שיטות הקירובים

Walter Gautschi

- אלגברה לינארית: פתרון למערכת משוואות, למצוא ערכים עצמיים, ...

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$

  $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

- אינטרפולציה: נתונות נקודות וערכים בנקודות האלה, למצוא פונקציה נחמדה שעוברת בנקודות:

- קירוב פונקציות: קירוב פונקציה למצוא פונקציה שקרובה אליה מסוג מסוים (למשל פולינום).

- בהמשך פורייה
- משוואות דיפרנציאליות

חישובי נגזרות

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^*\subseteq\mathbb{R}$ סופיים - מספרים שאפשר לייצג

$x\in\mathbb{R}$, יש לו ייצוג $x^*\in\mathbb{R}^*$, $0\in\mathbb{R}^*$

$0^*=0$.

$\frac{|x-x^*|}{|x|}$ - דיוק יחסי.

נניח שרוצים לחשב את $f(x)$

איך או הדיוק של x מול לגפ'ר

עם אוכלות הדיוק?

$f^{*}(x^{*}) = f(x')$, $f(x)$, x, x^{*}

עבור x' נניח ש $|x'-x| \le |x^{*}-x|$

$$\left|\frac{f^{*}(x^{*}) - f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x') - f(x)}{f(x)}\right| =$$

$$\left|\frac{(f(x') - f(x))(x'-x)\cdot x}{(x'-x)\cdot x\, f(x)}\right| \le \frac{|x^{*}-x|}{|x|}\cdot$$

$$\left|\frac{(f(x') - f(x))\cdot x}{(x'-x)\cdot f(x)}\right| \approx \left|\frac{x\, f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \frac{|x^{*}-x|}{|x|}$$

הגדרה: **מספר המצב** של f

ב- x (condition number) הוא

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

(תחת ההנחה ש- $x, f(x) \neq 0$)

דוגמה: $f(x)=ax+b$,

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot a}{ax+b} \right| = \left| 1 - \frac{b}{ax+b} \right|$$

דוגמה: חישוב אינטגרל לכל n

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt$$

נחשב את הערך

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{t+5} = \ln(t+5) \Big|_0^1 = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{\boxed{t^{n+1}}}{t+5}\,dt = \int_0^1 t^n \cdot \frac{t+5-5}{t+5}\,dt =$$

$$\underbrace{-5\int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt}_{I_n} + \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = -5 I_n + \frac{1}{n+1}$$

$$I_n = f_n(I_0) \qquad f_n(x) = (-5)^n x + b_n$$

כאשר כלשהו $b_n \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{cond}(f_n)(I_0) = \left| \frac{I_0 \, f_n'(I_0)}{I_n} \right| =$$

$$5^n \cdot \left| \frac{I_0}{I_n} \right| \geq 5^n$$

$$I_n = \frac{I_{n+1} - \frac{1}{n+1}}{-5}$$

$k >> n$

$n - k < 0$

$$I_n = g_n(I_k)$$

$$g_n(x) = (-5)^{n-k} x + c_n$$

$$\operatorname{cond}(g_n)(I_k) = \left| \frac{I_k \cdot -5^{n-k}}{I_n} \right| =$$

$$5^{n-k} \left| \frac{I_k}{I_n} \right| \leq 5^{n-k}$$

≤ 1

שגיאות במימד למה גבוה.

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_1^*,\dots,x_n^*)$$

הגדרה: יהא V מרחב לינארי

מעל $\mathbb{R}$, נורמה על V היא

פונקציה $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ש- $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

1. אם $\|v\| = 0$ אז $v = 0$
2. לכל $a \in \mathbb{R}$, $v \in V$: $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$
3. לכל $u, v \in V$: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

מרחב לינארי V ביחד עם נורמה:

נקרא מרחב נורמי!

דוגמאות: $V=\mathbb{R}^d$, $1 \le p \in \mathbb{R}$

$$\|\langle x_1, \dots, x_d \rangle\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$$

(תע׳: צ. נורמה /)

$$\|\langle x_1, \dots, x_d \rangle\|_1 = \sum |x_i|$$

$$\|\langle x_1, \dots, x_d \rangle\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$$

"$p=\infty$"

$$\|\langle x_1, \dots, x_d \rangle\|_\infty = \sup\{|x_i|\}$$

בהינתן נורמה $\|\cdot\|$ על V,
נג׳ מטריקה על V:

$$d(u,v) = \|u-v\|$$

אם $v_i \in V$ סדרה, (v_i) **מתכנסת**
ל-v אם $\|v_i - v\| \to 0$.

טענה: יהא V מרחב וקטורי עם

שתי נורמות $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$

אז שני התנאים הבאים שקולים

1. לכל סדרה (v_i) ו- $v \in V$

$\|v_i - v\|_1 \to 0$ אמ״מ $\|v_i - v\|_2 \to 0$

2. יש קבוע $C>0$ כך שלכל

$v \in V$, $\frac{1}{C}\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C\|v\|_1$

עובדה: כל הנורמות על $\mathbb{R}^d$

הן שקולות.

אינטו׳ למה נורמה $\|\cdot\|$ על $\mathbb{R}^d$

ולהגדיר את הדיוק היחסי

ע"י $\frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$

נניח ש $T: U \to V$ העתקה

לינארית ובמרחבי נורמות $\|\cdot\|_U$

על U ו- $\|\cdot\|_V$ על V.

רוצים לחשב את ההשפעה של

הפעלת T על הדיוק היחסי:

$$\frac{\|Tx^*-Tx\|_V}{\|Tx\|_V} = \frac{\|T(x^*-x)\|_V}{\|T(x)\|_V} =$$

$$= \frac{\|T(x^*-x)\|_V \cdot \|x^*-x\|_U \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V \, \|x^*-x\|_U \, \|x\|_U} \le \frac{\|T\| \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V} \cdot \frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$$

תהא $T: U \to V$ העתקה לינארית

בין שני מרחבי נורמה, נגדיר

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_V}{\|x\|_U} = \sup_{\|x\|_U = 1} \|T(x)\|_V$$

$Hom(U,V)$ * העתקות הלינאריות

החסומות. $\|T\| \mapsto T$ נורמה

במרחב הזה

נגדיר מספר המצב של T

בנקודה x הוא

$$cond(T)(x) = \frac{\|x\| \cdot \|T\|}{\|T(x)\|}$$

אם T הפיכה, ואפשר לרשום $T^{-1}(y) = x$

$cond(T) :=$

$$\left.\sup_x cond(T)(x) = \|T\|\cdot\|T^{-1}\|\right\}\ \text{לכל}$$

עוד דרישה לפתור משוואה

$Tx=b$, מה הדרך היחידה

טולרנטית עקב הקירוב של b

על ידי b^*?

מטריצת הילברט!

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

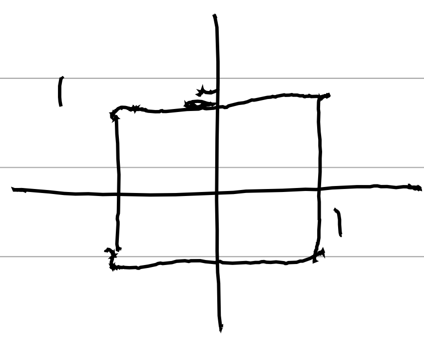
$$cond_2 T_n = \underbrace{\frac{(\sqrt{2}+1)^{4n+4}}{2^{15/4}\cdot\sqrt{\pi n}}}$$

$T: U \to V$ העתקה לינארית

$U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

אם T מיוצגת ע"י

מטריצה $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$.



$$\|T\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\text{cond}(f)(x) = \frac{|x|\,|f'(x)|}{|f(x)|}$$

$$x = 17$$

$$y = -17 + \varepsilon$$

$$2 \cdot 17 = 34$$

$$T : U \to V \qquad V, \|\cdot\|$$

$$\|T\| = \sup_{|u|=1} \|Tu\|$$

$$\text{cond}(T)(u) = \frac{\|u\| \cdot \|T\|}{\|Tu\|} \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T\| = \text{cond}(T)$$

[1.1] $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ תרגיל 3

$$f(x,y) = x + y$$

$$\text{cond}(f)(x,y) = \frac{\|\langle x,y\rangle\| \cdot \|f\|}{|x+y|} = \frac{\max(|x|,|y|) \cdot 2}{|x+y|}$$

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$$

2. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x^* \in \mathbb{R}^{n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\|f(x^*) - f(x)\|}{\|f(x)\|} =$$

$$= \varepsilon$$

$$\frac{\|f(x^*) - f(x)\| \cdot \|x\| \cdot \|x^* - x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x\| \cdot \|x^* - x\|} \approx$$

$$\frac{\|df(x)(x^* - x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x^* - x\|} \cdot \varepsilon \leq \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|} \cdot \varepsilon$$

הגדרה:

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|}$$

דרך נוספת: לחשוב על $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

כעל m פ' $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

ואז נקבל ש השגיאה היחסית של

f_i לפי על x_j, נקבלים

מטריצה

$$\left(\mathrm{cond}_{x_j}(f_i)\right)_{i,j}$$

דוגמא:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$df=\begin{pmatrix}-\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2}\\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2}\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cond}(f)(x,y) = \frac{\max(|x|,|y|)\cdot\max\left(\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2}\right)}{\max\left(\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|,\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\right)}$$

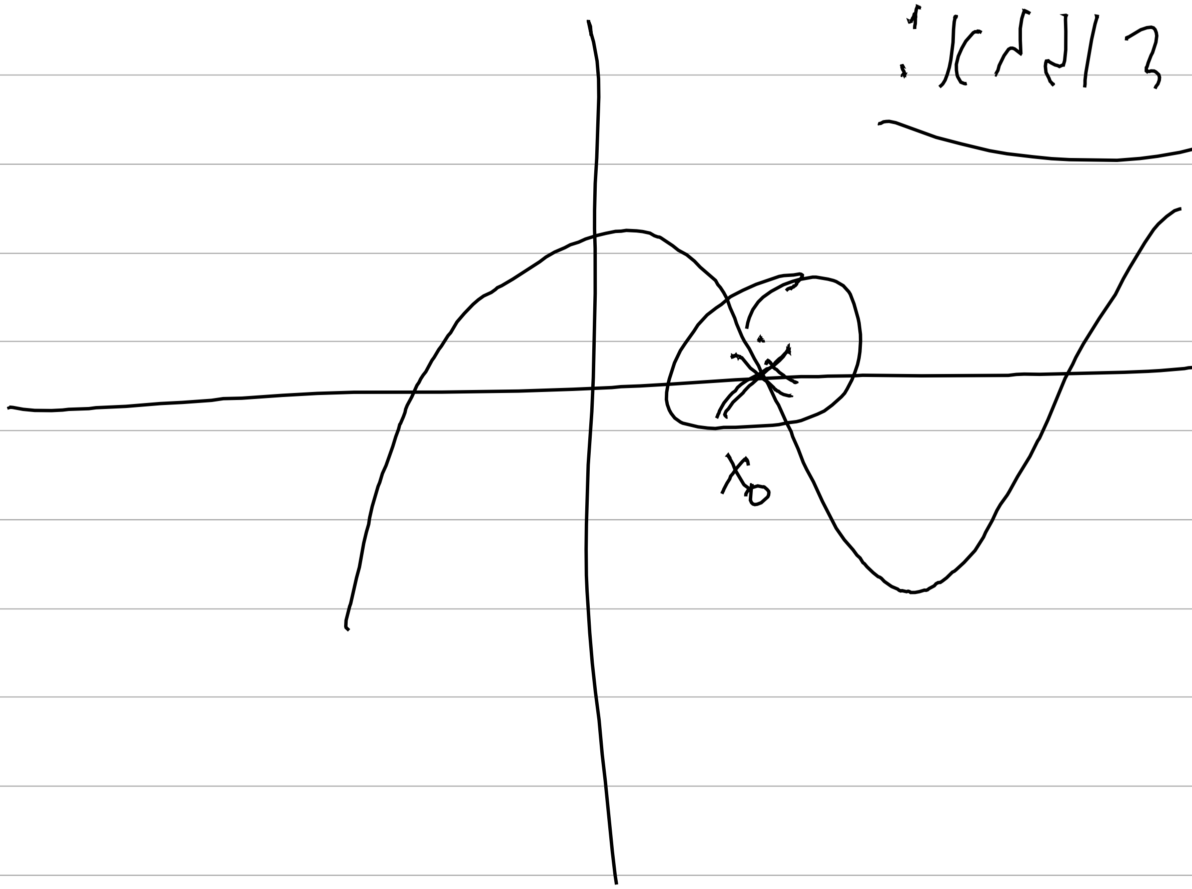
$$f_1(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

$$\operatorname{cond}_x(f_1) = \frac{|x|\cdot\frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|} \qquad \frac{|y|\cdot\frac{1}{y^2}}{\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|}$$

$$\| \qquad \frac{|y|}{|x+y|} \qquad \frac{|x|}{|x+y|}$$

$$\operatorname{cond}_x(f_2) = \frac{|x|\cdot\frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|} = \frac{|y|}{|x-y|} \qquad \frac{|y|\,\frac{1}{y^2}}{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|} = \frac{|x|}{|x-y|}$$

גוללאי:



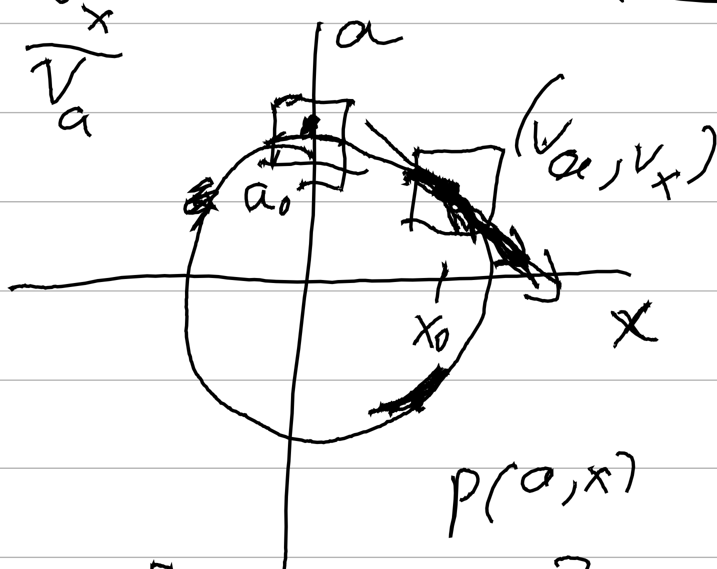
קוקצים דרגה n

$$P_n(\overline{a}, X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

$$P_n(\overline{a^0}, \underline{X_0}) = 0 \qquad X_0 \,,\ \overline{a^0}$$

$$\underline{F(x,y) = x^2 + y^2}$$

$$\frac{V_x}{V_a}$$



$$a_0 = 1$$

$$x = 0$$

$$p(a,x) \qquad \boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = 2x}$$

$$a^2 + x^2 = 1 \qquad \underline{a^2 + x^2 - 1 = 0}$$

$$x = x(a) \qquad p(a, x(a)) = 0$$

$$x_0 = x(a_0) \qquad x = \sqrt{1 - a^2}$$

$$F(a, x) = 0 \qquad F(a_0, x_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a_0, x_0) \neq 0 \Rightarrow x = x(a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial a} \Big/ \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$df \cdot \begin{pmatrix} v_a \\ v_x \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_x \end{pmatrix} = 0$$

$$v_a \frac{\partial f}{\partial a} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$x = x(\bar{a})$$

$$\operatorname{cond}_{a_i}(x) = \frac{|a_i| \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial a_i}\right|}{|x|} = \frac{|a_i| \cdot |x^i|}{|x| \cdot |p'(x)|}$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_i} = -\frac{\partial p / \partial a_i}{\partial p / \partial x} =$$

$$\frac{x^i}{\sum j a_j x^{j-1}} = \frac{x^i}{p'(x)}$$

הדוגמה של וילקינסון

$$p(x) = (x-1) \cdots (x-n)$$

השגיאה הכללית:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$

$f(x)$ $\qquad$ $f^*(x^*)$

הנחה: $f^*(x^*) = f(x')$ עבור כלשהו x'

$$\frac{|f^*(x^*) - f(x)|}{|f(x)|} = \frac{|f(x') - f(x^*) + f(x^*) - f(x)|}{|f(x)|} \le$$

$$\underbrace{\frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x)|}} + \underbrace{\frac{|f(x^*) - f(x)|}{f(x)}}$$

$$\frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x)|} \approx \frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x^*)|} \le$$

$$\underbrace{\mathrm{cond}(f)(x^*)}_{\mathrm{cond}(f)(x)} \cdot \boxed{\underbrace{\frac{|x' - x^*|}{|x^*|}}}$$

מס' המצב של האלגוריתם f^*

היכן

$$\underbrace{\mathrm{cond}(f^*)(x^*) = \inf_{f(x') = f^*(x^*)}} \frac{|x' - x^*|}{|x^*|}$$

$$\underline{\mathrm{cond}(f)(x)} \left(\frac{|x - x^*|}{|x|} + \mathrm{cond}(f^*)(x^*) \right)$$

קירובים לפונקציות ואינטרפולציה

$f: X \to \mathbb{R}$ / $\mathbb{C}$ פונקציה רציפה

רוצים לקרב אותה ע"י פונקציות פשוטות,

A מרחב וקטורי של פונקציות על מרחב "גאומטרי" X. למשל

- X – תת-קבוצה סגורה וחסומה ב-$\mathbb{R}^n$
- X – קבוצה סופית

$A = C(X)$ פונקציות רציפות מ-X ל-$\mathbb{R}$ או ל-$\mathbb{C}$.

$P \subseteq A$ תת מרחב של הפונקציות

שבעזרתן מקרבים.

למשל: P - פולינומים.

מה צריך לקרב? למדנו את

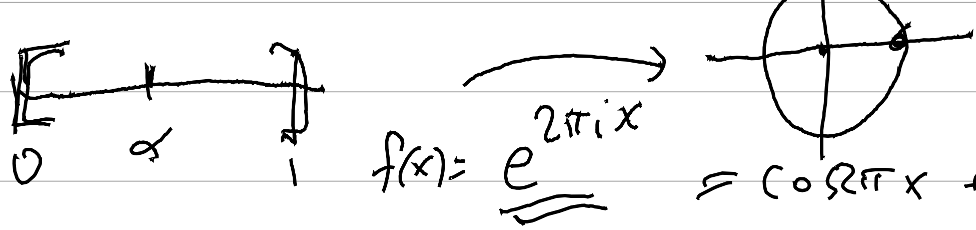
האיבר הקרוב ביותר ב-P

לפונקציה $f \in A$ ביחס לנורמה נתונה

$\| \|$ של A.

יהי $X =$ המעגל / הקטע $[0,1]$

שבו זיהינו את 1 ו-0.



$f(x) = e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$ $\subseteq \mathbb{C}$

י. מרחב מעל $\mathbb{C}$ נפרש על ידי

$\cos(2\pi nx)$ ו-$\sin(2\pi nx)$ הם אלגברה

$n\in\mathbb{Z}$

(סגור תחת כפל)

$$\{e^{2\pi inx}\}$$

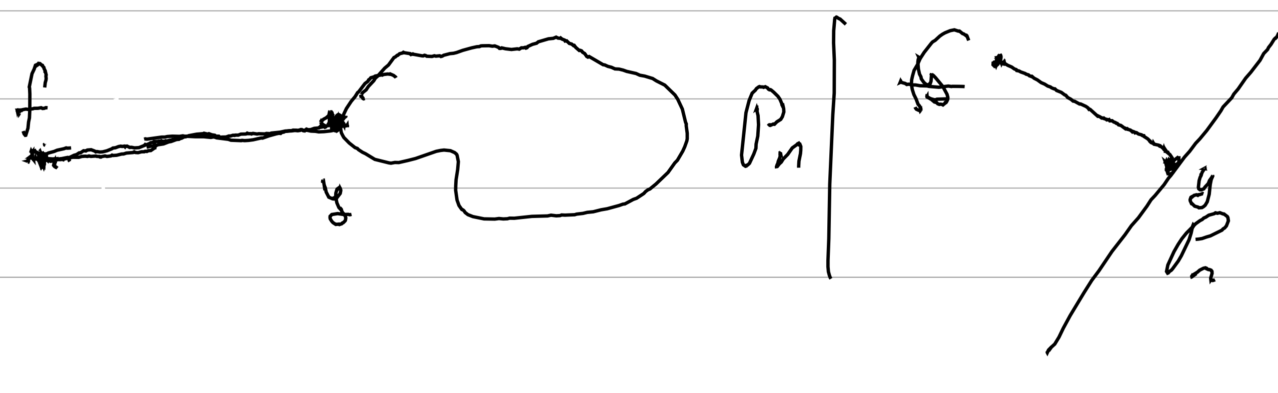
$$P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \cdots, \quad P = \bigcup P_i$$

תנאי: מרחבים ממימד ס(ופי). רציפים:

לכל $f\in A$ ולכל $\varepsilon>0$ יש n

כך ש- $d(f,P_n)<\varepsilon$

$$d(f,P_n) = \inf_{y\in P_n} d(f,y) = \inf_{y\in P_n} \|f-y\|$$



על $C(X)$ יש נורמה טבעית

נורמת הסופרימום:

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$$

<u>משפט סטון-ויירשטראס:</u> אם

$P \subseteq C(X)$ תת-אלגברה (סגורה תחת

כפל, מכילה את הפונקציות הקבועות)

ולכל $x \neq y$ יש $p \in P$

כך ש- $p(x) \neq p(y)$. (P "מפרידה

נקודות") אז <u>P צפופה ב-$C(X)$</u>

<u>דוגמה:</u> $X=[a,b]$ ו-P פולינומים

במשתנה אחד. אז $P \subseteq C(X)$ תת

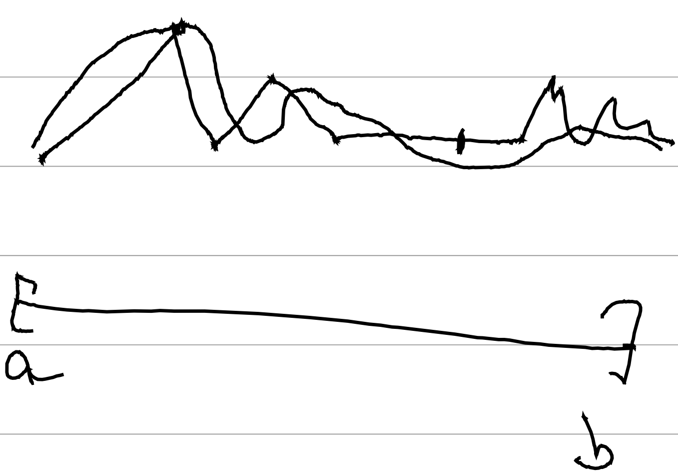
אלגברה מפרידה נקודות ולכן צפופה

P צפופה ב-$C(X)$: לכל f ב-$C(X)$

ולכל $\varepsilon>0$ יש $p\in P$ כך ש-

$\|f-p\|<\varepsilon$

כלומר לכל $x\in X$ $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.



במקרה המרוכב, P צריכה להיות

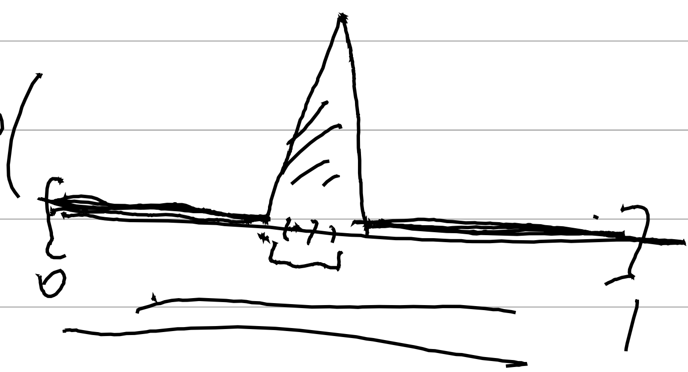
סגורה תחת הצמדה

דוגמא: כל פונקציה רציפה

במישור ואפשר לקרב ע״י

פונקציות טריגונומטריות:

סא

$\sup\Big($  $\Big) = 1$

$\mathbb{R}^n$ לכל $1 \le p \le \infty$ יש נורמה $\|\cdot\|_p$

$\|\bar{x}\|_\infty = \max(|x_i|)$

$\|\bar{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$ $\quad 1 \le p < \infty$

טענה X קבוצה סגורה נורמת
הפורמלית ביחס $\|\cdot\|_\infty$

נניח ש- X מטרי או מכפלה
קרטזית של הרבה עותקים ב-$\mathbb{R}^n$.
(זה מרחב ~~של~~ הומיאו' מידת קורל)

נגדיר $\|\cdot\|_2 : C(X) \to \mathbb{R}$

על ידי (נורמת L_2).

$$\|f\|_2 = \sqrt[2]{\int_X |f|^2}$$

אם $X = \{1, \dots, n\}$ עם מנייה.

זאת הנורמה L_2 הקודמת

בנוסף יתר מזה, אפשר לקבוע

פונקציה חיובית $w : X \to \mathbb{R}$ ולהגדיר

$$\|f\|_{w,2} = \sqrt[2]{\int_X |f|^2 \cdot w}$$

$$\|f\|_2^2 = \int_X |f|^2 \le \sup_X |f|^2 \cdot \boxed{\int_X 1} =$$

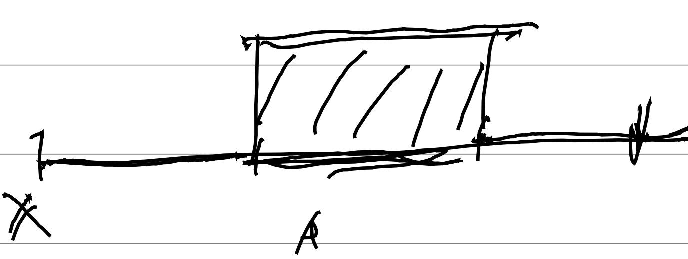
$$\|f\|_\infty^2$$

הגי ורציפות צפיפות גבי

המדרגיות.

$X \qquad f: X \to \mathbb{R}$

$A \subseteq X \qquad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$



$\int_X 1_A =$ המידה של A

בקבוצה סופית X ספירת נקודות

נותנת מידה

$f: X \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $\int_X f = \sum_{x\in X} f(x)$

n-יה $\qquad$ $f: X \to \mathbb{R}$ (=) $\qquad$ $X = \{1, \dots, n\}$

$\|f\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |f(i)|^p}$

יהי V מרחב וקטורי מעל

$k = \mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, מכפלה פנימית על V

היא פונקציה $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to k$

כך ש:

1. לכל $u\in V$, הפ' $v\mapsto\langle v,u\rangle$

היא לינארית

2. לכל $u,v\in V$, $\underline{\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}}$

ולכן לכל $u\in V$, $\langle u,u\rangle\in\mathbb{R}$

3. אם $u\neq 0$ אז $\langle u,u\rangle>0$

ש"נ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על V

אז הפונקציה $v\mapsto\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$

היא נורמה של V.

במקרה הממשי, לכל $u,v\in V$

$$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=$$

$$\|u\|^2+\|v\|^2+\underline{2\langle u,v\rangle}$$

הנורמה מגיעה ממכפלה פנימית

אם ורק אם

$$(u,v) \mapsto \frac{\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2}{2}$$

היא מכפלה פנימית.

עבור $p=2$, נורמת $\|\cdot\|_2$

על $C(X)$ היא

$$(u,v) \mapsto \int_X u\cdot\bar{v}$$

באמצעות מכפלה פנימית נוכל

למדוד זוויות. בפרט, וקטורים

u,v הם ניצבים אם $\langle u,v\rangle=0$.

אם $v_1, \dots, v_n$ ניצבים בזוגות

אזי

$$\left\| \sum a_i v_i \right\|^2 = \sum a_i^2 \|v_i\|^2$$

(הכללה של הנוסחה שהראינו).

נניח ש- A קבוצת הפונקציות

הממשיות

הרציפות של X, ו- $P = \bigcup P_i$

תת-מרחב, ונתונה מכפלה פנימית

של A. נניח שבחרנו בסיס

$\{\pi_i\}$ ל- P_n [קרוון מתאים]

ו- $f \in A$.

$T(c_1,\dots,c_m) =$

$$\|f - \sum c_i \pi_i\|^2 = \langle f - \sum c_i \pi_i , f - \sum c_i \pi_i \rangle =$$

$$\|f\|^2 - 2\sum c_i \langle f, \pi_i \rangle + \sum c_i c_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle$$

המינימום היחיד של T מתקבל

במקום שבו כל הנגזרות של

T לפי ה-c_i הן 0.

$$0 = \frac{\partial T}{\partial c_k} = -2\langle f, \pi_k \rangle + 2\sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle$$

$$\sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle = \langle f, \pi_k \rangle$$

מקבלים מערכת משוואות

$$A\tilde{c} = b$$

כאשר $b_i = \langle f, \pi_i \rangle$

ו-

$$A = \left(\langle \pi_i , \pi_j \rangle \right)_{i,j}$$

A מטריצה סימטרית וחיובית:

$(x, y) \mapsto \underline{\underline{\langle x, Ay \rangle}}$ ⟵ מכפלה פנימית הסטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$

היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$

כלומר, אם $\bar{x} \neq 0$ אז

$$\underline{\underline{\bar{x} \cdot A \bar{x} > 0}}$$

כי

$$\bar{x} \cdot A \bar{x} = \sum_{i,j} x_i x_j \langle \pi_i , \pi_j \rangle = \underline{\underline{\left\| \sum x_i \pi_i \right\|^2}}$$

$\{\pi_i\}$ בסיס ולכן $\sum x_i \pi_i \neq 0$ אם $\bar{x} \neq 0$.

בנוסף, A הפיכה ולכן יש
פתרון למערכת.

$(\pi_i)_{i \geq 0}$

$$A = \left(\langle \pi_i , \pi_j \rangle \right)_{0 \leq i,j \leq n}$$

$A\bar{c} = \bar{b} \qquad \bar{b} = \langle f , \pi_i \rangle$

דוגמא: $\pi_i = t^{i}$ על $[0,1]$

$$\langle f , g \rangle = \int_0^1 f \cdot g \, dt$$

$$\langle \pi_{i+1} , \pi_{j+1} \rangle = \int_0^1 t^{i+j} \, dt = \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{i+j+1}$$

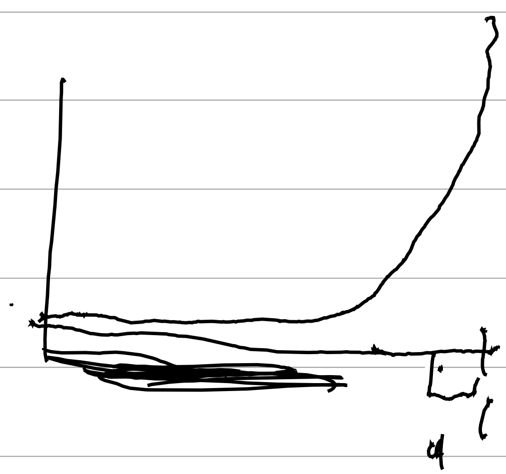
$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

<u>קריטי:</u> הבעיה <u>$H_n \bar{c} = b$</u>

זו בעיה (רעש קטנה ב-b

עלולה לגרום לטעות גדולה ב-$\bar{c}$).

<u>$[0,1]$</u> t^i



t^i

פתרון: לעבוד עם בסיס

אורתוגונלי (או אורתונורמלי):

$\langle \pi_i, \pi_j \rangle = 0 \quad i \neq j \quad (\langle \pi_i, \pi_i \rangle = 1)$

$f = \sum \underbrace{a_i} \pi_i$

$\langle f, \pi_i \rangle = a_i \langle \pi_i, \pi_i \rangle$

מה אם רק - נתון?: אם

$\pi_1, \pi_2, \ldots$

שנמצא לנו בסיס אורתוגונלי

נגדיר:

$\hat{\pi}_1 = \pi_1$

$\hat{\pi}_{k+1} = \pi_{k+1} - \sum \frac{\langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2} \hat{\pi}_i$

$\langle \hat{\pi}_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle - \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = 0$

$$P = \bigcup P_i \qquad P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots$$

$P_i = \{$ פולינומים מדרגה $\le i \}$

$\dim(P_i) = i$

$$\mathrm{span}(\langle \pi_i \rangle_{i \le n}) = \mathrm{span}(\langle \hat{\pi}_i \rangle_{i \le n})$$

$\hat{\pi}_i \in P_i$ | פולינום מתוקן מדרגה i.

$$\hat{\pi}_{i+1} = t\hat{\pi}_i - \alpha_i \hat{\pi}_i + \sum_{j=0}^{i-1} b_j \hat{\pi}_j =$$

$$(t - \alpha_i)\hat{\pi}_i + \beta_i \cdot \hat{\pi}_{i-1} + \sum_{j=0}^{i-2} b_j \hat{\pi}_j$$

$$\langle \hat{\pi}_{i+1}, \hat{\pi}_i \rangle = \langle (t-\alpha_i)\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle = \rangle$$

$$\overset{!}{0} \qquad \alpha_i \cdot \|\hat{\pi}_i\|^2 = \langle t\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2}$$

$$0 = \underbrace{\langle (t-\alpha_i)\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle}_{} + \beta_i \|\hat{\pi}_{i-1}\|^2 \Rightarrow$$

$$\beta_i = -\frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} =$$

$$-\frac{\langle \hat{\pi}_i , t\hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} = -\frac{\|\hat{\pi}_i\|^2}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2}$$

$$\hat{\pi}_{i+1} = (t-\alpha_i)\hat{\pi}_i + \beta_i \hat{\pi}_{i-1}$$

הערה: כאשר הקטע שמדברים עליו

הוא מהצורה $[-a, a]$

והמשקל הינו סימטרית $W(t)=w(-t)$

$$\left[\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot \overline{g(t)}\, \underline{w(t)}\, dt \right]$$

אזי π_k פ' זוגית עבור k

זוגי ופ' אי-זוגית ל-k אי זוגי.

לכן במקרה הזה $\alpha_i = 0$.

דוגמא: בקטע $[-1,1]$ ולפ ee

לג'נדר (נוסחת רודריגס)

$$\pi_k(t) = \frac{k!}{(2k)!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2-1)^k$$

כדי להראות ש- π_k אורתו׳

ל- π_i עבור $i<k$, מספיק להראות

$$0 = \langle \pi_k, t^i \rangle = \underline{\underline{\int_{-1}^{1} \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k \cdot t^i \, dt}} =$$

$$\dots = 0$$

$$\pi_0 = 1 \quad , \quad \pi_1 = \frac{1}{2}(t^2-1)' = t$$

$$\pi_2 = \left((t^2-1)^2\right)'' \cdot \frac{2}{4!} = \frac{1}{12} \cdot \left((t^2-1)^2\right)''$$

$$\pi_k = \underline{t^k + \underline{\mu_k} t^{k-2}} + \dots$$

$$\pi_{k+1} = t \cdot \pi_k + \beta_k \cdot \pi_{k-1} \Rightarrow \boxed{\beta_k} = \frac{\pi_{k+1} - t\pi_k}{\pi_{k-1}}$$

$$\beta_k = \mu_k - \mu_{k+1}$$

$$\mu_k = \frac{k(k-1)}{2(2k-1)} \Rightarrow$$

$$\beta_k = \frac{1}{4-k^{-2}}$$

שלבון: פולינומים טריגונומטרים

פ' מחזוריות עם מחזור 1

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(t+1) = f(t)$ לכל t.

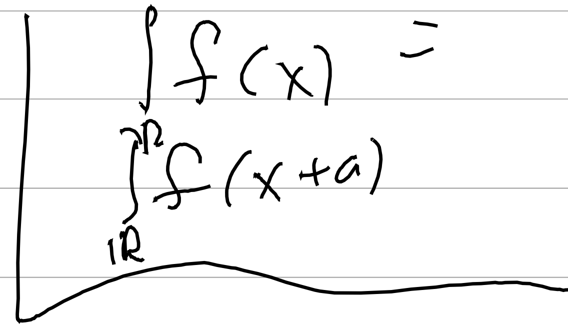
$$\Updownarrow$$

$f:[0,1] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(0) = f(1)$

$$i\sin(2\pi t) + \cos(2\pi t) = e^{2\pi i t}$$

$(\Leftarrow)$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)$$



$$\underline{g : S^1 \to \mathbb{C}}$$

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

$$E : [0,1] \to S^1$$

$$E(t) = e^{2\pi i t}$$

$g : S^1 \to \mathbb{C} \rightsquigarrow g \circ E$ פ' מחזורית

$$\int_{S^1} g := \int_0^1 g \circ E \, dt$$

אם $z, w \in S^1$ אז $z \cdot w \in S^1$

נקבע $a \in S^1$ ונגדיר

$$g_a(z) = g(a \cdot z)$$

אז $\int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g$

טענה: נניח ש- $g: S^1 \to \mathbb{C}^*$

מקיימת $\boxed{g(z\cdot w)=g(z)\cdot g(w)}$

אז א. אם $g(z)=1$ לכל z

אז $\int_{S^1} g = 1$

ב. אחרת $\int_{S^1} g = 0$

הוכחה: א', קל. ב'

ב. יש $a\in S^1$ כך ש- $g(a)\neq 1$

$g_a(x)=g(ax)=g(a)\,g(x)$

אז

$$\int_{S^1} g = \int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g(a)\cdot g = \underbrace{g(a)}_{\neq 1}\int_{S^1} g$$

אז $\int_{S^1} g = 0$.

לכל $n \in \mathbb{Z}$ הפ' $g_n(x) = x^n$

מקיימות את התנאים של הינם

1) $g_n \cdot g_m = g_{n+m}$ 2) $\overline{g_n(x)} = g_{-n}(x)$

איך יש להגדיר מכפלה פנימית

על $C(S^1)$ ע"י

$$\langle f,g\rangle = \int_{S^1} f \cdot \overline{g}$$

כך הוכחנו ש-: g_n מערכת

אורתונורמלית.

מצד שני הבעיה של פורייה צ"ר

ה-g סגור רוות כבש (בעיה הפוכה).

הקבוצה הזו נקראות פולינומים טריגונומטריים.

נשים לב ש-

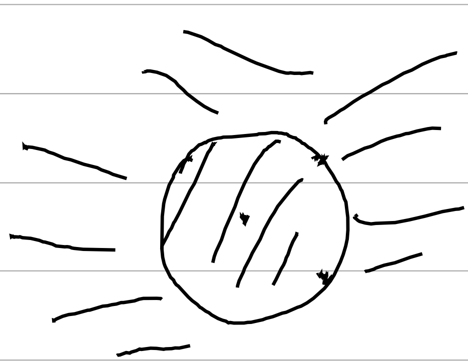
$$0 = \oint_{S^1} x^n = \int_0^1 e^{2\pi i n t}\, dt = \int \cos 2\pi i n t + i \sin 2\pi n t = 0$$

תרגיל:

$$\mathbb{C}^* = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \}$$

$x \sim y$ אם $x = y$ או

$X = \mathbb{C}^*/\sim$ $\quad g_n(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^n} \sim \underbrace{x^n}_{g_n(x)} \quad x = \frac{1}{y}$



$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{C}^* \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\bar{g}_n} & X \end{array}$$

$$\pi(x) = x + \frac{1}{x} \in \mathbb{C}$$

$$\pi(x) = \pi\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

ש"כ $z \in S^1$ ע"כ

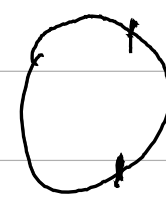
$$\pi(z) = \mathrm{Re}(z)$$

$$\pi(S^1) = [-1, 1] = X_0$$ ע"כ

$$g_n\left(\overbrace{\frac{x + \frac{1}{x}}{2}}^{\pi(x)}\right) = \frac{x^n + \frac{1}{x^n}}{2} = \pi(g_n(x))$$

נגדיר X על ב h ע"כ

$$* = \int_{X_0} h = \int_{S^1} h \circ \pi = \int_{S^1} h\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{2}\right)$$



$$\int_0^1 h\left(\mathrm{Re}\left(e^{2\pi i t}\right)\right) dt = \int_0^1 h \cos(2\pi t)\, dt$$

$y = \cos(2\pi t)$ $\quad dy = -2\pi \sin(2\pi t)\, dt =$

$$dy = -2\pi\sqrt{1-y^2}\,dt$$

$$x = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} h(y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$ ע/כ

~~אז~~ ה- $\bar{g}_n$ נקראים פולינומי'

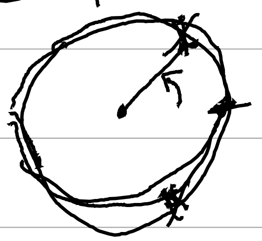
ג' כ' אכ. הוכחנו שהם מערכת

אורתוגונלית עבור

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f\cdot g\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

$$\bar{g}_n(\cos 2\pi t) = \cos 2\pi n t$$

$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$



1

$$\sin 2\pi t = \sqrt{1 - y^2}$$
$$0 \le t \le \tfrac{1}{2}$$

$\downarrow p$

$X = [\ \longleftrightarrow\ ] = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$

$$p(z) = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \quad \left(= \frac{z + \bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(z) \text{ on } S^1 \right)$$

$f : X \to \mathbb{C}$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \cos 2\pi t \\ dy &= -2\pi \sin 2\pi t \, dt \end{aligned}}$$

$$\int_X f := \int_{S^1} f \circ p = \int_0^1 f \circ p \circ e^{2\pi i t} \, dt =$$

$$\int_0^1 f(\cos 2\pi t) \, dt = 2 \int_0^{1/2} f(\cos 2\pi t) \, dt =$$

$$2\int_{1}^{-1} f(y)\cdot\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(y)\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "\varphi_n"', "x \mapsto x^n"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S^1 \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "T_n"'] & X
\end{tikzcd}$$

$$\varphi_n(x) = x^n$$

$$T_n\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) = \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2}$$

$$\underline{\int_X T_n} = \int_{S^1} T_n \circ p = \underline{\int_{S^1} \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2} =}$$

$$\begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{S^1} \varphi_n \bar{\varphi}_m =$$

$$\int \varphi_n \varphi_{-m} = \int \varphi_{n-m}$$

$$(T_n \cdot T_m)\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = \left(\frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{2}\right)\left(\frac{z^m + \frac{1}{z^m}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z^{m+n} + \frac{1}{z^{m+n}} + z^{n-m} + z^{m-n}}{2}\right) =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(T_{n+m}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) + T_{n-m}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\right)}$$

$$\int T_n \cdot T_m = \frac{1}{2}\left(\int T_{n+m} + \int T_{n-m}\right) =$$

$$\int \begin{cases} 1/2 & n = \pm m \neq 0 \\ 1 & n = m = 0 \\ 0 & |n| \neq |m| \end{cases} \qquad T_n = T_{-n}$$

$$T_0 = 1 \qquad T_0\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = 1$$

$$T_1\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} \qquad T_1(z) = z$$

$$T_n \cdot T_1 = \frac{1}{2}\left(T_{n+1} + T_{n-1}\right) \Rightarrow$$

$$T_{n+1}(z) = 2z\,T_n(z) - T_{n-1}(z)$$

$$T_2(z) = 2z^2 - 1$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$$

$$\cos(nt) = T_n(\cos t)$$

1. T_n ממעלה n, המקדם של
z^n הוא 2^n

אינטרפולציה

נתונים ערכי פונקציה f

במספר סופי של נקודות

$c_0,\dots,c_n \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

רוצים לקרב את f על ידי

פולינום ממעלה n.

המרחב של פ' מוגדרות על $c_0,\dots,c_n$

ממימד $n+1$, עם בסיס

$$\delta_i(c_j)=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$$

כולם ממעלה $\leq n$

$$\ell_i(x)=\frac{\prod_{j\neq i}(x-c_j)}{\prod_{j\neq i}(c_i-c_j)} \in P_n$$

$f(c_i) = f_i \Rightarrow$

$$f \sim \sum f_i l_i = \Pi_{\bar{c}}(f)$$

$$\Pi_{\bar{c}} : C[a,b] \to C[a,b]$$

$$\sup_{\|f\|=1} \|\Pi_{\bar{c}}(f)\| = \sup_{\|f\|=1} \left| \sum f_i l_i \right| =$$

$$= \sum_{i=0} \|l_i\|$$

$$\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|$$

$\hat{p}_n$ – הקירוב הכי טוב ל-f

ב-$\mathbb{P}_n$

$$\|f-\Pi_{\bar c}(f)\| = \|f-\hat{p}_n-\Pi_{\bar c}(f-\hat{p}_n)\|$$

$$\le \|f-\hat{p}_n\| + \|\Pi_{\bar c}\|\,\|f-\hat{p}_n\| =$$

$$\boxed{(1+\|\Pi_{\bar c}\|)\,\|f-\hat{p}_n\|}$$

הערכה חלופית בעזרת הנגזרת:

f פ' ~~רציפה~~ ב-$C^{n+1}[a,b]$

(גזירה ברציפות $n+1$ פעמים)

$$(f-\Pi_{\bar c}(f))(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)$$

(תלוי ב-x)

הסק: יש ξ עבורו ש

נכון ($f \in C^{n+1}[a,b]$)

נגדיר עבור $c_i \neq x$

$$G(t) = f(t) - \Pi_c(f)(t) - \frac{f(x) - \Pi_c(f)(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - c_i)} \prod_{i=0}^{n}(t - c_i)$$

השורשים של G הם לפחות

c_i $i=0,\dots,n$ ו-x.

משפט רול: ל-$G^{(n+1)}$

יש שורש ξ.

נגזור את (*) $n+1$ פעמים:

$$G^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)! \cdot \frac{f(x) - \Pi_c(f)}{\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)}$$

נציב $t=\xi$.

$\xi \in [a,b]$

(יפלס להגית של $[a,b]$

רסלור וקימו $\square$ x, c_i)

מטרתנו: לנסות למזער!

○ $\exists$ רשת $c^{(n)} \in [a,b]$ של נקודות

c עם המכפלה שלו אופטימלית:

$\Pi_{c^{(n)}}(f) \to f$

עבור פונקציות f מספיק

חלקות.

$$\underbrace{\|f - \Pi_{c^{(n)}}(f)\| \le \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \prod_i (x - c_i^{(n)})}$$

$$\le \frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1}$$

$M_{n+1}(f)$ חסם על הנגזרת ה-$(n+1)$ של f ב-$[a,b]$

אם הוכחנו ש-

$$\frac{M_n(f)\cdot(b-a)^n}{n!} \to 0$$

$\bar{c}$ נקודות אינטרפולציה $c_i\in[a,b]$

$$\|f-\pi_{\bar{c}}(f)\| \le \left\|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot\prod_i (x-c_i)\right\|$$

$$\le \frac{M_{n+1}\cdot(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$$

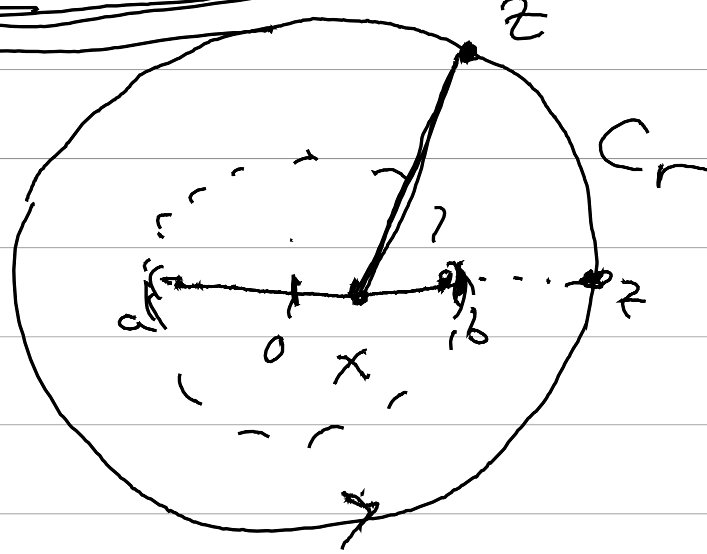
f פ' מרוכבת אנליטית

טענה [illegible]: אם f אנליטית

צ"ל

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(z)}{(z-x)^{k+1}} dz$$

$a = -b$



$$\int_{C_r} \frac{1}{z} = 2\pi i$$

$\gamma(t) = re^{2\pi i t}$

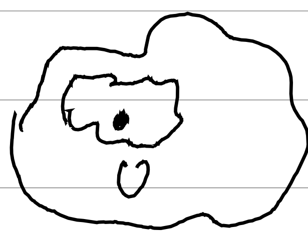
$\|z - x\| \geq r - b \Rightarrow$

$$\|f^{(k)}(x)\| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{N}{(r-b)^{k+1}} \cdot 2\pi r \Rightarrow$$

$$\frac{u_n \cdot (2b)^n}{n!} \le \frac{\dfrac{n! \cdot \overset{M}{\cancel{u_0}}}{(r-b)^{n+1}} \cdot r \cdot (2b)^n}{n!} =$$

$$\frac{\overset{M}{\cancel{M_0}} \cdot r}{r-b} \cdot \left(\frac{2b}{r-b}\right)^n \longrightarrow 0$$

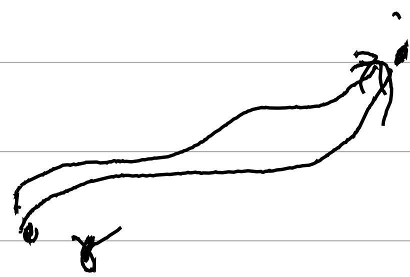
$$\frac{2b}{r-b} < 1$$



$\not\in \mathbb{C}$

$$r > 3b$$

$$\frac{1}{z}$$



$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(f \circ \gamma)'$

$\gamma: (a, b) \longrightarrow \mathbb{C}$

מהו הפולינום המתוקן ממעלה

n שנורמו $\|\cdot\|_\infty$ (על $[-1,1]$)

מינימלית?

אם p פולינום מתוקן ממעלה

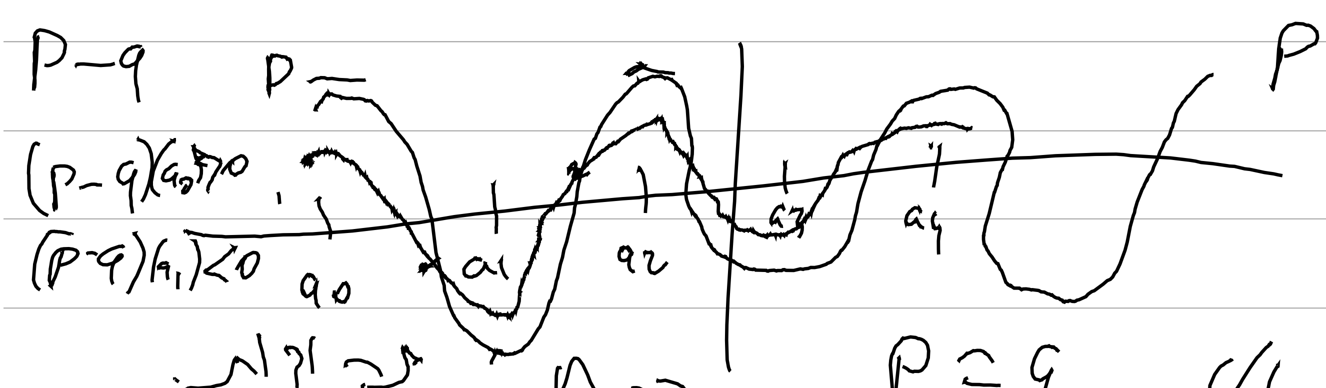
n כך ש- $\|p\|_\infty = |p(a_i)|$ עבור

$p(a_i) = -p(a_{i+1})$

n+1 נקודות a_i אז p

הוא הפולינום עם $\|p\|_\infty$ מינימלית

הוכחה, נניח ש- $\|q\| < \|p\|$



אז $p = q$ כ- n נקודות.

טענה: פולינומי צבישף המתוקנים

שורשים של הם:

$$T_n(\operatorname{Re} z) = \operatorname{Re}(z^n)$$

$k = 0, \dots, n-1$

$x = \operatorname{Re} z$

$T_n(x) = 0$

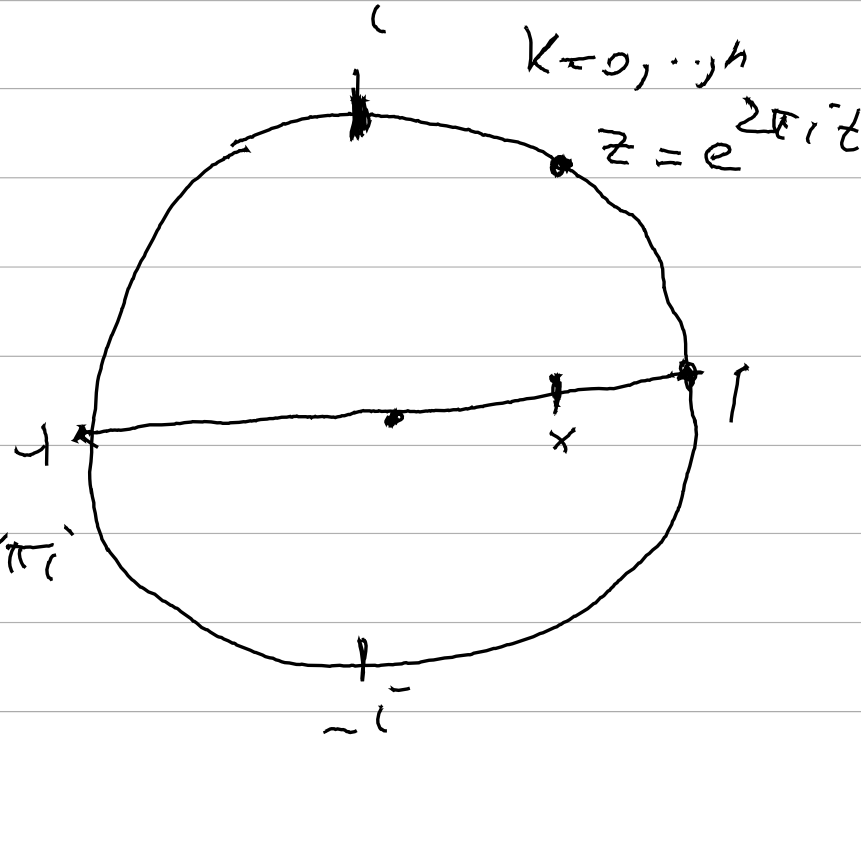
$\operatorname{Re} z^n$

$\Rightarrow$

$x = \cos\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)$

$z^n = \pm i$

$y = \cos\left(\pi \frac{k}{n}\right)$



$z^n = i \iff$

$e^{2\pi i n t} = i$

$2\pi i n t = \frac{\pi i}{2} + \cancel{2}k\pi i$

$\Rightarrow t = \frac{2k+1}{4n}$

המסקנה: המקדם העליון של

T_n הוא 2^{n-1}

לכן $\mathring{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n$ פול' מתוקן

ממעלה n, $\|\mathring{T}_n\| = \frac{1}{2^{n-1}}$ שמתקבל

בנקודות $a_i = \cos(\frac{\pi i}{n})$

$0 \le i \le n$. עם סימנים מתחלפים

$\mathring{T}_n$ עם נורמה מינימלית

מינימלית מבין הפ' המתוקנים של

ממעלה n - לכן c_i של $\bar{c}^{(n)}$ ספרת

ניכסש $\sqrt{\ }$ T_n אל

$$\|f - \Pi_{\bar{c}^{(n)}}(f)\| \le \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \cdot \|\tilde{T}_n\|_\infty =$$

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

$c_0, c_1, \ldots$ סדרה אינסופית

$P_0, P_1, \ldots$ $\deg(p_i) \le i$

δ_i

P_i

$$P_{i+1}(x) = P_i(x) + a_{i+1} \cdot (x-c_0) \cdot \ldots (x-c_i)$$

$$a_{i+1}(c_{i+1}-c_0)\cdots(c_{i+1}-c_i) = f_{i+1} - p_i(f_{i+1})$$

$$a_{i+1} = \frac{f_{i+1} - p_i(f_{i+1})}{(c_{i+1}-c_0)\cdots(c_{i+1}-c_i)} =$$

$$[c_0, \dots, c_{i+1}] f$$

$$[c_0, \dots, c_{i+1}] f = \frac{[c_0, \dots, c_i] f - [c_1, \dots, c_{i+1}] f}{c_{i+1} - c_0}$$

$$\underline{c} = c_0, \dots, c_{i+1}, \quad \hat{c}_j = c_0, \dots, \cancel{c_j}, \dots, c_{i+1}$$

ignore

$$p_{\underline{c}}(x) = p_{\hat{c}_{i+1}} - \frac{(x-c_0)}{c_{i+1}-c_0}\left(p_{\hat{c}_{i+1}} - p_{\hat{c}_0}\right) =: q(x)$$

Si $0 < j < i+1$ $\forall c$ $\int^{N}$ 33

$$q(c_j) = f_j = P_{\tilde{C}}(c_j)$$

$$q(c_0) = P_{\hat{C}_{i+1}}(c_0) = f_0 = P_{\tilde{C}}(c_0)$$

$$q(c_{i+1}) = P_{\hat{C}_{i+1}}(c_{i+1}) - (P_{\hat{C}_{i+1}}(c_{i+1})) -$$

$$P_{\hat{C}_0}(c_{i+1})) = P_{\hat{C}_0}(c_{i+1}) = f_{i+1} - P_{\tilde{C}}(c_{i+1})$$

c	f			
c_0	f_0			
c_1	f_1	$[c_0, c_1]f$		
c_2	f_2	$[c_1, c_2]f$	$[c_0, c_1, c_2]f$	
c_3	f_3	$[c_2, c_3]f$	$[c_1, c_2, c_3]f$	$[c]f$
c_4	f_4	_	_	_

$$\boxed{[c_1, c_2, c_3]f} = \frac{[c_2, c_3]f - [c_1, c_2]f}{c_3 - c_1}$$

$$\bar{c} = c_0, \dots, c_i$$

$$P_{\bar{c}}(x) = P_{\hat{c}_i}(x) + [\bar{c}] f \cdot \prod_{j<i} (x - c_j)$$

$$\|P_{\hat{c}}(x) - P_{\hat{c}_i}(x)\| = \| \boxed{[\bar{c}] f} \prod (x - c_j) \|$$

$$\leq \| \boxed{\frac{P_{\bar{c}}^{(i+1)}(\xi)}{(i+1)!}} \cdot \prod (x - c_i) \|$$