(n-1)[c_0] + [c_0+\varepsilon]]f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} [n\cdot[c_0]]f$$

$$[c_0, c_0+\varepsilon]f = \frac{f(c_0+\varepsilon) - f(c_0)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f'(c_0)$$

$$P_{n[c_0]} = \sum \frac{f^{(k)}}{k!}(x-c_0)^k$$

$c_0 = c_1 = c_2$ $\qquad$ $c_5 = c_6$

$c_0 \quad f_0$

$c_1 \quad \cancel{f_0} = (f'' \; [c_0, c_1]f = f_1$

$c_2 \quad \cancel{f_0} \quad f_1 \quad f_2$

$c_3 \quad f_3 \quad [c_2, c_3]f = \dfrac{f_3 - f_0}{c_3 - c_0} \quad [c_1, c_2, c_3]f = \dfrac{[c_2, c_3]f - f_1}{c_3 - c_0}$

$c_4 \quad f_4$

$c_5 \quad f_5$

$c_6 \quad f_5 \quad f_6$

$c_7 \quad f_0 \quad [c_6, c_7]f = \dfrac{f_0 - f_5}{c_7 - c_6}$

c_6''

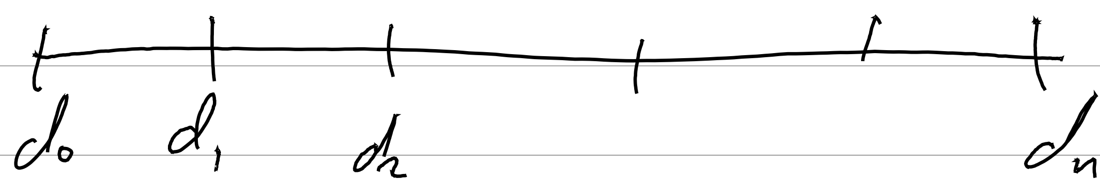
$$[c_5, c_3, c_1]f$$

ספליינים

$a<b \in \mathbb{R}$

קלגעים חלוקה

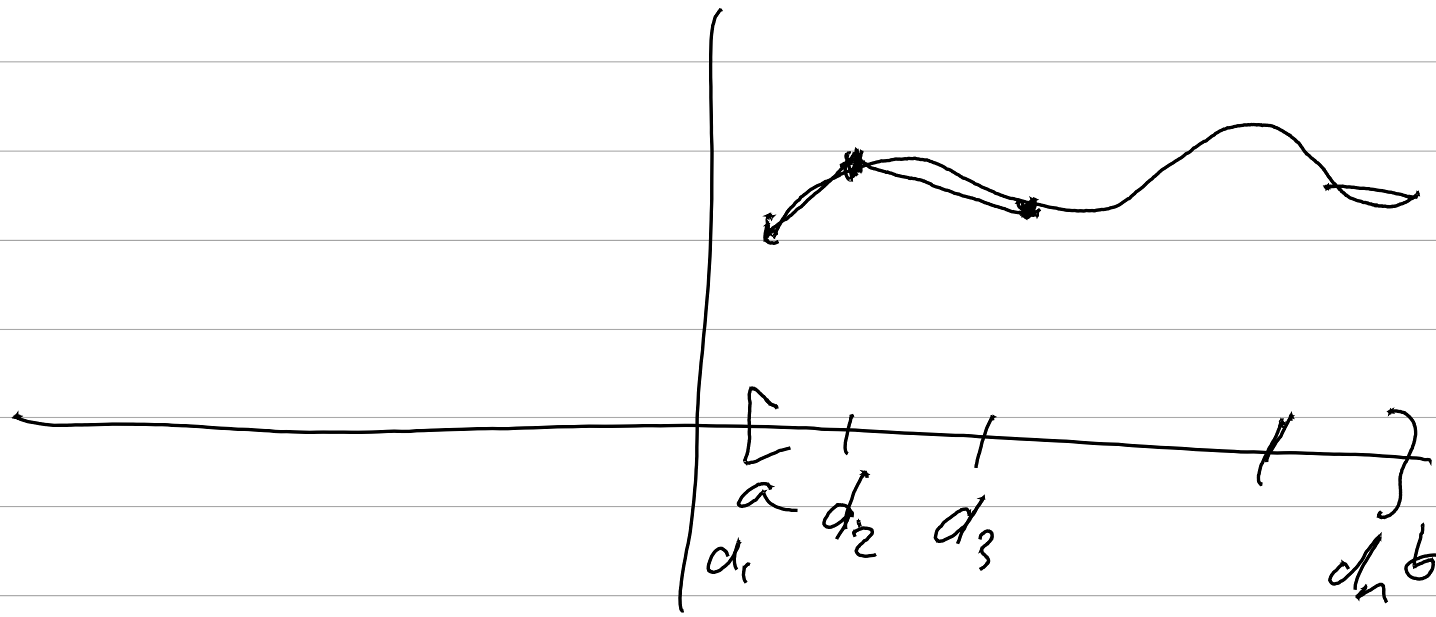
$$\underbrace{a=d_0<d_1<\cdots<d_n=b}_{\Delta}$$



$$S_m^k(\Delta)=\left\{ s\in C^k[a,b] \;\middle|\; \text{לכל } i\text{, } s|_{[d_{i-1},d_i]} \text{ פולינום ממעלה } \le m \right\}$$

$k<m$.

$S_1^0(\Delta)$ — פ' לינאריות למקוטעין רציפות.



אם f גזירה ברציפות פעמיים, ראינו המרחק בין f לקירוב הלינארי S חסום ע"י

$$|f(x)-S(x)| \le \frac{M}{2}\cdot\left|(x-d_i)(x-d_{i+1})\right| \le$$

$$\frac{M}{8}\cdot(d_{i+1}-d_i)^2 \qquad M=\max_{x\in[d_i,d_{i+1}]} f''(x)$$

שגיאה המינימלית (הכ)

$$\frac{\mu}{\varphi}\cdot|\Delta|^2$$

ארך הקטע המירבי. - $|\Delta|$

$$\|f - S_1\| \le c\,\|f - \overbrace{S_1^0(\Delta)}^{\text{עובדה:}}\|$$

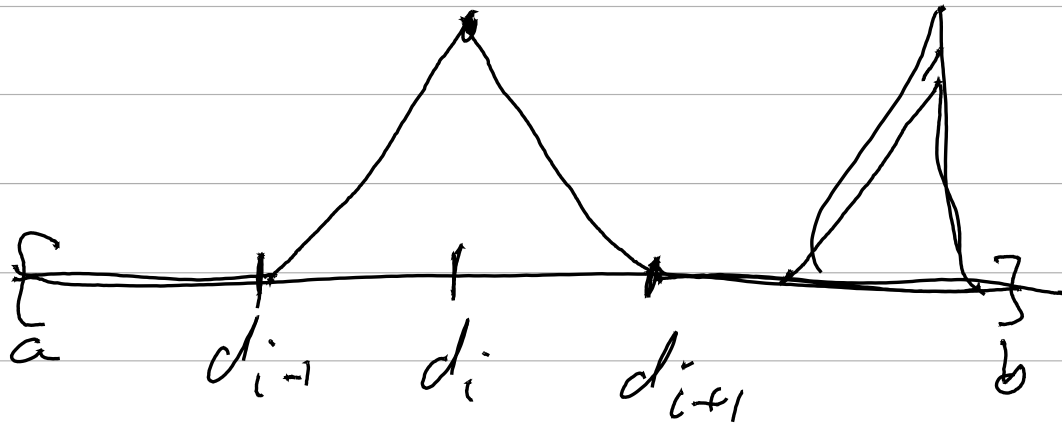
$$\underline{\qquad\qquad} \\ V =$$

$S_1^0(\Delta)$ - ממימד n. מה הפ' ב-V

שמתאימות לבסיס הסטנדרטי

$\mathbb{R}^{\{d_1,\dots,d_n\}}$

Fu



B_i

$\langle B_i, B_j \rangle \neq 0$

רק אם $|i-j| \leq 1$

כרכינו: של

$\hat{s} = \sum c_i B_i$

ההטלה של f למרחב V גב

$\bar{c}$ פתרון של 'ג' הפתרון של

$T\bar{c} = d$

כאשר $T = (\langle B_i, B_j \rangle)_{i,j}$

$d_i = \langle f, B_i \rangle$

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

״כמעט״ אלכסונית.

$$\|f - \hat{s}\|_\infty \le 4 \cdot \overbrace{d(f, S_1^0(\Delta))}^{\text{אלגו ה״י}}$$

ספליינים ממעלה 3:

קירוב של f על ידי הרמיט

ב $S_3^1(\Delta)$. מקרבים את

f ע"י פ' s כך ש-

לכל i $\quad s(d_i)=f(d_i)$

$s|_{[d_{i-1},d_i]}$ פולי' ממעלה ≤ 3

$s'(d_i)=m_i$

א. $m_i = f'(d_i)$

ב. לבחור את m_i כך ש-

$s \in S_3^2(\Delta)$

מציאת פתרון למשוואות

$\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ (נניח f רציפה).

f גזירה ברציפות על $[a,b]$ (אולי יש הנחה).

המטרה: למצוא פתרונות

למשוואה $f(x)=0$.

א. מערכות לינאריות ממימד

סופי (בהמשך)

ב. $F(t,x,x',x'')=0$

$x(0)=x_0,\quad x(1)=x_1$

מטרה: c ש- $f(a)\cdot f(b)\leq 0$

המבחן קיים.. הוכחה נותנת

אלגוריתם: נקודת האמצע

$c=\frac{a+b}{2}$ מקיים $f(c)\cdot f(b)\leq 0$

או $f(a)\cdot f(c)\leq 0$, ממשיכים

על הקטע $[c,b]$ או $[a,c]$

דוגמה:

$f(c)\geq 0$

≤ 0

הגדרה: לתהליך יש התכנסות לינארית אם $|x_n-a|<\varepsilon_n$

כך ש $\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\xrightarrow[n\to\infty]{} C$ עבור איזשהו קבוע C.

במקרה שלנו

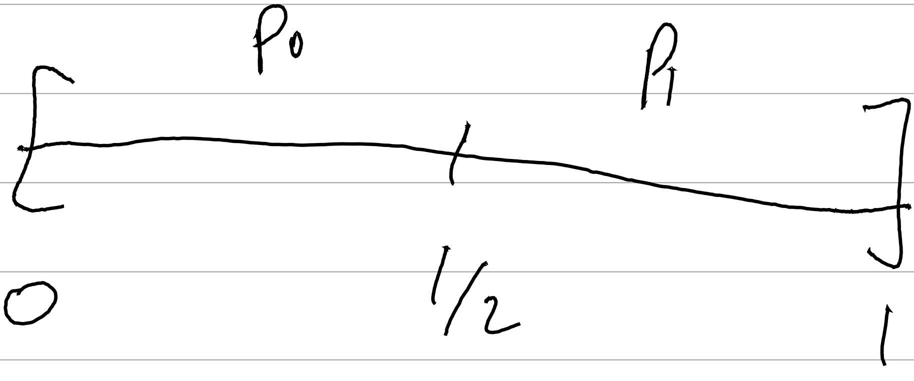
$$|x_n - a| \le \frac{|b-a|}{2^n} = \varepsilon_n$$

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{1}{2}$$

<u>התכנסות מסדר p</u> אם

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} \to C > 0$$

(תמיד $p \ge 1$).



$S'(1/2)$

Δ

f

$s \in S_3^1(\Delta)$ $\quad P_0'(1/2) = P_1'(\tfrac{1}{2})$

$P_0(0) = f(0)$, $P_0(1/2) = f(1/2)$, $P_1(1/2) = f(1/2)$, $P_1(1) = f(1)$

$f(x)=0$ $\qquad [a,b]$

$x_i \to 0 \qquad f(c)=0$

$$\left|\frac{x_{i+1}}{x_i}\right| < \varepsilon_i \qquad \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} \to c < 1$$

התכנסות לינארית

$p \geq 1$

$$\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i^{\,p}} \to c > 0$$

נגיד מתכנס מסדר p.

נניח: סדרת פונקציות

רציפות $f_0, \dots, f_n$

על $[a,b]$ כך שלכל אחת מהן

יש מס' סופי שורשים ב $[a,b]$

נסמן $f_{-1} \equiv 0$, $f_{n+1} = -f_n'$

לפשר הפעולות שלא ב f_n {צריך}

ולכל $0 \le i \le n$ ולכל $r \in [a,b]$

אם $f_i(r) = 0$ אז $-f_{i+1}(r) \cdot f_{i-1}(r) < 0$

ולכל x נסמן $V(x)$ את מס'

השינויים בסדרה $f_0(x), \dots, f_n(x)$

משפט סטורם

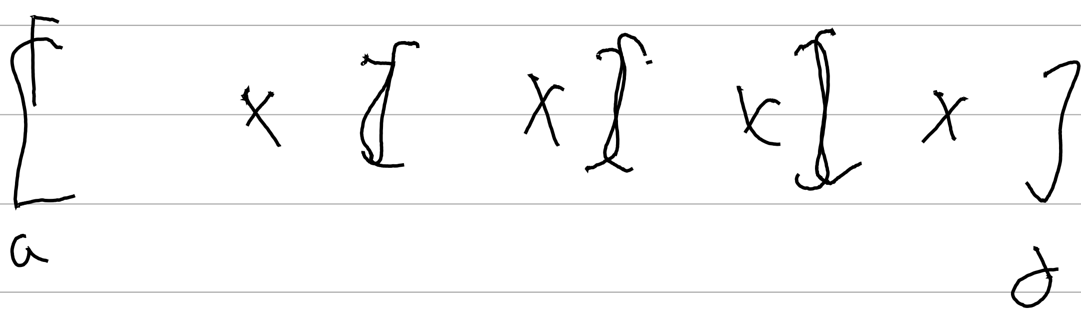
משפט! מס' השורשים של f_n זה $V(a) - V(b)$

הערה: אם הטענה נכונה לקטע $[a,c]$ ו- $[c,b]$ (c נקודה)

כללית: אז היא נכונה ל-$[a,b]$

אז מספיק להוכיח לטענה

יש רק נקודה אחת בתרגילי.



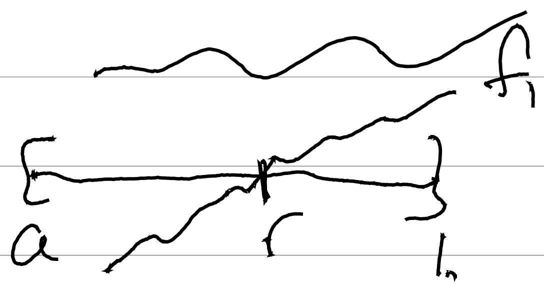
בערך: עבור $i=0$ הוכחה

היינו ש- $f_0(r)\neq 0$ לכל $r\in[a,b]$

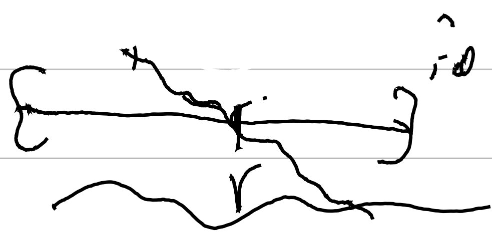
הוכחת המשפט: באינדוקציה על n

$n=0$ ✓

$n=1$: נסמן ב- r את הנקודה המינימלית



$r(a)=0 \qquad r(b)=1$



$f_1(r)=0 \Rightarrow f_0(r)\cdot f_2(r)<0$

$f_2(r)=-f_1'(r)$

$f_0(r)<0,\ f_1'(r)<0$

נניח שהטענה נכונה ל-n. יש

שני מקרים:

א. $f_1(r)\neq 0$. אם נוריד את f_0

הסדרה $f_1,\dots,f_{n+1}$ מקיימת

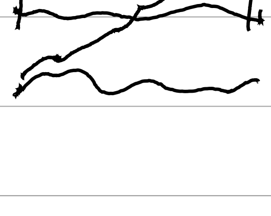
את ההנחות, כי הינה קצרה

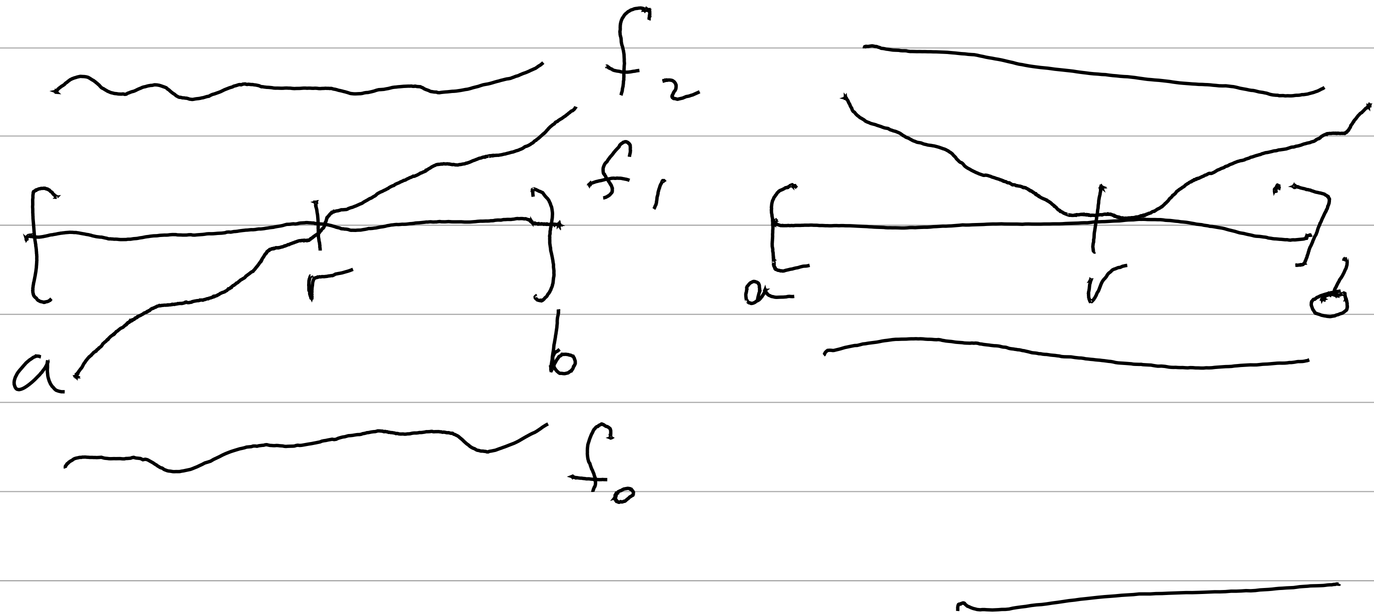
רק ב-1 ולכן ההנחה.

ב. $f_1(r)=0$. נוריד את f_0, f_1

לפי ההנחה $f_0(r)\cdot f_2(r)<0$

אז $f_2(r)\neq 0$.





דוגמא: 1. נניח ש- p פולינום

עם שורשים פשוטים.

נגדיר $f_n = p$, $f_{n-1} = p'$

ו-

$f_{k+1} = q_k \cdot f_k - f_{k-1}$

כאשר $\deg(f_{k+1}) < \deg(f_k)$ עבור $k \leq n-1$

אז f_i מקיימים את ההנחות:

ראשון שורשים פשוטים, ל- p,p' אין

שורש משותף. בפרט, ההנחה

מתקיימת עבור $n=i$:

$$f_{n+1}\cdot f_{n-1} = -(f)^2 \le 0$$

2. אם $\{f_i\}$ בסיס
$\deg(f_i)=i$

של פולינומים אורתוגונליים, מתקיים

ראינו יש נוסחת נסיגה

$$f_{i+1} = (t-a_i)\cdot f_i - b_i f_{i-1}$$

ו- $b_i>0$.

אם סדרת $b>0$, $f_i(b)>0$ לכל i.

כי $\sigma(b)\le 0$

וכמו $a<<0$ עם $\sigma(a)=n$

כי f_i של i אורכים משמשים
שונים.

לכן ניתן לגלות איפה
נמצא השורש ה-k לפי
הסימן של $\sigma(c)$

בכל שלב, מחשבים
$$x_{k+1}=\frac{x_k+x_{k-1}}{2}$$

ומחשבים את $\sigma(x_{k+1})$
ולפי הסימן של $\sigma(x_{k+1})-\sigma(k)$
וכו' $\sigma(k)-\sigma(x_{k+1})$ יודעים איזה
הצד לימין.

מטרה לי $f(x)=0$ ב

נתון $[a,b]$, f רציפה

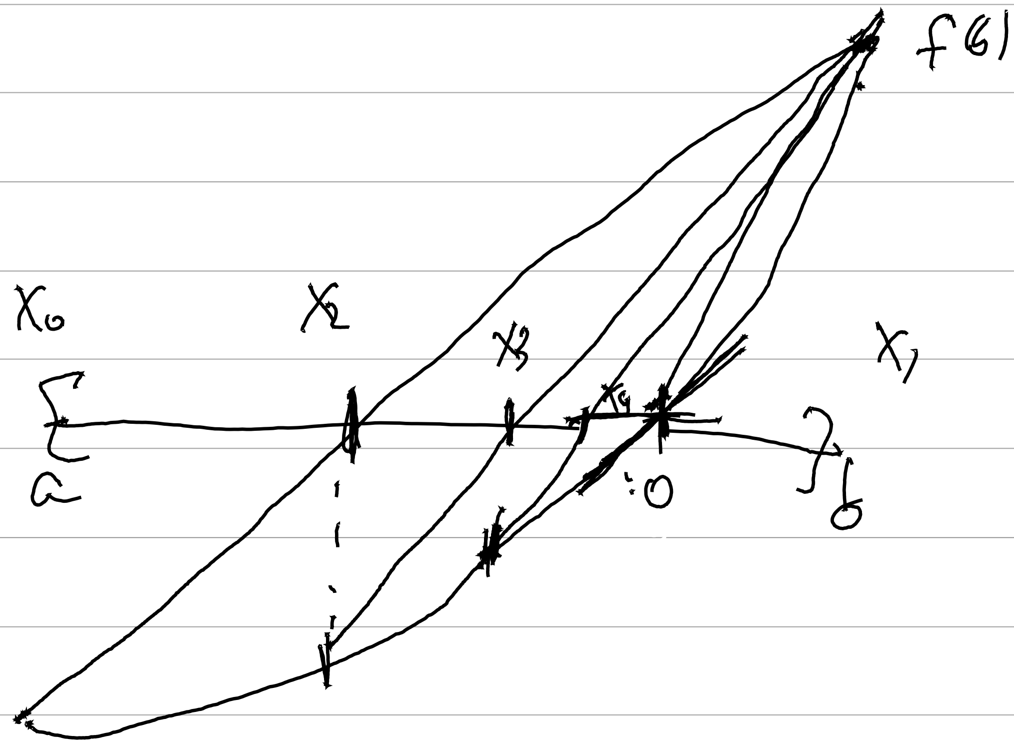
$f(a)\cdot f(b)<0$,

$$\frac{f(b)}{b-a}(x-a)+\frac{f(a)}{a-b}(x-b)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f(b)(x-a)-f(a)(x-b)=0$$

$$x=\frac{f(b)a-f(a)b}{f(b)-f(a)}$$



$$X_{n+1} = \frac{f(x_n)\cdot x_{n-1} - f(x_{n-1})\, x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$\frac{\big(f(x_n) - f(x_{n-1})\big)\cdot x_n + f(x_n)\cdot(x_{n-1} - x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$x_n - f(x_n)\cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{f(x_n)}{x_n}\cdot\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} =$$

$$1 - \frac{f(x_n)}{x_n}\cdot\frac{x_n - b}{f(x_n)-f(b)} \longrightarrow$$

$$1 - f'(0)\cdot\frac{b}{f(b)} =: c$$

[illegible] ? – $n+1$, [illegible]

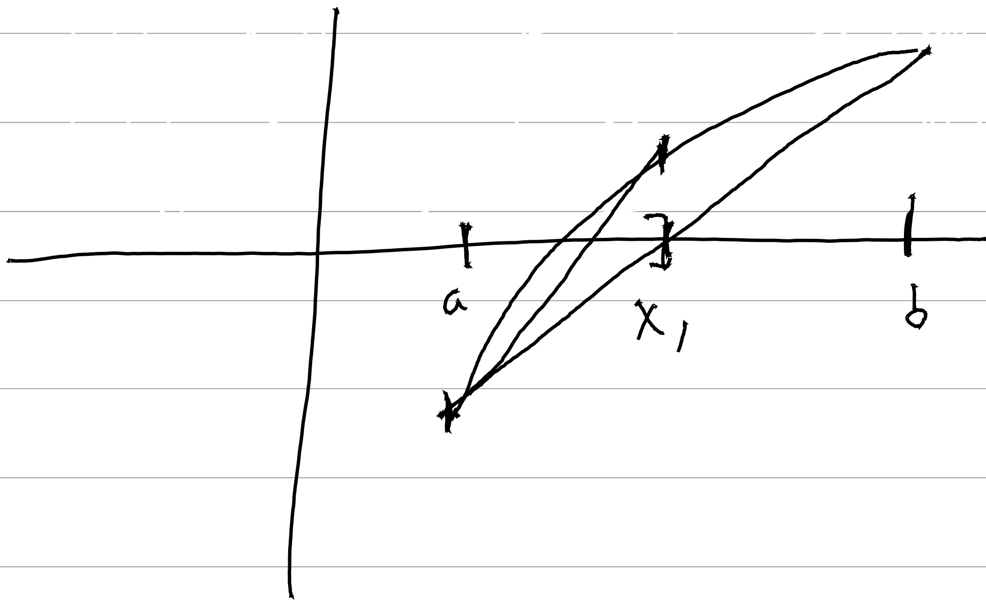
$$d = \frac{f(x_n)\,x_{n-1} - f(x_{n-1})\,x_n}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

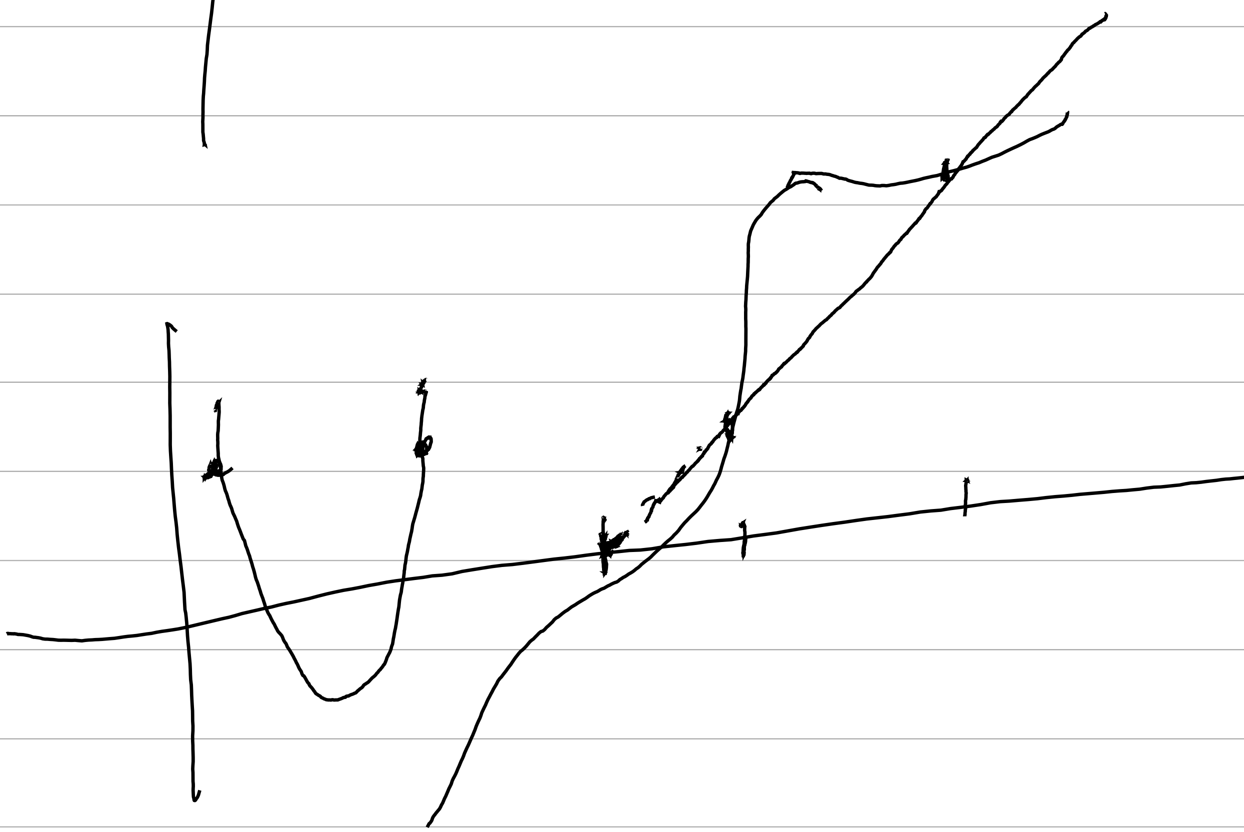
אם $f(d)\cdot f(x_n) \le 0$ אזי $x_{n+1} = d$

אחרת [illegible] $x_{n+1} = x_n$, $x_n = d$

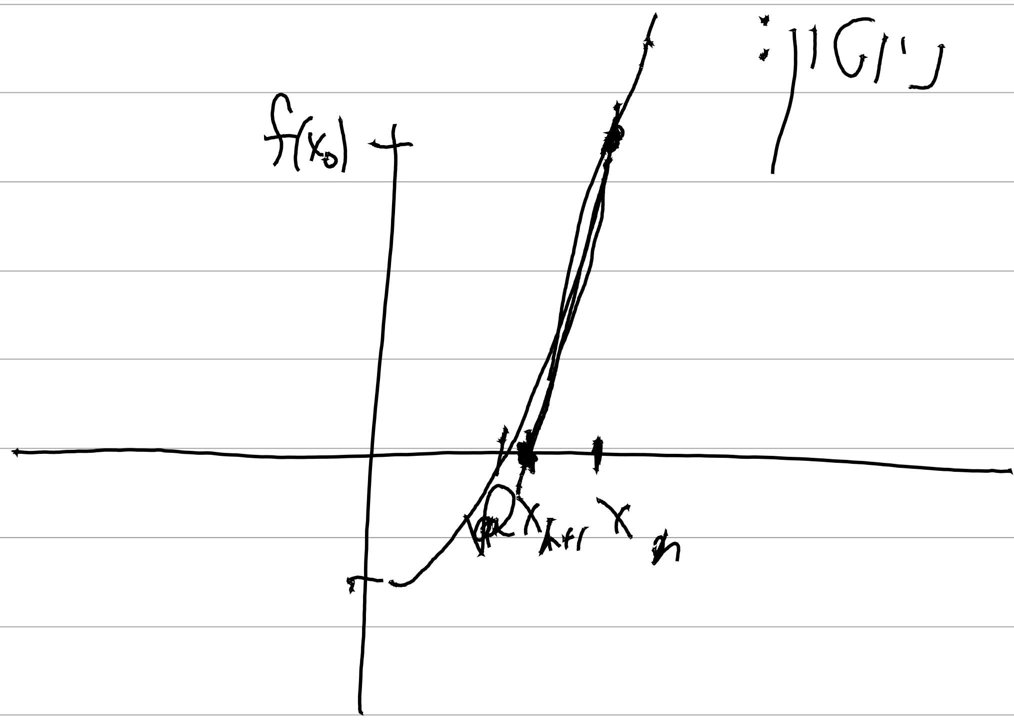
1. שיטת ה-secant

2. שיטת ניוטון





שיטת ניוטון:



$$\frac{x_{n+1} - x_n}{0 - f(x_n)} = \frac{1}{f'(x_n)} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

לדוגמא: כדי לחשב את $\sqrt{a}$

$$x^2 - a = 0 \quad \Leftarrow \quad a \geq 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

$$x_{n+1} = x_n \pm \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & x \geq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-x}} & x \leq 0 \end{cases}$$

$x_0 = \frac{1}{4}$

$x_1 = -\frac{1}{4}$

$x_2 = \pm 1 = \infty$

נגדיר

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

התהליך הוא $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

השורש של f הוא נקודת שבת של φ: נקודה α כך ש- $\varphi(\alpha)=\alpha$.

משפט ההעתקה המכווצת:

יהא (M,d) מרחב מטרי שלם ו- $\varphi: M \to M$ העתקה מכווצת: יש $c<1$ כך ש

$$d(\varphi(x),\varphi(y)) \le c\cdot d(x,y)$$

לכל $x,y\in M$ אז ל- φ יש נקודת שבת אחת ויחידה שנסמנה [illegible]

הגבול של הסדרה, $x_{n+1}=\varphi(x_n)$.

x_0 כלשהו.

<u>הוכחה:</u> לכל $i\le j$,

$$d(x_i,x_j)\le c^i\cdot \underline{\underline{d(x_0,x_{j-i})}}$$

$$d(x_0,x_k)\le d(x_0,x_1)+\dots+d(x_{k-1},x_k)\le$$

$$d(x_0,x_1)(1+c+c^2+\dots+c^{k-1})=\frac{1-c^k}{1-c}d(x_0,x_1)$$

$$\Rightarrow d(x_i,x_j)\le\frac{c^i}{1-c}\,d(x_0,x_1)\longrightarrow 0$$

$\Leftarrow$ $(x_i)_{i\ge 0}$ סדרת קושי $\Leftarrow$ יש

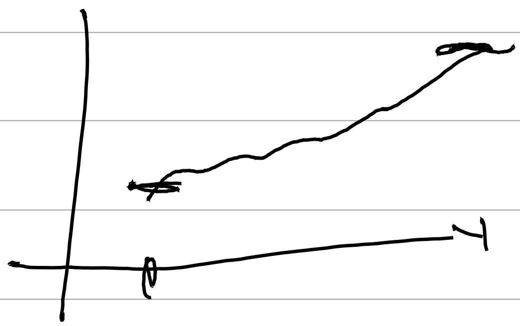
לה גבול α $\Leftarrow$ (φ רציפה)

$$\varphi(\alpha)=\varphi(\lim x_i)=\lim\varphi(x_i)=\lim x_i=\alpha$$

נניח ש- $M\subseteq\mathbb{R}$ (סגורה) ונניח ש-

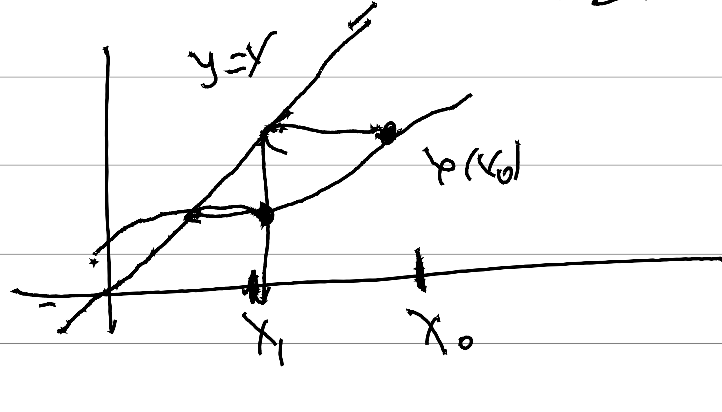
φ גזירה ברציפות, ו-

ו- $|\varphi'|\le c<1$ לכל $x\in M$. אז φ מכווצת.



[אותה שיטה עובדת עבור]

[בדומה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה $\varphi: M\to M$]



טענה: אם α נקודת הורקת

1- $\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\dots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0$

1- $\varphi^{(p)}(\alpha)\neq 0$. $\quad(\varphi\in C^p(M))$

אז סדר ההתכנסות הוא p:

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}\to\frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

הוכחה:

$$\varphi(x)=\alpha+\underbrace{\varphi'(\alpha)(x-\alpha)+\dots+\frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x-\alpha)^{p-1}}+\frac{\varphi^{(p)}(u)}{p!}(x-\alpha)^p$$

$$\alpha+\frac{\varphi^{(p)}(u)}{p!}(x-\alpha)^p \Rightarrow \qquad u\in[\alpha,x]$$

$$x_{n+1}-\alpha=\frac{\varphi^{(p)}(u)}{p!}\cdot(x_n-\alpha)^p$$

במקרה שלנו:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\underline{\varphi'(x)} = 1 - \frac{f'^2 - f\cdot f''}{f'^2} = \frac{f\cdot f''}{[f']^2}$$

$\varphi'(\alpha)=0$ $\boxed{\varphi(x) = x - d\, f'^{-1}(x)\cdot f(x)}$

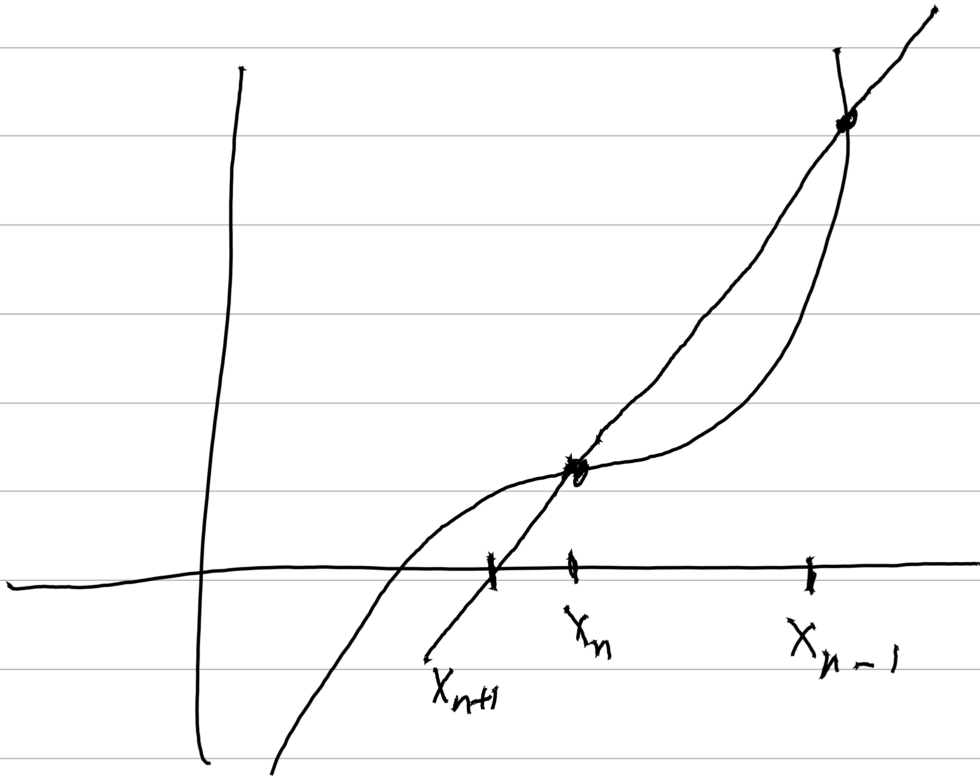
אם C^2 ההתכנסות היא <u>לפחות</u>

ריבועי.

$f'(\alpha)\neq 0 \Rightarrow |\varphi'(u)|<1$ לכל u

בסביבה סמוכה של α.

Secant



$$\frac{x_{n+1} - x_n}{-f(x_n)} = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

נניח ש α שורש פשוט.

$$\underline{x_{n+1}-\alpha} = \underbrace{x_n-\alpha} - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} f(x_n) =$$

$$(x_n-\alpha)\left(1 - \frac{f(x_n)}{(x_n-\alpha)[x_n, x_{n-1}]f}\right) =$$

$$(x_n-\alpha)\left(1 - \frac{[x_n,\alpha]f}{[x_n, x_{n-1}]f}\right) =$$

$$(x_n-\alpha)\left(\frac{[x_n,x_{n-1}]f - [x_n,\alpha]f}{[x_n,x_{n-1}]f}\right) =$$

$$\underline{(x_n-\alpha)}\,\underline{(x_{n-1}-\alpha)} \cdot \boxed{\left(\frac{[x_n, x_{n-1}, \alpha]f}{[x_n, x_{n-1}]f}\right)} \Leftarrow$$

$$(X_n - \alpha)(X_{n-1} - \alpha) \cdot M$$

כאשר $M = \max\limits_{t,s \in U_\alpha} \left| \frac{f''(s)}{2f'(t)} \right|$

(סופי $f'(\alpha) \neq 0$ ולכן המקסימום קיים בקטע סגור מספיק קטן סביב α).

כעת אם $U_\alpha = \{x \mid |x - \alpha| \le \varepsilon\}$

$X_n, X_{n-1} \in U_\alpha$ ו- $\varepsilon \cdot M \le 1$ אז

$$|X_{n+1} - \alpha| \le \varepsilon^2 M \le \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

ובאינדוקציה סיימנו $X_n \to \alpha$.

$$|x_{n+1}-\alpha| \le |x_n-\alpha|\cdot|x_{n-1}-\alpha|\cdot M \le$$

$$\varepsilon\cdot|x_{n-1}-\alpha|M \le \varepsilon^2|x_{n-2}-\alpha|M^2 \dots$$

$$\underbrace{(\varepsilon\cdot M)}_{<1}{}^n\cdot|x_1-\alpha|$$

$$E_n = \underbrace{|x_n-\alpha|}\cdot M$$

$$\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = \frac{E_{n+1}/M}{E_n^p/M^p} \le \phi$$

$$M^{p-1}$$

$$E_{n+1} \le E_n\cdot E_{n-1}$$

$$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{p^2=p+1}$$

$$E_n \le E^{p^n} \qquad E=\max(E_0, E_1^{1/p})$$

$$E_{n+1} \le E_n\cdot E_{n-1} \le E^{p^n}\cdot E^{p^{n-1}} = E^{p^{n-1}(p+1)} = E^{p^{n+1}}$$

$$[x_0, x_1]f = f'(u)$$

$$u \in [x_0, x_1]$$

$$[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(u)}{n!}$$

$$u \in [a, b]$$

שיטת ניוטון לפולינומים:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x^n + a \quad \boxed{\begin{array}{l} b_n = c_n = 1 \\ b_k = t\, b_{k+1} + a_k \\ c_k = t\, c_{k+1} + b_k \end{array}}$$

$$(x-t)(x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \dots + b_1) + b_0 = P(x)$$

$$b_n = 1 \qquad b_k = t\, b_{k+1} + a_k$$

גזירה נומרית

$f'(c_0)$

$c_0, \dots, c_n \qquad f \rightsquigarrow P_{\bar{c},f}$

$$P_{\bar{c},f}(x) = [\bar{c}]f \cdot (x-c_0)\cdots(x-c_{n-1}) \dots$$

$$p'(c_0) = [\bar{c}]f \cdot (c_0-c_1)\cdots(c_0-c_{n-1}) +$$

$$[c_0, \dots, c_{n-1}]f \, (c_0-c_1)\cdots(c_0-c_{n-1}) + \dots$$

$$f(x) = P_{\bar{c},f}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \cdot (x-c_0)\cdots(x-c_n)$$

$$f'(c_0) \overset{?}{=} P'_{\bar{c},f}(c_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(c_0))}{(n+1)!} (c_0-c_1)\cdots(c_0-c_n)$$

[illegible] $h = \max\{|c_0 - c_i|\}$, [illegible]

[illegible] [illegible] h^n

[illegible] .1 c_0, $c_1 = c_0 + h$

$$f'(c_0) = \underbrace{\frac{f(c_0+h) - f(c_0)}{h}} + h\,\frac{f''(\xi)}{2}$$

$$\underline{P_{\bar{c},f}(x) = f(c_0) + \underbrace{([c_0, c_1]f)} \cdot (x - c_0)}$$

$$\underbrace{f(c_1) - f(c_0)}_{h = c_1 - c_0}$$

$$c_{-1} = c_0 - h, \quad c_1 = c_0 + h \qquad -2$$

$$P_{\bar{c}, f}(x) = f(c_0) + [c_0, c_1]f \cdot (x - c_0) +$$

$$\underline{[c_0, c_1, c_{-1}]f \, (x - c_0)(x - c_1)}$$

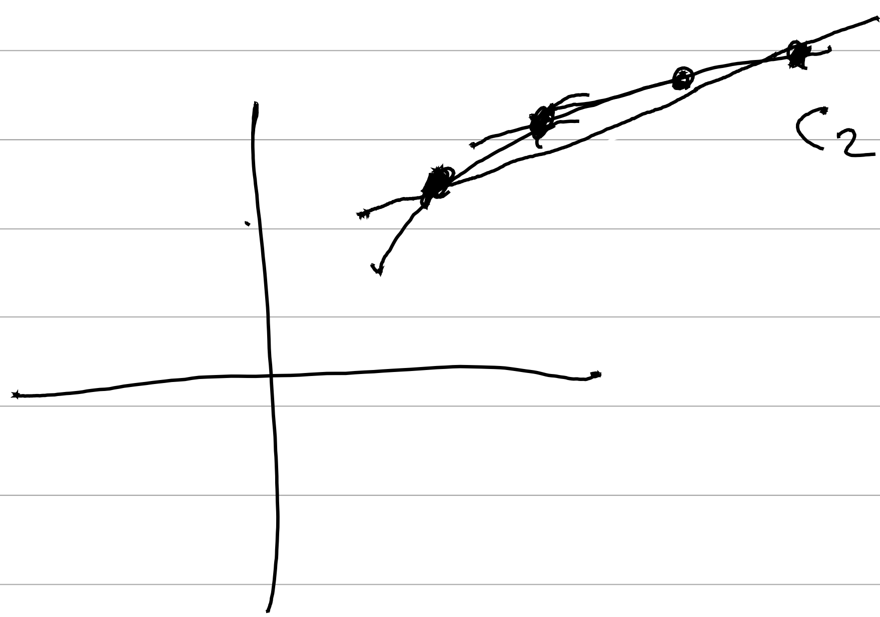
$$[c_0, c_1]f = \frac{f(c_1) - f(c_0)}{h}$$

$$[c_0, c_1, c_{-1}]f = \frac{[c_0, c_1]f - [c_0, c_{-1}]f}{2h} =$$

$$\frac{f(c_1) - f(c_0) + (f(c_{-1}) - f(c_0))}{2h^2} =$$

$$\boxed{\frac{f(c_1) - 2f(c_0) + f(c_{-1})}{2h^2}} \quad P' = \frac{f(c_1) - f(c_0)}{h} - \frac{f(c_1) - 2f(c_0) + f(c_{-1})}{2h} \; ?$$

$$\frac{f(c_{+1}) - f(c_{-1})}{2h}$$



$$e = \frac{f'''(\xi)}{6} \cdot h^2$$

$f_1 = f(c_1) + \varepsilon$ שגיאות חישוב!

$f_{-1} = f(c_{-1}) + \varepsilon$

$$f'(c_0) = \frac{f(c_1) - f(c_{-1})}{2h} + e_2 =$$

$$= \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{\varepsilon}{h} + e_2 =$$

וכעת הכוללת היא

$$E(h) = M \cdot h^2 - \frac{\varepsilon}{h}$$

$$h_0 = \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^{1/3} \quad E(h_0) = \frac{3}{2}(2M)^{1/3} \cdot \varepsilon^{2/3}$$

אם f אנליטית אז נשתמש קושי

$$f'(x_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}dx$$

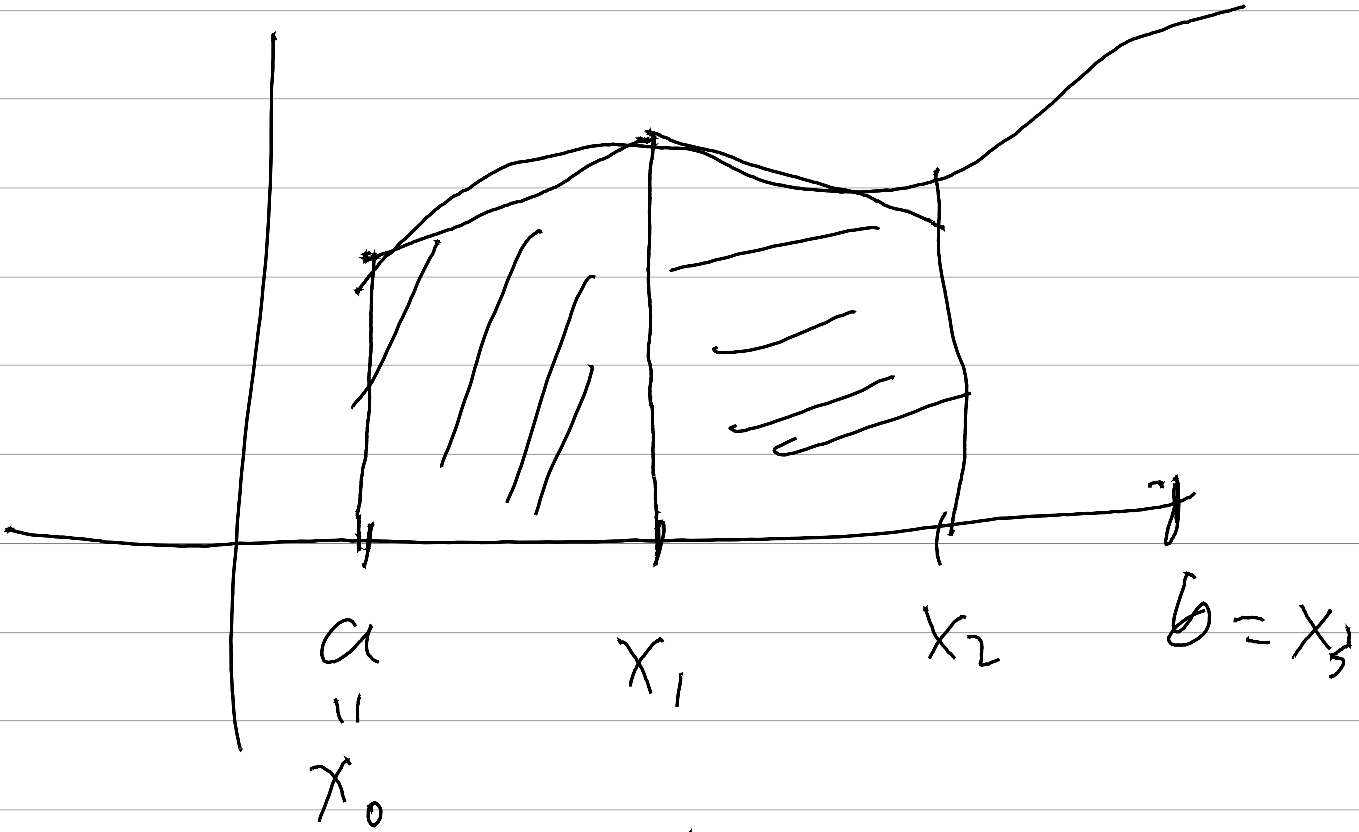
<u>אינטגרציה</u>

רוצים לחשב את

$$\int_a^b f$$

מחלקים את $[a,b]$ לקטעים

הנ״מ $a=\underline{x_0}<x_1\cdots<x_n=b$



$$x_{i+1} - x_i = h$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f = \frac{\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right)(x_{i+1} - x_i)}{2}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{(x - x_i)(x - x_{i+1}) \cdot \frac{f''(\xi(x))}{2}}_{R_1(x)}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} R_1(x) = \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x-x_{i+1})\,dx}\cdot$$

$$\frac{f''(c_i)}{2} = -\frac{h^3}{12}\cdot f''(c_i)$$

$$\int_a^b f\,dx = h\cdot\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \dots + \frac{1}{2}f_n\right) +$$

$$\underbrace{-\frac{h^3}{12}\cdot\sum f''(c_i)}$$

$$\parallel$$

$$E_n^T(f) = -\frac{h^2}{12}\cdot\frac{b-a}{h}\sum f''(c_i) = -\frac{h^2}{12}(b-a)\cdot$$

שיטת סימפסון: לקרב את

f על שני קטעים עוקבים
ע"י פולינום ריבועי

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right) - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(c_i)$$

$$\int_a^b f = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots f_n\right) + E_n^S(f)$$

$$E_n^S(f) = -\frac{1}{180}\cdot(b-a)h^4\cdot f^{(4)}(c)$$

עבור פ' טריגונומטרי

$[a,b]=[0,2\pi]$ e_k

$$E_n^T\left(e^{2\pi i k x}\right)=\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx$$

$$\left(\frac{1}{2}e_k(0)+\sum_{i=1}^{n-1} e_k(2\pi i/n)+\frac{1}{2}e_k(2\pi)\right)\cdot\frac{2\pi}{n}$$

$=0$ $k<n$

על f פ' טריגונומטרי

$$f(x)=\sum_i a_i\cos(ix)+b_i\sin(ix)$$

$$E_n(f)=\sum a_{in}$$

עכשיו: כש $f \in C^r(\mathbb{R})$

כש $a_{i}^{-}(f)$ פולינום ל-0 לפחות

כמו $r-i$

בלשון כללי, מהו מקור

להגיד על קירוב לאינטגרל

מהצורה

$$\int_a^b f(t)\,\underline{\underline{w(t)}}\,dt = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot f(t_k) + E_n(f)$$

9

A - פולינומים ב-x ו-$\frac{1}{x}$

A_1, A_{-1}

$T: A \to A$ $\quad T(f) = f \circ \tau$ $\quad A_\zeta$

$\zeta^m = 1$

$\tau^2 = Id$ $\quad \underline{T^2 = Id}$

T המקיים לינאריות

$A_i =$ המרחב העצמי של i

$\boxed{\tau^m = Id \quad G \text{ חבורה סופית}}$

$x + \frac{1}{x}$ $\quad \tau(x) = \frac{1}{x}$

$A^m = \{ t \in \mathbb{C}[x, \frac{1}{x}] \mid t(x) = \sum_{i=-m}^{m} a_i x^i \}$

$\dim A^m = 2m+1$

$\underline{(x + \frac{1}{x})^k} \in A_1^m = A^m \cap A_1$ $\quad 0 \le k \le m$

$k < m$

$\underline{(x - \frac{1}{x}) \cdot (x + \frac{1}{x})^k}$

אינטגרציה על ידי נוסחה מהירה

$$\int_a^b f(t)\,w(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i) + E_n(f)$$

$w(t)$ – "פונקציית משקל" (אי שלילית,
רציפה, $\int_a^b f(t)w(t)dt$ קיים לכל
פולינום f).

המטרה היא למצוא נקודות
אופטימליות t_i ואופטימליות:

$E_n(f)=0$ לפולינומים שדרגה $\le m$
עבור m מירבי.

V - מרחב של פונקציות f עבורן

$$\Psi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, w(t)\, dt$$

קיים. אז V מרחב לינארי

שכולל את הפולינומים

$$\Psi : V \to \mathbb{R}$$

העתקה לינארית. $S_{\bar t}(f) = (f(t_1), \dots, f(t_n))$

$S_{\bar t} : V \to \mathbb{R}^n$ $\qquad \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\varphi_{\bar t}$ '' $\quad$ $\dim P_k = k$

לכל k, מרחב הפולינומים ממעלה $< k$ P_k

$$\underbrace{\Psi\big|_{P_k}} = \underbrace{\varphi \circ S_{\bar t}\big|_{P_k}} \qquad P_k \subseteq V$$

הצמצום

$S_{\bar t}|_{P_n} : P_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

הוא ע' על (לפי איזומורפיזם)

כל $\varphi = \psi \circ S_{\bar t}^{-1}$ עבור

פותחנו את הבעיה (באופן יחיד).

כלומר נמצא $\bar t$ כך ש-

$\psi|_{P_{n+1}} = \varphi \circ S_{\bar t}$

בפרט, עבור $f \in \ker S_{\bar t}$, $\psi(f) = 0$

באותו אופן עבור חבא, כל g:

$S_{\bar t}(f) = 0 \Rightarrow \psi(f) = 0$

$\varsigma_t(f)=0 \Rightarrow \Psi(f)=0 \qquad f\in P_k$

$\Updownarrow$

$f(t_i)=0\ \forall i \iff f=\pi_n\cdot g \qquad g\in P_{k-n}$

כאשר $\pi_n(t)=(t-t_1)\cdots(t-t_n)$

כלומר מתאפסים בנקודות t

כך $\Psi(\pi_n\cdot g)=0$

לפולינומים $g\in P_\ell$ עד ℓ

כמה שיותר גדול.

נבחר את $\ell<n$ ומקסימלי כך.

$\ell=n-1$. אז π_n הפולינום

מסקנה: n אורתוגונלי ביחס למכפלה:

הפנימית $(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle=\Psi(u\cdot v)$

3 דוגמאות:

1. $w(t)=1$, $a=-1, b=1$

t_i האפסים של פולינומי לג'נדר

2. $a=-1, b=1$, $w(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

t_i האפסים של Π_n

$$w_i = \int \underbrace{\frac{\Pi_n(t)}{(t-t_i)\cdot \Pi_n'(t_i)}}_{\overset{?}{=}\; w(t_i)} w(t)\,dt$$

1. כל השורשים של Π_n הם ממשיים ושונים.

2. כל ה־$w_i > 0$.

l_i – הפולינום שמתאים לאיבר ה־i בבסיס הסטנדרטי

$$w_i = \sum w_j l_i^2(t_j) = \int l_i^2 w \, dt > 0$$

3. לכל f, $E_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

יש סדרה $p_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$,

p_i פולינום ממעלה i.

$$|E_n(f)| = |E_n(f - p_{2n-1})| =$$

$$\left| \int_a^b (f - p_{2n-1})\, w(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (f(t_i) - p(t_i)) \right| \leq$$

$$\left| \int_a^b \underline{\underline{(f - p)}}\, w(t)\,dt \right| + \sum_{i=1}^{n} w_i\, |f(t_i) - p(t_i)| \leq$$

$$\|f - p\|_\infty \cdot \Big(\underbrace{\int 1\, w(t)\,dt}_{\shortparallel} + \underline{\underline{\sum w_i}} \Big) =$$

$$\underline{\underline{\|f - p\|_\infty}} \cdot \underline{\underline{2 \cdot \mu_0}}$$

<u>הערה:</u> את סדרת תת'
המרחבים P_k אפשר להחליף
בסדרה יותר כללית $V_k \subseteq V_{k+1} \subseteq \dots$

V - מרחב פונקציות

$\psi : V \to \mathbb{R}$

$\theta = \varphi \circ S_{\tilde{t}} : V \to \mathbb{R}$

$E = \psi - \theta$

$Ep = 0$ לכל $p \in P_k$

אם $f \in C^{k+1}([a,b])$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i + \frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt$$

$$E(f) = \frac{1}{k!} E \int_0^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt =$$

$$\frac{1}{k!} E \int_0^b (x-t)_+^k f^{(k+1)}(t)\,dt \; = $$

$$\frac{1}{k!}\int_0^b \underbrace{E\left((x-t)_+^k\right)}_{k!\,K_k(t)} f^{(k+1)}(t)\,dt$$

$$(x-t)_+ = \begin{cases} x-t & t \le x \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$E(f) = \int_a^b \underline{\underline{K_k(t)}}\, f^{(k+1)}(t)\, dt$$

$K_k(t) \geq 0$ o/c

$$= f^{(k+1)}(\tau) \cdot \underbrace{\int_a^b K_k(t)\, dt}$$

Numerical Linear Algebra

Folkmar Bornemann

---

1. לפתור מערכת משוואות

$A\bar{x} = b$

2. למצוא ערכים ווקטורים עצמיים

מקרה קל: A מטריצה משולשת

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$cy = d_2 \Rightarrow \underbrace{y = d_2/c}$$

רעיון: נמצא פירוק $A = LU$

כאשר U משולשת עליונה

L משולשת תחתונה

[נניח ש-A הפיכה]

$Ax=b \iff LUx=b \iff$

$Ux=c$ וגם $Lc=b$

נדרוש גם שב-L כל האיברים

על האלכסון הם 1!

טענה: פירוק כזה הוא יחיד

(אם הוא קיים)

$$L_1U_1 = L_2U_2 \Rightarrow \underset{I}{L_2^{-1}L_1} = U_2U_1^{-1}$$

צ״ל למצ׳:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left[= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & x \end{pmatrix} \right] ?$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \boxed{y} \end{pmatrix}$$

[לא קיים כאשר $a=0$, נניח ש-$a\neq 0$]

$$xa = c \Rightarrow x = c/a$$

$$bx + y = d \Rightarrow y = d - \frac{bc}{a}$$

$A = L\,U =$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \alpha_1 & a_1 \\ b_1 & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ l_1 & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\alpha_1}{\overset{\shortparallel}{x}} & r_1 \\ 0 & U' \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$n-1$

$(x \mid r_1) = (\alpha_1 \mid a_1)$

$\underline{x = \alpha_1 \neq 0}$ | כדי שיהיה פתרון

$\underline{l_1 = b_1/\alpha_1}$

$B = L'U'$ פתרון של הבעיה בממד אחד יותר נמוך, כאשר

$B = A' - l_1 r_1$

באופן כללי, יש מטריצת פרמוטציה

P כך ש-

$$PA = LU$$

כאשר U משולשת עליונה,

L משולשת תחתונה עם 1

על האלכסון ו- $|x| \le 1$ לכל

קואורדינטה x ב-L.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -4/5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4/5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4/5 \end{pmatrix}$$

$$P_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & P_2 & \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$P$$

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{<1} \qquad 0 < \varepsilon$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - 1/\varepsilon \end{pmatrix}}_{} \approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -1/\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

פירוק Cholesky

נניח ש-$A=A^*$ וחיובית:

לכל $\bar{x}\neq 0$, $\bar{x}^*A\bar{x}>0$

(כיוון ש $A=A^*$ אז

$$\left(\left(\bar{x}^*A\bar{x}\right)^*=\bar{x}^*A^*\bar{x}=\bar{x}^*A\bar{x}\in\mathbb{R}\right)$$

כמעט בילינארית

$$(\bar{x},\bar{y})\mapsto\bar{x}^*A\bar{y}$$

מכפלה פנימית.

אז כל הערכים העצמיים ממשיים וחיוביים.

הערה: ו.כ.ש A חיובית אז

היא שונה מ-0 על האלכסון,

2. רכיבי המטריצות על האלכסון

הם גם חיוביות

אז למטריצה כזו יש פירוק

$$A = LU$$

לכן

$$A = A^* = \underbrace{U^*}\underbrace{L^*}$$

אם נדרוש שהאיברים על האלכסון יהיו חיוביים אז-

$L^* = U$

(ולכן גם $U^* = L$)

לכן יש פירוק יחיד $A = L \cdot L^*$

כאשר L משולשת תחתונה

וכניסות על האלכסון של L

חיוביות.

מחשבים באותה דרך כמו

פירוק LU,

$$\begin{pmatrix} \alpha & a_1 \\ & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \\ \frac{a_1}{\sqrt{\alpha}} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & \frac{a_1}{\sqrt{\alpha}} \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

1. נניח ש- A מטריצה כללית

[illegible]

$A: K^m \to K^n$

$K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$

נניח ש- A חח״ע. רוצים

לפרק $\underline{A = QR}$

כאשר Q אורתונורמלית

ו- $R: K^n \to K^n$ משולשת עליונה.

עם איברים חיוביים על האלכסון.

הערה: A חח״ע אם ורק אם

A^*A חיובית.

השמאלי: A^*A מוגדרת

לעתה, כי $\|Ax\|=0 \iff$

$Ax=0 \iff x=0$

נניח ש-A חח"ע. לכן כלומר

לרשום

$\underline{A^*A=L\cdot L^*}$

L משולשת תחתונה. נקח

$R=L^*$, ונגדיר $Q=AR^{-1}$

נראה ש- $Q^*Q=Id$. כלומר

$Q^*Q=(R^{-1})^*A^*AR^{-1}=\underline{L^{-1}\cdot(L}\cdot L^*)\cdot R^{-1}$

$R\cdot R^{-1}=Id$

עבג ני, של C אז $A=Q_1R_1$

$$A^*A = R_1^* Q_1^* Q R_1 = R_1^* R_1$$

ו.ג.רף היחיד

גישה אלטרנטיבית: Q מבין

למעשה המושג של תהליך

גרם-שמידט על עמודות
המטריצה של A:

$$A = Q\cdot R \iff A\cdot \underline{R^{-1}} = Q$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots \\ & \gamma & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad A = (a_1, \ldots, a_n)$$

$\alpha = 1/\|a_1\|$ $\beta\cdot a_1 + \gamma a_2$

אלגוריתם:

$$A = (a_1, \dots, a_k) \qquad \boxed{\begin{aligned} A &= Q \cdot R = \\ &\underline{q_1 \cdot r_1} + (q_2, \dots, q_k)\, R' \end{aligned}}$$

$$Q = (q_1, \dots, q_k) \qquad A = QR$$

$$Q^* A = R$$

$$R = \left(\begin{array}{c|c} \rho & \bar{r} \\ \hline 0 & R' \end{array}\right) \qquad (a_2, \dots, a_k) = (q_2, \dots, q_k) \cdot$$

$$\rho \cdot q_1 = a_1 \Rightarrow \rho = \|a_1\|, \ \underline{q_1 = a_1 / \rho}$$

$$q_1 \cdot a_i = r_i \qquad q \cdot A = (\rho, \bar{r})$$

ואז אפשר להמשיך באינדוקציה:

$$A - q \cdot r_1 = Q' \cdot R'$$

ניתוח שגיאות של פתרון מערכת משוואות

$Ax = b$ (A הפיכה)

$\mathrm{cond}(A) = k(A)$

$k(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$

b^* – הערכה, של בעיגול של b

$$\boxed{\frac{\|b^* - b\|}{\|b\|}}$$

$$\frac{\|A^{-1}b^* - A^{-1}b\|}{\|A^{-1}b\|} = \frac{\|A^{-1}(b^* - b)\|}{\|A^{-1}b\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\,\|b^* - b\|}{\|A^{-1}b\|} =$$

$$\frac{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|}{\|A^{-1}b\|} \cdot \frac{\|b^* - b\|}{\|b\|} = \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A \cdot A^{-1} \cdot b\|}{\|A^{-1}b\|} \cdot \frac{\|b^* - b\|}{\|b\|} \le$$

$$\leq \kappa(A) \cdot \frac{\|b^* - b\|}{\|b\|}$$

$$\|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\|$$

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|$$

עכ $\tilde{A}$ קירוב של A

$$\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}$$

$$\frac{\|A^{-1}b - \tilde{A}^{-1}b\|}{\|\tilde{A}^{-1}b\|} = \frac{\|A^{-1} \cdot \tilde{A}\tilde{A}^{-1}b - A^{-1} \cdot A\tilde{A}^{-1}b\|}{\|\tilde{A}^{-1}b\|} =$$

$$\frac{\|A^{-1}(\tilde{A} - A)\tilde{A}^{-1}b\|}{\|\tilde{A}^{-1}b\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \, \|\tilde{A} - A\| \cdot \|\tilde{A}^{-1}b\|}{\|\tilde{A}^{-1}b\|} =$$

$$\frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \|\tilde{A} - A\|}{\|A\|} = \kappa(A) \cdot \frac{\|\tilde{A} - A\|}{\|A\|}$$

$$\|ABv\| \le \|A\|\,\|Bv\| \le \|A\|\,\|B\|\,\|v\|$$

משפט (Kahan):

$$\frac{1}{\kappa(A)} = \min\left\{ \frac{\|A-\tilde{A}\|}{\|A\|} \;\middle|\; \tilde{A} \text{ לא הפיכה} \right\}$$

הוכחה: נניח $\tilde{A}$ לא הפיכה,

צ"ל

$$\frac{\|A-\tilde{A}\|}{\cancel{\|A\|}} \ge \frac{1}{\cancel{\|A\|}\cdot\|A^{-1}\|}$$

כלומר צ"ל ש

$$\|A^{-1}\|\cdot\|A-\tilde{A}\| \ge 1$$

:

אשל

$$\|A^{-1}\|\cdot\|A-\tilde{A}\| \geq \|A^{-1}(A-\tilde{A})\| =$$

$$\|I-A^{-1}\tilde{A}\|$$

אז מספיק להוכיח ש-

$$\|I-A^{-1}\tilde{A}\| \geq 1$$

אבל יש $0\neq v\in\ker(\tilde{A})$ אז

$$\|I-A^{-1}\tilde{A}\| \geq \|(I-A^{-1}\tilde{A})v\| / \|v\| = \|v\|/\|v\|$$

$\forall$ כל $\tilde{A}$ לכן הפיכה כך

$$\|A-\tilde{A}\| = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

ניקח v כך ש- $\|v\|=1$ ו- $\|A^{-1}v\| = \|A^{-1}\|$, $w=A^{-1}v$

נגדיר את מרחב U משלים

ל- w ונגדיר $\tilde{A}w=0$

ו- $\tilde{A}|_U = A|_U$.

$$\underbrace{\|A-\tilde{A}\|}_{} = \frac{\|(A-\tilde{A})\cdot w\|}{\|w\|} = \frac{\|v\|}{\|A^{-1}v\|} =$$

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

$$\sup_{\substack{\|cw+u\|=1 \\ u\in U}} \|(A-\tilde{A})(cw+u)\| = \sup \|(A-\tilde{A})cw\| =$$

$$\sup \|Acw\| = \frac{\|Aw\|}{\|w\|}$$

שגיאה של האלגוריתם

f - הפונקציה שרוצים לחשב

$\hat{f}$ - אלגוריתם

בהינתן קלט y, האם יש

$\hat{y}$ כך ש- $\cancel{\hat{f}(y) = f(\hat{y})}$ (קרוב ל-y)

אם לא שווה, אפשר לצפות

לשגיאה יחסית דרך $\mathrm{cond}(f)(y)$

הנחה: פעולות החשבון הן

יציבות. למשל $a \hat{\cdot} b = \hat{a} \cdot b$

משפט: מכפלי ספירה,

מרכבות שמריצה קוקליר

פעולות יציבות.

ככל מחלקות לפי פעולה יציבה

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot (c\ d) = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{*} \cdot (c\ d)^{*}$$

$\det \neq 0$

נניח ש- $f = h \circ g$

הומאומורפיזם (גו)

$$\hat{f} = h \circ f \circ g$$

ול- פונקציות בעולם.

$\hat{f}$ יכול להיות לא יציב אם

א. מס' המצב של h גדול

ב. מס' המצב של g^{-1} (בהנחה שיש הפיכה) גדול.

שגיאה באלגוריתמים לפתרון משוואות

$\tilde{x}$ - פתרון מקורב שהתקבל מאלגוריתם.

$\boxed{y^{*} = \tilde{A} \quad , \quad \hat{f}(y) = \tilde{x}}$

$$w(\tilde{x}) = \min\left\{\frac{\|\tilde{A} - A\|}{\|A\|} \;\middle|\; \tilde{A}\tilde{x} = b\right\} =$$

$$\min\left\{\frac{\|E\|}{\|A\|} \;\middle|\; (A+E)\tilde{x} = \underline{\underline{b}}\right\}$$

C ענהי (Rigal-Gaches)

$$w(\tilde{x}) = \frac{\|b - A\tilde{x}\|}{\|A\| \, \|\tilde{x}\|}$$

$$\frac{\text{הושת דומה}}{\text{פיותן הקיפל הלפ}}$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} = \frac{\|A^{-1}b - A^{-1}A\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} \leq$$

$$\|A^{-1}\| \cdot \frac{\|b - A\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} = \kappa(A) \cdot w(\tilde{x})$$

האלגוריתמים שדיברנו עליהם:

$f = h \circ g$

כאשר

$g(A) = (M, N)$, $M \cdot N = A$

$h(M, N, b)$ - פתרון מערכת משוואות.

f אלגוריתם יציב אם ורק אם:

- מספר המצב של h קטן

ו- מספר המצב של g^{-1} קטן

כלשפ 9' כפל מטריצות

מס' המצב של כפל מטריצות:

$$\frac{\|\tilde{M}\cdot\tilde{N} - M\cdot N\|}{\|M\cdot N\|} =$$

$$\frac{\|\tilde{M}\cdot\tilde{N} - M\tilde{N} + M\tilde{N} - M\cdot N\|}{\|M\cdot N\|} \le \boxed{\frac{\|\tilde{M} - M\|}{\|M\|}, \frac{\|\tilde{N} - N\|}{\|N\|}}$$

$$\frac{\|\tilde{M} - M\|\cdot\|\tilde{N}\| + \|M\|\,\|\tilde{N} - N\|}{\|M\cdot N\|} =$$

$$\frac{\frac{\|\tilde{M} - M\|}{\|M\|}\cdot\|M\|\|\tilde{N}\| + \|M\|\|N\|\cdot\frac{\|\tilde{N} - N\|}{\|N\|}}{\|M\cdot N\|} \cdot \frac{\|M\|\cdot\|N\|}{} \le 2\cdot\|M\cdot N\|$$

רוצים לחשב את מס' המצב
של כפל מטריצות:

$M, N \mapsto M\cdot N$

$$\frac{\|\tilde M\cdot\tilde N - M\cdot N\|}{\|M\cdot N\|} = \qquad \Big| \quad \begin{aligned}\tilde M &= (\tilde M - M) + M\\ \tilde N &= (\tilde N - N) + N\end{aligned}$$

$$\|(\tilde M - M)\cdot(\tilde N - N) + M(\tilde N - N) + (\tilde M - M)\cdot N + M\cdot N - M\cdot N\| \le$$

$$\|M\|\underbrace{\|\tilde N - N\|}_{\|N\|\cdot\varepsilon} + \underbrace{\|\tilde M - M\|}_{\varepsilon\cdot\|M\|}\|N\| \le 2\|M\|\cdot\|N\|\cdot\varepsilon$$

$$\kappa\left(\underset{M,N}{\text{הכפלת}}\right) = \frac{2\|M\|\|N\|}{\|M\cdot N\|}$$

יציבות של אלגוריתם לפתרון
משוואות לינארית $Ax=b$

$A \mapsto B\cdot C$ פירוק
B, C משולשות לגורמים

1. $\underbrace{A = Q \cdot R}$, כאשר R משולשת עליונה ו- Q אורתוגונלית

Q אורתוגונלית $\Leftarrow$ $\|QR\| = \|R\|$

(בנורמה L_2).

$$\|QRv\| = \|Rv\|$$

$$\|Q\| = 1$$

2- A סימטרית <u>וחיובית</u>,

$$A = R^T \cdot R$$

כאשר R משולשת עליונה.

$\|A\| =$ ערך עצמי
הכי גבוה

$$\|A\| = \sqrt{\|A^T A\|} = \sqrt{\max \lambda,\ \lambda \text{ ע"ע של } A^T A}$$

$$A = R^T R$$

$$\|R\|^2 = \|R^T R\| = \|A\|$$

$$\|A\|^2 = \max_{\|v\|=1} \langle Av, Av \rangle =$$

$$\max(\langle A^T A v, v \rangle)$$

3. $A = LU$, U משולשת עליונה, L משולשת תחתונה עם 1 על האלכסון.

פירוק QR שלקוח מגרם שמידט:

$u_1, u_2, u_3, \dots \in V$, $\langle , \rangle$ $= \mathbb{R}^n$

נבנה אורתונורמלית $v_1, v_2, v_3, \dots \in V$

כך ש

א. $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

ב. לכל i, $\langle u_1, \dots, u_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$

כלומר

$A = (u_1\ u_2\ u_3 \dots)$ | $W_1 = \langle e_1 \rangle$

$Q = (v_1\ v_2\ v_3 \dots)$ | $W_2 = \langle e_1, e_2 \rangle$, $W_3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$

א: Q אורתוגונלית

W - מרחב מימד סופי)

$W_1 \subseteq W_2 \subseteq \dots W_k = W$

$A, Q : W \to U$

לכל i $\qquad Aw_i = Qw_i$

A, B חח"ע

נגדיר $\qquad A \sim B$

אם $\qquad Aw_i = Bw_i$ לכל

i.

אז $\qquad A \sim B$ אם

ורק אם $\qquad A = BR$ כאשר

$R : W \to W$ [illegible] $RW_i = W_i$

$R = B^{-1} A$

$A = QR \Rightarrow Q = AR^{-1}$

$u_1 \mapsto u_1 / \|u_1\| \qquad \left({}^{1}/_{\|u_1\|} \ \ldots \right)$

$Ax = b$

A חזק יותר לכן דווקא רגילה

$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $m \geq n$

רוצים למצוא x עבורו

$\|Ax - b\|$

מינימלי.

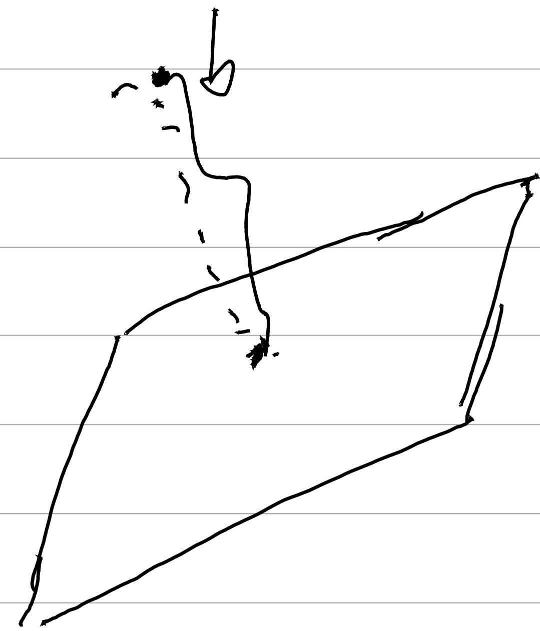
במילים אחרות, למצוא וקטור

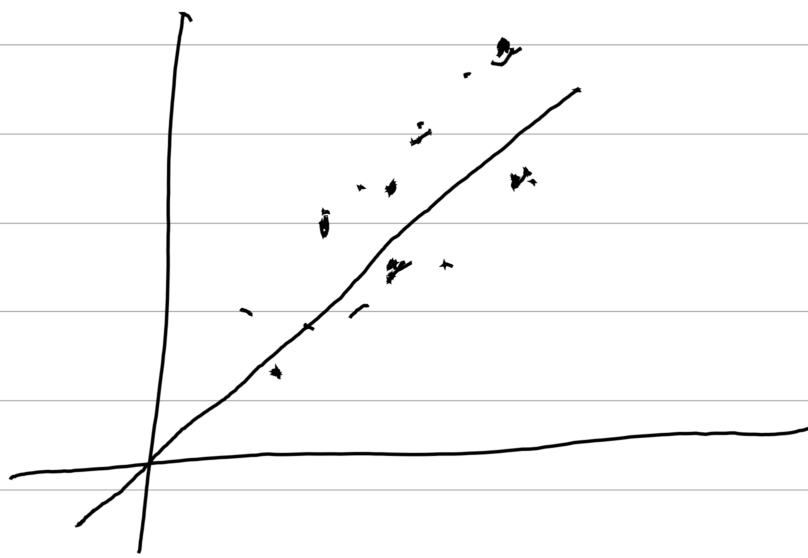
Ax בתמונה של A שקרוב

ביותר ל-b.

<u>דוגמא:</u> $n=1$, $A = \underbrace{(1\ 1 \dots 1)}_{m}^{T}$

לכל מספר X ע $+_i$ $x \text{"="} b_i$





ראינו: הפתרון הוא הפתרון של

המערכת

$$A^TAx = A^Tb$$

בעיות: 1. לא יעיל כשהופכים מטריצות

2. לא יציב מבחינה חישובית:

- מכפילות מס' המצב של

הבעיה $Ax=b$ ולהשוות לאלגוריתם

במקרה שלבעיה יש פתרון

מס' המצב הוא

$$\kappa(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\| = \sqrt{\|A^TA\|}\cdot\sqrt{\|(A^TA)^{-1}\|} = \sqrt{\kappa(A^TA)}$$

דוגמא 3: ε קטן.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow x = (1, 1)$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1+\varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix}}$$

$$\kappa(A^T A) = 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$$

$$\kappa(A) = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$$

לא יציב

$$* \; \|A^T A\| = \max\left((T - (1+\varepsilon^2))^2 - 1 \right) =$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

$1+a \qquad \varepsilon^2 \qquad \underline{\underline{2+\varepsilon^2}}$

$a-1 \qquad \frac{1}{\varepsilon^2}$ ~

במולים של גרם-שמידט

$A = QR$

$$\underline{A^T} A x = A^T b = \cancel{R^T} Q^T b$$

$$\|$$

$$R^T \underbrace{Q^T Q}_{I} R x = \cancel{R^T} R x$$

$$Rx = \underline{Q^T} b$$

ערכים עצמיים וקטורים עצמיים:

$$x^{n+1} + \sum a_i x^i = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & & -a_1 \\ & 0 & \vdots \\ & 1 & -a_n \end{pmatrix}$$

כדי מספיק לדעת למצוא

וקטור עצמי וערך עצמי אחד

(בהנחה שהמרחבים העצמיים

פשוטים)

יש שלושה לקחת פה

נשלים את זה לבסיס אורתונורמלי,

בבסיס כזה:

$$A_1 = Q^* A Q$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \cdots \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix}$$

$$(x, a_2, \ldots, a_n)$$

$$\alpha x + \ldots = \mu x \qquad \alpha \neq \mu \quad \checkmark$$

$$A = Q^t U Q$$

Schur decomposition

(A נורמלית) $A^tA = AA^t$ אם

גם U נורמלית

$$U = QAQ^t$$

$$U^tU = QA^t\underbrace{Q^tQ}AQ^t = Q\underbrace{A^tA}Q^t =$$

$$QAA^tQ^t \ldots = \underline{\underline{UU^t}} \Rightarrow$$

U

אלכסונית

נתונה מטריצה A ש- V , λ

ערך עצמי! וקטור עצמי

$\tilde{\lambda}$ ערך עצמי של מטריצה:

מקורבת $\tilde{A}$

$$\frac{|\tilde{\lambda} - \lambda|}{\cancel{|\lambda|}} \qquad \frac{\|\tilde{A} - A\|_2}{\cancel{\|A\|}}$$

$\underline{\tilde{\lambda}}$

$$\alpha = \min\{\|A - \tilde{A}\| \mid \lambda \text{ ערך עצמי של } \tilde{A}\}$$

$$= \|(\lambda I - \tilde{A}) - \underbrace{(\lambda I - A)}\|$$

$\tilde{\lambda} I - \tilde{A}$ לא הפיכה

$\alpha =$ $d(\tilde{\lambda}\underline{I} - A$ כ [כל הפעולות מוגדרות] $) =$

$$\frac{\|\tilde{\lambda}I - A\|}{\underbrace{\kappa(\tilde{\lambda}I - A)}} = \underbrace{\|(\tilde{\lambda}I - A)^{-1}\|}^{\perp} =:$$

$\underline{sep(\tilde{\lambda}, A)}$ $\Big(= 0$ אם $\tilde{\lambda}$ ע"ע של A, עצמי $\Big)$

$$\frac{|\tilde{\lambda} - \lambda|}{\|\tilde{A} - A\|} \le \boxed{\frac{|\tilde{\lambda} - \lambda|}{sep(\tilde{\lambda}, A)}}$$

$\|(\tilde{\lambda}I - A)^{-1}\|$

v וקטור עצמי, ערך עצמי μ

$$(\lambda I - A) v = \lambda v - \mu v = (\lambda - \mu) v$$

$$(\lambda I - A)^{-1} v = \frac{1}{(\lambda - \mu)} v$$

$$\Downarrow$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \geq \left| \frac{1}{\lambda - \mu} \right|$$

$$\Downarrow$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \geq \underline{\frac{1}{d(\lambda, \sigma(A))}}$$

$$\sigma(A) = \left\{ \text{[illegible]} \ A \right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\operatorname{sep}(\lambda, A) \leq d(\lambda, \sigma(A))}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$:דוגמא

$$d(\lambda, \sigma(A)) = |\lambda|, \quad \sigma(A) = \{0\}$$

$$(\lambda I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\lambda^2} \\ \frac{y}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \underset{\lambda \to 0}{\approx} \left|\frac{1}{\lambda^2}\right|$$

סימון: עבור A נורמלית אזי

$$sep(x,A) = d(x, \sigma(A))$$

הערה! A נורמלית A לכסינה

ע"י מטריצה אוניטרית

עם ההבדל לא משמעותי. אבל

ההנחות אוניטרית זה יעזור

להיות ש- A אלכסונית

במקרה הזה התנאי מספיק

עם הערך העצמי הגדול ביותר

הערה: A נורמלית

דוגמא: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. כל וקטור הוא

וקטור עצמי ולכן זה לא נכון

שאם יש ב-A שג׳ונה.

נניח שכל הערכים העצמיים

הם חד ממדיים.

נניח שרוצים לחשב $(\tilde{x}, V)$

ערך עצמי ווקטור עצמי

של $\tilde{A}$ - V מרחב הילברט

מרחב פרויקטיבי

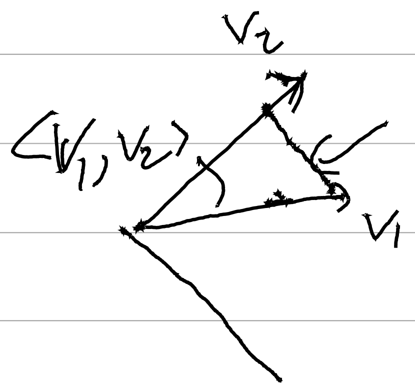
$P(V) = \{ l \mid l \subseteq V$ תת-מרחב ממימד 1 $\}$

נגדיר $d(l_1, l_2)$

מונח למשל, מה הזווית ביניהם

$l_1 = \langle v_1 \rangle \quad , \quad l_2 = \langle v_2 \rangle$

$\|v_1\| = \|v_2\| = 1$



אם $W = l_2^{\perp}$

$\|\pi_W (v_1)\| = d(l_1, l_2)$

$\langle v_1, v_2 \rangle^2 = \cos^2 \alpha$

$1 = \|v_1\|^2$

$\underbrace{(\|v_1\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2)}$

טענה: אם A נורמלית

ויהי הערך העצמי λ פשוט

אזי

$$d(\tilde{\ell},\ell) \le \frac{\|\tilde{A}-A\|}{\operatorname{dist}(\tilde{\lambda},\sigma(A)\setminus\lambda)}$$

כאשר $\tilde{\ell}$ מרחב עצמי של $\tilde{A}$ עם ערך עצמי $\tilde{\lambda}$.

הוכחה: נסמן $w=\ell^{\perp}$,

$\pi_w : V \to w$ הטלה. נבחר $\tilde{v}\in\tilde{\ell}$,

$\|\tilde{v}\|=1$,

$$\pi_W(\tilde{A} - A)\tilde{v} = \pi_W(\tilde{\lambda}\tilde{v} - A\tilde{v}) =$$

$$\pi_W \cdot \tilde{\lambda}\tilde{v} - A|_W \pi_W(\tilde{v}) =$$

$$(\tilde{\lambda} I - A|_W)\pi_W(\tilde{v})$$

$$\pi_W(\tilde{v}) = (\tilde{\lambda} I - A|_W)^{-1}\pi_W(\tilde{A} - A)\tilde{v}$$

$$d(\ell, \tilde{\ell}) = \|\pi_W(\tilde{v})\| \le \|(\tilde{\lambda} I - A|_W)^{-1}\| \cdot$$

$$\|\pi_W\| \cdot \|\tilde{A} - A\| \qquad 1/\mathrm{sep}(\tilde{\lambda}, A|_W) =$$

$$V = \ell \oplus W$$

$$A|_\ell \subseteq \ell, \quad A|_W \subseteq W \qquad \left(\frac{1}{\mathrm{dist}(\tilde{\lambda}, \sigma(A|_W))} \right)$$

$$\sigma(A) - \{\lambda\}$$

אלגוריתם: בהינתן העתקה לינארית

העתקה A מ-V ל-V, A מגדירה

העתקה $P(A): P(V) \to P(V)$

$P(A)(\ell) = A(\ell)$

המרחבים העצמיים הם בדיוק

נקודות השבת של $P(A)$.

אם $P(A)$ העתקה מכווצת

אז אפשר למצוא נקודות

שבת ע"י איטרציות.

בעיה: אם יש ערך עצמי פשוט

מערך מוחלט מקסימלי, אז $P(A)$

(ירמפה מפוצת גרמוש של

כמה רחבה שווים משולשים ?

למה רחוב הצבעי.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}}$$

$A^k v_0$

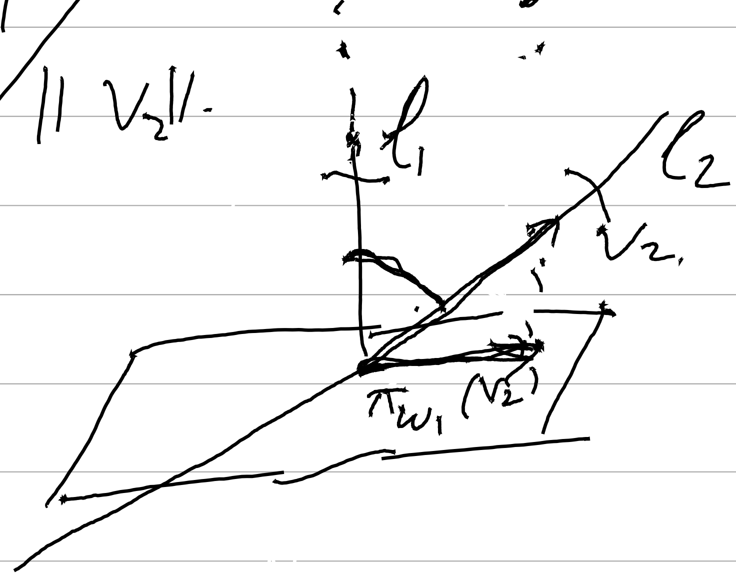
$$c = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}$$

$d(l_1, l_2)$

$\exists v_2 \in l_2$

$$\|\pi_{W_1}(v_2)\| \,/\, \|v_2\|.$$

$W_1 = l_1^{\perp}$



$A : V \to V$

כ/פ $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

λ_i הערכים העצמיים

$l_1, \dots, l_n$

המרחבים העצמיים המתאימים.

$V_0 \not\perp l_1$, $[A^k v_0] \to l_1$

(המהירות מבוססת על קבוע $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$)

$l_1^{\perp} = \bigoplus_{i=2}^{n} l_i$

מטריצה נורמלית: $A^*A = AA^*$

מעל $\mathbb{C}$ V (=) סכום ישר

אורתוגונלי של מרחבים עצמיים $\iff A = Q^*DQ$

דוגמא 3 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ אז

$$A^k\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{cases}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & k \text{ זוגי}\\ \begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix} & k \text{ אי זוגי}\end{cases}$$

שים ♡ $x,y\neq0$ אז המרחב
$[A^k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}]$

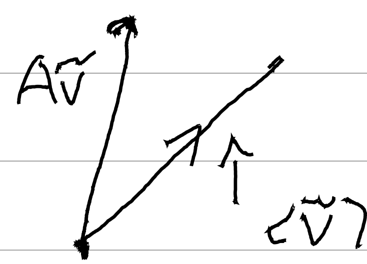
לא מתכנס.

$\tilde{v}$ וקטור עצמי מקורב

רוצים למצוא λ האופטימלי

כך ש: $\|\tilde{v}\lambda - A\tilde{v}\|$ מינימלי

$\|\tilde{v}\|=1$



$\Leftarrow$ $\lambda=<\tilde{v},A\tilde{v}>$

מתחילים מ- v_0 "רנדומלי"

מבצעים איטרציות

$$w_{k+1} = A v_k$$

$$v_{k+1} = \frac{w_{k+1}}{\|w_{k+1}\|}$$

$$\mu_{k+1} = \langle w_{k+1}, A w_{k+1} \rangle$$

מתי לעצור?

קובעים $\varepsilon > 0$, נעצור כאשר

יש $\tilde{A}$ כך ש- $\tilde{A} v_k = \mu_k v_k$

ו- $\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} < \varepsilon$.

ביל רוצים לפזר כאשר

$$\varepsilon > \min\left\{ \frac{\|A-\tilde{A}\|}{\|A\|} \;\middle|\; \tilde{A} v_k = \underbrace{\mu_k v_k}_{b} \right\} =$$

$$\left[\frac{\|A v_k - \mu_k v_k\|}{\|A\| \cdot \|v_k\|} \right]$$

נ״

כ״ינא

זה שלב באלגוריתם אין צריך

לחשב את $\|A\|_2$

(כמו לחשב את $|\lambda_1|$) במקום

נם משתמש בנורמת פרובניוס:

נורמת l_2 של A כווקטור ב- $\mathbb{C}^{n^2}$.

(שווה ל- $\|A\|_F$ אך כך גבולה ב״ח)

<u>הערה</u>: ל- $A-\mu I$ ול- A

אותם מרחבים עצמיים ו- λ

ערך עצמי של A נהפך $\lambda-\mu$

ערך של $A-\mu I$

$$Av=\lambda v \qquad (A-\mu I)v=Av-\mu v=$$

$$(\lambda-\mu)v$$

$$(A-\mu I)^{-1}v=\frac{1}{\lambda-\mu}v$$

אותם מרחבים עצמיים גם ל- $(A-\mu I)^{-1}$, עם ערך עצמי

$$\frac{1}{\lambda - \mu}$$

איך אם יש μ כך ש

$$|\lambda_1 - \mu| < |\lambda_2 - \mu| \le \dots$$

איך אפשר למצוא את הוקטור

העצמי שמתאים ל- λ_1 על ידי

איטרציות עבור $(A - \mu I)^{-1}$

כלומר על ידי איטרציות

1. לפתור את $(A - \mu I) w_{k+1} = v_k$

w_k

2. $v_{k+1} = w_{k+1} / \|w_{k+1}\|$

3. $\alpha_{k+1} = \langle v_{k+1}, A v_{k+1} \rangle$

$\frac{1}{\alpha_k - \mu}$

בערך, אם μ קרובה לערך
עצמי

$$(A-\mu I)\underline{x} = b$$

המטריצה כמעט לא הפיכה
לכן (בנורמה) ע״י אומר
מיוצג במרחב העצמי שלו
ב-x

אלגוריתם QR

$$\begin{pmatrix} * \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} = \underline{R} = Q^{*} A Q$$

כאשר Q אוניטרית ו-R
משולשת עליונה.

רוצים לעצור סכמה

מריצים $A_0 = A$

$$A_{k+1} = Q_k^* A_k Q_k$$

שו:

א. Q_k אוניטרית

ב. $A_k \to R$ כאשר

R מהצורה $\begin{pmatrix} & * & \\ 0 & 0 \cdots 0 & \lambda \end{pmatrix}$

<u>תהליך:</u> ($V_0 = e_m$, m המימד)

1. $w_k^*(A_k - \mu_k I) = e_m^*$
2. $v_k = w_k / \|w_k\|$
3. $Q_k = (* \mid v_k)$ אוניטרית
4. $A_{k+1} = Q_k^* A_k Q_k$

$$(A_k - \mu_k I) = \underline{Q_k R_k} \qquad \mathcal{C}$$

$$Q_k R_k \cdot (A_k - \mu_k I)^{-1} = I$$

$$Q_k^* = R_k (A_k - \mu_k I)^{-1}$$

$$e_m^* \underline{Q_k^*} = \underline{e_m^* R_k} (A_k - \mu_k I)^{-1} =$$

$$\underline{r_0 \cdot e_m^*} (A_k - \mu_k I)^{-1} = \underline{v_0 w_k} = v_k$$

$$R_k = \begin{pmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \\ & r_0 \end{pmatrix}$$

ב (ע)

$$\underbrace{A_{k+1} = Q_k^* A_k Q_k} =$$

$$Q_k^*(A_k - \mu I + \mu I)Q_k =$$

$$\underbrace{\underbrace{Q_k^*(A_k - \mu_k I)}Q_k}_{R_k} + Q_k^* \mu_k Q_k =$$

$$R_k Q_k + \mu_k I$$

אלגוריתם:

1. למצוא את פירוק QR
של $A_k - \mu_k I$

$$A_k - \mu_k I = Q_k R_k$$

$A_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I$ [illegible] 2.

$\begin{pmatrix} & * & \\ 0 & \cdots 0 & \lambda \end{pmatrix} \leftarrow A_{k+1}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

v_0

$w_{n+1}(A - \mu I) = v_n \leftarrow A^k v_0$

$v_{n+1} = w_{n+1} / \|w_{n+1}\|$ w_{n+1}

$w_n(A_n - \mu_n I) = e_n$

$A_n - \mu_n I = Q_n R_n \Rightarrow A_{n+1} = R_n Q + \mu_k I$

$$A_n \to \begin{pmatrix} \times & \vline & \times \\ \times & \vline\cdots & \times \\ \hline 0 & \cdots\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(מקרה הגלי): $\mu_i = 0$ לכל i

$$\boxed{\begin{aligned} A_k &= Q_k R_k \\ A_{k+1} &= R_k Q_k \end{aligned}} \quad , A_0 = A.$$

$$(A - \mu I) = QR$$

$$Q = (A - \mu I) R^{-1}$$

$$(A - \mu I)^* = R^* Q^*$$

$$(R^*)^{-1} (A - \mu I)^* = Q^*.$$

$$\underline{(A - \mu I) = QR}$$

$$I = QR\,(A - \mu I)^{-1}$$

$$Q^* = R\,(A - \mu I)^{-1}$$

$$\underbrace{e_m^* Q^*} = \underbrace{e_m^* R}\,(A - \mu I)^{-1} =$$

$$e_m^* \cdot \rho\,(A - \mu I)^{-1} = \underline{\rho \cdot w_k}$$

$$\Vert$$

$$v_k$$

$$R = \begin{pmatrix} * & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \rho \end{pmatrix}$$

$$\underline{\rho} > 0$$

הנחה: A לכסינה עם ערכים עצמיים שונים.

משפט (וילקינסון): נניח סדרת אלה... כך וגו'

אז האלכסון של A_k מתכנס לערכים העצמיים והחלק מתחת לאלכסון מתכנס ל-0.

$$A_k = Q_k R_k \ , \ A_{k+1} = R_k Q_k$$

(כמו בחזקות) דוגמה:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

דוגמה:

$$A_k = Q_k R_k$$

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^* \underbrace{Q_k R_k}_{A_k} Q_k =$$

$$Q_k^* A_k Q_k = Q_k^* Q_{k-1}^* \cdots Q_0^* A \underbrace{Q_0 \cdots Q_k}_{U_{k+1}}$$

$$A_k = U_k^* A U_k$$

$$A^k = \underbrace{Q_0 \overbrace{R_0 \cdots Q_0}^{A_1^{k-1}} R_0}_{k} = Q_0 A_1^{k-1} R_0 =$$

$$Q_0 Q_1 A_2^{k-2} R_1 R_0 = \cdots = \underbrace{Q_0 \cdots Q_{k-1}}_{U_k} \underbrace{R_{k-1} \cdots R_0}_{S_k}$$

$$= U_k S_k \Rightarrow U_k = A^k S_k^{-1}$$

$$A_k = S_k A^{-k} \cdot A A^k S_k^{-1} = \underbrace{S_k A S_k^{-1}}$$

A לכסינה ⇐ $\underbrace{A = XDX^{-1}}$

D אלכסונית,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A_k = S_k X D X^{-1} S_k^{-1}}$$

גרסה של Bruhat decomposition:

G מטריצה הפיכה T

אפשר לרשום כ- $T = L \cdot P \cdot R$

כאשר L משולשת תחתונה, R משולשת עליונה, P מטריצת פרמוטציה, עבור P יחידה

[illegible]

$$X^{-1} = L P R$$

$$A_k = S_k R^{-1} P^{-1} (L^{-1} D L) P R S_k^{-1}$$

$$B_k = P^{-1} D^k L^{-1} D L D^{-k} P =$$

$$W_k = P^{-1} D^k P R S_k^{-1} \Rightarrow$$

$$A_k = W_k^{-1} B_k W_k$$

$$U_k S_k = A^k = X D^k X^{-1}$$

$$S_k^{-1} U_k^{-1} = X D^{-k} X^{-1}$$

$$X^{-1} S_k^{-1} = D^{-k} X^{-1} U_k$$

$$W_k = P^{-1} D^k P R S_k^{-1} =$$

$$P^{-1} (D^k L^{-1} D^{-k}) D^k X^{-1} S_k^{-1} =$$

$$P^{-1} (D^k L^{-1} D^{-k}) X^{-1} U_k$$

כש D הפיכה אלכסונית

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$D^{-1}(a_{ij})D=\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}a_{ij}\right)$$

נבחר כך, שלכל $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right|<1$ עבור

$i<j$ לכן 0 כאשר $k\to\infty$.

$$B_k=P^{-1}D^k(L^{-1}DL)D^{-k}P\to$$

$$\underbrace{P^{-1}DP}=\begin{pmatrix}\lambda_{\pi(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{\pi(n)}\end{pmatrix}=D_\pi \qquad P=P_\pi$$

$$A_k = W_k^{-1} B_k W_k =$$

$$\underbrace{W_k^{-1} D_\pi W_k}_{} + \underbrace{W_k^{-1}(B_k - D_\pi)W_k}_{\to 0}$$

דומה

אותם ע"ע, אלכסונית

בלוקים

לכן האלכסון של A_k

מתכנס ל- D_π והחלק מתחת

לאלכסון מתכנס ל- 0.

הוכחת פירוק Bruhat:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a & \cdots \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$a \neq 0 \Rightarrow \exists R$ משולשית עליונה

$$TR = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists L$ משולשית תחתונה

$$LTR = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & 0 & & & \end{pmatrix}$$

$\exists P$ תמורה $\Rightarrow$

$$LTRP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

באינדוקציה $\exists\, L_1, P_1, R_1$ כך ש

$$T_1 = L_1 P_1 R_1$$

$$LTRP = \tilde{L}_1 \tilde{P}_1 \tilde{R}_1$$

P מעגל

$$\overset{\tilde{R}_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \bigtriangledown & \\ 0 & & & \end{pmatrix}} \cdot P = P \cdot R_2$$

R_2 משולשת עליונה.