לוגיקה מתמטית

משה קמנסקי

9 בנובמבר 2022

1 מבוא

לוגיקה מתמטית הוא התחום במתמטיקה שחוקר בצורה מדויקת מושגים כמו "טענה" ו-"הוכחה". על מנת לספק מוטיבציה, נתבונן בשתי דוגמאות היסטוריות.

1.1 גאומטריית המישור

אוקלידס רצה לדעת את כל הדברים שנכונים עבור נקודות, קווים ומעגלים במישור[1]. על-מנת להבין זאת, אוקלידס ניסה לנסח רשימה קצרה של הנחות יסוד שנכונותן "אינה מוטלת בספק", ולהוכיח מהן את כל יתר הטענות הנכונות. ארבעת הנחות היסוד הראשונות אכן פשוטות מאד: הראשונה, לדוגמא, אומרת שבין כל שתי נקודות קיים קו ישר אחד (את עבודתו של אוקלידס, "האלמנטים", ניתן לקרוא עד היום, גם באינטרנט: [4]). אוקלידס הצליח להוכיח את עשרים ושמונה הטענות הראשונות שלו בעזרת ארבע הנחות בסיס אלה[2]. על מנת להוכיח טענות נוספות, הוא נזקק להנחת יסוד נוספת, שקולה ל*אקסיומת המקבילים*: דרך נקודה הנמצאת מחוץ לישר נתון, עובר בדיוק ישר אחד מקביל לישר הנתון. הנחת יסוד זו פחות פשוטה ומובנת מאליה, ואוקלידס ניסה, אך לא הצליח, להוכיח אותה מארבע הנחות היסוד הראשונות.

השאלה איך להוכיח את אקסיומת המקבילים נותרה פתוחה מאות שנים, עד שהוכח שהאקסיומה *בלתי תלויה*: לא ניתן להוכיח (או להפריך) אותה מיתר הנחות היסוד. נשים לב, שטענה זו אינה טענה גאומטרית: היא אינה עוסקת בנקודות או קווים, אלא בטענות מתמטיות (מבחינה גאומטרית, אנחנו יודעים שאקסיומת המקבילים תקפה במישור). הטענה שייכת לתחום של *לוגיקה מתמטית*, בו הטענה שאקסיומת המקבילים בלתי תלויה באקסיומות האחרות, היא עצמה טענה מתמטית.

איך הוכחה הטענה? גאוס, לובאצ'בסקי ובוליאי (ובעקבותיהם מתמטיקאים אחרים) בנו *מודל* של ארבע האקסיומות הראשונות של אוקלידס, כלומר מבנה עם "קווים" ו-"נקודות", בו הקווים

[1] ניתן לקרוא את הסיפור הזה יותר בהרחבה ב-[5]

[2] למעשה, כפי שנראה, הוא השתמש בהנחות נוספות

והנקודות מתנהגים כמו שמוכתב על ידי האקסיומות הראשונות, אולם בו אקסיומת המקבילים אינה מתקיימת. מודל זה בהכרח שונה מהמישור הרגיל, בו אקסיומת המקבילים תקפה, אבל הוא "שווה זכויות" לו: כל טענה שניתן להוכיח מארבע האקסיומות הראשונות, תקפה גם בו. *למעשה*, כל הוכחה *מתוך* אקסיומות אלה נותן טענה תקפה *בכל המבנים המקיימים אותן*.

מה לגבי הכיוון ההפוך? נניח שיש לנו טענה בגאומטריה שנכונה בכל המודלים שסופקו על-ידי גאוס וחבריו, וגם בכל מודל אחר של ארבע האקסיומות הראשונות. האם ניתן אז להוכיח טענה זו מתוך אותן אקסיומות? לכאורה, אפשר לדמיין שהטענה נכונה "במקרה" בכל המבנים הללו, בלי שניתן להוכיח אותה. אנחנו נראה שזה לא כך:

משפט א' (*משפט השלמות*, 3.8.14). כל טענה שנכונה בכל מבנה המקיים את האקסיומות של אוקלידס, ניתן להוכחה מאקסיומות אלה

בניסוח המשפט (שאינו מנוסח בצורה מדויקת בשלב זה) לא הקפדנו לציין על איזו קבוצת אקסיומות מדובר. למעשה, זה לא משנה: המשפט תקף לכל קבוצת אקסיומות, ולא רק לגאומטריה.

כאמור, משפט השלמות אינו משפט בגאומטריה. מהם האובייקטים המתמטיים המופיעים במשפט הזה? על-מנת שנוכל אפילו לנסח את המשפט, עלינו לענות לפחות על השאלות הבאות:

שאלה 1.1.1. איך אפשר לראות טענות כאובייקטים מתמטיים?

שאלה 1.1.2. מהי הוכחה של טענה אחת מטענות אחרות?

שאלה 1.1.3. מהי משמעות האמירה שטענה מסוימת נכונה בגאומטריית המישור? באופן יותר כללי, מתי נאמר שטענה היא נכונה? מה הקשר בין זה לבין הוכחות של הטענה?

שאלה 1.1.4. איך ניתן להוכיח שטענה מסוימת לא תלויה באחרות?

בהינתן שהאקסיומה בלתי תלויה, התוספת שלה כהנחת יסוד מוצדקת. אבל האם יש טענות נוספות שאינן תלויות במערכת האקסיומות החדשה? האם אפשר לרשום רשימת אקסיומות המאפינות את המישור לחלוטין? תשובה אפשרית אחת לשאלה האחרונה נתונה במשפט הבא:

משפט ב' (*משפט לוונהיים-סקולם*, 3.7.12). לכל קבוצה אינסופית A קיים מבנה המקיים את כל הטענות המתקיימות בגאומטריית המישור, שבו קבוצת הנקודות היא A.

שוב, גם משפט זה נכון למבנים כלליים, ולא רק לגאומטריה.

1.2 אריתמטיקה

ראינו לעיל שלא ניתן לאפיין לגמרי את גאומטריית המישור על ידי רשימה של אקסיומות. עדיין, אפשר לשאול האם לפחות אפשר להוכיח את כל מה שנכון בגאומטריית המישור מתוך כל חמש האקסיומות של אוקלידס. מסתבר שלא, ולמעשה אפילו המשפט הראשון בספרו של אוקלידס דורש אקסיומות נוספות. אולם טארסקי, בתחילת המאה ה-20 (בעקבות עבודה של קליין, הילברט, ומתמטיקאים נוספים) הצליח להשלים את הרשימה: הוא נתן רשימה מפורשת של אקסיומות, והוכיח שמהן ניתן להוכיח את כל הטענות הגאומטריות הנכונות במישור.

תחום נוסף שבו עסקו היוונים הוא תורת המספרים. גם שם הניסיון הוא לגלות את כל הטענות הנכונות עבור המספרים הטבעיים. בניגוד לגאומטריה, הם לא ניסו לעבוד בשיטה האקסיומטית.

שאלה 1.2.1. האם ניתן לראות גם טענות על מספרים כאובייקטים מתמטיים?

מערכת אקסיומות עבור המספרים הטבעיים הוצעה על-ידי פיאנו. כמו בגאומטריה, גם כאן ניתן לשאול:

שאלה 1.2.2. האם אקסיומות פיאנו מוכיחות את כל הטענות הנכונות על מספרים טבעיים? אם לא, האם קיימת מערכת אחרת שעושה זאת?

אנחנו נראה:

משפט ג׳ (*משפט אי השלמות*, 4.3.8). ישנן טענות בתורת המספרים שנכונות בטבעיים, אך אינן ניתנות להוכחה מאקסיומות פיאנו

למעשה, המשפט אינו יחודי לאקסיומות פיאנו, ותקף לכל מערכת אקסיומות שניתנת לתיאור מפורש (במובן שנראה מאוחר יותר).

1.3 מבנים אחרים

שתי הדוגמאות האחרונות דנות בשני נושאים מרכזיים במתמטיקה: גאומטריה ותורת המספרים. אלה תחומים חשובים, אך אינם היחידים.

שאלה 1.3.1. באילו מבנים ותורות מתמטיות ניתן לעסוק בשיטות הנ"ל? אילו כלים קיימים על מנת לענות על שאלות מהסוג לעיל לתורות אחרות?

אנחנו נראה מספר שימושים מפתיעים של טענות בלוגיקה לתחומים אחרים במתמטיקה, ביניהם:

משפט ד׳ (טענה 2.3.6). אם G גרף שכל תת-גרף (מלא) סופי שלו הוא k-צביע, אז G עצמו k-צביע

משפט ה׳ (דוגמא 3.6.17). אם $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ העתקה פולינומית חד-חד-ערכית, אז היא על

המשפט הבא הוא משפט קלאסי על פונקציות ממשיות, אולם אנחנו נראה הוכחה פשוטה שלו, בשפה קרובה (אך מדויקת לגמרי!) לניסוחים המקוריים של ניוטון ולייבניץ

משפט ו׳ (*משפט ערך הביניים*, 3.6.23). אם $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה ומקיימת $f(0)\le 0\le f(1)$, אז קיים $c\in[0,1]$ עבורו $f(c)=0$.

הרשימות מבוססות בין היתר על הספרים [3, 6, 7].

2 תחשיב הפסוקים

בסעיף זה נעסוק בסוג פשוט במיוחד של לוגיקה: תחשיב הפסוקים. לוגיקה זו לא מניחה דבר על המבנה של טענות בסיסיות, ובמקום זה עונה על שאלות הנוגעות לבניה של טענה מורכבת מתוך טענות יותר פשוטות על-ידי פעולות לוגיות. בהתאם לשאלות שהותוו במבוא, נראה את התשובות המדויקות שלוגיקה זו נותנת לשאלות:

1. מהי טענה?
2. מהי המשמעות של האמירה "טענה זו נכונה"?
3. מהי הוכחה?

לאחר שנגדיר את כל המושגים, נראה שניתן לענות על כל השאלות מהמבוא עבור לוגיקה זו, ונראה גם כמה שימושים.

2.1 אלגברות בוליאניות

כאמור, בשלב זה אנו מתייחסים אל כל טענה כאל קופסה שחורה. אם a ו-b טענות כלשהן, אינטואיטיבית ניתן ליצור מהן את הטענות החדשות "a וגם b", "a או b" ו-"לא a". אנחנו מעוניינים למצוא מבנה פורמלי בו האינטואיציה הזו באה לידי ביטוי. במילים אחרות, על קבוצת הטענות B בהן אנו מתעניינים מוגדרות פעולות $\wedge : B \times B \to B$ ("וגם"), $\vee : B \times B \to B$ ("או") ו-$\neg : B \to B$ ("שלילה"). הואיל ובשלב זה אנו מתעניינים *בתוכן* של הטענה, ולא בצורת כתיבתה, למשל, הטענות "a וגם b" ו-"b וגם a" הן מבחינתינו *אותה טענה*. באופן דומה, ניתן להצדיק את התנאים האחרים בהגדרה הבאה:

הגדרה 2.1.1. *אלגברה בוליאנית* מורכבת מקבוצה B, איברים $0, 1 \in B$ ופעולות $\wedge : B \times B \to B$ ("וגם"), $\vee : B \times B \to B$ ו-$\neg : B \to B$, המקיימים את התנאים הבאים לכל $a, b, c \in B$: אלגברה בוליאנית

1. (חילופיות) $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$
2. (קיבוציות) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
3. (פילוג) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
4. $a \vee 0 = a$, $a \wedge 1 = a$
5. $a \wedge \neg a = 0$, $a \vee \neg a = 1$

נסמן ב-$\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ את המבנה כולו

הערה 2.1.2. כתוצאה מחוקי הקיבוץ, אין צורך לרשום סוגריים כאשר מפעילים אותה פעולה ברצף, ואנחנו נרשום למשל $a \wedge b \wedge c$ במקום $(a \wedge b) \wedge c$. כמו-כן, נפעל לפי מוסכמה ש-"וגם" קודם, מבחינת סדר הפעולות, ל-"או", וכך נשמיט סוגריים נוספים (כלומר, נרשום $a \wedge b \vee c$ במקום $(a \wedge b) \vee c$). בנוסף נשתמש לרוב בחילופיות בלי להזכיר זאת.

דוגמא 2.1.3. אם B קבוצה בת איבר אחד, יש עליה מבנה יחיד של אלגברה בוליאנית (שימו לב שלא דרשנו ש-$1 \neq 0$! תרגיל: הוכיחו שאם ב-B יותר מאיבר אחד, אז $1 \neq 0$).

דוגמא 2.1.4. ישנה אלגברה בוליאנית יחידה בת שני איברים, $B=\{0,1\}$. מבחינה אינטואיטיבית, זוהי האלגברה של ערכי האמת, כאשר 1 מסמל אמת, ו-0 שקר. נסמן אותה לרוב ב-2.

דוגמא 2.1.5. אם X קבוצה כלשהי, המבנה $\mathcal{B}=\langle\mathcal{P}(X),\cap,\cup,\cdot^c,\emptyset,X\rangle$, כאשר $\mathcal{P}(X)=\{A\mid A\subseteq X\}$ היא קבוצת החזקה, ו-$A^c=X\setminus A$, הוא אלגברה בוליאנית. אנחנו נקרא לאלגברות כאלה *אלגברות חזקה*.

אלגברות חזקה

ניתן לזהות את שתי הדוגמאות הקודמות כמקרים פרטיים של הדוגמא הזו, כאשר X קבוצה ריקה או קבוצה בת איבר אחד.

דרך אחת לחשוב על הדוגמא האחרונה היא לחשוב על איברי B כעל טענות על איברי X: נזהה כל טענה עם איברי X המקיימים את הטענה. תחת הפירוש הזה, הפעולות של $\mathcal{B}$ מזוהות עם האינטואיציה של "וגם", "או" ושלילה (כלומר, אם $C\subseteq X$ קבוצת האיברים ב-X המקיימים טענה c, ו-D קבוצת האיברים המקיימים טענה d, אז $C\cap D$ היא קבוצת האיברים המקיימים את הטענה "c וגם d")

דוגמא 2.1.6. אם X קבוצה כלשהי, *תת-קבוצה קוסופית* של X היא תת-קבוצה שהמשלימה שלה (ביחס ל-X) סופית. הקבוצה B המורכבת מתתי הקבוצות של X שהן סופיות או קו-סופיות היא אלגברה בוליאנית (עם פעולות כמו קודם).

תת-קבוצה קוסופית

דוגמא 2.1.7. אם $X=[0,1]$, קבוצת הממשיים בין 0 ל-1, אז קבוצת תתי-הקבוצות של X שהן איחוד סופי של קטעים היא אלגברה בוליאנית (שוב, עם פעולות החיתוך והאיחוד). אנחנו נראה עוד דוגמאות רבות מהסוג הזה בהמשך.

דוגמא 2.1.8. אם $\mathcal{B}=\langle B,\wedge,\vee,\neg,0,1\rangle$ אלגברה בוליאנית כלשהי, אז המבנה $\mathcal{B}^*=\langle B,\vee,\wedge,\neg,1,0\rangle$ גם הוא אלגברה בוליאנית, שנקראת *האלגברה הדואלית*.

האלגברה הדואלית

התרגיל הבא כולל כמה עובדות שימושיות על אלגברות בוליאניות:

תרגיל 2.1.9. לכל אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, ולכל $a,b\in\mathcal{B}$ מתקיים:

1. $a\wedge 0=0$, $a\vee 1=1$
2. $a\wedge a=a$
3. אם $a\wedge b=a\vee b$ אז $a=b$
4. אם $a\wedge b=0$ ו-$a\vee b=1$ אז $b=\neg a$
5. $\neg(\neg a)=a$
6. $\neg(a\vee b)=\neg a\wedge\neg b$
7. $a\wedge(a\vee b)=a$

הערה 2.1.10. בהנתן שוויון כלשהו בין שני ביטויים בוליאניים כמו בתרגיל, *השוויון הדואלי* הוא השוויון המתקבל מהמקורי על-ידי החלפת התפקידים של $\wedge$ ו-$\vee$, והחלפת התפקידים של 1 ו-0. למשל, הדואלי של השוויון $\neg(a\vee b)=\neg a\wedge\neg b$ הוא השוויון $\neg(a\wedge b)=\neg a\vee\neg b$. אם השוויון המקורי נכון עבור איברים כלשהם של אלגברה $\mathcal{B}$, אז השוויון הדואלי נכון עבור אותם איברים כאשר חושבים עליהם כאיברי האלגברה הדואלים $\mathcal{B}^*$. לכן, אם שוויון כלשהו נכון לכל האלגברות הבוליאניות, אז גם הדואלי שלו נכון עבורן. אנחנו נשתמש בזה באופן חופשי.

התרגיל הבא מציג דרך נוספת לחשוב על אלגברות בוליאניות, שלעתים מקלה על הוכחת תכונות כמו בתרגיל האחרון.

תרגיל 2.1.11. תהי $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית, ונגדיר לכל שני איברים $a,b\in\mathcal{B}$ ש-$a\le b$ אם $a\wedge b=a$.

1. הוכיחו שזהו סדר חלקי על $\mathcal{B}$, עם מקסימום 1 ומינימום 0.

2. הוכיחו שלכל שני איברים $a,b\in\mathcal{B}$, המקסימום ביניהם ביחס ל-$\le$ קיים ושווה ל-$a\vee b$ והמינימום שווה ל-$a\wedge b$ (נזכיר שה*מקסימום* של קבוצה A בסדר חלקי הוא איבר m הגדול או שווה לכל איבר ב-A, וקטן מכל איבר אחר שמקיים זאת. מקסימום כזה, אם קיים, הוא יחיד) מקסימום

3. נניח ש-P קבוצה סדורה כמו בסעיפים הקודמים, ונסמן ב-$a\vee b$ את המקסימום וב-$a\wedge b$ את המינימום. נניח שלכל $a\in P$ קיים $b\in P$ כך ש-$a\wedge b=0$ ו-$a\vee b=1$, ושלכל $a,b,c\in P$ מתקיים: $(a\vee b)\wedge(a\vee c)\le a\vee(b\wedge c)$. הוכיחו ש-$\langle P,\wedge,\vee,0,1\rangle$ אלגברה בוליאנית.

4. פתרו שוב את תרגיל 2.1.9 בעזרת התרגיל הנוכחי

בהמשך, כשנדבר על אלגברות בוליאניות, נתייחס באופן חופשי ליחס הסדר מהתרגיל האחרון.

נחזור למוטיבציה: אם אנחנו חושבים על איברי אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ כטענות, איך לנסח את העובדה שבמצב נתון, כל טענה היא אמיתית או שיקרית? אנחנו רוצים להצמיד לכל טענה $b\in\mathcal{B}$ ערך אמת $v(b)$, שיכול להיות אמת או שקר. כלומר, אנחנו מדברים על פונקציות $v:B\to\{0,1\}$, אבל הפונקציות צריכות לקיים תנאים מסוימים: אם אמרנו שהטענות a ו-b שתיהן נכונות, אז כך גם $a\wedge b$, ואילו $\neg a$ שיקרית. במונחים של ההגדרה הבאה, אנחנו מתעניינים בהומומורפיזמים מ-$\mathcal{B}$ ל-$\{0,1\}=\mathbf{2}$.

הגדרה 2.1.12. *העתקה של אלגברות בוליאניות* מאלגברה בוליאנית $\mathcal{B}_1$ לאלגברה בוליאנית $\mathcal{B}_2$ היא פונקציה $v:B_1\to B_2$ המקיימת: העתקה של אלגברות בוליאניות

1. $v(a\wedge b)=v(a)\wedge v(b)$
2. $v(\neg a)=\neg v(a)$

3. $v(1) = 1$

לכל $a, b \in B_1$. (העתקה כזו נקראת גם *הומומורפיזם* של אלגברות בוליאניות) הומומורפיזם

העתקה כזו נקראת *שיכון* אם היא חד-חד-ערכית, ו*איזומורפיזם* אם היא הפיכה. שיכון איזומורפיזם

הערה 2.1.13. בגלל תרגיל 2.1.9, העתקה כזו מקיימת גם $v(a \vee b) = v(a) \vee v(b)$ ו-$v(0) = 0$. כמו-כן, היא שומרת על הסדר החלקי מתרגיל 2.1.11. נשים לב שלמרות הסימון הזהה, הפעולות בצד שמאל הן ב-$\mathcal{B}_1$ ואלה שבצד ימין הן ב-$\mathcal{B}_2$.

דוגמא 2.1.14. לכל אלגברה יש העתקה יחידה אל האלגברה בת איבר אחד. אם ב-$\mathcal{B}$ יש יותר מאיבר אחד, אין העתקה מהאלגברה בת איבר אחד ל-$\mathcal{B}$.

דוגמא 2.1.15. יש העתקה יחידה מ-2 לכל אלגברה בוליאנית. העתקה מאלגברה $\mathcal{B}$ ל-2 נקראת *השמה*. אלה העתקות שנתעניין בהן מאד בהמשך, שכן, כאמור, הן ממדלות את התהליך של בחירת ערכי אמת לטענות. השמה

דוגמא 2.1.16. אם $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ היא אלגברת קבוצת החזקה, כל איבר x של X מגדיר השמה $v_x : \mathcal{B} \to 2$, הנתונה על ידי: $v_x(A) = 1$ אם $x \in A$, ו-0 אחרת. אם חושבים על איברי $\mathcal{B}$ כטענות על איברי X, אז v_x היא ההשמה ש"בודקת" האם הטענה נכונה עבור x.

תרגיל 2.1.17. באופן יותר כללי, אם $C \subseteq X$, הוכיחו שהפונקציה $A \mapsto A \cap C$ היא הומומורפיזם מ-$\mathcal{P}(X)$ ל-$\mathcal{P}(C)$.

סוף הרצאה 1, 24 באוק'

דוגמא 2.1.18. אם $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית בת יותר מאיבר אחד, אז פונקציית הזהות *אינה* הומומורפיזם מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathcal{B}^*$ (למה?) מאידך, פונקציית השלילה היא איזומורפיזם מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathcal{B}^*$.

איבר $a \neq 0$ של אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ הוא *אטום* אם אין איבר $b \in \mathcal{B}$ המקיים $0 < b < a$. למשל, אם $\mathcal{B} = \mathcal{P}(A)$ אלגברת חזקה, האטומים הם בדיוק היחידונים. אטום

תרגיל 2.1.19 (אלגברות בוליאניות סופיות). נניח ש-$\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית *סופית*

1. הוכיחו שלכל איבר $b \neq 0$ יש אטום $a \leq b$.
2. הוכיחו ש-$\mathcal{B}$ איזומורפית לאלגברת חזקה
3. הוכיחו שאלגברה בוליאנית אינסופית אינה בהכרח איזומורפית לאלגברת חזקה

2.1.20 משפט סטון

מי שניסה לפתור את תרגיל 2.1.9, גילה אולי שזה יותר קשה ממה שזה נראה. מצד שני, כל הטענות שם קלות מאד להוכחה עבור המקרה בו $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ היא אלגברת החזקה של איזושהי קבוצה. בתרגיל האחרון ראינו שכל אלגברה בוליאנית סופית היא כזו, אבל זה לא נכון לאלגברות כלליות.

נניח עכשיו ש-$\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית כלשהי, עבורה יש לנו שיכון $v : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$ עבור איזושהי קבוצה X. אז אפשר להוכיח את אחד השוויונים עבור $\mathcal{B}$ באופן הבא: נניח שהשוויון אינו

נכון עבור איזשהם איברים $a,b\in\mathcal{B}$. אחרי שנפעיל את υ נקבל, בגלל ש-υ שיכון, שהשוויון אינו נכון עבור האיברים $\upsilon(a)$ ו-$\upsilon(b)$ ב-$\mathcal{P}(X)$. אבל כבר הוכחנו שהשוויון נכון לכל זוג איברים בכל אלגברה מהצורה הזו.

במילים אחרות, כל משוואה שנכונה לכל האיברים באלגברה $\mathcal{B}$ נכונה גם לכל האיברים באלגברה שמשוכנת בה (בהמשך תהיה לנו השפה לנסח את הטענה הזו באופן יותר מדויק ויותר כללי). הואיל ובדיקת שוויונים כאלה קלה מאד באלגברות חזקה, נשאלת השאלה: אילו אלגברות ניתנות לשיכון באלגברות חזקה?

משפט 2.1.21 (משפט הייצוג של סטון). *לכל אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ קיימת קבוצה X ושיכון $\upsilon:\mathcal{B}\to\mathcal{P}(X)$*

על מנת להוכיח את המשפט, עלינו ראשית לזהות את X. נניח ראשית ש-$\mathcal{B}=\mathcal{P}(Y)$ עבור איזשהו Y. האם אנחנו יכולים לשחזר את איברי Y מתוך מבנה האלגברה של $\mathcal{B}$? ראינו בדוגמא 2.1.16 שלכל איבר $y\in Y$ ניתן להתאים השמה $\upsilon_y:\mathcal{B}\to\mathbf{2}$. לכן, קיבלנו העתקה $Y\to\mathscr{S}(\mathcal{B})$, כאשר $\mathscr{S}(B)$ קבוצת ההשמות על $\mathcal{B}$, אשר נתונה על-ידי $y\mapsto\upsilon_y$. העתקה זו חד-חד-ערכית, משום שאם $y\neq z$, אז $1=\upsilon_y(\{y\})\neq\upsilon_z(\{y\})=0$ (כפי שנראה בהמשך, היא לרוב לא על, אבל זה פחות חשוב, כי אנחנו מחפשים רק שיכון).

אז תיארנו קבוצה X המכילה את Y במונחים של מבנה האלגברה הבוליאנית בלבד. בפרט, $\mathcal{B}=\mathcal{P}(Y)\subseteq\mathcal{P}(X)$. כעת נוותר על ההנחה ש-$\mathcal{B}$ אלגברת חזקה, ונשתמש באותו רעיון כדי להגדיר את X באופן כללי.

הוכחת משפט סטון. נסמן ב-X את קבוצת ההשמות על $\mathcal{B}$, ונגדיר $\upsilon:\mathcal{B}\to\mathcal{P}(X)$ על-ידי: $\upsilon(b)=\{\omega:\mathcal{B}\to\mathbf{2}\mid\omega(b)=1\}\subseteq X$. אז לכל $b,c\in\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}\upsilon(b\wedge c)=\{\omega:\mathcal{B}\to\mathbf{2}\mid 1=\omega(b\wedge c)=\omega(b)\wedge\omega(c)\}=\\ \{\omega:\mathcal{B}\to\mathbf{2}\mid 1=\omega(b)\}\cap\{\omega:\mathcal{B}\to\mathbf{2}\mid 1=\omega(c)\}=\upsilon(b)\cap\upsilon(c)\end{aligned}$$

ובאופן דומה לשלילה ול-0.

זה מראה ש-υ העתקה של אלגברות בוליאניות. כדי להוכיח ש-υ חד-חד-ערכית, עלינו להוכיח שלכל $a\neq b\in\mathcal{B}$ יש השמה $\omega:\mathcal{B}\to\mathbf{2}$ כך ש-$\omega(a)\neq\omega(b)$. זה התוכן של המשפט הבא, שמסיים את ההוכחה. □

משפט 2.1.22. *אם a ו-b שני איברים שונים באלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, אז יש השמה $\omega:\mathcal{B}\to\mathbf{2}$ כך ש-$\omega(a)\neq\omega(b)$.*

נשים לב שבפרט, המשפט אומר שלכל אלגברה בוליאנית לא טריוויאלית $\mathcal{B}$ יש השמה, עובדה לא ברורה בכלל.

אנחנו נוכיח את המשפט באמצעות תרגומו לכמה טענות שקולות. הראשונה היא רדוקציה למקרה פרטי:

תרגיל 2.1.23. הוכיחו שהמשפט נובע מהמקרה הפרטי בו $b=0$

לפי התרגיל האחרון, עלינו להוכיח שאם $b\neq 0$, אז יש השמה $\omega:\mathcal{B}\to\mathbf{2}$ כך ש-$\omega(b)=1$. על מנת להוכיח זאת, נתבונן בהשמה כלשהי $\omega:\mathcal{B}\to\mathbf{2}$, ונשאל: איך נראית הקבוצה $\omega^{-1}(1)$? מסתבר שקבוצות כאלה מתוארות באופן הבא:

הגדרה 2.1.24. תת-קבוצה $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{B}$ של אלגברה בוליאנית נקראית *על-מסנן* אם: על-מסנן

1. לכל $a,b\in\mathcal{F}$ גם $a\wedge b\in\mathcal{F}$.
2. לכל $a\in\mathcal{B}$, בדיוק אחד מ-$a,\neg a$ שייך ל-$\mathcal{F}$
3. $0\notin\mathcal{F}$

תרגיל 2.1.25. הוכיחו שאם $\mathcal{F}$ על-מסנן, אז

1. $\mathcal{F}$ לא ריק
2. אם $a\in\mathcal{F}$ ו-$b\geq a$ אז $b\in\mathcal{F}$

תרגיל 2.1.26. הוכיחו ש-$\mathcal{F}\subseteq\mathcal{B}$ על-מסנן אם ורק אם יש השמה $\omega:\mathcal{B}\to\mathbf{2}$ כך ש-$\omega^{-1}(1)=\mathcal{F}$

לפי התרגיל האחרון, ניתן לתרגם את הבעיה שלנו לשאלה: האם לכל $b>0$ יש על-מסנן שמכיל אותו? כדי לענות על השאלה, מסתבר שכדאי לשאול שאלה קצת יותר כללית: אילו קבוצות של איברים של $\mathcal{B}$ מוכלות בעל-מסנן?

הגדרה 2.1.27. תת-קבוצה $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{B}$ נקראת *מסנן* אם: מסנן

1. לכל $a,b\in\mathcal{F}$ גם $a\wedge b\in\mathcal{F}$
2. לכל $a\in\mathcal{F}$ ו-$b\geq a$ גם $b\in\mathcal{F}$
3. $\mathcal{F}$ לא ריקה
4. $0\notin\mathcal{F}$

היתרון במסננים (על פני על-מסננים) הוא שיש הרבה מסננים שמופיעים באופן טבעי ואפשר לתאר אותם במפורש, בעוד שזה לרוב בלתי אפשרי לתאר על-מסנן. נראה דוגמאות של מסננים בהמשך, אבל בינתיים נשים לב לעובדה הבאה:

תרגיל 2.1.28. נניח ש-$\mathcal{F}_0$ תת-קבוצה של אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ כך שלכל $b_1,\dots,b_k\in\mathcal{F}_0$, $b_1\wedge\dots\wedge b_k\neq 0$. אז יש מסנן שמכיל את $\mathcal{F}_0$. בפרט, אם $b\neq 0$ אז יש מסנן שכולל אותו.

אינטואיטיבית, אפשר לחשוב על מסנן כעל אוסף הטענות שאדם (רציונלי) יכול להאמין בהן. על-מסנן הוא אז אוסף הדעות של אדם שיש לו דעה על כל דבר. הקשר הפורמלי בין מסננים לעל-מסננים נתון בטענה הבאה.

טענה 2.1.29. *התנאים הבאים על תת-קבוצה $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{B}$ שקולים*

1. *$\mathcal{F}$ על-מסנן*

2. *$\mathcal{F}$ מסנן מקסימלי (כלומר, לא מוכל ממש במסנן אחר)*

הוכחה. נניח ש-$\mathcal{F}$ על-מסנן, ו-$a\in\mathcal{F}$. אז לכל $b\geq a$, בדיוק אחד מ-b ו-$\neg b$ ב-$\mathcal{F}$. אם זה $\neg b$ אז גם $0=a\wedge\neg b\in\mathcal{F}$, בסתירה להגדרה. זה מראה ש-$\mathcal{F}$ מסנן. אם $\mathcal{F}_1\supset\mathcal{F}$ מסנן שמרחיב אותו, ניקח $a\in\mathcal{F}_1\setminus\mathcal{F}$. כיוון ש-$a\notin\mathcal{F}$ ההגדרה נותנת $\neg a\in\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_1$, ולכן $0=a\wedge\neg a\in\mathcal{F}_1$, בסתירה להגדרה.

נניח עכשיו ש-$\mathcal{F}$ מסנן מקסימלי. אם אינו על-מסנן, יש $a\in\mathcal{B}$ כך ש-$a,\neg a\notin\mathcal{F}$. אם לכל $b\in\mathcal{F}$, $a\wedge b\neq 0$, אז לפי תרגיל 2.1.28, יש מסנן שמכיל את $\mathcal{F}$ ואת a, בסתירה למקסימליות של $\mathcal{F}$. לכן יש $b\in\mathcal{F}$ כך ש-$b\wedge a=0$. באותו אופן, יש $c\in\mathcal{F}$ כך ש-$c\wedge\neg a=0$. אבל אז $b\wedge c=0$, בסתירה לכך ש-$\mathcal{F}$ מסנן. $\square$

תרגיל 2.1.30. הוכיחו שמסנן $\mathcal{F}$ הוא על-מסנן אם ורק אם לכל $b,c\in\mathcal{B}$, אם $b\vee c\in\mathcal{F}$ אז $b\in\mathcal{F}$ או $\in\mathcal{F}$.

הטענה האחרונה, בתוספת התרגיל שלפניה, מראים שהוכחת המשפט תסתיים אם נראה שכל מסנן מוכל במסנן מקסימלי. הכלי הסטנדרטי לעשות זאת נקרא *הלמה של צורן*. כדי לצטט אותה, נזכיר את ההגדרה הבאה.

הגדרה 2.1.31. תהי $(X,\prec)$ קבוצה סדורה חלקית.

1. *שרשרת* ב-X הינה תת-קבוצה Y עליה הסדר *מלא*, כלומר לכל $x\neq y\in Y$, מתקיים $x\prec y$ או $y\prec x$. שרשרת סדר מלא

2. תת-קבוצה $Y\subseteq X$ ב-X היא *חסומה מלעיל* אם קיים $x\in X$ כך ש-$y\prec x$ או $y=x$ לכל $y\in Y$. חסומה מלעיל

3. *איבר מירבי* ב-X הוא איבר $x\in X$ עבורו לכל $y\in X$ מתקיים $x\not\prec y$. איבר מירבי

דוגמא 2.1.32. תהי S קבוצה, ו-X קבוצה של קבוצות המוכלות ב-S. אז X סדורה חלקית ביחס להכלת קבוצות: $x\prec y$ אם $x\subset y$. תת-קבוצה Y של X חסומה מלעיל אם יש קבוצה $y\in X$ המכילה את כל הקבוצות ב-Y. איבר מירבי הוא איבר שלא מוכל בשום קבוצה אחרת ב-X.

לעיתים קרובות נעסוק בקבוצות X מסוג זה, עם התכונה שהאיחוד של כל שרשרת של קבוצות ב-X, גם הוא קבוצה ב-X. במקרה זה, האיחוד הוא חסם מלעיל של השרשרת, ולכן כל שרשרת חסומה מלעיל.

דוגמא 2.1.33. בתור מקרה פרטי של הדוגמא הקודמת, יהי S מרחב וקטורי (מעל שדה כלשהו), ותהי X קבוצת הקבוצות הבלתי תלויות לינארית ב-S. איחוד של שרשרת של קבוצות בלתי תלויות הוא קבוצה בלתי תלויה (שכן כל תלות לינארית היא בין מספר סופי של וקטורים, אשר שייכים לאחד האיברים בשרשרת). איבר מירבי ב-X, כלומר קבוצה בלתי תלויה מירבית, נקרא בסיס של S.

עובדה 2.1.34 (הלמה של צורן). *תהי X קבוצה סדורה חלקית, בה כל שרשרת חסומה מלעיל. אז קיים ב-X איבר מירבי*

תרגיל 2.1.35. הראה שמהלמה של צורן נובעת הגירסא היותר חזקה: עם אותן הנחות, לכל איבר קיים איבר מירבי הגדול ממנו

תרגיל 2.1.36. הקבוצה הריקה הינה קבוצה סדורה חלקית (באופן יחיד). למה היא אינה מהווה סתירה ללמה של צורן?

בגלל הלמה של צורן, משתלם לנסח תכונות של עצמים על-ידי תנאי מקסימליות. למשל:

דוגמא 2.1.37. לפי דוגמא 2.1.33, לכל מרחב וקטורי יש בסיס

מסיבות דומות, הלמה של צורן מופיעה במקומות רבים במתמטיקה. אנחנו נשתמש בה כדי להראות את קיומם של על-מסננים, ובכך להחזיר את כל החובות שצברנו:

טענה 2.1.38. *כל מסנן באלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ מוכל בעל-מסנן*

הוכחה. נתבונן בקבוצת כל המסננים, עם יחס ההכלה. לפי תרגיל 2.1.35, מספיק להראות: איחוד של שרשרת מסננים היא מסנן. נניח ש-C שרשרת כזו, עם איחוד $\mathcal{F}$. אם $a, b \in \mathcal{F}$, קיימים $\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b \in C$, כך ש-$a \in \mathcal{F}_a$ ו-$b \in \mathcal{F}_b$. הואיל ו-C שרשרת, אחד משני המסננים, נניח $\mathcal{F}_a$, מוכל בשני. אז $a, b \in \mathcal{F}_b$, ולכן $a \wedge b \in \mathcal{F}_b \subseteq \mathcal{F}$ (כי $\mathcal{F}_b$ מסנן). הוכחת התכונות האחרות דומה. $\square$

נסכם את ההוכחה:

הוכחת משפט 2.1.22. לפי תרגיל 2.1.23,עלינו להראות שלכל $b > 0$ ב-$\mathcal{B}$ קיימת השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega(b) = 1$. לפי תרגיל 2.1.28, b שייך למסנן, ולפי הטענה האחרונה, מסנן זה מוכל בעל-מסנן $\mathcal{F}$. נגדיר $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ על-ידי $\omega(a) = 1$ אם ורק אם $a \in \mathcal{F}$. אז $\omega(b) = 1$, ולפי תרגיל 2.1.26, ω השמה. $\square$

סוף הרצאה 2, 26 באוק'

המסקנה הבאה היא כמעט טריוויאלית בהקשר הזה, אך בהקשר של הפירוש לפסוקים שיבוא בהמשך היא אחת התוצאות המרכזיות. נגיד שהשמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ היא *מודל* של תת-קבוצה $B_0 \subseteq \mathcal{B}$ (או שהיא *מספקת* את B_0) אם $\omega(b) = 1$ לכל $b \in B_0$.

מודל
מספקת

מסקנה 2.1.39 (משפט הקומפקטיות לאלגברות בוליאניות). *אם $\mathcal{B}_0$ קבוצת איברים של אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, כך שלכל תת-קבוצה סופית $F \subseteq B_0$ יש מודל ω_F, אז ל-B_0 יש מודל*

תרגיל 2.1.40. הוכיחו את המסקנה

תרגיל 2.1.41. נניח ש-$\mathcal{B}_0$ תת-אלגברה של $\mathcal{B}$. הוכיחו שכל השמה ל-$\mathcal{B}_0$ ניתן להרחיב להשמה ל-$\mathcal{B}$.

תרגיל 2.1.42. תהי $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית, ולכל $a, b \in \mathcal{B}$ נסמן $a \to b = \neg(a) \vee b$.

1. הוכיחו שאם $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ השמה, אז $\omega(a \to b) = \omega(a) \to \omega(b)$.

2. נניח ש-$\mathcal{B}$ קבוצה עם איבר נתון $0 \in \mathcal{B}$ ופעולה $(a,b) \mapsto a \to b$. נגיד ש-$\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ השמה אם $\omega(0) = 0$ ומתקיים השוויון מהסעיף הקודם. נניח שמתקיים התנאי הבא: לכל $a, b \in \mathcal{B}$, אם לכל השמה ω מתקיים $\omega(a) = \omega(b)$, אז $a = b$. הוכיחו שיש מבנה יחיד של אלגברה בוליאנית על $\mathcal{B}$, עבורו $\to$ מתקבל כמו בתחילת השאלה.

2.2 פסוקים ואלגברות חפשיות

הדיון שלנו על "טענות" היה, עד כה, קצת ערטילאי: הטענות הן איברים של אלגברה בוליאנית, הדוגמאות היו בעיקר אלגברות של קבוצות, וקשה לראות בקבוצות אלה טענות. יותר מזה, אלגברה בוליאנית מייצגת טענות עד-כדי שקילות: הטענות $a \wedge b$ ו-$b \wedge a$ שוות, על-פי הגדרה, בעוד שבעולם האמיתי אולי נרצה לחשוב על הטענה "קר ויורד גשם" כשונה מ-"יורד גשם וקר".

בסעיף זה ניקח את הגישה השניה: נתחיל מקבוצה P של "טענות בסיסיות", ונבנה מהן, ברמה התחבירית, טענות חדשות. על-מנת להפריד בין טענות ברמה הטכנית והטענות בדיון עצמו, נקרא לאיברי P והטענות שנבנות ממהם "פסוקים".

ברמה הטכנית, המשמעות של הבניה היא כזו: אנחנו בונים אלגברה בוליאנית שמכילה את P, אנחנו יכולים לקבוע את ערכי האמת של P כרצוננו, ומרגע שקבענו אותם, ערך האמת של יתר האיברים נקבע. במלים אחרות, האלגברה נתונה על-ידי ההגדרה הבאה:

האלגברה הבוליאנית החפשית $\mathcal{B}(P)$

הגדרה 2.2.1. לכל קבוצה P, *האלגברה הבוליאנית החפשית* על P היא אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}(P)$, המכילה את P ובעלת התכונה הבאה: אם $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית כלשהי, לכל העתקה של קבוצות $t_0 : P \to \mathcal{B}$ יש הרחבה יחידה להעתקה של אלגברות בוליאניות $t : \mathcal{B}(P) \to \mathcal{B}$.

כלומר, t_0 מכתיבה את הערך של האיברים הבסיסיים ב-P, ומשם יש רק דרך אחת לחשב את הערך של כל איבר אחר. המטרה העיקרית שלנו בסעיף זה היא להוכיח:

משפט 2.2.2. *לכל קבוצה P קיימת אלגברה בוליאנית חפשית יחידה $\mathcal{B}(P)$*

היחידות במשפט דורשת קצת הסבר: ניתן כמובן לשנות את השמות של האיברים ב-$\mathcal{B}(P)$ (בהנחה שהיא קיימת), ולקבל אלגברה אחרת, אבל היא תהיה זהה מכל בחינה מעשית לאלגברה המקורית. באופן יותר מדויק:

תרגיל 2.2.3. נניח ש-$t_0 : P \to Q$ פונקציה בין קבוצות, ו-$\mathcal{B}(P), \mathcal{B}(Q)$ אלגברות חפשיות על קבוצות אלה

1. הוכיחו שיש הומומורפיזם יחיד $t : \mathcal{B}(P) \to \mathcal{B}(Q)$ כך ש-$t(p) = t_0(p)$ לכל $p \in P$

2. הוכיחו ש-t_0 חד-חד-ערכית או על אם ורק אם t כזו (רמז: ביחרו פונקציה הפוכה בכיוון אחד). בפרט, אם $P \subseteq Q$, אז ניתן לזהות את $\mathcal{B}(P)$ עם תת-אלגברה של $\mathcal{B}(Q)$ (ואנחנו נעשה זאת)

3. הוכיחו שאם $\mathcal{B}_1$ ו-$\mathcal{B}_2$ שתי אלגברות חפשיות על אותה קבוצה P, אז קיים איזומורפיזם יחיד $t : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ שהצמצום שלו ל-P הוא הזהות

שימו לב שכל הטענות נובעות ישירות *מההגדרה* של אלגברה חפשית, ולא מהבנייה שלה.

הערה 2.2.4. המצב דומה מאד לרעיון של "מרחב לינארי שנוצר על-ידי קבוצה P". נזכיר שבהנתן שדה k וקבוצה P, ניתן לבנות מרחב וקטורי $k\langle P\rangle$ מעל k שמכיל את P, ו-P בסיס שלו. מהגדרת הבסיס נובע שכל העתקה של קבוצות $T_0 : P \to V$, כאשר V מרחב וקטורי כלשהו מעל k, ניתנת להרחבה יחידה להעתקה לינארית $T : k\langle P\rangle \to V$. כלומר, העתקה לינארית מ-$k\langle P\rangle$ נקבעת בצורה "חפשית" ויחידה על-ידי הצמצום שלה ל-P.

על-מנת להוכיח את חלק הקיום במשפט, אנחנו נבנה את קבוצת הפסוקים מעל P. לשם כך, נזכיר *שמחרוזת* (מעל קבוצה A) היא סדרה סופית של איברים מ-A (אנחנו מזהים את איברי A עם סדרות באורך 1). מחרוזת

הגדרה 2.2.5. עבור קבוצה P, *קבוצת הפסוקים* $\mathcal{F}(P)$ מעל P היא הקבוצה הקטנה ביותר F של מחרוזות מעל הקבוצה $P \cup \{\langle, \rangle, \to, 0\}$ המקיימת: קבוצת הפסוקים $\mathcal{F}(P)$

1. $0 \in F$
2. $P \subseteq F$
3. אם $x, y \in F$ אז $\langle x \to y\rangle \in F$

כל איבר של $\mathcal{F}(P)$ נקרא *פסוק מעל* P. פסוק

כמובן שבהגדרה הזו אנו מניחים ש-P לא כוללת את הסימנים הנוספים $\langle, \rangle, \to, 0$. בשלב ראשון, 0 לא משחק תפקיד מיוחד, ואנחנו נסמן $P_0 = P \cup \{0\}$.

דוגמא 2.2.6. אם $P = \{p, q\}$, המחרוזות הבאות הן פסוקים מעל P: p, 0, $\langle p\to 0\rangle$, $\langle p\to q\rangle$, וכן הלאה.

לקבוצת הפסוקים אין מבנה טבעי של אלגברה בוליאנית, אך מלבד זאת, היא מקיימת את הדרישה:

משפט 2.2.7. *נניח ש-A קבוצה עם פעולה דו-מקומית $*$. לכל העתקה של קבוצות $t_0 : P_0 \to A$ יש הרחבה יחידה $t : \mathcal{F}(P) \to A$ המקיימת:*

$$t(\langle x\to y\rangle) = t(x) * t(y) \tag{2.1}$$

לכל $x, y \in \mathcal{F}(P)$.

ההוכחה תדגים את הדרך הרגילה להשתמש בהגדרה, שהיא סוג של אינדוקציה: מסתכלים על קבוצת הפסוקים שמקיימת את התכונה שאנחנו רוצים, ומראים שהיא מכילה את P_0 וסגורה תחת הגרירה. נקודה מעניינת היא שאנחנו מוכיחים קודם את היחידות, ואז משתמשים בה כדי להוכיח את הקיום.

הוכחה. נתחיל מהיחידות. נניח ש-$t_1,t_2:\mathcal{F}(P)\to A$ שתיהן מקיימות את התנאים. נסמן $X=\{x\in\mathcal{F}(P)\mid t_1(x)=t_2(x)\}$. אז $P_0\subseteq X$, משום שהצמצום של t_i לקבוצה זו שווה ל-t_0. כמו-כן, אם $x,y\in X$, אז

$$t_1(\langle x\to y\rangle)=t_1(x)*t_1(y)=t_2(x)*t_2(y)=t_2(\langle x\to y\rangle)$$

כלומר, $\langle x\to y\rangle\in X$ גם כן. לכן, $X\subseteq\mathcal{F}(P)$ מקיימת את התנאי בהגדרה של של $\mathcal{F}(P)$, כלומר $X=\mathcal{F}(P)$ ו-$t_1=t_2$.

להוכחת הקיום, נזדקק לגרסא חזקה יותר של היחידות, שמופיעה בתרגיל 2.2.8. במונחים של תרגיל זה, נתבונן בקבוצה

$$E=\{t:X\to A\mid X\le\mathcal{F}(P),t\restriction_{X\cap P_0}=t_0\restriction_{X\cap P_0},\ \text{הומומורפיזם חלקי}\ t\}$$

אנחנו טוענים שלכל $x\in\mathcal{F}(P)$ קיים $t\in E$ כך ש-t מוגדר על x. אכן, נסמן את קבוצת האיברים המקיימים תנאי זה ב-T. נשים לב ש-$t_0\in E$, ולכן $P_0\subseteq T$. נניח ש-$x_1,x_2\in T$. אז יש $t_i:X_i\to A$, כאשר $t_i\in E$ ו-$x_i\in X_i$. לפי תרגיל 2.2.8, הצמצומים של t_i ל-$X_1\cap X_2$ שווים, ולכן לפי תרגיל 2.2.9, יש פונקציה $t:X_1\cup X_2\to A$ שהצמצום שלה ל-X_i הוא t_i. נגדיר $t(\langle x_1\to x_2\rangle)=t(x_1)*t(x_2)$ (אם t אינה מוגדרת שם).

אנו טוענים ש-t הומומורפיזם חלקי. המקרה היחיד שצריך לבדוק הוא האיבר החדש $\langle x_1\to x_2\rangle$. אבל לפי תרגיל 2.2.10, השוויון היחיד שצריך להראות הוא $t(\langle x_1\to x_2\rangle)=t(x_1)*t(x_2)$, וזה נכון לפי הגדרה.

הראינו שהאוסף E מקיים את תנאי תרגיל 2.2.9, ולכן קיימת פונקציה יחידה t על התחום $\mathcal{F}(P)$ שהצמצום שלה לכל קבוצה סגורה הוא ב-E. בפרט, t עצמה ה-E, ולכן מקיימת את תנאי הטענה. □

בהוכחה השתמשנו בשלוש הטענות הבאות, שהראשונה שבהן גם מסבירה את המינוח.

תרגיל 2.2.8. נאמר שתת-קבוצה $X\subseteq\mathcal{F}(P)$ היא *סגורה*, $X\le\mathcal{F}(P)$, אם לכל $x,y\in\mathcal{F}(P)$, אם $\langle x\to y\rangle\in X$ אז גם $x,y\in X$. נאמר ש-$t:X\to A$ (כאשר A כמו במשפט 2.2.7) היא הומומורפיזם חלקי אם $t(\langle x\to y\rangle)=t(x)*t(y)$ לכל $x,y,\langle x\to y\rangle\in X$. סגורה $X\le\mathcal{F}(P)$

1. הוכיחו שחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה

2. הוכיחו שאם X סגורה, ו-$t_1,t_2:X\to A$ הומומורפיזמים חלקיים כך ש-$t_1\restriction_{X\cap P_0}=t_2\restriction_{X\cap P_0}$, אז $t_1=t_2$

התרגיל הבא הוא תרגיל כללי על פונקציות בין קבוצות.

תרגיל 2.2.9. נניח ש-X,Y קבוצות, ו-E קבוצה של פונקציות חלקיות $t:X_t\to Y$ (כאשר $X_t\subseteq X$). נניח שלכל $t,s\in E$ מתקיים $t\restriction_{X_s\cap X_t}=t\restriction_{X_s\cap X_t}$. הוכיחו שקיימת פונקציה יחידה $u:U\to Y$ כאשר $U=\bigcup_{t\in E}X_t$, כך ש-$u\restriction_{X_t}=t$ לכל $t\in E$.

התרגיל האחרון נקרא גם משפט הקריאה היחידה, משום שהוא אומר שיש דרך יחידה "לקרוא" איבר של $\mathcal{F}(P)$, כלומר, להבין איך הוא נבנה מהפסוקים הבסיסיים.

תרגיל 2.2.10 (משפט הקריאה היחידה). הוכיחו שהפונקציה $I : \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P)$ המוגדרת על-ידי $I(x, y) = \langle x{\to}y \rangle$ היא חד-חד-ערכית, ושהתמונה שלה זרה ל-P_0.

הוכיחו שהטענה לא הייתה נכונה אילו היינו מחליפים את $\langle x{\to}y \rangle$ ב-$x \to y$ בהגדרת $\mathcal{F}(P)$ (כלומר, מוותרים על הסוגריים)

סוף הרצאה 3, 31 באוק'

נגדיר את הפעולות הבאות על $\mathcal{F}(P)$:

$$\neg(x) = \langle x{\to}0 \rangle \qquad \neg : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P) \tag{2.2}$$
$$\wedge(x, y) = \neg(\langle x{\to}\neg(y) \rangle) \qquad \wedge : \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P) \tag{2.3}$$

הפעולות הללו לא הופכות את $\mathcal{F}(P)$ לאלגברה בוליאנית: למשל, $\neg(\neg(p)) \neq p$. הסיבה, כמו בדוגמא הזו, היא שיש פסוקים שהם שונים כמחרוזות, אך זהים מבחינת המשמעות הלוגית שלהם. במילים אחרות, ישנו יחס שקילות על קבוצת הפסוקים, בו שני פסוקים הם שקולים אם יש להם אותה משמעות לוגית. ישנן לפחות שתי דרכים לתאר את השקילות הזו, אנחנו נראה אחת מהן עכשיו, ואת השניה מאוחר יותר.

לכל אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, נסמן $x \to y = \neg(x) \vee y$ עבור כל $x, y \in \mathcal{B}$.

הגדרה 2.2.11. תהי P קבוצה.

1. *השמה* על $\mathcal{F}(P)$ היא פונקציה $\omega : \mathcal{F}(P) \to \mathbf{2}$ המקיימת: $\omega(0) = 0$ ו-$\omega(\langle x{\to}y \rangle) = \omega(x) \to \omega(y)$. השמה
2. שני איברים $x, y \in \mathcal{F}(P)$ הם *שקולים לוגית* אם לכל השמה $\omega : \mathcal{F}(P) \to \mathbf{2}$ מתקיים $\omega(x) = \omega(y)$. סימון: $x \equiv y$. שקולים לוגית
3. *מודל* של קבוצת פסוקים $\Gamma \subseteq \mathcal{F}(P)$ הוא השמה $\omega : \mathcal{F}(P) \to \mathbf{2}$ המקיימת $\omega(x) = 1$ לכל $x \in \Gamma$. נאמר גם ש-ω *מספקת* את Γ. מודל מספקת

טענה 2.2.12. *תהי P קבוצה.*

1. *שקילות לוגית היא יחס שקילות על $\mathcal{F}(P)$.*
2. *אם $x \equiv x'$ ו-$y \equiv y'$ אז $\neg(x) \equiv \neg(x')$ ו-$\wedge(x, y) \equiv \wedge(x', y')$. לכן, $\neg$ ו-$\wedge$ משרות פעולות מוגדרות היטב על המנה $B := \mathcal{F}(P)/\equiv$ (שמסומנות באותו סימון).*
3. *המבנה $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \neg, 0 \rangle$ הוא אלגברה בוליאנית עם הפעולות המושרות (כאשר 0 מסמל את המחלקה של $0 \in \mathcal{F}(P)$, ויתר המבנה נקבע)*
4. *האיברים של P_0 אינם שקולים, ולכן P_0 משוכנת ב-$\mathcal{B}$.*

תרגיל 2.2.13. הוכיחו את הטענה

הוכחת משפט 2.2.2. נוכיח שהאלגברה $\mathcal{B}$ המופיעה בטענה 2.2.12 היא חפשית על P. נניח ש-$t_0 : P \to \mathcal{B}'$ היא פונקציה כלשהי אל אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}'$. עלינו להוכיח שהיא ניתנת להרחבה יחידה להעתקה $t : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ של אלגברות בוליאניות. נסמן ב-$\pi : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{B} = \mathcal{F}(P)/\equiv$ את העתקת המנה.

יחידות: נניח ש-$t_1, t_2 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ שתיהן מרחיבות את t_0. נסמן $\tilde{t_i} = t_i \circ \pi : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{B}'$. אז $\tilde{t_i}$ מסכימות על P (כי הצמצום של שתיהן הוא t_0) ועל 0, ושתיהן מקיימות $\tilde{t_i}(\langle x \to y \rangle) = \tilde{t_i}(x) \to \tilde{t_i}(y)$ לכל $x, y \in \mathcal{F}(P)$. לפי משפט 2.2.7, $\tilde{t_1} = \tilde{t_2}$. בגלל ש-$\pi$ על, נובע מזה ש-$t_1 = t_2$.

קיום: לפי משפט 2.2.7, יש העתקה $\tilde{t} : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{B}'$ שמרחיבה את t_0, כך ש-$\tilde{t}(0) = 0$ ו-$\tilde{t}(\langle x \to y \rangle) = \tilde{t}(x) \to \tilde{t}(y)$. אנחנו טוענים שאם $x \equiv x'$ אז $\tilde{t}(x) = \tilde{t}(x')$. אחרת, לפי משפט 2.1.22 יש השמה $\omega : \mathcal{B}' \to 2$ כך ש-$\omega(t(x)) \neq \omega(t(x'))$. אז $\omega \circ t$ השמה על $\mathcal{F}(P)$ שנותנת ערכים שונים ל-x ול-x', בסתירה לכך ש-$x \equiv x'$.

לפי הטענה האחרונה, $\tilde{t}$ משרה פונקציה מוגדרת היטב על $\mathcal{B}$. התכונה של $\tilde{t}$ מבטיחה ש-t מרחיבה את t_0, ש-$t(0) = 0$ וש-$t(x \to y) = t(x) \to t(y)$ לכל $x, y \in \mathcal{B}$. פעולות האלגברה הבוליאנית ניתנות לאפיון באמצעות $\to$ (ו-0), ולכן t העתקה של אלגברות בוליאניות. $\square$

אפשר לסכם את הנקודה שאנחנו עומדים בה: בהנתן קבוצה P של "טענות בסיסיות", בנינו את הקבוצה $\mathcal{F}(P)$ של הטענות שניתן להרכיב מהן, ואת הקבוצה $\mathcal{B}(P)$ של "טענות עד כדי שקילות לוגית". לקבוצה $\mathcal{B}(P)$ יש מבנה של אלגברה בוליאנית (ולכן אנחנו יודעים עליה משהו). לקבוצה $\mathcal{F}(P)$ אין מבנה אלגברי פשוט, אבל יש לה את היתרון שאפשר לרשום את האיברים שלה בצורה מפורשת, ולהוכיח עליהם טענות באינדוקציה (על בניית הפסוק). במילים אחרות $\mathcal{F}(P)$ מייצגת את הצד התחבירי (סינטקטי) של הטענות, ו-$\mathcal{B}(P)$ את הצד הסמנטי.

תרגיל 2.2.14. הוכיחו ש-$\mathcal{B}(P)$ איזומורפית לאלגברת חזקה אם ורק אם P סופית

תרגיל 2.2.15. נניח ש-P קבוצה, ו-$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}(P)$ קבוצה של תתי-קבוצות של P. נזכיר שלכל $P_0 \subseteq P$, אנחנו חושבים על $\mathcal{B}(P_0)$ כתת-אלגברה של $\mathcal{B}(P)$ (תרגיל 2.2.3).

1. הוכיחו שאם $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$, אז $\mathcal{B}(P_1) \cap \mathcal{B}(P_2) = \mathcal{B}(P_1 \cap P_2)$.
2. הוכיחו שאם $\bigcup \mathcal{C} = P$ ולכל $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$ יש $P_3 \in \mathcal{C}$ כך ש-$P_1, P_2 \subseteq P_3$, אז $\mathcal{B}(P) = \bigcup\{\mathcal{B}(P_0) \mid P_0 \in \mathcal{C}\}$. בפרט, לכל P, $\mathcal{B}(P) = \bigcup_{P_0 \subseteq P, |P_0| < \infty} \mathcal{B}(P_0)$.

2.3 שימושים של משפט הקומפקטיות

נזכיר שבמסקנה 2.1.39 הוכחנו את משפט הקומפקטיות לאלגברות בוליאניות. בשביל השימושים יהיה נוח לנסח את התוצאה במונחים של קבוצת הפסוקים $\mathcal{F}(P)$.

מסקנה 2.3.1 (משפט הקומפקטיות לתחשיב הפסוקים). *אם $F \subseteq \mathcal{F}(P)$ קבוצה של פסוקים, כך שלכל תת-קבוצה סופית $F_0 \subseteq F$ יש מודל, אז ל-F יש מודל*

תרגיל 2.3.2. הסק את מסקנה 2.3.1 מתוך מסקנה 2.1.39

נראה עכשיו כמה שימושים של המסקנה האחרונה לבעיות מתחומים שונים. האסטרטגיה בכל השימושים דומה: אנחנו מתעניינים במחלקה מסוימת של אובייקטים. אנחנו מניחים את קיומם במקרה הסופי, ורוצים להראות שהם קיימים במקרה הכללי. מייצרים קבוצת פסוקים שמודל שלה מתאר (ומתואר על-ידי) אובייקטים מהסוג המעניין. אז בעיית הקיום של האובייקט הופכת לבעיית קיום מודל עבור אותה קבוצה. לפי משפט הקומפקטיות, הוכחת הקיום הזו נתונה על-ידי קיום במקרה הסופי, שאנחנו מניחים (או מוכיחים בנפרד).

טענה 2.3.3. *כל סדר חלקי $\prec$ על קבוצה X ניתן להרחבה לסדר מלא*

הוכחה. נוכיח ראשית למקרה ש-X סופית, באינדוקציה על גודלה. הטענה ברורה אם X ריקה. אחרת, יהי x איבר מירבי ב-X. אז באינדוקציה $\prec$ ניתן להרחבה לסדר מלא על $Y = X \setminus \{x\}$, וקל לראות שאם מרחיבים סדר זה ל-x על ידי הכלל $y \prec x$ לכל $y \in Y$, מתקבל סדר מלא על X המרחיב את הסדר המקורי.

תהי עתה X קבוצה סדורה חלקית כלשהי, ונתבונן בקבוצת הפסוקים הבסיסיים

$$P_X = \{p_{a,b} \,|\, a, b \in X\}$$

ובקבוצת הפסוקים Γ_X מעליה המורכבת מכל הפסוקים הבאים:

1. הפסוקים $p_{a,b}$ לכל $a \prec b$
2. $\neg p_{a,a}$ לכל $a \in X$
3. $\langle p_{a,b} \wedge p_{b,c} \rangle \to p_{a,c}$ לכל $a, b, c \in X$
4. $\langle p_{a,b} \vee p_{b,a} \rangle$ לכל $a \neq b \in X$

נשים לב שהמידע של השמה ω המספקת את Γ_X שקול למידע של סדר מלא על X המרחיב את $\prec$, על ידי: $a \prec b$ אם ורק אם $\omega(p_{a,b}) = 1$. לכן, עלינו להוכיח ש-Γ_X ספיקה, ולפי משפט הקומפקטיות, מספיק להוכיח שהיא ספיקה סופית.

תהי $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_X$ קבוצה סופית. אז היא מערבת מספר סופי של פסוקים בסיסיים, ולכן גם תת-קבוצה סופית X_0 של איברי X. כלומר, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_{X_0}$ ומספיק שנוכיח שיש השמה המספקת את Γ_{X_0}. אך לפי האמור לעיל, השמה כזו נתונה על-ידי סדר מלא על X_0 המרחיב את $\prec$ על X_0. סדר כזה קיים לפי המקרה הסופי $\square$

2.3.4 צביעת גרפים

הדוגמא הבאה קשורה לתורת הגרפים. *גרף* הוא יחס דו-מקומי, סימטרי ואי-רפלקסיבי E על קבוצה V (כלומר, $E(a,b)$ גורר $E(b,a)$ לכל $a, b \in V$, ולכל $a \in V$ לא מתקיים $E(a,a)$). גרף
הקבוצה V נקראת *קבוצת הקודקודים*, ו-E *קבוצת הקשתות*. אם S קבוצה, הגרף (V, E) הוא קבוצת הקודקודים
קבוצת הקשתות

S-*צביע* אם קיימת העתקה $c : V \to S$ (צביעה של קודקודי הגרף) כך שאם $E(a,b)$ אז $c(a) \neq c(b)$. אם k מספר טבעי, אנו מזהים אותו עם הקבוצה $\{1 \dots k-1\}$, ולכן המושג k-צביע מוגדר היטב. למשל, *משפט ארבעת הצבעים* ([1, 10]) קובע שכל גרף *מישורי* סופי הוא 4-צביע (גרף מישורי הוא גרף שקודקודיו נקודות במישור, וקיימות העתקות רציפות $\gamma_{a,b} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ לכל $(a,b) \in E$, כך ש-$\gamma_{a,b}(0) = a$, $\gamma_{a,b}(1) = b$ ואם $\{a,b\} \neq \{c,d\}$ אז $\gamma_{a,b}((0,1))$ ו-$\gamma_{c,d}((0,1))$ זרות). S-צביע

תת-גרף מלא (ממש) של הגרף (V,E) הוא הגרף $(V_0, E \cap (V_0 \times V_0))$, כאשר V_0 תת-קבוצה (ממש) של V. תת-גרף מלא

תרגיל 2.3.5. לכל k טבעי, מצא דוגמא לגרף שאינו k-צביע, אבל כל תת-גרף מלא ממש שלו הוא k-צביע

טענה 2.3.6. *יהי $G = (V,E)$ גרף, k מספר טבעי. אז G הוא k-צביע אם ורק אם כל תת-גרף מלא סופי שלו הוא k-צביע*

הוכחה. כיוון אחד ברור. בכיוון השני, נתבונן בקבוצת הפסוקים Γ_G

1. $p_{1,a} \vee \dots \vee p_{k,a}$ לכל $a \in V$
2. $\neg\langle p_{i,a} \wedge p_{j,a}\rangle$ עבור $a \in V$ ו-$1 \leq i,j \leq k$
3. $\neg\langle p_{i,a} \wedge p_{i,b}\rangle$ לכל $(a,b) \in E$ ו-$1 \leq i \leq k$.

אז השמה ω המספקת Γ_G שקולה לצביעה חוקית של G ב-k צבעים (על ידי $c(a) = i-1$ אמם $\omega(p_{i,a}) = 1$). לכן מספיק להראות ש-Γ_G ספיקה. ההמשך כמו בדוגמא הקודמת □

תרגיל 2.3.7. הראו שאם מחליפים את k בקבוצה אינסופית בטענה האחרונה, הטענה אינה נכונה

סוף הרצאה 4, 2 בנוב'

2.3.8 משפט החתונה

נניח שנתונות קבוצות F ו-M של נשים וגברים, בהתאמה, ולכל אישה $a \in F$ קבוצה סופית $M_a \subseteq M$ של גברים שהיא מעוניינת בהם. האם ניתן לשדך לכל אישה גבר שהיא מעוניינת בו (כך שלכל גבר מותאמת רק אישה אחת)? במלים אחרות, האם קיימת פונקציה חד-חד-ערכית $p : F \to M$, כך ש-$p(a) \in M_a$?

תנאי הכרחי הוא שלכל קבוצה סופית $F_0 \subseteq F$ של נשים מתקיים

$$|F_0| \leq |\bigcup_{a \in F_0} M_a| \tag{2.4}$$

מסתבר, שזה גם תנאי מספיק.

תרגיל 2.3.9. הוכיחו שאם התנאי (2.4) מתקיים לכל $F_0 \subseteq F$ סופית, אז קיים פתרון לבעיה הנתונה על ידי ה-M_a. (הוכיחו ראשית את המקרה הסופי, ואז השתמש במשפט הקומפקטיות למקרה הכללי.)

2.3.10 הלמה של קניג

מסלול בגרף $G=(V,E)$ מקדקוד a לקדקוד b הוא סדרה סופית של קדקודים $x_1,\dots,x_n$ מסלול
שונים בזוגות, כך ש-$a=x_1$, $b=x_n$, ולכל $i<n$, $(x_i,x_{i+1})\in E$. האורך של מסלול כזה הוא
$n-1$. *המרחק* בין שני קדקודים הוא אורך המסלול הקצר ביותר ביניהם (אם קיים). *השכנים* שכנים
של קודקוד a הם הקודקודים במרחק 1 ממנו. הגרף G נקרא *עץ* אם בין כל שני קודקודים קיים עץ
מסלול יחיד.

טענה 2.3.11 (הלמה של קניג). *אם G הוא עץ בו לכל קודקוד מספר סופי של שכנים, ולכל n קיים מסלול באורך n, אז קיים ב-G מסלול אינסופי (כלומר סדרה x_i של קדקודים שונים בזוגות, לכל i טבעי, כך ש-$E(x_i,x_{i+1})$ לכל i).*

הערה 2.3.12. ההנחה שיש מסלולים בגודל לא חסום שקולה, תחת ההנחות האחרות, לכך שיש אינסוף קודקודים

הוכחה. שוב, הרעיון הוא לבנות קבוצת פסוקים, שמודל שלהם נותן פתרון, כלומר מסלול אינסופי. נקבע קודקוד a_0, ונסמן ב-S_k את קבוצת האיברים במרחק k מ-a_0. באינדוקציה, כל S_k סופית. נתבונן בקבוצת הפסוקים הבאה:

1. $\bigvee_{a\in S_k} p_a$ לכל k
2. $\neg\langle p_a \wedge p_b\rangle$ לכל $a\neq b\in S_k$, לכל k
3. $p_a\to p_b$ אם b נמצא על המסלול היחיד מ-a_0 ל-a

אז מודל של קבוצה זו מכיל אותו מידע כמו מסלול אינסופי המתחיל ב-a_0. □

תרגיל 2.3.13. השלם את ההוכחה

תרגיל 2.3.14. נניח ש-$P=\{p_1,\dots\}$ בת-מניה. השתמשו בלמה של קניג כדי להוכיח את משפט הקומפקטיות במקרה זה (רמז: הגדר גרף בו הקודקודים הם השמות חלקיות)

2.3.15 אלגברות בוליאניות

כשדיברנו על משפט סטון עבור אלגברות בוליאניות (משפט 2.1.21) הבטחנו שנראה שההעתקה מאלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ לאלגברת הפונקציות הרציפות על $\operatorname{spec}(\mathcal{B})$ היא חד-חד-ערכית. בחינה פשוטה של ההגדרות מראה שזה נובע מהטענה הבאה.

טענה 2.3.16. *אם b איבר שונה מ-0 באלגברה בוליאנית, אז קיימת $\omega\in\operatorname{spec}(\mathcal{B})$ עבורה $\omega(b)=1$*

תרגיל 2.3.17. הוכיחו את הטענה עבור אלגברות בוליאניות סופיות (דרך אחת לעשות זאת היא להוכיח שכל אלגברה כזו איזומורפית ל-$\mathcal{P}(A)$, כאשר A קבוצת האטומים באלגברה)

נניח ש-$\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית, ו-b איבר שונה מ-0. תהי $P = \{p_x \mid x \in \mathcal{B}\}$, ונתבונן בקבוצה Γ המכילה את הפסוקים הבאים:

1. $\langle p_x \wedge p_y \rangle \leftrightarrow p_{x \wedge y}$ לכל $x, y \in \mathcal{B}$.

2. $\neg p_x \leftrightarrow p_{\neg x}$ לכל $x \in \mathcal{B}$

3. p_b

תרגיל 2.3.18. השתמש בקבוצה Γ כדי להוכיח את טענה 2.3.16

2.3.19 משפט רמזי

משפט רמזי שימושי מאד גם בלוגיקה וגם בענפים אחרים במתמטיקה. יש לו גרסא סופית וגרסא אינסופית, ובמקרה הזה נוכיח את הגרסא האינסופית ישירות, ונסיק ממנה את הגרסא הסופית בעזרת משפט הקומפקטיות.

על מנת לנסח את המשפט, ננסח את ההגדרות הבאות: בהנתן קבוצה X, נסמן ב-$\binom{X}{k}$ את קבוצת תתי הקבוצות בגודל k ב-X. אם $Y \subseteq X$, אפשר לחשוב על $\binom{Y}{k}$ באופן טבעי כעל תת-קבוצה של $\binom{X}{k}$. אם $c : \binom{X}{k} \to S$ היא "צביעה" (כלומר, פשוט פונקציה), *תת-קבוצה מונוכרומטית* של X היא תת-קבוצה $Y \subseteq X$ כך שהצמצום של c ל-$\binom{Y}{k}$ הוא פונקציה קבועה (כלומר, כל הקבוצות שכל איבריהן ב-Y נצבעות באותו צבע). תת-קבוצה מונוכרומטית

סוף הרצאה 5, 7 בנוב'

משפט 2.3.20 (משפט רמזי, גרסא אינסופית). *לכל צביעה $f : \binom{X}{k} \to S$ כאשר X אינסופית ו-S סופית קיימת תת-קבוצה מונוכרומטית אינסופית*

הוכחה. באינדוקציה על k, המקרים $k = 0, 1$ ברורים. נניח שהטענה נכונה לאיזשהו $k \geq 1$. נגדיר ברקורסיה סדרה X_i של תתי-קבוצות של X, ו-x_i של איברים של X_i. תהי $X_0 = X$, ו-x_0 איבר כלשהו של X. בהנתן X_i ו-x_i, נגדיר $f_i : \binom{X_i \setminus \{x_i\}}{k} \to S$ על-ידי $f_i(s) = f(s \cup \{x_i\})$. באינדוקציה, קיימת תת-קבוצה מונוכרומטית אינסופית $X_{i+1} \subseteq X_i$ עבור f_i. נבחר את x_{i+1} להיות איבר כלשהו של X_{i+1}. נסמן ב-c_i את הערך הקבוע של f_i על $\binom{X_{i+1}}{k}$.

לפי המקרה $k = 1$, קיימת קבוצה אינסופית $J \subseteq \mathbb{N}$, כך ש-$c_j = c$ לא תלוי ב-j עבור $j \in J$. נתבונן בקבוצה $Y = \{x_j \mid j \in J\}$. אם $s \subseteq Y$ היא בגודל $k+1$, יהי j האינדקס הקטן ביותר עבורו $x_j \in s$ ותהי $s' = s \setminus \{x_j\}$. אז $f(s) = f_j(s') = c_j = c$ שכן $s' \subseteq X_{j+1}$ ו-$j \in J$. לכן Y הקבוצה המונוכרומטית המבוקשת. $\square$

מסקנה 2.3.21 (משפט רמזי, גרסא סופית). *לכל $n, k, l \geq 0$ קיים $m \geq 0$, כך שלכל $c : \binom{m}{k} \to l$ יש קבוצה מונוכרומטית בגודל n.*

הוכחה. לשם הפשטות, נוכיח את הטענה רק למקרה $k = l = 2$, ההוכחה למקרה הכללי דומה. נקבע מספר טבעי n. לכל $i < j$ טבעיים, יהי $p_{i,j}$ פסוק בסיסי, ולכל קבוצה I בגודל n של

טבעיים, יהי x_I הפסוק $\bigvee_{i,j\in I} p_{i,j} \wedge \bigvee_{i,j} \neg p_{i,j}$. תהי Γ קבוצת הפסוקים x_I עבור $I \in \binom{\mathbb{N}}{n}$. אם ω מודל של Γ, אז לפי הגרסא האינסופית של משפט רמזי, קיימת קבוצה אינסופית $Y \subseteq \mathbb{N}$ כך ש-ω קבועה על $\{p_{i,j} \mid i,j \in Y\}$. לכן ω אינה מספקת את x_I לכל $I \subseteq Y$.

הראינו ש-Γ אינה ספיקה. לפי משפט הקומפקטיות, תת-קבוצה סופית $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ אינה ספיקה. לכן, לכל השמה ω לפסוקים הבסיסיים המופיעים ב-Γ_0, יש I עבורו $\omega(x_I) = 0$, כלומר I קבוצה מונוכרומטית. $\square$

2.4 היסקים

ראינו שניתן להגדיר במדויק את המושגים טענה, ואמיתות של טענה. כעת נעבור למושג ההוכחה. ליתר דיוק, אנו רוצים להגדיר במדויק מהי הוכחה של פסוק x מתוך קבוצת פסוקים Γ. אינטואיטיבית, הוכחה של x מ-Γ היא תהליך בעל מספר סופי של שלבים, כאשר בכל אחד אנו מסיקים פסוק חדש מתוך פסוקים ב-Γ, או אקסיומות, או פסוקים שהוכחנו קודם. כל שלב כזה הוא "מכני": הוא מאפשר לעבור לפסוק המוכח לפי מבנה הפסוק בלבד. בפרט, כל התהליך הוא בלתי תלוי באמיתות או בהשמות.

על מנת למנוע בלבול, נשתמש במונח "היסק" עבור הוכחות במובן הטכני. כמו-כן, נוח יותר בהיקשר זה לעבוד עם הפעולה הלוגית של גרירה ($\rightarrow$) במקום גימום. אין כאן בעיה, שכן זהו פשוט קיצור.

הגדרה 2.4.1. 1. מערכת *האקסיומות הלוגיות* הינה קבוצת כל הפסוקים בעלי אחת משלוש הצורות הבאות: האקסיומות הלוגיות

$$A1 \quad x \rightarrow \langle y \rightarrow x \rangle$$

$$A2 \quad \langle x \rightarrow \langle y \rightarrow z \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle x \rightarrow y \rangle \rightarrow \langle x \rightarrow z \rangle\rangle$$

$$A3 \quad \langle \neg(x) \rightarrow \neg(y)\rangle \rightarrow \langle\langle \neg(x) \rightarrow y \rangle \rightarrow x \rangle$$

עבור פסוקים כלשהם x, y, z.

2. *היסק* של פסוק x מתוך קבוצת פסוקים Γ הינו סדרה סופית של פסוקים $(x_1, \ldots, x_n)$, כאשר $x = x_n$, וכל x_i הוא אקסיומה לוגית, או איבר של Γ, או שקיימים $j, k < i$ כך ש-$x_k = \langle x_j \rightarrow x_i \rangle$ (במקרה זה אנו אומרים ש-x_i התקבל מ-x_j ו-x_k על-ידי הפעלת *כלל ההיסק* *Modus Ponens*). היסק

כלל ההיסק

Modus Ponens

נאמר ש-x הוא *מסקנה* של Γ, או ש-x *יכיח* מ-Γ, או ש-Γ *מסיקה* את x, אם קיים היסק של x מתוך Γ. מצב זה יסומן כך: $\Gamma \vdash x$. (כמו קודם, אם Γ ריקה, נשמיט אותה מהסימון: $\vdash x$.)

מסקנה

יכיח

מסיקה

$\Gamma \vdash x$

המטרה העיקרית שלנו בסעיף הזה היא השוואת המושג התחבירי של יכיחות מהגדרה 2.4.1 למושג הסמנטי המקביל, נביעה לוגית:

נובע לוגית
$\Gamma \models x$
טאוטולוגיה
סתירה

הגדרה 2.4.2. נניח ש-Γ קבוצה של פסוקים, ו-x פסוק. x *נובע לוגית* מ-Γ אם לכל מודל ω של Γ מתקיים $\omega(x) = 1$ (סימון: $\Gamma \models x$). הפסוק x הוא *טאוטולוגיה* אם הוא נובע לוגית מהקבוצה הריקה, והוא *סתירה* אם $\neg(x)$ טאוטולוגיה.

תרגיל 2.4.3. המושגים בהגדרה האחרונה הם סמנטיים. נסחו את התנאים במונחים של התמונות של x ושל Γ ב-$\mathcal{B}(P)$.

תרגיל 2.4.4. הוכיחו שמשפט הקומפקטיות שקול לטענה הבאה: אם $\Gamma \models x$ אז יש $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ סופית כך ש-$\Gamma_0 \models x$.

מערכת היסק נאותה

כיוון אחד של ההשוואה בין יכיחות לנביעה הוא שהגדרנו *מערכת היסק נאותה*: אם הצלחנו להסיק פסוק מתוך Γ, אז הוא נובע לוגית מ-Γ, כלומר, אפשר להוכיח רק דברים נכונים.

טענה 2.4.5. *אם x מסקנה של Γ, אז* $\Gamma \models x$.

תרגיל 2.4.6.
1. הוכיחו שכל אקסיומה היא טאוטולוגיה
2. הוכיחו שאם z התקבל מ-x ו-y על-ידי MP, אז $x, y \models z$.
3. הוכיחו את טענה 2.4.5

הערה 2.4.7. הרעיון העיקרי בטענה האחרונה הוא שצעד ההיסק שומר על נכונות לוגית. לפני שנמשיך לכיוון השני, נציין שאותו רעיון מאפשר לנו להראות שהאקסיומות שלנו הן *בלתי-תלויות*: אין קבוצת אקסיומות שנובעת מהאקסיומות האחרות.

תרגיל 2.4.8. תהי S קבוצה עם פעולה $\cdot : S \times S \to S$, ונניח ש-$a \in S$ מקיימת: אם $a \cdot x = a$ אז $x = a$. נסמן ב-$\vdash_0$ את היחס שמוגדר כמו $\vdash$, אבל כאשר קבוצת האקסיומות ריקה.
הוכיחו שאם יש העתקה $\omega : \mathcal{F}(P) \to S$ המקיימת:

$$\omega(x \to y) = \omega(x) \cdot \omega(y)$$
$$\omega(x) = a, \quad x \in \Gamma$$

אז אם $\Gamma \vdash_0 x$, אז $\omega(x) = a$

לדוגמא, טענה 2.4.5 נובעת מתרגיל זה עבור השמות (כלומר, כאשר $S = \{0, 1\}$ ו-$x{\cdot}y{=}0$ אם ורק אם $x > y$), ו-$a = 1$.

כדי להוכיח, למשל, ש-$A1$ אינה מסקנה של יתר האקסיומות, ניקח: $S = \{a, b, c\}$, ונגדיר $a \cdot b = a \cdot c = b \cdot c = c$, ו-$x \cdot y = a$ בכל מקרה אחר. אם ω העתקה כלשהי מקבוצת הפסוקים הבסיסיים ל-S, נרחיב אותה ל-0 על-ידי $\omega(0) = b$. לפי משפט 2.2.7, כל העתקה כזו ניתן להרחיב באופן יחיד לקבוצת כל הפסוקים. קל לבדוק אז שכל "השמה" כזאת נותנת ערך a לכל האקסיומות ב-$A2, A3$, אבל אם $\omega(x) = b$ ו-$\omega(y) = a$ אז $\omega(\langle x{\to}\langle y{\to}x\rangle\rangle) = c$. $\square$

נראה כעת את הדוגמא הראשונה שלנו להיסק, שתשמש אותנו גם בהמשך. היא מדגימה גם, שמציאת היסק, גם של פסוקים פשוטים, אינה בהכרח פשוטה.

טענה 2.4.9. *לכל פסוק t מתקיים* $\vdash \langle t{\to}t\rangle$.

הוכחה. נרשום במפורש היסק של $\langle t{\to}t\rangle$:

$t_1 : t \to \langle\langle t \to t\rangle \to t\rangle$	$A1[x : t, y : \langle t \to t\rangle]$
$t_2 : \langle t \to \langle\langle t \to t\rangle \to t\rangle\rangle \to \langle\langle t \to \langle t \to t\rangle\rangle \to \langle t \to t\rangle\rangle$	$A2[x : t, y : \langle t \to t\rangle, z : t]$
$t_3 : \langle t \to \langle t \to t\rangle\rangle \to \langle t \to t\rangle$	$MP[t_1, t_2]$
$t_4 : t \to \langle t \to t\rangle$	$A1[x : t, y : t]$
$t_5 : t \to t$	$MP[t_3, t_4]$

□

2.4.10 משפט השלמות

ראינו בטענה 2.4.5, שכל מה שניתן להוכיח באמצעות מערכת ההיסק הוא נכון. עכשיו נשאל לגבי הכיוון ההפוך: עד כמה מערכת ההיסק חזקה? מה הן הטענות שניתן להוכיח? כפי שראינו, השאלה אינה טריוויאלית: נדרשנו למאמץ אפילו כדי להוכיח שהפסוק $\langle p{\to}p\rangle$ ניתן להיסק מהקבוצה הריקה.

משפט 2.4.11 (משפט השלמות). *אם* $\Gamma \models x$ *אז* $\Gamma \vdash x$

ביחד עם הנאותות, הוא אומר ש-$\vdash$ו-$\models$ הם למעשה אותו יחס. השלב הראשון בהוכחת המשפט הוא הרדוקציה למקרה הסופי.

תרגיל 2.4.12. הראו שמשפט השלמות ל-Γ כלשהי נובע ממשפט השלמות עבור המקרה ש-Γ סופית

הוכחת משפט השלמות מצריכה כלי שמאפשר להראות יכיחות של פסוקים מהצורה $\langle x{\to}y\rangle$. הכלי הזה נקרא משפט הדדוקציה. הוא האנלוג הפורמלי של הנוהג הרגיל בהוכחת טענות כאלה: כדי להוכיח את $\langle x{\to}y\rangle$, מותר לנו להניח את x ולהוכיח את y.

טענה 2.4.13 (משפט הדדוקציה). *אם* $\Gamma, x \vdash y$ *אז* $\Gamma \vdash \langle x{\to}y\rangle$

נשים לב שהכיוון השני גם נכון, באופן מיידי מ-MP.

הוכחה. יהי $(y_1, \ldots, y_n)$ היסק של $y = y_n$ מתוך Γ, x. נוכיח, באינדוקציה על k, ש-$\Gamma \vdash \langle x \to y_k\rangle$. נניח שהטענה נכונה לכל $i < k$. נתבונן באפשרויות:

1. y_k אקסיומה, או איבר של Γ: במקרה זה נשתמש בכלל ההיסק על y_k ועל המקרה $\langle y_k{\to}\langle x{\to}y_k\rangle\rangle$ של A_1 כדי להסיק את $\langle x{\to}y_k\rangle$

2. $y_k = x$: במקרה זה עלינו להוכיח ש-$\Gamma \vdash x \to x$, אולם ראינו כבר ש-$\vdash t \to t$ לכל פסוק t.

3. y_k התקבל על-ידי MP מ-y_i ו-$y_j = \langle y_i \to y_k \rangle$ עבור $i, j < k$: במקרה זה נשתמש באקסיומה

$$\langle x \to \langle y_i \to y_k \rangle \rangle \to \langle \langle x \to y_i \rangle \to \langle x \to y_k \rangle \rangle$$

(מהצורה $A2$), ובעובדה שניתן להסיק את $x \to y_j$ לפי הנחת האינדוקציה כדי להסיק בעזרת MP את $\langle x \to y_i \rangle \to \langle x \to y_k \rangle$, ואז שוב בהנחת האינדוקציה עבור i וב-MP כדי להסיק את $x \to y_k$. □

היעילות של המשפט הזה משתקפת למשל בהוכחת המסקנה הבאה (שתשמש אותנו בהוכחת משפט השלמות).

מסקנה 2.4.14. *1.* $x \vdash \neg\neg x$

2. $\neg\neg x \vdash x$

3. $\neg x \vdash \langle x \to y \rangle$

4. $x, \neg y \vdash \neg \langle x \to y \rangle$

5. $\langle x \to y \rangle \vdash \langle \neg y \to \neg x \rangle$

תרגיל 2.4.15. הוכיחו את המסקנה

נעבור כעת להוכחת משפט השלמות. נזכיר שאנחנו מניחים ש-Γ סופית, ובפרט, $\Gamma \subseteq \mathcal{F}(P)$ עבור קבוצה סופית P. נוכיח ראשית את הטענה עבור קבוצות Γ ששקולות לאטום. במלים אחרות, לכל השמה ω נסמן

$$\Gamma_\omega = \{y \in P \,|\, \omega(y) = 1\} \cup \{\neg y \,|\, y \in P,\ \omega(y) = 0\} \tag{2.5}$$

למה 2.4.16. *משפט השלמות נכון עבור קבוצות מהצורה Γ_ω: לכל פסוק x, אם $\omega(x) = 1$ אז $\Gamma_\omega \vdash x$, ואם $\omega(x) = 0$ אז $\Gamma_\omega \vdash \neg x$*

החלק השני של הטענה נובע ישירות מהחלק הראשון, אבל הניסוח הזה נוח למטרת האינדוקציה

הוכחה. תהי A קבוצת הפסוקים x מעל P עבורם הטענה נכונה. אז $P \subseteq A$ שכן אז הפסוק שצריך להסיק נמצא ב-Γ_ω (ו-$0 \in A$ באופן ריק)

נניח ש-$x, y \in A$, וש-$\omega(\langle x \to y \rangle) = 1$. אז $\omega(x) = 0$ או $\omega(y) = 1$. במקרה הראשון, $\Gamma_\omega \vdash \neg x$ והתוצאה נובעת מסעיף (3) של מסקנה 2.4.14, ובמקרה השני $\Gamma_\omega \vdash y$, והתוצאה נובעת מהאקסיומה הראשונה. אם $\omega(\langle x \to y \rangle) = 0$ אז $\omega(x) = 1$ ו-$\omega(y) = 0$ ולכן $\Gamma_w \vdash \neg(y), x$ והתוצאה נובעת מסעיף (4) של אותה מסקנה. □

הטענה הבאה מראה שפסוקים שאינם משפיעים, סמנטית, על נביעה לוגית, הם גם מיותרים למטרות היסק.

למה 2.4.17. *נניח ש-* $\Gamma, x \vdash y$ *וגם* $\Gamma, \neg x \vdash y$. *אז* $\Gamma \vdash y$.

תרגיל 2.4.18. הוכיחו את הלמה

הוכחת משפט השלמות ל-Γ סופית. באינדוקציה על הגודל של Γ. אם $\Gamma = \Gamma_0 \cup \{x\}$, אז $\Gamma_0 \models \langle x \rightarrow y \rangle$ ולכן באינדוקציה $\Gamma_0 \vdash \langle x \rightarrow y \rangle$. לפי MP, מקבלים $\Gamma \vdash y$.

נותר להוכיח את הבסיס: אם x טאוטולוגיה, אז $\vdash x$. תהי P קבוצת הפסוקים הבסיסיים ב-x. לפי למה 2.4.16, $\Gamma_\omega \vdash x$ לכל השמה ω.

אם P אינה ריקה, יהי $a \in P$, ותהי $P_a = P \setminus \{a\}$. אם ω השמה כלשהי ל-P_a, תהי ω_i, עבור $i = 0, 1$, ההרחבה של ω המקיימת $\omega(a) = i$. אז $\Gamma_{\omega_0} = \Gamma_w \cup \{\neg a\}$ ו-$\Gamma_{\omega_1} = \Gamma_w \cup \{a\}$. הואיל ו-$\Gamma_{\omega_i} \vdash x$, נקבל לפי למה 2.4.17,ש-$\Gamma_\omega \vdash x$. זה נכון לכל ω על P_a, ולכן חזרנו למצב שבו היינו עם P, אבל עבור קבוצה יותר קטנה P_a. באינדוקציה, מקבלים ש-$\Gamma_\omega \vdash x$ עבור השמה ω על קבוצה קטנה כרצוננו. עבור הקבוצה הריקה, זו הטענה שרצינו להוכיח. □

הערה 2.4.19. עם מאמץ נוסף, ניתן להוכיח את משפט השלמות ישירות גם לקבוצות אינסופיות Γ, ללא שימוש במשפט הקומפקטיות. הואיל ומשפט הקומפקטיות נובע ישירות ממשפט השלמות (למה?), זה נותן הוכחה אלטרנטיבית למשפט הקומפקטיות.

הערה 2.4.20. קיבלנו תיאור נוסף של יחס השקילות $\equiv$ באמצעותו בנינו את $\mathcal{B}(P)$: שני פסוקים ϕ ו-ψ הם שקולים אם $\psi \vdash \phi$ ו-$\phi \vdash \psi$. במובן מסוים, זהו תיאור יותר מפורש.

3 תחשיב היחסים

תחשיב הפסוקים עליו דובר בסעיף הקודם לא מאפשר יכולת ביטוי גדולה: לא ניתן לנסח בו טענות מתמטיות אמיתיות, אלא רק הפשטה שלהן שמסומנת על-ידי הפסוקים הבסיסיים. בסעיף זה נחקור לוגיקה בעלת יכולת ביטוי המאפשרת ניסוח טענות מתמטיות. לוגיקה זו מורכבת יותר בצורה משמעותית, אולם המבנה הכללי מבחינת ההגדרות והשאלות שנשאלות בה הוא דומה: נגדיר את התחביר, הסמנטיקה (השמות ומודלים), אקסיומות וכללי היסק, ונוכיח את משפט השלמות ומשפט הקומפקטיות המתאימים.

3.1 דוגמאות

הגדרת התחביר מורכבת ממספר מושגים: *חתימה, שמות עצם, נוסחה, פסוק*, ומושגים נוספים. בהמשך נגדיר *השמות, מודלים* ו*קבוצות גדירות*. על מנת לתת מושג לאן אנחנו שואפים, נדגים את המושגים הללו בצורה לא פורמלית במספר דוגמאות.

דוגמא 3.1.1 (יחס סדר).

חתימה בחתימה ישנו סוג אחד, P, וסימן יחס אחד $E \in \mathscr{R}_{PP}$

נוסחה בסיסית היא מהצורה $E(x,y)$ או $x=y$

נוסחה למשל $\forall x(E(x,y) \vee x=y)$

תורה התורה שאומרת ש-E הוא יחס סדר היא:

$$\forall x, y \neg \langle E(x,y) \wedge E(y,x) \rangle$$
$$\forall x, y, z \langle \langle E(x,y) \wedge E(y,z) \rangle \to E(x,z) \rangle$$

מודל של התורה הוא קבוצה סדורה

דוגמא 3.1.2 (גרף). בדוגמא זו כל רכיבי התחביר מוגדרים באותה צורה (שכן גם גרף נתון על-ידי יחס דו-מקומי), אבל התורה היא

$$\forall x, y \langle E(x,y) \to E(y,x) \rangle$$
$$\forall x \neg E(x,x)$$

והמודלים הם גרפים

דוגמא 3.1.3 (חוגים).

חתימה סוג אחד, A, וארבעה סימני פונקציה: $a, m \in \mathscr{F}_{AA,A}$ ו-$0, 1 \in \mathscr{F}_{\epsilon,A}$

שמות עצם שמות העצם הם ביטויים מהצורה $a(m(x,y),z)$ ו-$m(1,z)$ (למשל)

נוסחה בסיסית $a(m(x,x),y) = m(a(1,1),x)$

נוסחה לדוגמא $\exists x(m(x,y)=1)$

תורה התורה של החוגים מכילה למשל את הפסוקים הבאים:

$$\forall x, y(a(x,y) = a(y,x))$$
$$\forall x(m(1,x) = x)$$
$$\forall x \exists y(a(x,y) = 0)$$

מודל של התורה (המלאה של חוגים) הוא חוג.

בהמשך נתייחס לדוגמא הזו, ונרשום לרוב $+$ ו-$\cdot$ במקום a ו-m, וכן $x+y$ ו-$x \cdot y$ במקום $a(x,y)$ ו-$m(x,y)$ (לדוגמא).

דוגמא 3.1.4 (גאומטריה).

חתימה שני סוגים, P, L, ושני סימני יחס: $I \in \mathscr{R}_{PL}$ ו-$B \in \mathscr{R}_{PPP}$

שמות עצם שמות העצם הם משתנים משני סוגים: x_P ו-x_L.

נוסחה בסיסית $B(x_P, y_P, z_P)$, $I(x_P, y_L)$

נוסחה לדוגמא $\exists x{\in}P\langle B(y,x,z) \wedge I(x,t)\rangle$

תורה בין היתר, האקסיומות הבאות

$$\begin{aligned}
&\forall x, y{\in}P \exists z{\in}L\langle I(x,z) \wedge I(y,z)\rangle \\
&\forall t{\in}L \exists x, y, z{\in}P\langle I(x,t) \wedge I(y,t) \wedge I(z,t) \wedge \\
&\qquad x \neq z \wedge x \neq y \wedge y \neq z\rangle \\
&\forall x, y, z{\in}P \forall t{\in}L\langle\langle I(x,t) \wedge I(y,t) \wedge I(z,t)\rangle \to \\
&\qquad \langle B(x,y,z) \vee B(y,z,x) \vee B(z,y,x)\rangle\rangle
\end{aligned}$$

מודל המישור הממשי

דוגמא 3.1.5 (מרחבים וקטוריים מעל שדה קבוע). נקבע שדה K

חתימה סוג אחד V, סימני פונקציה: $+ \in \mathscr{F}_{VV,V}$, $0 \in \mathscr{F}_{\epsilon,V}$, לכל $c \in K$, $\underline{c} \in \mathscr{F}_{V,V}$.

שמות עצם שמות העצם הם למשל $\underline{c}(x+y)$, $x+0$

נוסחה בסיסית לדוגמא $\underline{c}(x+y) = \underline{d}(z)$

נוסחה לדוגמא $\forall x \exists y \underline{c}(y) = x + z$

תורה בין היתר, האקסיומות הבאות

$$\begin{aligned}
&\forall x, y \underline{c}(x+y) = \underline{c}(x) + \underline{c}(y) \quad c \in K \text{ לכל} \\
&\forall x \underline{0}(x) = 0 \\
&\forall x, y\langle x + y = y + x\rangle \\
&\forall x \underline{c \cdot d}(x) = \underline{c}(\underline{d}(x)) \quad c, d \in K \text{ לכל}
\end{aligned}$$

מודל כל מרחב וקטורי מעל K

דוגמא 3.1.6 (מרחבים וקטוריים).

חתימה שני סוגים, K, U, סימני פונקציה: $+_U{\in}\mathscr{F}_{UU,U}$, $0_U{\in}\mathscr{F}_{\epsilon,U}$, סימני פונקציה $+_K, \cdot_K, 0_K, 1_K$ על הסוג K, כמו בדוגמא 3.1.3, סימן פונקציה $\cdot{\in}\mathscr{F}_{KU,U}$.

שמות עצם שמות העצם הם למשל $c \cdot (u{+_U}v)$, $u +_U 0$, $c \cdot_K d$

נוסחה בסיסית לדוגמא $c \cdot (x +_U y) = d \cdot u$

נוסחה לדוגמא $\exists a{\in}K \langle u = a \cdot v \rangle$

תורה בין היתר, האקסיומות הבאות

$$\forall a{\in}K \forall x, y{\in}U \langle a \cdot (x +_U y) = a \cdot x +_U a \cdot y \rangle$$
$$\forall x{\in}U 0_K \cdot x = 0_U$$
$$\forall x, y{\in}K \langle x +_K y = y +_K x \rangle$$

מודל זוג (L, V) כאשר L שדה, ו-V מרחב וקטורי מעליו

3.2 תחביר

כעת נגדיר במדויק את התחביר של תחשיב היחסים. ההגדרה היא ארוכה וכוללת מספר שלבים, ומומלץ בכל שלב לחזור לדוגמאות בסעיף הקודם ולבדוק איך הן מתקבלות, ומה משמעות ההגדרה.

A^* לכל קבוצה A, נסמן ב-A^* את קבוצת המלים (מחרוזות, סדרות סופיות) מעל A. את המילה הריקה נסמן ב-ϵ, ואת האורך של מילה w נסמן ב-$|w|$. את האיבר ה-i של מילה w נסמן ב-$w(i)$ (האיברים ממוספרים מ-1). אם w_1 ו-w_2 שתי מלים, נסמן ב-$w_1 w_2$ את המילה המתקבלת מהוספת w_2 לסוף של w_1. לרוב נזהה בין איבר $a \in A$ לבין המילה באורך 1 המורכבת מ-a.

האובייקט התחבירי הבסיסי ביותר הוא החתימה.

חתימה **הגדרה 3.2.1.** *חתימה* מורכבת מהנתונים הבאים:

סוגים 1. קבוצה $\mathscr{S}$ של *סוגים*

קבוצת סימני היחס 2. לכל מילה w מעל $\mathscr{S}$, קבוצה $\mathscr{R}_w$, המכונה *קבוצת סימני היחס* מסוג w.

קבוצת סימני הפונקציה 3. לכל מילה w מעל $\mathscr{S}$ ולכל איבר $a \in \mathscr{S}$, קבוצה $\mathscr{F}_{w,a}$ המכונה *קבוצת סימני הפונקציה* מ-w ל-a.

סימני קבועים חתימה כזו תסומן לרוב כ-$\Sigma = (\mathscr{S}, (\mathscr{R}_w)_{w \in \mathscr{S}^*}, (\mathscr{F}_{w,a})_{w \in \mathscr{S}^*, a \in \mathscr{S}})$ או בקיצור כ-$\Sigma = (\mathscr{S}, \mathscr{R}, \mathscr{F})$. סימני הפונקציה ב-$\mathscr{F}_{\epsilon,a}$ מכונים לרוב *סימני קבועים* (מסוג a).

הערה 3.2.2. אם האורך של w הוא n, איברי $\mathscr{R}_w$ נקראים סימני יחס n-מקומיים, ובדומה לגבי סימני פונקציות. בספרות נוהגים לפעמים להניח ש-$\mathscr{S}$ מורכבת מאיבר אחד ובמקרה זה, ישנה מילה יחידה w מכל אורך n, ואז איברי $\mathscr{R}_w$ הם בדיוק סימני היחס ה-n מקומיים. כפי שראינו, הנחה זו אינה נוחה בחלק מהדוגמאות הטבעיות, ומסבכת דברים מאוחר יותר, ולכן לא נניח אותה.

בהנתן חתימה $\Sigma = (\mathscr{S}, \dots)$, יתר ההגדרות תלויות בנוסף בקבוצות $\mathscr{V}_a$ עבור $a \in \mathscr{S}$, הקרויות *משתנים* מסוג a. משתנים

הגדרה 3.2.3. בהנתן חתימה $\Sigma = (\mathscr{S}, \mathscr{R}, \mathscr{F})$ ולכל $a \in \mathscr{S}$, קבוצה $\mathscr{V}_a$, *קבוצת שמות העצם* $\mathscr{T}_a$ (מעל $\mathscr{V} = \coprod_{a \in \mathscr{S}} \mathscr{V}_a$) מסוג a עבור $a \in \mathscr{S}$ מוגדרת ברקורסיה כקבוצה הקטנה ביותר המקיימת: קבוצת שמות העצם

1. $\mathscr{V}_a \subseteq \mathscr{T}_a$

2. לכל $f \in \mathscr{F}_{w,a}$, עם $|w| = n$, ולכל $t_i \in \mathscr{T}_{w(i)}$ עבור $1 \le i \le n$ המחרוזת $f(t_1, \dots, t_n)$ היא שם עצם מסוג a.

נשים לב שבפרט, כל סימן קבוע מסוג a הוא שם עצם מסוג a.

כמו במקרה של תחשיב הפסוקים, הוכחות של טענות על שמות עצם (וחלקים אחרים בתחביר) מתבצעות לרוב באינדוקציה על הבניה, וכמו במקרה ההוא, שימושי לדעת שכל שם עצם נבנה בדיוק בדרך אחת. ליתר דיוק, נשים לב שכל $f \in \mathscr{F}_{w,a}$ מגדיר העתקה

$$C_f : \mathscr{T}_{w(1)} \times \dots \times \mathscr{T}_{w(n)} \to \mathscr{T}_a$$

הנתונה על-ידי $C_f(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$.

תרגיל 3.2.4 (קריאה יחידה, שמות עצם). הוכיחו שכל אחת מההעתקות C_f היא חד-חד-ערכית, והתמונות של כל שתי העתקות כאלה הן זרות. הסק שכל שם עצם נבנה במספר סופי של הפעלות C_{f_i} כאלה, עבור סדרה יחידה (f_i) של סימני פונקציה.

שמות העצם מסוג a יפורשו, כשנגדיר מבנים, כהעתקות שהטווח שלהן הוא (הפירוש של) a. מהו התחום של העתקה כזו? לכאורה, התחום של $f \in \mathscr{F}_{bb,a}$ צריך להיות זוגות של איברים בפירוש של b. אולם נשים לב שראשית, f כזו אינה שם עצם לפי ההגדרה לעיל, ושנית, אם x, y שניהם משתנים מסוג b, אז $f(x, y)$ ו-$f(x, x)$ שניהם שמות עצם שנוצרים מאותו סימן פונקציה, ומשתנים מאותו סוג, אך מייצגים העתקות עם תחומים שונים. כלומר, התחום של ההעתקה תלוי במשתנים עצמם, ולא רק בסוגים שלהם.

הגדרה 3.2.5. קבוצת *המשתנים החפשיים* $\mathscr{V}(t)$ בשם עצם t מוגדרת ברקורסיה על בנית t באופן הבא: אם t הוא משתנה, אז $\mathscr{V}(t) = \{t\}$. אם $t = f(t_1, \dots, t_n)$, אז $\mathscr{V}(t) = \mathscr{V}(t_1) \cup \dots \cup \mathscr{V}(t_n)$. נרשום $t(x_1, \dots, x_n)$ אם $\mathscr{V}(t) = \{x_1, \dots, x_n\}$. המשתנים החפשיים $\mathscr{V}(t)$ $t(x_1, \dots, x_n)$

כעת נגדיר את יתר התחביר.

הגדרה 3.2.6. תהי $\Sigma = (\mathscr{S}, \mathscr{R}, \mathscr{F})$ חתימה, ו-$\mathscr{V} = \coprod_{a\in\mathscr{S}} \mathscr{V}_a$ (האיחוד הזר של $\mathscr{V}_a$) קבוצת משתנים.

1. *נוסחא בסיסית* מעל Σ ו-$\mathscr{V}$ היא מחרוזת מהצורה $E(t_1, \dots, t_n)$, כאשר $E \in \mathscr{R}_w$, וכל t_i הוא שם עצם מסוג $w(i)$. נוסחא בסיסית

2. *נוסחא* מעל Σ ו-$\mathscr{V}$ היא איבר בקבוצה הקטנה ביותר Φ המכילה את הנוסחאות הבסיסיות ואת הסימן $\bot$, וכך ש- נוסחא

   (א) אם $\phi, \psi \in \Phi$, אז גם $\langle\phi \to \psi\rangle \in \Phi$

   (ב) אם $x \in \mathscr{V}_a$ ו-$\phi \in \Phi$, אז $\exists x{\in}a\phi \in \Phi$

תרגיל 3.2.7 (קריאה יחידה, נוסחאות). נסחו והוכיחו את משפט הקריאה היחידה עבור נוסחאות

הערה 3.2.8 (קיצורים). בדוגמאות, ובמקרים אחרים בהם לא נזדקק להגדרה המדויקת, נשתמש בקיצורים הבאים:

1. כאשר $u \in \mathscr{F}_{ab,c}$ או $u \in \mathscr{R}_{ab}$ עבור $a, b, c \in \mathscr{S}$, ו-u הוא סימן (ולא אות), נרשום לעתים $\langle t_1 u t_2\rangle$ במקום $u(t_1, t_2)$. למשל, בדוגמא 3.1.5 רשמנו $\langle x + y\rangle$ במקום $+(x, y)$. בפרט, עבור יחסי השוויון (כאשר הם בשפה), נרשום $t_1 = t_2$ במקום $=(t_1, t_2)$. כמו כן, נרשום c במקום $c()$ עבור $c \in \mathscr{F}_{\epsilon,a}$.

2. נשתמש בקשרים הלוגיים $\neg$, $\vee$ ו-$\wedge$ כפי שעשינו בתחשיב הפסוקים (עם אותם קיצורים). בנוסף, נרשום $\forall x{\in}a\phi$ כקיצור ל- $\neg\exists x{\in}a\neg\phi$. במקרים בהם $\mathscr{S}$ מורכבת מאיבר אחד a, נרשום $\exists x\phi$ במקום $\exists x{\in}a\phi$. נקצר כך גם אם סוג המשתנה מובן מן ההקשר, למשל בנוסחה מהצורה $\exists x E(x, y)$, כאשר הסוג של E ידוע או אינו חשוב. כמו-כן, נרשום $\dots \exists x_1, x_2$ או $\dots \exists \bar{x}$ בתור קיצור ל-$\dots \exists x_1 \exists y_2$, וכך הלאה.

כמובן שמשפט הקריאה היחידה לא תקף עם קיצורים אלה, ובכל פעם שנרצה להוכיח או להגדיר משהו על נוסחאות, נשתמש בהגדרה המקורית

כמו במקרה של שמות עצם, נרצה להגדיר את קבוצת המשתנים שנוסחא ϕ תלויה בהם (כלומר, כפי שנראה בהמשך, ערך האמת שלה תלוי בערכיהם). נשים לב שנוסחא מהצורה $\exists x f(x, y) = 0$, תלויה ב-y אך לא ב-x.

הגדרה 3.2.9. קבוצת *המשתנים החופשיים* $\mathscr{V}(\phi)$ בנוסחא ϕ מוגדרת ברקורסיה על-ידי: אם ϕ היא הנוסחא הבסיסית $E(t_1, \dots, t_n)$ אז $\mathscr{V}(\phi) = \mathscr{V}(t_1) \cup \dots \cup \mathscr{V}(t_n)$. אחרת, המשתנים החופשיים $\mathscr{V}(\phi)$

$$\mathscr{V}(\bot) = \emptyset \tag{3.1}$$

$$\mathscr{V}(\langle\phi \to \psi\rangle) = \mathscr{V}(\phi) \cup \mathscr{V}(\psi) \tag{3.2}$$

$$\mathscr{V}(\exists x{\in}a\phi) = \mathscr{V}(\phi) \setminus \{x\} \tag{3.3}$$

נרשום $\phi(x_1, \dots, x_n)$ אם $\mathscr{V}(\phi) = \{x_1, \dots, x_n\}$. הנוסחא ϕ נקראת *פסוק* אם $\mathscr{V}(\phi)$ ריקה. פסוק

3.3 סמנטיקה

כעת נגדיר את האופן שבו מפרשים את האובייקטים התחביריים שהוגדרו לעיל. ההגדרות הבאות מקבילות להשמות של תחשיב הפסוקים. שוב, כדאי לחזור לדוגמאות ב-3.1 על-מנת לראות על מה מדובר.

נתחיל עם הפירוש של חתימות.

הגדרה 3.3.1. תהי $\Sigma = (\mathscr{S}, \mathscr{R}, \mathscr{F})$ חתימה. *מבנה* $\mathcal{M}$ עבור Σ מורכב מהנתונים הבאים: מבנה

1. לכל $a \in \mathscr{S}$, קבוצה M_a לה נקרא *העולם של* a (ב-$\mathcal{M}$). בהנתן מילה $w \in \mathscr{S}^*$ באורך n, נסמן $M_w = M_{w(1)} \times M_{w(2)} \times \ldots \times M_{w(n)}$ (בפרט, $M_\epsilon = 1 = \{\emptyset\}$ היא קבוצה בת איבר אחד). העולם של a
2. לכל $E \in \mathscr{R}_w$, תת-קבוצה $E^{\mathcal{M}} \subseteq M_w$ (*היחס* E *ב-*$\mathcal{M}$). היחס E ב-$\mathcal{M}$
3. לכל $f \in \mathscr{F}_{w,a}$, פונקציה $f^{\mathcal{M}} : M_w \to M_a$ (*הפונקציה* f *ב-*$\mathcal{M}$). בפרט, עבור $c \in \mathscr{F}_{\epsilon,a}$, נזהה את ההעתקה $c^{\mathcal{M}} : 1 \to M_a$ עם האיבר $c^{\mathcal{M}}(\emptyset) \in M_a$, ונקרא לו *הקבוע* c *ב-*$\mathcal{M}$. הפונקציה f ב-$\mathcal{M}$ הקבוע c ב-$\mathcal{M}$

כזכור, הביטויים בשפה שלנו תלויים לא רק בחתימה, אלא גם בקבוצת המשתנים. על מנת לקבוע את ערכי הביטויים הללו, אנו צריכים לכן לקבוע את ערכי המשתנים:

הגדרה 3.3.2. יהי $\mathcal{M}$ מבנה עבור חתימה Σ, ותהי $\mathscr{V} = \coprod_{a \in \mathscr{S}} \mathscr{V}_a$ קבוצה של משתנים עבורה. *השמה* ל-$\mathscr{V}$ (בתוך $\mathcal{M}$) הינה אוסף העתקות $\omega = (\omega_a)$ עבור $a \in \mathscr{S}$, כאשר $\omega_a : \mathscr{V}_a \to M_a$. השמה
את אוסף ההשמות ל-$\mathscr{V}$ בתוך $\mathcal{M}$ נסמן ב-$\mathcal{M}^{\mathscr{V}}$. $\mathcal{M}^{\mathscr{V}}$

דוגמא 3.3.3. נניח ש-Σ היא חתימה עם סוג אחד G, סימן פונקציה דו-מקומי $+$, סימן קבוע 0, וסימני יחס דו-מקומיים $<$ ו-$=$. מבנה אפשרי עבור Σ משייך ל-G את הקבוצה $\mathbb{Z}$ של השלמים, ל-$+$ את העתקת החיבור על G, ל-0 את האיבר $0 \in \mathbb{Z}$, ל-$<$ את יחס הסדר על השלמים ול-$=$ את יחס השוויון. אם x ו-y הם משתנים, ההתאמה שמשייכת ל-x את 3 ול-y את 5 היא השמה. באופן כללי, ניתן לזהות את $\mathcal{M}^{\{x,y\}}$ עם קבוצת הזוגות הסדורים של איברי $\mathbb{Z}$ (אם בוחרים סדר על $\{x,y\}$).

כעת ניתן לפרש את כל הביטויים של השפה. כפי שכבר הוזכר, שמות עצם ונוסחאות תלויים במשתנים החופשיים שלהם, והם יגדירו העתקות על ההשמות למשתנים החופשיים שלהם.

הגדרה 3.3.4. יהי $\mathcal{M}$ מבנה לחתימה Σ.

1. לכל שם עצם t מסוג a נגדיר העתקה $t^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^{\mathscr{V}(t)} \to M_a$, ברקורסיה:
   (א) אם t משתנה, אז $\mathscr{V}(t) = \{t\}$, ונגדיר $t^{\mathcal{M}}(\omega) = \omega(t)$.

(ב) אם $t = f(t_1,\dots,t_n)$, אז

$$t^{\mathcal{M}}(\omega) = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\omega\restriction_{\mathscr{V}(t_1)}),\dots,t_n^{\mathcal{M}}(\omega\restriction_{\mathscr{V}(t_n)}))$$

לביטוי האחרון יש משמעות, שכן $\mathscr{V}(t_i) \subseteq \mathscr{V}(t)$ לכל i, ולכן ניתן לצמצם את ω ל-$\mathscr{V}(t_i)$.

בהמשך, לא נקפיד לרשום את הצימצומים הללו: אם פונקציה g מוגדרת על $\mathcal{M}^{\mathscr{V}}$, נרשום $g(\omega)$ גם עבור $\omega \in \mathcal{M}^{\mathscr{V}_1}$ אם $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{V}_1$, כאשר הכוונה היא ל-$g(\omega\restriction_{\mathscr{V}})$.

2. לכל נוסחא ϕ, נגדיר תת-קבוצה $\phi^{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}^{\mathscr{V}(\phi)}$ ברקורסיה, באופן הבא:

(א) אם ϕ היא מהצורה $E(t_1,\dots,t_n)$, אז

$$\phi^{\mathcal{M}} = \{\omega \in \mathcal{M}^{\mathscr{V}(\phi)} \mid (t_1^{\mathcal{M}}(\omega),\dots,t_n^{\mathcal{M}}(\omega)) \in E^{\mathcal{M}}\}$$

(ב) עבור נוסחאות ϕ ו-ψ,

$$(\bot)^{\mathcal{M}} = \emptyset \tag{3.4}$$

$$\langle\phi\to\psi\rangle^{\mathcal{M}} = (\phi^{\mathcal{M}})^c \cup \psi^{\mathcal{M}} \tag{3.5}$$

$$(\exists x{\in}a\phi)^{\mathcal{M}} = \{\omega\restriction_{\mathscr{V}(\phi)\setminus\{x\}} \mid \omega \in \phi^{\mathcal{M}}\} \tag{3.6}$$

תרגיל 3.3.5. בדוק שלהגדרות לעיל יש משמעות. בפרט, הבהר את משמעות האיחוד ב-(3.5)

בפרט, אם ϕ פסוק, אז $\phi^{\mathcal{M}}$ היא תת-קבוצה של $\mathcal{M}^0 = 1$, כלומר איבר של $2{=}\{0,1\}$.

הגדרה 3.3.6. אם $\mathcal{M}$ מבנה עבור חתימה Σ, ו-ϕ פסוק בחתימה זו, אז $\phi^{\mathcal{M}}$ נקרא *ערך האמת* של ϕ ב-$\mathcal{M}$. אם $\phi^{\mathcal{M}} = 1$, נאמר ש-$\mathcal{M}$ *מספק את* ϕ וש-ϕ נכון ב-$\mathcal{M}$.

ערך האמת

$\mathcal{M}$ מספק את ϕ

תרגיל 3.3.7. הראו שאם ϕ ו-ψ הם פסוקים, אז $(\neg\phi)^{\mathcal{M}} = 1 - \phi^{\mathcal{M}}$, ו-$\langle\phi\wedge\psi\rangle^{\mathcal{M}} = \phi^{\mathcal{M}}\cdot\psi^{\mathcal{M}}$. במילים אחרות, $\phi \mapsto \phi^{\mathcal{M}}$ היא השמה על קבוצת הפסוקים, במובן של תחשיב הפסוקים

תרגיל 3.3.8. הוכיחו ש-$(\forall x{\in}a\phi)^{\mathcal{M}}$ היא קבוצת כל ההשמות עבור $\mathscr{V}(\phi) \setminus \{x\}$ שכל הרחבה שלהן ל-x שייכת ל-$\phi^{\mathcal{M}}$.

דוגמא 3.3.9. נמשיך עם החתימה והמבנה מדוגמא 3.3.3. שם העצם $x+y$ מגדיר את ההעתקה הנתונה על-ידי $\omega \mapsto \omega(x)+\omega(y)$. לעומת זאת, שם העצם $x+x$ מגדיר את ההעתקה $\omega{\mapsto}\omega{+}\omega$ (אם מזהים השמות על $\{x\}$ עם איברי $\mathbb{Z}$).

הנוסחא הבסיסית $x+y=0$ מגדירה את קבוצת כל ה-$\omega \in \mathbb{Z}^{\{x,y\}}$ כך ש-$\omega(x)+\omega(y){=}0$, כלומר, כל הזוגות מהצורה $(a,-a)$ עם $a \in \mathbb{Z}$. לכן, $\exists y(x+y=0)$ מגדירה את קבוצת כל ההשמות ω ל-x שניתן להרחיב אותן ל-y באופן ש-$\omega(x)+\omega(y)=0$. במלים אחרות, זוהי כל הקבוצה $\mathbb{Z}$. לכן $\forall x\exists y(x+y=0)$ מגדירה את קבוצת כל ההשמות שלכל הרחבה שלהן ל-x קיימת הרחבה ל-y כך ש-$\omega(x)+\omega(y)=0$. הואיל וזה נכון, המבנה $\mathcal{M}$ מספק את $\forall x\exists y(x{+}y=0)$.

נסכם במספר הגדרות נוספות הקושרות בין פסוקים למבנים, ובין קבוצות לנוסחאות.

הגדרה 3.3.10. תהי Σ חתימה, ויהי $\mathcal{M}$ מבנה עבור Σ.

1. קבוצת פסוקים בחתימה Σ נקראת *תורה* (מעל Σ). קבוצת הפסוקים ϕ עבורם $\phi^{\mathcal{M}} = 1$ נקראת *התורה של המבנה* $\mathcal{M}$, מסומנת ב-$\mathbf{Th}(\mathcal{M})$. תורה · התורה של המבנה · $\mathbf{Th}(\mathcal{M})$
2. $\mathcal{M}$ הוא *מודל* של תורה $\mathbb{T}$ אם $\varphi^{\mathcal{M}} = 1$ לכל $\varphi \in \mathbb{T}$ (כלומר, כל הפסוקים ב-$\mathbb{T}$ נכונים ב-$\mathcal{M}$). מודל
3. תת-קבוצה של $\mathcal{M}_w$ מהצורה $\varphi^{\mathcal{M}}$ נקראת *קבוצה גדירה*. נוסחאות φ ו-ψ הן *נוסחאות שקולות* (ביחס ל-$\mathcal{M}$) אם $\varphi^{\mathcal{M}} = \psi^{\mathcal{M}}$. קבוצה גדירה · נוסחאות שקולות
4. נוסחא ϕ *נובעת לוגית* מקבוצת הנוסחאות Γ אם לכל מבנה $\mathcal{M}$ והשמה ω המספקים את Γ, השמה זו מספקת גם את ϕ. קבוצה Γ_1 נובעת לוגית מ-Γ אם כל איבר של Γ_1 נובע מ-Γ. סימון: $\Gamma \models \phi$ או $\Gamma \models \Gamma_1$. נובעת לוגית · $\Gamma \models \phi$ · $\Gamma \models \Gamma_1$

בפרט, כל מבנה הוא מודל של התורה שלו.

3.3.11 מבנים עם שוויון

יחס השוויון מוגדר על כל קבוצה, ולרוב התכונות המעניינות אותנו מנוסחות בעזרתו. כפי שנראה בהמשך, לא ניתן לכפות על יחס להיות יחס השוויון באמצעות הנוסחאות שהגדרנו, ולכן יש להוסיף את זה כדרישה חיצונית.

הגדרה 3.3.12. תהי Σ חתימה עם קבוצת סוגים $\mathscr{S}$. *מבנה עם שוויון* עבור Σ הוא מבנה $\mathcal{M}$ עבור החתימה $\Sigma_=$ המרחיבה את Σ על-ידי יחס חדש $=_a \in \mathscr{R}_{aa}$ לכל סוג a, בו היחס $=_a$ מתפרש כשוויון על M_a. מבנה עם שוויון

בהקשר של מבנים עם שוויון, הנוסחאות, הפסוקים ויתר האלמנטים התחביריים יהיו ביחס לחתימה $\Sigma_=$. למשל, התורה של מבנה עם שוויון $\mathcal{M}$ היא קבוצת הפסוקים *מעל* $\Sigma_=$ הנכונים ב-$\mathcal{M}$ עם השוויון הרגיל.

3.4 שאלות ודוגמאות נוספות

נתבונן עתה במספר דוגמאות.

3.4.1 קבוצות גדירות בשדות

יהי K שדה ונתבונן כמבנה (הטבעי) לחתימה החד-סוגית $(L, 0, 1, +, -, \cdot)$. איזה קבוצות גדירות במבנה הזה? נתחיל בנוסחאות הבסיסיות במשתנה אחד. נוסחא בסיסית שקולה (ביחס ל-K) לנוסחא מהצורה $a_n x^n + \cdots + a_0 = 0$, כלומר, משוואה פולינומית במשתנה אחד, עם מקדמים ב-$\mathbb{Z}$ (ליתר דיוק, בתמונה של $\mathbb{Z}$ בתוך K). למשוואה כזו לכל היותר n פתרונות ב-K אם לפחות אחד המקדמים שונה מאפס. קבוצה חסרת כמתים במשתנה אחד היא צירוף בוליאני של קבוצות כאלה. בפרט, כל קבוצה כזו היא סופית או קו-סופית ומורכבת מאיברים אלגבריים מעל השדה הראשוני.

במספר משתנים התמונה דומה: קבוצות חסרות כמתים מוגדרות על-ידי מערכות של משוואות פולינומיות ושלילותיהן. במקרה של יותר ממשתנה אחד, קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות אינה בהכרח סופית (אך ניתן לחשוב עליה כעל קבוצה עם מבנה גאומטרי; זהו הנושא של התחום *גאומטריה אלגברית*).

מה בנוגע לנוסחאות עם כמתים? דוגמא אחת לנוסחא כזו היא $\exists y(xy = 1)$. נוסחא זו מגדירה את קבוצת כל האיברים להם יש הפכי כפלי, ולכן היא שקולה לנוסחא $x \neq 0$. האם קיימות נוסחאות שאינן שקולות לנוסחא חסרת כמתים?

תרגיל 3.4.2. מצא נוסחה (בחתימה של חוגים) המגדירה ב-$\mathbb{R}$ את הממשיים החיוביים. הסק שלא כל נוסחא שקולה ב-$\mathbb{R}$ לנוסחא חסרת כמתים. מהי הקבוצה שאותה נוסחא מגדירה ב-$\mathbb{C}$?

בפרט, אנו רואים שהתיאור של הקבוצות הגדירות משתנה משדה לשדה.

שאלה 3.4.3. מהן הקבוצות הגדירות בשדות $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$? האם ניתן להגדיר את $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$? האם ניתן להגדיר את (הגרף של) הפונקציה $x \mapsto e^x$ ב-$\mathbb{R}$, ב-$\mathbb{C}$?

תרגיל 3.4.4. איפה, בתיאור לעיל, השתמשנו בעובדה ש-K הוא שדה (ולא חוג חילופי כללי יותר)?

3.4.5 גאומטריית המישור

נתבונן במבנה לחתימה של גיאומטריית המישור המורכב מנקודות וקוים, עם היחסים הרגילים של שייכות נקודה לקו וביניות. האם ניתן להגדיר את היחס "הקטע בין x ל-y שווה אורך לקטע zw?" נעשה זאת אם הקו L_{xy} העובר דרך x, y מקביל לקו L_{zw} העובר דרך z, w (ניתן כמובן להניח ש-$x \neq y$ ו-$z \neq w$, ולכן הקווים מוגדרים היטב).

תרגיל 3.4.6. מצא נוסחאות שמגדירות את היחסים ב-$\mathbb{R}^2$ כמבנה לגאומטריית המישור:

1. הקו L_{xy} מקביל (או שווה) ל-L_{zw}
2. אם L_{xy} מקביל ל-L_{zw} ושונה ממנו אז האורך של הקטע xy שווה לאורך של zw
3. אותו דבר בלי ההנחה ש-L_{xy} שונה מ-L_{zw}

שאלה 3.4.7. האם היחס "xy שווה אורך ל-zw" גדיר לקטעים כלליים? האם הנקודה $(0,0)$ במישור גדירה?

את פרויקט הגאומטריה של אוקלידס ניתן לנסח כך:

שאלה 3.4.8. באיזו חתימה ניתן לנסח את גאומטריית המישור? האם ניתן לתאר את התורה של המישור הממשי בחתימה זו?

3.4.9 השלמים והטבעיים

נתבונן במבנה של השלמים $\mathbb{Z}$ בשפת החוגים. התיאור של קבוצות חסרות כמתים בדוגמא זו זהה למקרה של שדות. האם ניתן להגדיר את הטבעיים בתוך $\mathbb{Z}$?

עובדה 3.4.10 (משפט לגרנז'). *כל מספר טבעי ניתן להציג כסכום של ארבעה ריבועים (של מספרים שלמים)*

לכן הטבעיים מוגדרים על-ידי הנוסחא $\exists a,b,c,d(x=a^2+b^2+c^2+d^2)$.

תרגיל 3.4.11. במבנה $\mathbb{Z}$, רשום נוסחאות המגדירות את הקבוצות הבאות:

1. קבוצת הראשוניים
2. קבוצת החזקות של 5

שאלה 3.4.12. האם ניתן להגדיר ב-$\mathbb{Z}$ את קבוצת החזקות של 10? את הפונקציה $5 \mapsto 5^n$?

שאלה 3.4.13. האם ניתן לתאר את $\mathbf{Th}(\mathbb{Z},+,\cdot)$?

3.4.14 התורה של קבוצה אינסופית

נתבונן בחתימה הריקה על סוג אחד, כלומר, זו שהיחס היחיד בה הוא שוויון. על-פי ההגדרה, מבנה לחתימה זו הוא פשוט קבוצה. מה יכולה להיות התורה של מבנה כזה? אם לקבוצה גודל סופי n, אז הוא מתואר לחלוטין על-ידי פסוק מהצורה $\phi_n \wedge \neg\phi_{n-1}$, כאשר ϕ_n הוא הפסוק $\forall x_0 \dots x_n \langle x_0 = x_1\rangle \vee \dots \vee \langle x_{n-1} = x_n\rangle$. נתבונן בתורה $\mathbb{T}$ המורכבת מכל הפסוקים $\neg\phi_n$.

כל מודל $\mathcal{M}$ של $\mathbb{T}$ הוא קבוצה אינסופית. מהן הקבוצות הגדירות במודל כזה? הנוסחאות הבסיסיות הן מהצורה $x=y$ כאשר x,y משתנים (לא בהכרח שונים). כלומר, קבוצה גדירה על ידי נוסחא ללא כמתים היא צירוף בוליאני של "אלכסונים". מה לגבי נוסחאות מהצורה $\exists x\phi(x,\bar{y})$ כאשר ϕ ללא כמתים? ראשית, הואיל ו-$\exists$ מתחלף עם $\vee$, ניתן להניח ש-ϕ היא מהצורה $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$, כאשר ϕ_1 היא מהצורה $x=y_1 \wedge \dots \wedge x=y_k$, ϕ_2 היא מהצורה $x \neq z_1 \wedge \dots \wedge x \neq z_l$, ו-$\phi_3$ לא מכילה את x כלל. לכן, ניתן לשכוח מ-ϕ_3, ולהתבונן בשני מקרים:

1. ϕ_1 אינה ריקה. במקרה זה $\exists\langle\phi_1 \wedge \phi_2\rangle$ שקולה ל-$y_1 = y_2 \wedge \dots \wedge y_1 = y_k \wedge y_1 \neq z_1 \wedge \dots y_1 \neq z_l$ (אם x הוא y_i בשביל i כלשהו, פשוט מוחקים את השוויון. אם $x = z_i$, אז הנוסחא מגדירה את הקבוצה הריקה).

2. ϕ_1 ריקה. במקרה זה הנוסחא מגדירה את כל התחום שלה.

בסך הכל הראינו, באופן מפורש: כל נוסחא מהצורה $\exists x\phi(x,y)$ שקולה לנוסחא ללא כמתים. לנוסחאות אחרות, הטענה נובעת באינדוקציה. כלומר הוכחנו:

טענה 3.4.15. *לכל נוסחא ϕ בשפת השוויון קיימת נוסחא ללא כמתים ψ השקולה לה בכל מודל של* $\mathbb{T}$

מסקנה 3.4.16. *לכל המודלים האינסופיים של שפת השוויון יש אותה תורה.*

הוכחה. אם ϕ פסוק בשפת השוויון יהי ψ פסוק כמו בטענה. הואיל ו-ψ חסר כמתים, הוא חייב להיות 1 או 0. לכן התורה היא בדיוק התורה המורכבת מהפסוקים השקולים ל-1. $\square$

שאלה 3.4.17. האם קיים פסוק בשפה של מרחבים וקטוריים מעל שדה קבוע K, שהמודלים שלו הם מרחבים וקטוריים ממימד 7?

שאלה 3.4.18. האם קיימת קבוצה של פסוקים בשפה של שדות שהמודל היחיד שלה הוא $\mathbb{R}$?

שאלה 3.4.19. האם קיימת תורה שהמודלים שלה הם הגרפים הקשירים?

שאלה 3.4.20. האם לחבורה החפשית מעל שני איברים אותה תורה כמו לחבורה החפשית על שלושה איברים?

תרגיל 3.4.21. הראה שלחבורה החפשית מעל איבר אחד תורה שונה מזאת שלחבורה החפשית מעל שני איברים. הראה שלחבורה האבלית החפשית מעל שני איברים תורה שונה מלחבורה האבלית החפשית על שלושה איברים

3.5 על-מכפלות ומשפט הקומפקטיות

משפט הקומפקטיות בתחשיב היחסים אנלוגי לגמרי לאותו משפט בתחשיב הפסוקים. נתחיל, ראשית, עם ההגדרות הרלוונטיות, גם הן אנלוגיות למצב בתחשיב הפסוקים.

הגדרה 3.5.1. תהי Γ קבוצת נוסחאות בחתימה נתונה, מעל קבוצת משתנים $\mathscr{V}$.

1. הקבוצה Γ היא *קבוצה ספיקה* אם קיים מבנה $\mathcal{M}$, והשמה ω על $\mathscr{V}$ ב-$\mathcal{M}$, כך ש-$\omega \in \phi^{\mathcal{M}}$ לכל $\phi \in \Gamma$. במצב זה נאמר ש-ω (או $(\mathcal{M},\omega)$) מספקת את Γ. קבוצה ספיקה
2. Γ היא *ספיקה סופית* אם כל תת-קבוצה סופית של Γ ספיקה ספיקה סופית

משפט 3.5.2 (משפט הקומפקטיות). *אם קבוצה Γ של נוסחאות היא ספיקה סופית, אז Γ ספיקה*

לפני שנוכיח את המשפט, נראה מספר ניסוחים שלו. בהנתן חתימה Σ וקבוצה $\mathscr{V}$ של משתנים, נתבונן בחתימה חדשה $\Sigma_{\mathscr{V}}$ המתקבלת מהוספת איברי $\mathscr{V}_a$ (עבור כל סוג a של Σ) לקבוצת הקבועים מסוג a. אז כל נוסחא ϕ ב-Σ עם משתנים חפשיים ב-$\mathscr{V}$ ניתן לראות גם כפסוק $\phi_{\mathscr{V}}$ ב-$\Sigma_{\mathscr{V}}$ (ולהפך).

תרגיל 3.5.3. יהי $\mathcal{M}$ מבנה עבור Σ. הראה שקיימת התאמה חד-חד-ערכית בין השמות ω ל-$\mathscr{V}$ ב-$\mathcal{M}$, לבין הרחבות $\mathcal{M}_\omega$ של $\mathcal{M}$ למבנים עבור $\Sigma_{\mathscr{V}}$ (*הרחבה* כאן פירושה שנותנים ערכים לקבועים החדשים, ללא שינוי יתר המידע), כך ש-$\omega \in \phi^{\mathcal{M}}$ אם ורק אם $\mathcal{M}_\omega$ מודל של $\phi_{\mathscr{V}}$. בפרט, קבוצת הנוסחאות Γ היא ספיקה אם ורק אם קבוצת הפסוקים $\phi_{\mathscr{V}}$ ספיקה (כלומר, יש לה מודל).

מהתרגיל האחרון נובע, שמספיק להוכיח את משפט הקומפקטיות במקרה ש-Γ קבוצת פסוקים. כמו במקרה של תחשיב הפסוקים, ניתן להניח (ואנחנו נעשה זאת) ש-Γ סגורה תחת $\wedge$. צורה נוספת של המשפט נתונה במסקנה הבאה, שמוכחת בדיוק כמו בתרגיל 2.4.4.

מסקנה 3.5.4. *אם* $\Gamma \models \phi$ *אז* $\Gamma_0 \models \phi$ *עבור תת-קבוצה סופית* Γ_0 *של* Γ.

3.5.5 על-מכפלות של מבנים

האסטרטגיה שלנו להוכחת משפט הקומפקטיות תהיה דומה לזו שהשתמשנו בה בתחשיב הפסוקים. נניח שנתונה לנו קבוצה Γ של פסוקים (סגורה תחת $\wedge$), ולכל פסוק $x \in \Gamma$ מבנה $\mathcal{M}_x$ המספק אותו. אנחנו ננסה לבנות ממבנים אלה מבנה חדש המספק את כל Γ. הרעיון הוא שאיברי המבנה החדש הם סדרות מוגדרות "כמעט בכל מקום" של איברי $\mathcal{M}_\alpha$, ונכונות של נוסחאות גם נקבעת על-ידי "נכונות כמעט בכל מקום", כאשר המושג של "כמעט בכל מקום" שנשתמש בו נתון על ידי על-מסנן על Γ, כמו במקרה של תחשיב הפסוקים. כמו אז, גם כאן הבניה היא כללית, עבור קבוצה כלשהי של מבנים, ועל-מסנן עליה.

נתחיל מעל מכפלה של קבוצות. אם X היא קבוצה, ולכל $\mathcal{M}$ ב-X נתונה קבוצה $a^{\mathcal{M}}$, *סדרה חלקית* (עם ערכים ב-$a = (a^{\mathcal{M}})$) היא העתקה $\mathcal{M} \mapsto s_{\mathcal{M}}$ מתת-קבוצה Y של X, כך שלכל $\mathcal{M} \in Y$ מתקיים $s_{\mathcal{M}} \in a^{\mathcal{M}}$. נסמן את התחום Y של s ב-$\mathbf{d}(s)$. בהנתן על-מסנן $\mathcal{F}$ על X, נסמן ב-$a^{\mathcal{F}}$ את קבוצת הסדרות s עבורן $\mathbf{d}(s) \in \mathcal{F}$. זוהי *העל-מכפלה* של הקבוצות $a^{\mathcal{M}}$ ביחס ל-$\mathcal{F}$. נשים לב, שבהנתן סדרה סופית s^i של איברי $a^{\mathcal{F}}$, התחום $\mathbf{d}(\bar{s})$ בו כולם מוגדרים נמצא גם הוא ב-$\mathcal{F}$. $a^{\mathcal{F}}$ על-מכפלה

תרגיל 3.5.6. עבור איברים $s, t \in a^{\mathcal{F}}$, נגדיר: $s \sim t$ אם $s_{\mathcal{M}} = t_{\mathcal{M}}$ לכל $\mathcal{M}$ בו שתיהן מוגדרות, ו-$s \approx t$ אם קיימת קבוצה $Y \in \mathcal{F}$ כך ש-$s_{\mathcal{M}} = t_{\mathcal{M}}$ לכל $\mathcal{M} \in Y$ (ובפרט שניהם מוגדרים שם). האם $\sim$ יחס שקילות? מה לגבי $\approx$?

תרגיל 3.5.7. הראה ש-$a^{\mathcal{F}}$ ריקה אם ורק אם $\{\mathcal{M} \mid a^{\mathcal{M}} = \emptyset\} \in \mathcal{F}$.

נניח עכשיו ש-X קבוצה של מבנים לחתימה Σ, ו-$\mathcal{F}$ על-מסנן על X. אז לכל סוג a ולכל $\mathcal{M} \in X$ נתונה לנו קבוצה $a^{\mathcal{M}}$ (הפירוש של הסוג a ב-$\mathcal{M}$), ואנחנו יכולים לבנות את על-המכפלה $a^{\mathcal{F}}$. אנחנו נבנה מבנה $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ בו הפירוש של כל סוג a הוא $a^{\mathcal{F}}$.

בהנתן נוסחא $\phi(\bar{x})$, והשמה c למשתנים $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$ ב-$\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$, ראינו שהתחום $\mathbf{d}(c)$ של $c(\bar{x})$ שייך ל-$\mathcal{F}$. לכל $\mathcal{M}$ בתחום הזה, $x_i \mapsto c(x_i)_{\mathcal{M}}$ היא השמה ב-$\mathcal{M}$, ולכן ניתן לשאול האם ההשמה הזו $c_{\mathcal{M}}$ שייכת ל-$\phi^{\mathcal{M}}$. נסמן

$$T_c(\phi) = \{\mathcal{M} \in \mathbf{d}(c) \mid c_{\mathcal{M}} \in \phi^{\mathcal{M}}\} \tag{3.7}$$

אינטואיטיבית, לכמעט כל $\mathcal{M}$ יש את הרעיון שלו $c_{\mathcal{M}}$ מה זה c, ואת הרעיון שלו $\phi^{\mathcal{M}}$ לפירוש של ϕ, ואנחנו שואלים מי הם המבנים $\mathcal{M}$ שחושבים ש-$c \in \phi$ ("כמעט" פה כמובן במובן של על-המסנן). המטרה שלנו היא שבמבנה $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$, איבר יהיה שייך לפירוש $\phi^{\mathcal{F}}$ של ϕ אם ורק אם "רוב" המבנים חושבים שהוא שייך (פה ובהמשך, אנחנו חושבים על $\mathcal{F}$ כעל "איבר מוכלל" של X, ולכן מסמנים $\phi^{\mathcal{F}}$ במקום $\phi^{\mathcal{M}^{\mathcal{F}}}$, וכו'). ליתר דיוק, אנחנו נוכיח:

משפט 3.5.8 (משפט ווש). *לכל נוסחא ϕ מתקיים* $\phi^{\mathcal{F}} = \{c \,|\, T_c(\phi) \in \mathcal{F}\}$

על מנת לתת תוכן למשפט, אנחנו צריכים לסיים להגדיר את המבנה $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$. הואיל ומשפט ווש צריך להיות נכון בפרט עבור נוסחאות בסיסיות, יש רק דרך אחת לעשות זאת:

הגדרה 3.5.9. תהי Σ חתימה, ו-X קבוצה של מבנים עבור Σ. עבור על מסנן $\mathcal{F}$ על X, *העל-מכפלה* $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ של X ביחס ל-$\mathcal{F}$ מוגדרת באופן הבא: על-מכפלה

1. לכל סוג a של Σ, העולם $a^{\mathcal{F}}$ של a ב-$\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ הוא העל-מכפלה של הקבוצות $a^{\mathcal{M}}$ ביחס ל-$\mathcal{F}$.

2. אם E סימן יחס מסוג w, אז

$$E^{\mathcal{F}} = \{(s^1, \dots, s^n) \in w^{\mathcal{F}} \,|\, \{\mathcal{M} \in \mathbf{d}(\bar{s}) \,|\, \bar{s}_{\mathcal{M}} \in E^{\mathcal{M}}\} \in \mathcal{F}\} \tag{3.8}$$

3. לכל סימן פונקציה $g : w \to a$, ולכל איבר $s \in w^{\mathcal{F}}$, תחום ההגדרה של $g(s)$ הוא תחום ההגדרה של s, ולכל $\mathcal{M}$ בתחום זה,

$$g^{\mathcal{F}}(s)_{\mathcal{M}} = g^{\mathcal{M}}(s_{\mathcal{M}}) \tag{3.9}$$

במילים אחרות, $\bar{s}$ שייך ל-E, אם הוא שייך אליו "כמעט בכל מקום", לפי העל-מסנן $\mathcal{F}$, ופונקציות מחושבות בנפרד בכל מבנה.

תרגיל 3.5.10. נניח ש-$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{M}}$ הוא על-מסנן ראשי המתאים ל-$\mathcal{M}$, וש-$\mathcal{M}$ הוא מבנה עם שוויון. הראו ש-$\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ כמעט זהה ל-$\mathcal{M}$, במובן הבא: קיימת העתקה חד-חד-ערכית $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\mathcal{F}}$, וב-$\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ לכל איבר a קיים איבר b בתמונה של העתקה זו, כך ש-$a =^{\mathcal{F}} b$.

ההגדרה המלאה של על-מכפלה מספקת תוכן למשפט ווש, וההוכחה שלו כמעט מיידית מהתכונות של T_c, המתוארות בטענה הבאה:

טענה 3.5.11. *תהי c השמה ב-$\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ למשתנים החפשיים בנוסחאות ϕ ו-ψ. אז מתקיים*

1. $T_c(\langle\phi\to\psi\rangle) = (\mathbf{d}(c) \setminus T_c(\phi)) \cup T_c(\psi)$. *לכן,* $T_c(\langle\phi\to\psi\rangle) \in \mathcal{F}$ *אם ורק אם* $T_c(\phi) \notin \mathcal{F}$ *או* $T_c(\psi) \in \mathcal{F}$.

2. *אם $\psi(\bar{y}) = \exists x{\in}a\phi(x,\bar{y})$, אז לכל $b \in a^{\mathcal{F}}$ ההשמה $b \cdot c$ (המרחיבה את $c\restriction_{\bar{y}}$ על-ידי $x{\mapsto}b$) מקיימת: הקבוצה $T_{b\cdot c}(\phi) \subseteq T_c(\psi)$*

   יתר על כן, אם $a^{\mathcal{F}}$ ריקה, אז $T_c(\psi) \notin \mathcal{F}$; אחרת קיים $b \in a^{\mathcal{F}}$ עבורו שתי הקבוצות שוות.

   (במילים אחרות, $T_c(\psi) = \max_{b\in a^{\mathcal{F}}} T_{b\cdot c}(\phi)$ אם $a^{\mathcal{F}}$ אינה ריקה).

הוכחה.

1. החלק הראשון תרגיל. החלק השני נובע מתרגיל 2.1.30, משום ש-$\mathbf{d}(c) \in \mathcal{F}$.

2. לפי ההגדרה,

$$T_c(\psi) = T_c(\exists x{\in}a\phi(x,y)) = \\ \{\mathcal{M} \in \mathbf{d}(c) \mid (b_{\mathcal{M}}, c_{\mathcal{M}}) \in \phi^{\mathcal{M}} \text{-כך ש } b_{\mathcal{M}} \in a^{\mathcal{M}} \text{ קיים}\}$$

מאידך,

$$T_{b\cdot c}(\phi(x,y)) = \{\mathcal{M} \in \mathbf{d}(b\cdot c) \mid (b_{\mathcal{M}}, c_{\mathcal{M}}) \in \phi^{\mathcal{M}}\}$$

וברור שהקבוצה השניה מוכלת בראשונה. כמו-כן, $T_c(\psi)$ מוכלת בקבוצת אותם $\mathcal{M}$ עבורם $a^{\mathcal{M}}$ אינה ריקה. לכן, אם $a^{\mathcal{F}}$ ריקה, אז $T_c(\psi) \notin \mathcal{F}$.

אחרת, נבחר את b באופן הבא: עבור $\mathcal{M} \in T_c(\psi)$, נבחר את $b_{\mathcal{M}}$ להיות אחד מאלה שמקיימים את ϕ ב-$\mathcal{M}$. עבור $\mathcal{M}$ אחר נבחר את $b_{\mathcal{M}}$ להיות איבר כלשהו ב-$a^{\mathcal{M}}$ אם קבוצה זו לא ריקה. לפי ההנחה, האיבר $b = (b_{\mathcal{M}})$ שמתקבל ככה מוגדר במספיק מקומות, כלומר $\mathbf{d}(b) \in \mathcal{F}$, ולפי הבחירה מתקיים $T_{b\cdot c}(\phi) = T_c(\psi)$. □

תרגיל 3.5.12. הוכיחו שהתנאי שמגדיר את סימני הפונקציה ב-$\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ חל גם על שמות עצם אחרים, כלומר: לכל שם עצם $t(\bar{x})$ ולכל השמה c ב-$\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ מתקיים $\mathbf{d}(t^{\mathcal{F}}(c)) = \mathbf{d}(c)$ ולכל $\mathcal{M}$ שנמצא בתחום הזה, $t^{\mathcal{F}}(c)_{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}(c_{\mathcal{M}})$

הוכחת משפט 3.5.8. באינדוקציה. אם $\phi(\bar{x})$ נוסחא בסיסית, אז יש סימן יחס E ושמות עצם $t_1(\bar{x}),\dots,t_k(\bar{x})$ כך ש-$\phi = E(t_1,\dots,t_k)$. אז $c \in \phi^{\mathcal{F}}$ אם ורק אם $(t_1^{\mathcal{F}}(c),\dots,t_k^{\mathcal{F}}(c)){\in}E^{\mathcal{F}}$ אם ורק אם $\{\mathcal{M} \mid (t_1^{\mathcal{F}}(c),\dots,t_k^{\mathcal{F}}(c))_{\mathcal{M}} \in E^{\mathcal{M}}\} \in \mathcal{F}$ (לפי הגדרת $E^{\mathcal{F}}$). לפי תרגיל 3.5.12, הקבוצה בתנאי האחרון שווה ל-$\{\mathcal{M} \mid (t_1^{\mathcal{M}}(c_{\mathcal{M}}),\dots,t_k^{\mathcal{M}}(c_{\mathcal{M}})) \in E^{\mathcal{M}}\}$ וזה בדיוק $T_c(\phi)$.

נניח שהטענה נכונה לנוסחאות ϕ ו-ψ. אז

$$\langle\phi{\to}\psi\rangle^{\mathcal{F}} = (\phi^{\mathcal{F}})^c \cup \psi^{\mathcal{F}} = \\ \{c \mid T_c(\phi) \in \mathcal{F}\}^c \cup \{c \mid T_c(\psi) \in \mathcal{F}\} = \\ \{c \mid T_c(\phi) \notin \mathcal{F}\} \cup \{c \mid T_c(\psi) \in \mathcal{F}\} = \\ \{c \mid T_c(\langle\phi{\to}\psi\rangle) \in \mathcal{F}\}$$

כאשר השוויון האחרון נובע מהסעיף הראשון של 3.5.11.

עבור כמתים, תהי D הקבוצה

$$(\exists x\phi(x,y))^{\mathcal{F}} = \{c \mid \exists b(b\cdot c \in \phi^{\mathcal{F}})\} = \{c \mid \exists b T_{b\cdot c}(\phi) \in \mathcal{F}\}$$

אם הסוג של x ריק ב-$\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$, ברור שקבוצה זו ריקה, ומאידך, לפי טענה 3.5.11 $T_c(\exists x\phi)$ אינה ב-$\mathcal{F}$.

אחרת, אם c שייך ל-D, אז קיים b עבורו $T_{b\cdot c}(\phi) \in \mathcal{F}$, ומאידך, לפי טענה 3.5.11, $T_{b\cdot c}(\phi) \subseteq T_c(\exists x\phi)$, ולכן גם קבוצה זו ב-$\mathcal{F}$. בכיוון השני, אם $T_c(\exists x\phi) \in \mathcal{F}$, קבוצה זו שווה ל-$T_{b\cdot c}(\phi)$ עבור b כלשהו (שוב, לפי טענה 3.5.11), ולכן c שייכת ל-D. $\square$

מסקנה 3.5.13. *אם ϕ פסוק, אז $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ מודל של ϕ אם ורק אם קבוצת המודלים של ϕ ב-X היא ב-$\mathcal{F}$.*

ההוכחה של משפט הקומפקטיות היא עתה העתק מדויק של ההוכחה עבור תחשיב הפסוקים.

הוכחת משפט הקומפקטיות. עבור כל איבר $\phi \in \Gamma$, יהי $\mathcal{M}_\phi$ מודל של ϕ, וניקח את X להיות קבוצת כל ה-$\mathcal{M}_\phi$. נגדיר

$$\mathcal{F}_0 = \{T_\emptyset(\psi) \mid \psi \in \Gamma\} \tag{3.10}$$

אם $\psi \in \Gamma$ אז $T(\psi)$ לא ריקה, שכן $\mathcal{M}_\psi \in T(\psi)$, ולכל ϕ ו-ψ מתקיים $T(\phi)\cap T(\psi) = T(\phi \wedge \psi)$. לכן $\mathcal{F}_0$ ניתן להרחבה לעל-מסנן $\mathcal{F}$. לפי המסקנה האחרונה, העל-מכפלה של ה-$\mathcal{M}_\psi$ ביחס ל-$\mathcal{F}$ היא מודל של Γ. $\square$

3.5.14 קומפקטיות למבנים עם שוויון

כפי שכבר ראינו, בדוגמאות אנו מתעניינים בעיקר במבנים עם שוויון. אם השפה שהתחלנו איתה היא בעלת שוויון, המשפט שהוכחנו תקף גם לגביה, כלומר אם Γ קבוצה ספיקה סופית של פסוקים (עם שוויון), אז יש לה מודל $\mathcal{M}$. אבל בהנחה שלכל תת-קבוצה סופית של פסוקים יש מודל עם שוויון, האם ניתן לצפות שגם $\mathcal{M}$ יהיה מבנה עם שוויון?

דרך אחת להבטיח זאת הייתה יכולה להיות אם הייתה תורה Γ_0 (בשפת השוויון) שמבטיחה שסימן השוויון מתפרש כשוויון אמיתי, כלומר, כל מודל של Γ_0 הוא מודל עם שוויון. אז היינו יכולים להוסיף את Γ_0 לקבוצה המקורית Γ ולהשתמש במשפט שכבר הוכחנו. אולם מסתבר שזה לא המצב:

תרגיל 3.5.15. נניח ש-X קבוצה של מבנים לחתימה עם סוג a, כך שלכל $\mathcal{M} \in X$ הקבוצה $a^{\mathcal{M}}$ לא ריקה, ויש לפחות שני איברים $\mathcal{M}$ ב-X עבורם ב-$a^{\mathcal{M}}$ יש לפחות שני איברים.

הוכיחו שאם $\mathcal{N}$ על-מכפלה של המבנים ב-X, אין נוסחה $\phi(x,y)$ עם משתנים חפשיים מסוג a, כך ש-$(a,b) \in \phi^{\mathcal{N}}$ אם ורק אם $a=b$.

באופן יותר כללי:

תרגיל 3.5.16. יהי $\mathcal{M}$ מבנה עם שוויון עבור חתימה Σ ללא סימני פונקציה, ותהי $\mathbb{T}=\mathbf{Th}(\mathcal{M})$ התורה שלו (בחתימה $\Sigma_=$). הוכיחו שאם A קבוצה לא ריקה כלשהי, אז קיים מבנה (חסר שוויון) $\mathcal{M}_A$ המספק את $\mathbb{T}$, ובו לכל איבר a, קבוצת האיברים b המקיימים $a =^{\mathcal{M}_A} b$ שקולה ל-A.

למרות זאת, ישנן טענות לגבי השוויון אותן ניתן לתאר בלוגיקה מסדר ראשון. אם $\mathcal{M}$ מבנה, *יחס שקילות גדיר* ב-$\mathcal{M}$ (על M_w) הוא תת-קבוצה גדירה $E \subseteq M_w \times M_w$ המהווה יחס שקילות על M_w. לדוגמא, אם $\mathcal{M}$ הוא מבנה עם שוויון, אז השוויון הוא יחס שקילות גדיר על כל סוג. באופן יותר כללי, הנוסחא $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n$ מגדירה יחס שקילות גדיר $=_w$ על M_w (כאשר $w(i)$ הוא הסוג של x_i). נזכיר שיחס שקילות E_1 *מעדן* את יחס שקילות E_2 אם xE_1y גורר xE_2y לכל x, y. בניגוד לשוויון ממש, מושגים אלה ניתנים לביטוי בשפה: יחס שקילות גדיר מעדן

תרגיל 3.5.17. יהי $\mathcal{M}$ מבנה, $\mathbb{T}$ התורה שלו, ו-ϕ נוסחא המגדירה ב-$\mathcal{M}$ יחס שקילות

1. הראו שאם $\mathcal{M}'$ מודל אחר של $\mathbb{T}$, אז ϕ מגדירה יחס שקילות ב-$\mathcal{M}'$
2. הראו שאם $\mathcal{M}$ מבנה עם שוויון, אז לכל סדרת סוגים w, השוויון על M_w מעדן כל יחס שקילות גדיר אחר על M_w
3. הראו שהסעיף הקודם נכון גם אם נחליף את $\mathcal{M}$ במודל אחר $\mathcal{M}'$ של $\mathbb{T}$ (לא בהכרח עם שוויון).

התרגיל מצדיק את ההגדרה הבאה:

הגדרה 3.5.18. נגיד שמבנה חסר שוויון $\mathcal{M}$ עבור החתימה $\Sigma_=$ הוא *בעל שוויון מקורב* אם לכל סוג a, היחס $=_a^{\mathcal{M}}$ מגדיר יחס שקילות, ולכל w, היחס $=_w^{\mathcal{M}}$ מעדן כל יחס שקילות גדיר על M_w בעל שוויון מקורב

לפי התרגיל, כל מבנה עם שוויון הוא בעל שוויון מקורב. כפי שראינו, ההיפך אינו נכון, אך כפי שנראה מיד, המצב ניתן לתיקון.

תרגיל 3.5.19. נניח ש-$\mathcal{M}$ מבנה בעל שוויון מקורב, ותהי $\mathbb{T}$ התורה שלו (בחתימה $\Sigma_=$). הוכיחו שקיים מודל $\overline{\mathcal{M}}$ של $\mathbb{T}$ עם שוויון אמיתי. יתר-על-כן, קיימת העתקה $\pi : \mathcal{M}_a \to \overline{\mathcal{M}}_a$ לכל סוג a, כך שלכל נוסחה φ (עם שוויון) ולכל השמה ω ב-$\mathcal{M}$ מתקיים $\omega \in \varphi^{\mathcal{M}}$ אם ורק אם $\pi \circ \omega \in \varphi^{\overline{\mathcal{M}}}$.

תרגיל זה מאפשר להסיק מיד את הגרסא של משפט הקומפקטיות למבנים עם שוויון:

מסקנה 3.5.20 (משפט הקומפקטיות למבנים עם שוויון). *אם Γ קבוצה של פסוקים בחתימה $\Sigma_=$ עם שוויון, כך שלכל תת-קבוצה סופית של Γ יש מודל עם שוויון, אז גם ל-Γ יש מודל עם שוויון.*

תרגיל 3.5.21. הסיקו את משפט הקומפקטיות למבנים עם שוויון.

התרגיל האחרון מסיק את משפט הקומפקטיות עם שוויון פורמלית מתוך המשפט חסר השוויון. לפעמים מעניין לתאר במפורש את המבנה בעל השוויון המתקבל מעל-מכפלה של מבנים עם שוויון, כפי שנעשה בתרגיל הבא.

תרגיל 3.5.22. נניח ש-X קבוצה של מבנים עם שוויון עבור חתימה נתונה Σ, ונניח ש-$\mathcal{F}$ על-מסנן על X.

1. הראו ש-$\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ הוא בעל שוויון מקורב, אך באופן כללי לא מבנה עם שוויון.

2. תארו במפורש את המבנה $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}^{\mathcal{F}}}$ המתקבל מ-$\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ על-ידי התהליך המתואר בתרגיל 3.5.19. מבנה זה הוא שנקרא לרוב העל-מכפלה, כאשר ההקשר מוגבל למבנים עם שוויון. נשים לב שלפי אותו תרגיל, התורה לא משתנה, ובפרט, משפט ווש נכון גם עבור $\mathcal{M}$.

3. הראו שעל-מכפלה עם שוויון מתחלפת עם חישוב נוסחאות, במובן הבא: לכל נוסחא ϕ, ניתן לזהות את $\phi^{\mathcal{M}}$ עם העל-מכפלה-עם-שוויון של הקבוצות $\{\phi^{\mathcal{N}} \mid \mathcal{N} \in X\}$ ביחס ל-$\mathcal{F}$.

4. הראו שאם $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ הוא מסנן ראשי, אז ניתן לזהות את $\mathcal{M}$ עם $\mathcal{N}$.

מעכשיו, אנחנו נעבוד במבנים עם שוויון (וסימני פונקציה), ועל-מכפלות יהיו במובן של התרגיל האחרון (אלא אם צוין אחרת).

3.6 מסקנות ושימושים של משפט הקומפקטיות

נוכל כעת לענות על כמה מהשאלות שנשאלו בסעיף 3.4.

מסקנה 3.6.1 (משפט לוונהיים-סקולם העולה). *נניח שעבור תורה $\mathbb{T}$ ונוסחא ϕ קיים לכל מספר טבעי n מודל $\mathcal{M}$ של $\mathbb{T}$ כך שעצמת $\phi^{\mathcal{M}}$ גדולה מ-n. אז לכל עוצמה κ קיים מודל $\mathcal{M}$ של $\mathbb{T}$ כך שעצמת $\phi^{\mathcal{M}}$ היא לפחות κ. בפרט, אם ל-$\mathbb{T}$ יש מודלים בהם עצמת סוג a לא חסומה על-ידי שום מספר טבעי, אז יש לה מודלים בהם עצמת a גדולה כרצוננו.*

הוכחה. נתבונן בקבוצה הנוסחאות מעל משתנים $\bar{x}_\alpha$ עבור $\alpha < \kappa$, כאשר כל $\bar{x}_\alpha$ מסוג $\mathscr{V}(\phi)$, המורכבת מהנוסחאות $\phi(\bar{x}_\alpha)$ לכל α, ולכל $\alpha \neq \beta$, הנוסחא $x_\alpha \neq x_\beta$. לפי ההנחה, קבוצה זו ספיקה סופית, ולכן ספיקה. השמה למשתנים אלה נותנת במודל המספק κ פתרונות שונים של ϕ. הטענה האחרונה היא המקרה הפרטי $x =_a x$. $\square$

מסקנה 3.6.2. *אם $\mathcal{M}$ מבנה אינסופי, לא קיימת קבוצה של פסוקים המגדירה אותו ביחידות*

בשביל ההמשך, ננסח כמה הגדרות.

הגדרה 3.6.3. יהיו $\mathcal{M}$ ו-$\mathcal{N}$ שני מבנים עבור חתימה Σ.

1. *הומומורפיזם* מ-$\mathcal{M}$ ל-$\mathcal{N}$ מורכב ממערכת העתקות $F_a : M_a \to N_a$, לכל סוג a, כך שלכל סימן יחס E ולכל $\bar{m} \in \mathcal{M}$ מתקיים $\bar{m} \in E^{\mathcal{M}}$ אם ורק אם $F(\bar{m}) \in E^{\mathcal{N}}$, ולכל סימן פונקציה f מתקיים $f^{\mathcal{N}}(F(\bar{m})) = F(f^{\mathcal{M}}(\bar{m}))$. הומומורפיזם

2. *תת-מבנה* של מבנה $\mathcal{M}$ הוא מבנה $\mathcal{N}$ שעולמו תת-קבוצה של M, ושההכלה שלו ב-M היא הומומורפיזם. תת-מבנה

3. אם $\mathcal{M}$ מודל של תורה $\mathbb{T}$, אז *תת-מודל* של $\mathcal{M}$ (ביחס ל-$\mathbb{T}$) הוא תת-מבנה שגם הוא מודל של $\mathbb{T}$. תת-מודל

4. *איזומורפיזם* הוא הומומורפיזם $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ שיש לו הופכי, כלומר, הומומורפיזם $G : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ כך ש-$F \circ G$ ו-$G \circ F$ שתיהן הזהות. איזומורפיזם

5. *אוטומורפיזם* של מבנה $\mathcal{M}$ הוא איזומורפיזם מ-$\mathcal{M}$ לעצמו. אוטומורפיזם

תרגיל 3.6.4. 1. הראה שכל הומומורפיזם הוא חד-חד-ערכי

2. הראה שהומומורפיזם הוא איזומורפיזם אם ורק אם הוא על

3. הראה שאם יש איזומורפיזם בין שני מבנים, אז יש להם אותה תורה

4. הראה שעבור מרחבים וקטוריים מעל שדה K (כמבנים עבור החתימה החד-סוגית מדוגמא 3.1.5) ועבור חוגים (כמבנים לחתימה של חוגים), מושג ההומורפיזם שהגדרנו מתלכד עם המושג של העתקה לינארית חד-חד-ערכית והומומורפיזם חד-חד ערכי של חוגים (בהתאמה).

תרגיל 3.6.5. תהי $\mathbb{T}$ תורה, ויהי $\mathcal{M}$ מודל של $\mathbb{T}$.

1. הוכיחו שקיימת תורה $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$ (בחתימה שונה) כך שמודל של $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$ זה "אותו דבר" כמו מודל $\mathcal{N}$ של $\mathbb{T}$, ביחד עם הומומורפיזם $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ (כלומר, כל מודל של $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$ ניתן לראות גם כמודל של $\mathbb{T}$, ובנוסף מגדיר באופן טבעי הומומורפיזם כזה, ולהפך, אם $\mathcal{N}$ מודל של $\mathbb{T}$ ונתון הומומורפיזם $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, אז ניתן להפוך את $\mathcal{N}$ באופן טבעי למודל של $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$).

2. הוכיחו את הגרסא הבאה של משפט לוונהיים–סקולם העולה: אם κ עצמה כלשהי, ϕ נוסחא, ו-$\mathcal{M}$ מודל של תורה $\mathbb{T}$ כך ש-$\phi^{\mathcal{M}}$ אינסופית, אז קיים מודל $\mathcal{N}$ של $\mathbb{T}$ כך שעצמת $\phi^{\mathcal{N}}$ היא לפחות κ, ו-$\mathcal{N}$ מכיל את $\mathcal{M}$ בתור תת-מודל.

משפט לוונהיים–סקולם העולה שימושים במיוחד ביחד עם משפט לוונהיים-סקולם היורד, אותו ננסח עכשיו, ונוכיח מאוחר יותר.

משפט 3.6.6 (משפט לוונהיים–סקולם היורד). *אם $\mathcal{M}$ מודל של תורה $\mathbb{T}$, אז יש לו תת-מודל שעצמתו עוצמת השפה לכל היותר*

מסקנה 3.6.7. *אם $\mathbb{T}$ תורה עם מודל אינסופי $\mathcal{M}$, אז יש לה מודל בכל עצמה גדולה או שווה לעצמת $\mathbb{T}$, אותו ניתן לבחור שיכיל או יהיה מוכל (בהתאם לעצמה) ב-$\mathcal{M}$.*

הוכחה. אם κ גדולה מעצמת $\mathcal{M}$, אז נחליף את $\mathbb{T}$ בתורה $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$ המופיעה בתרגיל 3.6.5, ונבחר את $\mathcal{N}$ להיות מודל מעצמה לפחות κ (המכיל את $\mathcal{M}$) כפי שמובטח באותו תרגיל, אחרת נבחר $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. נוסיף לשפה κ קבועים, ול-$\mathbb{T}$ את הטענות שהם שונים, כמו בהוכחת 3.6.1. אז הואיל ועצמת $\mathcal{N}$ היא לפחות κ, ניתן להרחיב את $\mathcal{N}$ למודל של התורה המורחבת. לפי משפט 3.6.6, ל-$\mathcal{N}$ יש תת-מודל מעצמה κ. שוב לפי תרגיל 3.6.5, זהו המודל המבוקש. $\square$

הגדרה 3.6.8. 1. מבנה $\mathcal{M}$ *שקול אלמנטרית* למבנה $\mathcal{N}$ אם יש להם אותה תורה. שקול אלמנטרית

2. *מחלקה אלמנטרית* היא מחלקת כל המודלים של תורה נתונה מחלקה אלמנטרית

3. תורה $\mathbb{T}$ היא *תורה שלמה* אם לכל פסוק ϕ (בחתימה שלה) $\mathbb{T} \models \phi$ או $\mathbb{T} \models \neg\phi$. תורה שלמה

אז הטענות האחרונות אומרות: אם $\mathcal{M}$ מבנה אינסופי אז קיים מבנה שקול אלמנטרית מכל עוצמה גדולה או שווה לעצמת השפה; מבנים איזומורפיים הם שקולים אלמנטרית.

תרגיל 3.6.9. נניח ש-$\mathbb{T}$ תורה שיש לה מודל. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

1. $\mathbb{T}$ שלמה

2. קיים מבנה $\mathcal{M}$ כך ש-$\mathbb{T} \models \mathbf{Th}(\mathcal{M})$

3. כל שני מודלים של $\mathbb{T}$ שקולים אלמנטרית

4. $\mathbb{T}$ מקסימלית בין התורות העקביות

מסקנה 3.6.10. *נניח K שדה אינסופי. אז כל שני מרחבים וקטוריים לא טריוויאליים מעליו שקולים אלמנטרית (בשפה החד-סוגית עם סימני פונקציה עבור איברי K מדוגמא 3.1.5).*

הוכחה. יהיו V, U מרחבים לא טריוויאליים. בפרט, עוצמתם לפחות עצמת K, ולכן קיימים להם מבנים שקולים אלמנטרית V', U', בהתאמה, שעצמתם κ שווה, וגדולה מעצמת K. אולם אז המימד של כל אחד מהם הוא κ, ולכן הם איזומורפיים, והתורות שלהם שוות. $\square$

ממשפטי לוונהיים-סקולם נובע שלתורה (עם מודלים אינסופיים) לא יכול להיות רק מודל אחד, עד כדי איזומורפיזם. אך כמו שראינו במסקנה האחרונה, יתכן שיהיה לה רק מודל אחד מעוצמה נתונה κ. תורה כזו נקראת *תורה κ-קטגורית*. אותו טיעון כמו בהוכחת המסקנה מראה: תורה κ-קטגורית

טענה 3.6.11. *תורה $\mathbb{T}$ שהיא κ-קטגורית בעצמה $|\mathbb{T}| \geq \kappa$, ואין לה מודלים סופיים היא שלמה*

בפרט, אנחנו מקבלים הוכחה חדשה של מסקנה 3.4.16: התורה של קבוצות אינסופיות (בשפת השוויון) היא שלמה. אכן, היא κ-קטגורית לכל κ אינסופית.

3.6.12 שדות סגורים אלגברית

מונום
מעלה
פולינום

כזכור (דוגמא 3.1.3), החתימה של חוגים מורכבת מסוג אחד, סימני פונקציה דו-מקומיים $+, -$ ו-$\cdot$, ושני סימני קבועים 0 ו-1. ניתן לרשום בקלות את אקסיומות השדה בחתימה זו, ונסמן תורה זו ב-$\mathbb{F}$. בגלל חוק הקיבוץ של הכפל, אין צורך לרשום סוגריים בשמות עצם שנוצרים משימוש חוזר ב-$\cdot$. בפרט, אם $x_1,\dots,x_n$ הם משתנים, שם עצם שנוצר מהם על-ידי שימוש חוזר בסימן הכפל נקרא *מונום* (מעל $x_1,\dots,x_n$), ועד כדי שקילות ניתן לרשום אותו כ-$x_1^{i_1}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}$, כאשר $i_k\ge 0$. בתור קיצור, נרשום מונום זה כ-$\bar{x}^{\bar{i}}$, כאשר $\bar{i}=(i_1,\dots,i_n)$. סכום ה-i_k נקרא *המעלה* של המונום. בגלל חוקי השדה, כל שם עצם מעל $\bar{x}$ שקול לסכום של מונומים מעל $\bar{x}$, כלומר ל*פולינום* על $\bar{x}$ (עם מקדמים שלמים). המעלה של הפולינום היא מקסימום מעלות המונומים בו. אם m מספר טבעי, קיים "פולינום כללי" ממעלה (לכל היותר) m על $\bar{x}$, כלומר פולינום $p(\bar{x},\bar{y})$ עם התכונה שלכל הצבה $\bar{a}$ במשתנים $\bar{y}$ מתוך שדה נתון K מתקבל פולינום $p(\bar{x},\bar{a})$ ממעלה לכל היותר m על $\bar{x}$ עם מקדמים ב-K, וכל פולינום כזה מתקבל על-ידי הצבה מתאימה (למשל, אם $n=1$, אז $p(x,\bar{y})=y_mx^m+\dots+y_0$).

שורש
שדה סגור אלגברית

אם $p(x)$ הוא פולינום עם מקדמים בשדה K, *שורש* של p הוא איבר $a\in K$ המקיים $p(a)=0$. שדה K הוא *שדה סגור אלגברית* אם לכל פולינום במשתנה אחד עם מקדמים מ-K ממעלה גדולה מ-0 יש שורש ב-K. נזכיר מספר עובדות נוספות:

עובדה 3.6.13.

מציין

1. *אם K שדה, ו-m מספר טבעי, נסמן ב-$\underline{m}$ את האיבר של K המתקבל כסכום של m עותקים של 1. אם קיים $m>0$ כך ש-$\underline{m}=0$, אז המספר הטבעי הקטן ביותר מסוג זה נקרא המציין של K, אחרת המציין הוא 0. אם המציין חיובי, הוא בהכרח ראשוני. לכל ראשוני p קיים שדה $\mathbb{F}_p$ עם p איברים, הניתן לתיאור כקבוצת הטבעיים הקטנים מ-p, עם חיבור וכפל מודולו p. כל שדה ממציין p מכיל את $\mathbb{F}_p$, וכל שדה ממציין 0 מכיל את $\mathbb{Q}$.*

סגור אלגברי

2. *כל שדה K ניתן לשיכון בשדה סגור אלגברית (כלומר, יש הומומורפיזם מ-K לשדה סגור אלגברית). קיים שדה סגור אלגברית מינימלי K^a המכיל את K (במובן שאין לו תת-שדה ממש סגור אלגברית המכיל את K), וכל שניים כאלה הם איזומורפיים, על-ידי איזומורפיזם שהוא הזהות על K. כל שדה כזה נקרא סגור אלגברי של K.*

3. *השדה $\mathbb{C}$ של המספרים המרוכבים הוא סגור אלגברית (הוא סגור אלגברי של $\mathbb{R}$)*

פונקציה רציונלית

4. *אם A קבוצה של משתנים (לא בהכרח סופית), ו-K שדה,* פונקציה רציונלית *על A מעל K היא מנה $\frac{p(t)}{q(t)}$ של שני פולינומים על A מעל K, כאשר q אינו פולינום האפס. הקבוצה $K(A)$ של כל הפונקציות הרציונליות על A מעל K, ביחד עם הפעולות הרגילות של כפל וחיבור של פונקציות כאלה, היא שדה שמרחיב את K. כל שדה סגור אלגברית איזומורפי לסגור האלגברי של שדה מהצורה $K(A)$, כאשר K הוא $\mathbb{F}_p$ או $\mathbb{Q}$, בהתאם למציין. הסגור האלגברי של $K(A)$ איזומורפי לסגור האלגברי של $K(B)$ אם ורק אם העוצמות של A ושל B שוות. לכן, לכל שדה סגור אלגברית L העצמה של קבוצה כזו*

מוגדרת היטב, ונקראת דרגת הטרנסנדנטיות *של L (ניתן להשוות את הקבוצה A לבסיס של מרחב וקטורי, ואת דרגת הטרנסנדנטיות למימד).* דרגת הטרנסנדנטיות

5. *סגור אלגברי של $\mathbb{F}_p$ הוא איחוד עולה $\mathbb{F}_p^a = \bigcup_i K_i$, כאשר כל K_i הוא שדה סופי. לכן, אם $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{F}_p^a$, אז קיים תת-שדה סופי K המכיל את כל ה-b_i.*

התורה של שדות סגורים אלגברית $\mathbb{ACF}$

התורה של שדות סגורים אלגברית, $\mathbb{ACF}$, היא התורה בשפת החוגים שמרחיבה את תורת השדות על ידי האקסיומות שאומרות שהשדה סגור אלגברית, כלומר האקסיומות $\forall a_1, \dots, a_n \exists x (x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0)$, לכל $n > 0$. עבור כל שלם חיובי p, התורה $\mathbb{ACF}_p$ מתקבלת על-ידי הוספת האקסיומה $\underline{p} = 0$, בעוד ש-$\mathbb{ACF}_0$ מתקבלת על-ידי הוספת השלילה של כל הפסוקים הללו. לכן, עבור p ראשוני או 0, המודלים של $\mathbb{ACF}_p$ הם בדיוק השדות הסגורים אלגברית ממציין p. $\mathbb{ACF}_p$

תרגיל 3.6.14. הראו שסגור אלגברי של שדה אינסופי K הוא מאותה עצמה כמו K (רמז: משפט לוונהיים–סקולם). הסיקו שאם L שדה סגור אלגברית שאינו בן-מניה, אז דרגת הטרנסנדנטיות של L שווה לעצמת L.

מסקנה 3.6.15. *לכל p ראשוני או 0, התורה $\mathbb{ACF}_p$ היא שלמה*

הוכחה. לפי תרגיל 3.6.14, אם L_1 ו-L_2 הם שני מודלים מאותה עצמה $\kappa > \aleph_0$, אז דרגת הטרנסנדנטיות של שניהם היא κ. לכן, לפי עובדה 3.6.13, L_1 ו-L_2 הם איזומורפיים. הראינו ש-$\mathbb{ACF}_p$ היא κ-קטגורית לכל עצמה κ שאינה בת-מניה, ולכן היא שלמה לפי מסקנה 3.6.11. □

מסקנה 3.6.16 ("עקרון לפשץ"). *יהי ϕ פסוק בשפה של שדות. אז הטענות הבאות שקולות:*

1. *ϕ נכון ב-$\mathbb{C}$*
2. *ϕ נכון בכל שדה סגור אלגברית ממציין 0*
3. *ϕ נכון בכל שדה סגור אלגברית ממציין $p > 0$ פרט למספר סופי של ראשוניים p*
4. *ϕ נכון עבור שדה סגור אלגברית כלשהו ממציין $p > 0$ עבור אינסוף ראשוניים p*

הוכחה. השקילות של שני הסעיפים הראשונים היא פשוט חזרה על המסקנה האחרונה (בתוספת העובדה ש-$\mathbb{C}$ סגור אלגברית). נניח ש-ϕ נכון בכל שדה סגור אלגברית ממציין 0. לפי מסקנה 3.5.4, ϕ נובע מתת-קבוצה סופית Γ_0 של $\mathbb{ACF}_0$. בפרט, Γ_0 מכילה מספר סופי של פסוקים מהצורה $\underline{p} \neq 0$. לכן ϕ נכון בכל שדה סגור אלגברית מכל מציין אחר.

מאידך, אם ϕ נובע מ-$\mathbb{ACF}_p$ עבור אינסוף ראשוניים p, אך אינו נכון ב-$\mathbb{C}$, אז $\neg\phi$ נכון ב-$\mathbb{C}$, ולכן, לפי הטיעון הקודם, נובע מ-$\mathbb{ACF}_p$ עבור כמעט כל p, סתירה. □

דוגמא 3.6.17. יהיו $p_1, \dots, p_n$ פולינומים ב-n משתנים מעל $\mathbb{C}$. פולינומים אלה מגדירים העתקה $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, על-ידי $F(a_1, \dots, a_n) = (p_1(\bar{a}), \dots, p_n(\bar{a}))$. נוכיח את הטענה: אם F חד-חד-ערכית, אז F על.

נשים לב, ראשית, שטענה זו ניתנת לביטוי על ידי פסוק בשפת השדות: אם m המעלה המקסימלית של הפולינומים p_i, ו-$p(\bar{x}, \bar{y})$ הוא הפולינום הכללי ממעלה m, אז קיימים $\bar{y}_i \in \mathbb{C}$ כך ש-$p_i(\bar{x}) = p(\bar{x}, \bar{y}_i)$. לכן הטענה נתונה על-ידי הפסוק ϕ:

$$\forall \bar{y}_1 \dots \bar{y}_n ((\forall \bar{x} \bar{z} (\bigwedge_{i=1}^{n} p(\bar{x}, \bar{y}_i) = p(\bar{z}, \bar{y}_i)) \to \bar{x} = \bar{z}) \to$$

$$\forall \bar{x} \exists \bar{z} (\bigwedge_{i=1}^{n} p(\bar{z}, \bar{y}_i) = x_i))$$

לפי המסקנה האחרונה, כדי להוכיח שפסוק זה נכון ב-$\mathbb{C}$, מספיק להוכיח שעבור כל ראשוני $p > 0$ הוא נכון באיזשהו שדה סגור אלגברית ממציין p. נשים לב, ראשית, ש-ϕ נכון בכל שדה סופי K: עבור שדה כזה, K^n סופית גם כן, וכל העתקה חד-חד-ערכית מקבוצה סופית לעצמה היא גם על. לכן, בהנתן ראשוני p, הפסוק תקף בכל הרחבה סופית של $\mathbb{F}_p$. אולם אז הוא נכון גם בסגור אלגברי L של $\mathbb{F}_p$: בהנתן פונקציה פולינומית F מעל L, ואיבר $\bar{x} \in L^n$, קיימת, לפי עובדה 3.6.13, הרחבה *סופית* K של $\mathbb{F}_p$, אליה שייכים מקדמי F, וגם $\bar{x}$. לכן, לפי המקרה הסופי, $\bar{x}$ שייך ל-$F(K^n)$, ובפרט ל-$F(L^n)$.

3.6.18 אנליזה לא סטנדרטית

השימוש של משפט לוונהיים–סקולם עבור מבנים שמרחיבים את השדה הממשי מאפשר לנסח מחדש ולהוכיח טענות באנליזה, בצורה שדומה לניסוח המקורי שלה, על ידי ניוטון ולייבניץ. השימוש הזה, שנקרא *אנליזה לא סטנדרטית*, הוצע על-ידי אברהם רובינסון ב-[8].

נתבונן במבנה $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$. לפי משפט לוונהיים–סקולם, קיים מבנה $\mathcal{R}$ המרחיב מבנה זה, ושקול לו אלמנטרית. כל מבנה כזה נקרא הרחבה לא סטנדרטית של $\mathbb{R}$. אם ϕ טענה שאנו מנסים להוכיח לגבי $\mathbb{R}$, לפי השקילות האלמנטרית, מספיק להוכיח שהיא נכונה ב-$\mathcal{R}$. אותו עקרון תקף גם כאשר נתונה לנו פונקציה ממשית f, או יחס P על הממשיים, והוספנו סימני יחס ופונקציה כנדרש.

איך נראה איבר a ב-$\mathcal{R}$ אשר אינו ב-$\mathbb{R}$? ראינו כבר ש-$\mathbb{R}$ הוא שדה סדור (כלומר, הסדר על הממשיים גדיר על ידי נוסחא), ולכן גם $\mathcal{R}$ כזה, ובפרט, a או $-a$ הוא חיובי, ונניח שזה a. נניח שקיים מספר טבעי n, כך ש-$\frac{1}{n} < a < n$. אז הקבוצה $\{r \in \mathbb{R} \mid 0 < r < a\}$ היא חסומה ולא ריקה, ולכן יש לה חסם עליון $\mathbf{s}(a)$. הואיל ו-$\mathbb{R} \subseteq \mathcal{R}$, החסם העליון $\mathbf{s}(a)$ שייך גם ל-$\mathcal{R}$, ונתבונן ב-$\epsilon = a - \mathbf{s}(a)$. אז לפי הגדרה, $\epsilon > 0$ (כי $a \notin \mathbb{R}$), אבל $\epsilon < r$ לכל $0 < r \in \mathbb{R}$, כלומר ϵ הוא "אינפיניטסימל", איבר חיובי הקטן מכל ממשי סטנדרטי. את ϵ בנינו מתוך הנחה על a, אבל אם $a < \frac{1}{n}$ לכל n, אז הוא עצמו אינפיניטסימל, בעוד שאם $a > n$ לכל n, נוכל לקחת $\epsilon = \frac{1}{a}$.

בכל מקרה, הראינו שכל הרחבה לא סטנדרטית מכילה אינפינטיסימלים. אם $\mathcal{R}^b$, קבוצת *האיברים החסומים*, היא קבוצת האיברים a המקיימים $-n < a < n$ עבור איזשהו n טבעי, הגדרנו העתקה $a \mapsto \mathbf{s}(a)$ המתאימה לכל $a \in \mathcal{R}^b$ איבר ממשי (ב-$\mathbb{R}$) הקרוב לו ביותר (עבור a שלילי, נגדיר $\mathbf{s}(a) = -\mathbf{s}(-a)$). האיבר $\mathbf{s}(a)$ נקרא *החלק הסטנדרטי* של a.

האיברים החסומים

החלק הסטנדרטי

תרגיל 3.6.19. הוכיחו ש-$\mathcal{R}^b$ היא אלגברה מעל $\mathbb{R}$, וש-$a \mapsto \mathbf{s}(a)$ היא העתקה של אלגברות מעל $\mathbb{R}$ מ-$\mathcal{R}^b$ ל-$\mathbb{R}$. הראה ש-$\mathbf{s}(a) = 0$ אם ורק אם a הוא אינפינטיסימל (כלומר, $|a| < \frac{1}{n}$ לכל n טבעי). בפרט, קבוצת האינפנטסימלים היא אידיאל מקסימלי ב-$\mathcal{R}^b$.

עבור $a, b \in \mathcal{R}$, נסמן $a \sim b$ אם $a - b \in \mathcal{R}^b$, ו-$\mathbf{s}(a - b) = 0$ (אם $a, b \in \mathcal{R}^b$, זה אומר $\mathbf{s}(a) = \mathbf{s}(b)$ לפי התרגיל האחרון).

כאמור, כל הדיון ממשיך להיות נכון אם מוסיפים לשפה סימני פונקציה ויחס נוספים. למעשה, אפשר להוסיף מראש סימני יחס ופונקציה עבור *כל* היחסים והפונקציות שיש ב-$\mathbb{R}$. אז לכל פונקציה f או יחס P על $\mathbb{R}$ קיימים פונקציה ${}^*f$ או יחס ${}^*P$ מתאימים ב-$\mathcal{R}$. נשים לב ש-${}^*f$ מרחיבה את f, ו-${}^*P$ מכילה את P. למשל, לקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ ב-$\mathbb{R}$ מתאימה תת-קבוצה ${}^*\mathbb{Z}$ של $\mathcal{R}$ המכילה את כל השלמים. הואיל ו-$\mathbb{Z}$ היא תת-חוג של $\mathbb{R}$ (תכונה גדירה של $\mathbb{Z}$), הקבוצה ${}^*\mathbb{Z}$ אף היא תת-חוג של $\mathcal{R}$.

מה מרוויחים מכל המעבר הזה? מסתבר שתכונות טופולוגיות ואנליטיות ב-$\mathbb{R}$ ניתנות לניסוח אינטואיטיבי בעזרת אינפניטסימלים ב-$\mathcal{R}$. למשל:

טענה 3.6.20. *תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. אז הגבול של f ב-a הוא L אם ורק אם ${}^*f(b) \sim L$ לכל $a \sim b$ שונה מ-a. בפרט, f רציפה ב-a אם ורק אם ${}^*f(b) \sim f(a)$ לכל $b \sim a$.*

הוכחה. לכל n טבעי, תהי $\phi_n(r)$ הנוסחא הנתונה על-ידי $\forall x(0 < |x - a| < r \to |f(x) - L| < \frac{1}{n})$. נניח שהגבול של f ב-a הוא L, ויהי $b \sim a$ שונה מ-a. אז לכל n טבעי קיים ממשי חיובי r_n כך שהפסוק $\phi_n(r_n)$ תקף ב-$\mathbb{R}$. לכן הוא תקף גם ב-$\mathcal{R}$. בפרט, עבור $x = b$, אנו מקבלים ש-$|f(b) - L| < \frac{1}{n}$ לכל n טבעי, כלומר $f(b) \sim L$.

בכיוון השני, בהנתן n טבעי, מתקיים $\exists r(r > 0 \wedge \phi_n(r))$ ב-$\mathcal{R}$ (נבחר $r > 0$ כל אינפינטיסימל), ולכן ב-$\mathbb{R}$. □

נזכיר, ש*קבוצה פתוחה* ב-$\mathbb{R}$ היא תת-קבוצה $P \subseteq \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in P$ קיים קטע פתוח המכיל את a ומוכל ב-P. *קבוצה סגורה* היא קבוצה שהמשלימה שלה פתוחה. *קבוצה קומפקטית* היא קבוצה סגורה וחסומה.

קבוצה פתוחה

קבוצה סגורה

קבוצה קומפקטית

תרגיל 3.6.21. תהי P תת-קבוצה של $\mathbb{R}^n$. הוכיחו:

1. P פתוחה אם ורק אם לכל $a \in P$ ולכל $b \sim a$ מתקיים $b \in {}^*P$.
2. P סגורה אם ורק אם לכל $a \in {}^*P \cap (\mathcal{R}^b)^n$, גם $\mathbf{s}(a) \in P$
3. P קומפקטית אם ורק אם ${}^*P \subseteq (\mathcal{R}^b)^n$, ו-$\mathbf{s}(a) \in P$ לכל $a \in {}^*P$.

בפרט, אם $a \le 0$ ב-$\mathcal{R}$, אז גם $\mathbf{s}(a) \le 0$ (עבור $a \in \mathcal{R}^b$), אבל לא בהכרח לגבי אי-שוויון ממש.

תרגיל 3.6.22. נניח ש-P תת-קבוצה של $\mathbb{R}^n$. הוכיחו ש-$P = {}^*P$ אם ורק אם P סופית. הראה שב-${}^*\mathbb{N}$ קיים איבר n גדול יותר מכל המספרים הטבעיים, וכל האיברים החדשים ב-${}^*\mathbb{N}$ הם כאלה.

איך אפשר להשתמש בטענות אלה כדי להוכיח טענות על הממשיים? נראה למשל בדוגמא הבאה:

טענה 3.6.23 (משפט ערך הביניים). *אם f פונקציה רציפה על הקטע הסגור $[0,1]$, ומתקיים $f(0) \le 0 \le f(1)$, אז קיים $c \in [0,1]$ כך ש-$f(c) = 0$.*

הוכחה. ב-$\mathbb{R}$ נכון הפסוק $\forall n \in \mathbb{N} \exists i < n(f(\frac{i}{n}) \le 0 \le f(\frac{i+1}{n}))$ (באינדוקציה על n). לכן הוא נכון גם ב-$\mathcal{R}$, ובפרט, עבור $n \in {}^*\mathbb{N}$ גדול מכל מספר טבעי, מקבלים $i \in {}^*\mathbb{N}$ כך שעבור $a = \frac{i}{n}$ ו-$b = \frac{i+1}{n}$ מתקיים ${}^*f(a) \le 0 \le {}^*f(b)$. נשים לב ש-$b - a = \frac{1}{n}$, ולכן $a \sim b$, והיות ש-f רציפה, ${}^*f(a) \sim {}^*f(b)$. כלומר, $0 \ge \mathbf{s}({}^*f(a)) = \mathbf{s}({}^*f(b)) \ge 0$, ומכאן $\mathbf{s}({}^*f(a)) = f(\mathbf{s}(a)) = 0$, ו-$c = \mathbf{s}(a)$ הוא הממשי המבוקש. □

3.7 מבנים הנוצרים מקבועים

משפט הקומפקטיות, והטכניקה של על-מכפלות, מאפשרים לנו לייצר מבנים "גדולים" מתוך מבנים קטנים יותר. בסעיף זה נראה איך לייצר מודלים "קטנים". בפרט, נוכיח את משפט לוונהיים–סקולם היורד.

הרעיון הבסיסי הוא להכליל את הבניה של "תת-מבנה שנוצר על-ידי קבוצה A", או "מבנה חופשי שנוצר על-ידי A". נראה שהבנייה תמיד אפשרית, אך לא תמיד יוצרת מודל של התורה בה אנו מתעניינים. נתבונן במספר דוגמאות:

דוגמא 3.7.1. תהי $\mathbb{T}$ התורה של מרחבים וקטוריים מעל שדה קבוע K. בשפה יש סימן קבוע אחד, 0, וכל שם-עצם ללא משתנים חפשיים מתפרש כ-0 בכל מודל של $\mathbb{T}$. לכן, אם V מבנה (כלומר מרחב וקטורי מעל K), אז קבוצת הפירושים של שמות העצם ב-V היא מרחב ה-0, שהוא תת-מודל של V. מאידך, אם $\mathbb{T}$ היא התורה של מרחבים וקטוריים לא טריוויאליים, אז זהו תת-מבנה שאינו תת-מודל.

באופן יותר כללי, אם $A \subseteq V$ קבוצה כלשהי, קבוצת האיברים המתקבלים מהצבות איברי A בשמות העצם היא תת-מרחב, המרחב הנוצר על-ידי A.

דוגמא 3.7.2. אם K הוא שדה (כמודל לתורת השדות), אז קבוצת האיברים ב-K המתקבלים מפירוש שמות העצם היא $\mathbb{Z}$ אם המציין של K הוא 0, ו-$\mathbb{F}_p$ אם המציין הוא $p > 0$. זהו שדה (כלומר תת-מודל) במקרה השני, אך לא במקרה הראשון. נוכל לתקן זאת אם נוסיף חילוק לשפה: אז נקבל את $\mathbb{Q}$ במקרה הראשון, ובאופן כללי, אם A תת-קבוצה כלשהי של K, נקבל את תת-השדה של K שנוצר על-ידי A. אבל אם $\mathbb{T}$ הייתה התורה של שדות סגורים אלגברית (ו-K שדה סגור אלגברית), שדה זה לא יהיה סגור אלגברית.

נגדיר כעת את המושגים שהופיעו בדוגמאות באופן כללי.

הגדרה 3.7.3. אם $\mathcal{M}$ מבנה, ו-A קבוצה כלשהי של איברים ב-$\mathcal{M}$ (מסוגים שונים), *תת-המבנה הנוצר על-ידי* A הוא תת-הקבוצה

תת-המבנה הנוצר על-ידי A

$$\langle A\rangle_{\mathcal{M}} = \{t^{\mathcal{M}}(\omega) \mid \text{שם עצם, } \omega \text{ השמה ל-} \mathscr{V}(t) \text{ עם ערכים ב-} A \text{ } t\}$$

של $\mathcal{M}$.

תרגיל 3.7.4. אם $A \subseteq \mathcal{M}$, הוכיחו ש-$\langle A\rangle_{\mathcal{M}}$ היא אכן תת-מבנה של $\mathcal{M}$, שמוכל בכל תת-מבנה אחר המכיל את A.

כפי שכבר ראינו, אם $\mathcal{M}$ מודל של תורה $\mathbb{T}$, לא כל תת-מבנה של $\mathcal{M}$ הוא תת-מודל, ובפרט $\langle A\rangle$ לא חייב להיות כזה. האם ניתן לאפיין את התורות עבורן כל תת-מבנה של מודל הוא תת-מודל?

תרגיל 3.7.5. *פסוק כולל* הוא פסוק מהצורה $\forall\bar{x}\phi(\bar{x})$, כאשר ϕ נוסחא ללא כמתים (כלומר, צירוף בוליאני של נוסחאות בסיסיות). *תורה כוללת* היא קבוצה של פסוקים כוללים. בהנתן תורה $\mathbb{T}$, נסמן ב-$\mathbb{T}_\forall$ את קבוצת כל הפסוקים הכוללים ϕ שנובעים לוגית מ-$\mathbb{T}$ (כלומר, $\mathbb{T} \models \phi$).

פסוק כולל

תורה כוללת

$\mathbb{T}_\forall$

1. הראה שאם $\mathcal{M}$ מודל של $\mathbb{T}_\forall$, ו-$\mathcal{N}$ תת-מבנה של $\mathcal{M}$, אז $\mathcal{N}$ מודל של $\mathbb{T}_\forall$.

2. אם $\mathcal{M}$ מודל של $\mathbb{T}_\forall$, נרחיב את החתימה על-ידי הוספת קבוע c_m לכל $m \in \mathcal{M}$ (מהסוג המתאים). נרחיב את התורה $\mathbb{T}$ לתורה $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$ בחתימה החדשה, על-ידי הוספת הפסוק $\phi(c_{m_1},\dots,c_{m_k})$ ל-$\mathbb{T}$ עבור כל נוסחא חסרת כמתים ϕ וכל $(m_1,\dots,m_k)\in\phi^{\mathcal{M}}$. הוכיחו (בעזרת משפט הקומפקטיות) ש-$\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$ ספיקה.

3. הסק מהסעיף הקודם שכל מודל של $\mathbb{T}_\forall$ הוא תת-מבנה של מודל של $\mathbb{T}$. בפרט מחלקת המבנים שהם תתי-מבנים של מודלים של $\mathbb{T}$ היא אלמנטרית.

4. הסק שתורה $\mathbb{T}$ מקיימת שכל תת-מבנה של מודל הוא תת-מודל אם ורק אם היא שקולה לתורה כוללת

כפי שראינו בדוגמאות ובתרגיל, המכשול להיותו של $\langle A\rangle$ תת-מודל הוא האפשרות ש-$\mathbb{T}$ אומרת שקיים איבר המקיים נוסחא כלשהי ϕ, אבל אין איבר כזה מהצורה $t(\bar{a})$ עבור $\bar{a} \in A$. במונחים מדויקים, זוהי תורה שאין בה פונקציות סקולם, במובן הבא:

הגדרה 3.7.6. נאמר שבתורה $\mathbb{T}$ יש לנוסחא $\phi(x,y)$ *פונקצית סקולם* (מפורשת) עבור המשתנים x אם קיים שם עצם $t(x)$, כך שהפסוק $\forall x((\exists y\phi(x,y)) \to \phi(x,t(x)))$ נובע מ-$\mathbb{T}$. נאמר של-$\mathbb{T}$ יש פונקציות סקולם (מפורשות) אם לכל נוסחא חסרת כמתים ולכל קבוצה של משתנים חפשיים שלה יש פונקציית סקולם.

פונקצית סקולם

במלים אחרות, אם, לטענת $\mathbb{T}$, קיים איבר y המקיים את $\phi(a,y)$, אז מובטח ש-$y{=}t(a)$ הוא איבר כזה. תנאי זה הוא חזק מאוד, ובפרט, ממנו נובעת התוצאה שאנו מחפשים:

טענה 3.7.7. *אם ב-$\mathbb{T}$ יש פונקציות סקולם מפורשות, אז לכל נוסחא $\psi(x)$ קיימת נוסחא $\psi'(x)$ ללא כמתים, כך ש-$\mathbb{T}_\forall \models \forall x(\psi'(x) \leftrightarrow \psi(x))$. בפרט, כל תת-מבנה של מודל $\mathcal{M}$ של $\mathbb{T}$ הוא תת-מודל.*

הוכחה. נשים לב, ראשית, שבהנתן נוסחא חסרת כמתים $\phi(x,y)$ ופונקציית סקולם $t(x)$ עבורה, הפסוק שאומר זאת שייך ל-$\mathbb{T}_\forall$, כלומר, גם ב-$\mathbb{T}_\forall$ יש פונקציות סקולם.

כעת, נוכיח את הטענה באינדוקציה על בניית הנוסחא. המקרה הלא טריוויאלי היחיד הוא כש-$\psi(x) = \exists y\phi(x,y)$. לפי הנחת האינדוקציה, ϕ שקולה ל-ϕ' חסרת כמתים, ולכן ψ שקולה ל-$\exists y\phi'(x,y)$. ל-ϕ' קיימת פונקציית סקולם t, ולכן ψ שקולה (ביחס ל-$\mathbb{T}_\forall$) ל-$\phi'(x,t(x))$, נוסחה חסרת כמתים.

החלק השני של הטענה נובע, כי אם $\phi \in \mathbb{T}$, אז לפי החלק הראשון, ϕ שקול ביחס ל-$\mathbb{T}_\forall$ לפסוק חסר כמתים. לכן $\mathbb{T}$ שקולה ל-$\mathbb{T}_\forall$. לכן לפי תרגיל 3.7.5, כל תת-מבנה הוא תת-מודל. $\square$

הערה 3.7.8. בהגדרה 3.7.6 התנאי הוא שלכל הנוסחאות *חסרות הכמתים* יש פונקציות סקולם מפורשות. בדיעבד, אנחנו יודעים שתחת הנחה זו כל נוסחא שקולה לנוסחא חסרת כמתים, ולכן יש פונקציות סקולם לכל הנוסחאות. אם נניח מראש שב-$\mathbb{T}$ יש פונקציות סקולם *לכל הנוסחאות*, אפשר להוכיח את החלק השני של המשפט ישירות באופן הבא.

בהנתן תת-מבנה $\mathcal{M}$ של מודל $\mathcal{N}$ של $\mathbb{T}$, נוכיח באינדוקציה את הטענה הבאה: לכל נוסחא ϕ, מתקיים $\phi^{\mathcal{M}} = \phi^{\mathcal{N}} \cap \mathcal{M}$. עבור נוסחאות בסיסיות, זו ההגדרה, ולצירופים בוליאניים זה קל. נניח ש-$\phi(x) = \exists y\psi(x,y)$. ראשית, אם $m \in \phi^{\mathcal{M}}$, אז קיים $m' \in \mathcal{M}$ כך ש-$(m,m') \in \psi^{\mathcal{M}}$. לפי הנחת האינדוקציה, $(m,m') \in \psi^{\mathcal{N}}$, ולכן $m \in \phi^{\mathcal{N}}$ (בכיוון הזה לא השתמשנו בפונקציות סקולם).

נניח כעת ש-$m \in \phi^{\mathcal{N}} \cap \mathcal{M}$. אז אם t היא פונקציית סקולם ל-ψ, אנו מקבלים ש-$(m,t(m)) \in \psi^{\mathcal{N}}$. אולם, הואיל ו-$\mathcal{M}$ תת-מבנה, $t(m) \in \mathcal{M}$. לכן, $(m,t(m)) \in \psi^{\mathcal{N}} \cap \mathcal{M}$, ולפי הנחת האינדוקציה, $(m,t(m)) \in \psi^{\mathcal{M}}$. לכן $m \in \phi^{\mathcal{M}}$.

המצב המתואר בהערה האחרונה מבהיר שמושג התת-מודל כפי שהוגדר הוא פחות שימושי, באופן כללי, מהתנאי החזק יותר של תת-מבנה אלמנטרי, כפי שנתון בהגדרה הבאה.

הגדרה 3.7.9. תת-מבנה $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ המקיים $\phi^{\mathcal{M}} = \phi^{\mathcal{N}} \cap \mathcal{M}$ לכל נוסחא ϕ נקרא *תת-מבנה אלמנטרי*. המבנה $\mathcal{N}$ נקרא *הרחבה אלמנטרית* של $\mathcal{M}$ במקרה זה.

תת-מבנה אלמנטרי

הרחבה אלמנטרית

דוגמא 3.7.10. אם $\mathcal{N} = \mathbb{C}$ ו-$\mathcal{M} = \mathbb{Q}$ (כמבנים לשפת החוגים), נתבונן בנוסחא $\phi(x)$ הנתונה על-ידי $\exists y(y^2 = x)$. אז $\phi^{\mathbb{C}}$ היא קבוצת כל המרוכבים שיש להם שורש, כלומר $\mathbb{C}$, ולכן $\phi^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. מאידך, $\phi^{\mathbb{Q}}$ היא קבוצת הרציונליים שיש להם שורש רציונלי. בפרט, היא מוכלת ממש ב-$\mathbb{Q}$, ו-$\mathbb{Q}$ אינו תת-מבנה אלמנטרי.

אם נוסיף לשפה סימן פונקציה t, ולתורת השדות את הפסוק $\forall x(t(x)^2 = x)$ (כלומר, t בוחרת שורש ריבועי של x), אז t היא פונקציית סקולם עבור $x = y^2$, וכעת, אם $K \subseteq \mathbb{C}$ הוא תת-מבנה, אז $\phi^K = \phi^{\mathbb{C}} \cap K$. נשים לב שלא כל תת-שדה הוא תת-מבנה בשפה החדשה: K הוא תת-מבנה אם ורק אם לכל $a \in K$, השורשים הריבועיים של a גם ב-K.

אם $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ הוא תת-מבנה, אז הוא תת-מודל (לפי המקרה הפרטי של התנאי עבור פסוקים), אך התנאי חזק יותר.

דוגמא 3.7.11. נתבונן בשלמים $\mathbb{Z}$ כחבורה אבלית (כלומר מבנה לחתימה $(+,0)$). אז קבוצת הזוגיים $2\mathbb{Z}$ היא תת-מודל של $\mathbb{Z}$ (שכן היא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}$), אבל אינה תת-מודל אלמנטרי: אם $\phi(x)$ היא הנוסחא $\exists y(y+y=x)$, אז $2 \in \phi^{\mathbb{Z}}$, ו-$2 \in 2\mathbb{Z}$, אבל $2 \notin \phi^{2\mathbb{Z}}$.

בהנתן תורה עם פונקציות סקולם, הוכחנו לכן את הטענה החזקה יותר:

מסקנה 3.7.12. *אם ב-$\mathbb{T}$ יש פונקציות סקולם מפורשות, אז כל תת-מבנה של מודל $\mathcal{M}$ של $\mathbb{T}$ הוא תת-מודל אלמנטרי*

כאמור, ההנחה שב-$\mathbb{T}$ יש פונקציות סקולם היא חזקה מאד, ולא מתקיים כמעט אף פעם בדוגמאות טבעיות. איך ניתן להשתמש במה שלמדנו על פונקציות סקולם עבור תורה כללית?

טענה 3.7.13. *בהנתן חתימה Σ, קיימת הרחבה שלה לחתימה Σ^s, ותורה $\mathbb{T}_\Sigma$ בחתימה המורחבת, כך ש:*

1. *העוצמה של שפת Σ^s שווה לזו של Σ*
2. *כל מבנה $\mathcal{M}$ לחתימה המקורית ניתן להרחיב למודל $\mathcal{M}^s$ של $\mathbb{T}_\Sigma$ (להרחיב במובן של לתת פירוש לסימנים החדשים על המבנה המקורי)*
3. *בכל מודל של $\mathbb{T}_\Sigma$ יש פונקציות סקולם מפורשות*

הוכחה. לכל נוסחא חסרת כמתים $\phi(x,y)$ בשפה של Σ, נרחיב את החתימה על ידי סימן פונקציה $F_{\phi,x}(x)$. תהי Σ_1 החתימה המתקבלת, ותהי $\mathbb{T}(\Sigma_1)$ התורה בשפה זו שאומרת שכל F_ϕ פונקציית סקולם עבור ϕ: $\forall x(\exists y(\phi(x,y)) \rightarrow \phi(x, F_{\phi,x}(x)))$. נשים לב שעוצמות השפה של Σ ושל Σ_1 שוות.

בכל מודל של $\mathbb{T}(\Sigma_1)$ יש פונקציות סקולם לכל נוסחא ב-Σ. כל מבנה $\mathcal{M}$ עבור Σ ניתן להרחיב למודל $\mathcal{M}_1$ של $\mathbb{T}(\Sigma_1)$, על ידי כך שמפרשים את F_ϕ כפונקציה שמתאימה לכל $m \in \exists y\phi(x,y)^{\mathcal{M}}$ את אחד ה-y-המקיימים $(m,y) \in \phi^{\mathcal{M}}$, ולכל m אחר ערך כלשהו.

נגדיר $\Sigma_{n+1} = (\Sigma_n)_1$, $\Sigma^s = \bigcup_i \Sigma_i$ ו-$\mathbb{T}_\Sigma = \bigcup_i \mathbb{T}(\Sigma_i)$. לכל מבנה $\mathcal{M}$ נגדיר $\mathcal{M}_{i+1} = (\mathcal{M}_i)_1$, ואת $\mathcal{M}^s$ להיות הרחבת האיחוד. אז ברור ש-$\mathcal{M}^s$ מודל של $\mathbb{T}_\Sigma$. נשים לב שהשפה של Σ^s היא איחוד השפות של ה-Σ_i, כלומר איחוד בן-מניה של קבוצות שעצמת כל אחת העצמה של השפה המקורית. לכן גם עצמת השפה הזו היא העצמה המקורית.

נותר להוכיח שבכל מודל של $\mathbb{T}_\Sigma$ יש פונקציות סקולם מפורשות. טענה זו ניתן להוכיח לכל נוסחא בנפרד, אך אמור, כל נוסחא כזו היא בחתימה Σ_n עבור איזשהו n, והמודל הוא בפרט מודל של $\mathbb{T}(\Sigma_n)$, ולכן לפי השלב הסופי יש לנוסחא פונקציית סקולם. $\square$

השילוב של טענות 3.7.7 ו-3.7.13 נותן גרסא חזקה של משפט לוונהיים–סקולם היורד:

משפט 3.7.14 (לוונהיים–סקולם). *לכל מבנה $\mathcal{M}$ קיים תת-מבנה אלמנטרי שעצמתו לכל היותר עצמת השפה*

הוכחה. נרחיב את $\mathcal{M}$ למבנה $\mathcal{M}^s$ עם פונקציות סקולם מפורשות, כמו בטענה 3.7.13. לפי הטענה, עצמת השפה של $\mathcal{M}^s$ שווה לעצמת השפה המקורית. יהי $\mathcal{M}_0$ תת-המבנה של $\mathcal{M}^s$ הנוצר על ידי הקבוצה הריקה. לפי מסקנה 3.7.12, $\mathcal{M}_0$ הוא תת-מודל אלמנטרי של $\mathcal{M}^s$. לכן הוא גם תת-מודל אלמנטרי של $\mathcal{M}$ (זהו תנאי יותר חלש, בשפה המקורית יש פחות נוסחאות). נותר להראות שעצמת $\mathcal{M}_0$ אינה גדולה מעצמת השפה. אך לפי הגדרה 3.7.3, כל איבר ב-$\mathcal{M}_0$ הוא מהצורה $t^{\mathcal{M}^s}$, כאשר t שם עצם ללא משתנים חפשיים בשפת $\mathcal{M}_0$. במילים אחרות, יש העתקה מתת-קבוצה של השפה על M_0. □

3.8 משפט השלמות

בסעיף זה נוכיח את משפט השלמות, שאומר שאם פסוק ϕ נובע לוגית מתורה $\mathbb{T}$, אז ניתן להסיק אותו (במובן מדויק שיוגדר) מ-$\mathbb{T}$. דרך אחרת לנסח את אותה טענה היא שאם לא ניתן להסיק את ϕ מ-$\mathbb{T}$, אז שלילתו אינה סותרת לוגית את ϕ, כלומר $\mathbb{T}\cup\neg\phi$ ספיקה. ניסוח זה מאפשר לנסח את הבעיה במונחים של מציאת מודל לתורה, וזה מסוג הבעיות בהן כבר עסקנו. לכן, לפחות בתחילת הדיון, נשתמש ברעיונות דומים לסעיף הקודם, על מנת לבנות מודל. ההבדל הוא שהפעם אין לנו מבנה להתחיל ממנו, ובמקום זה נבנה מבנה מתוך השפה עצמה.

נאמר ששם עצם הוא *שם עצם סגור* אם אין בו משתנים חפשיים. שם עצם סגור

הגדרה 3.8.1. תהי $\mathbb{T}$ תורה בחתימה Σ. המבנה $\mathcal{M}=\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ מוגדר באופן הבא:

1. לכל סוג a, העולם $a^{\mathcal{M}}$ הוא קבוצת שמות העצם הסגורים מסוג a
2. לכל סימן יחס n-מקומי E, הקבוצה $E^{\mathcal{M}}$ היא קבוצת כל ה-n-יות $(t_1,\dots,t_n)$, כך ש-$E(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{T}$
3. לכל סימן פונקציה n-מקומי f, ולכל סדרת שמות עצם $t_1,\dots,t_n\in\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$, $f^{\mathcal{M}}(t_1,\dots,t_n)=f(t_1,\dots,t_n)$.

נשים לב, שהמבנה שהוגדר תלוי רק בחלק חסר הכמתים של התורה $\mathbb{T}$, ושהוא חסר שוויון. בפרט, איננו יכולים לצפות ש-$\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ מודל של $\mathbb{T}$. למעשה, הוא לא חייב להיות אפילו מודל של החלק חסר הכמתים: אם $\mathbb{T}$ התורה בחתימה עם סימן יחס דו-מקומי E ושני סימני קבועים c,d שאומרת $E(c,d)\vee E(d,c)$, ב-$\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$, היחס ריק, ולכן אינו מקיים את $\mathbb{T}$. אנו רוצים לנסח תנאים תחביריים על $\mathbb{T}$ שיבטיחו תוצאות יותר טובות.

ראשית, נניח מעכשיו *שהתורות שלנו סגורות תחת היסק פסוקי*, כלומר, אם $\mathbb{T}$ מסיקה את ϕ במובן של תחשיב הפסוקים, אז $\phi\in\mathbb{T}$[3] בפרט, $\mathbb{T}$ מכילה את כל הטאוטולוגיות של תחשיב הפסוקים.

[3]באופן יותר פורמלי, נתבונן בקבוצת הפסוקים $\mathcal{F}(P)$ של תחשיב הפסוקים, כאשר P קבוצת הפסוקים בחתימה

הגדרה 3.8.2. תהי $\mathbb{T}$ תורה (סגורה תחת היסק פסוקי)

1. $\mathbb{T}$ היא *תורה עקבית* אם לא קיים פסוק ϕ כך ש-$\phi, \neg\phi \in \mathbb{T}$ תורה עקבית
2. $\mathbb{T}$ היא *תורה סבירה* אם לכל נוסחא $\phi(x)$, אם $\forall x\phi(x) \in \mathbb{T}$ אז לכל שם עצם סגור t מתקיים $\phi(t) \in \mathbb{T}$ תורה סבירה
3. $\mathbb{T}$ היא *תורה החלטית* אם לכל ϕ, מתקיים $\phi \in \mathbb{T}$ או $\neg\phi \in \mathbb{T}$ תורה החלטית

נשים לב שכל התנאים בהגדרה לעיל הם תחביריים, כלומר תלויים רק בצורת הפסוק, ולא בתנאים על מבנים, למשל. נשים לב גם שאם קיים פסוק שאינו ב-$\mathbb{T}$, אז $\mathbb{T}$ עקבית, ושכל תורה מכילה את כל הטאוטולוגיות של תחשיב הפסוקים.

טענה 3.8.3. *נניח ש-$\mathbb{T}$ תורה עקבית, סבירה והחלטית. אז $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ מספק כל פסוק כולל ב-$\mathbb{T}$*

הוכחה. נוכיח באינדוקציה שלכל נוסחה חסרת כמתים $\phi(\bar{x})$, ולכל שמות עצם $\bar{t}$ מתקיים $\bar{t} \in \phi^{\mathcal{M}_{\mathbb{T}}}$ אם ורק אם $\phi(\bar{t}) \in \mathbb{T}$. עבור נוסחאות בסיסיות זו (כמעט) ההגדרה. בהנתן נוסחא ללא כמתים ϕ ו-ψ, $\bar{t} \in \neg\phi^{\mathcal{M}}$ אםם $\bar{t} \notin \phi^{\mathcal{M}}$ אםם $\phi(\bar{t}) \notin \mathbb{T}$ (הנחת האינדוקציה), אםם $\neg\phi(\bar{t}) \in \mathbb{T}$ (החלטיות ועקביות). בדומה, $\bar{t} \in \langle\phi\wedge\psi\rangle^{\mathcal{M}}$ אם ורק אם $\phi(\bar{t}) \in \mathbb{T}$ ו-$\psi(\bar{t}) \in \mathbb{T}$, אם ורק אם $\phi(\bar{t}) \wedge \psi(\bar{t}) \in \mathbb{T}$ (סגירות תחת היסק פסוקי).

כעת, אם $\mathbb{T}$ סבירה ו-$\forall\bar{x}\phi(\bar{x}) \in \mathbb{T}$, אז באינדוקציה, לכל $\bar{t}$ מתקיים $\phi(\bar{t}) \in \mathbb{T}$. לכן, $\bar{t} \in \phi^{\mathcal{M}}$ לכל $\bar{t}$, ולכן $\forall x\phi(x)$ תקף ב-$\mathcal{M}$. □

כדי לקבל מודל של התורה המלאה, נזדקק לתנאי בכיוון ההפוך: אם $\exists x\phi(x)$ שייך ל-$\mathbb{T}$, אז קיים לזה עד: $\phi(t)$ שייך ל-$\mathbb{T}$ עבור איזשהו t (זהו התנאי של קיום פונקציות סקולם קבועות). התנאי הזה אינו נכון לכל התורות הספיקות, אבל כמו שראינו בדיון על פונקציות סקולם, תמיד ניתן להרחיב תורה ספיקה לתורה ספיקה המקיימת את התנאי הזה, ולאחר ההרחבה, מבנים (כלומר מודלים של $\mathbb{T}_{\forall}$) הם מודלים. ההוכחה במקרה זה דומה אף היא.

מסקנה 3.8.4. *אם $\mathbb{T}$ כמו בטענה 3.8.3, ובנוסף לכל פסוק $\exists x\phi(x)$ ב-$\mathbb{T}$ קיים פסוק מהצורה $\phi(t)$ ב-$\mathbb{T}$ (כאשר t שם עצם), אז $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ מודל של $\mathbb{T}$.*

הוכחה. נוכיח באינדוקציה ש-$t \in \phi^{\mathcal{M}}$ אם ורק אם $\phi(t) \in \mathbb{T}$. לפעולות לוגיות זה כבר הוכח. נניח ש-$t \in \exists x\phi(x,y)$. אז קיים שם עצם s כך ש-$(s,t) \in \phi^{\mathcal{M}}$ ובאינדוקציה $\phi(s,t) \in \mathbb{T}$. אם $\exists x\phi(x,t) \notin \mathbb{T}$ אז מהחלטיות $\forall x\neg\phi(x,t) \in \mathbb{T}$. אז לפי סבירות $\neg\phi(s,t) \in \mathbb{T}$, בסתירה לעקביות.

בכיוון השני, אם $\exists x\phi(x,t) \in \mathbb{T}$, אז לפי התנאי קיים שם עצם c כך ש-$\phi(c,t) \in \mathbb{T}$. קבוע זה מראה ש-$t \in \exists x\phi(x,y)$. □

הנתונה, במובן של תחשיב היחסים. לפי ההגדרה של $\mathcal{F}(P)$, יש העתקה יחידה $t : \mathcal{F}(P) \to P$ שהיא הזהות על P וכך ש-$t(\langle x\to y\rangle) = \langle t(x)\to t(y)\rangle$, כאשר בצד שמאל הגרירה היא של תחשיב הפסוקים (כלומר x, y הם איברים של P), ובצד ימין של תחשיב היחסים. אז $\mathbb{T}$ סגורה תחת היסק פסוקי אם לכל $\phi \in \mathcal{F}(P)$ שנובע לוגית מ-$t^{-1}(\mathbb{T})$ במובן של תחשיב הפסוקים, $t(\phi) \in \mathbb{T}$

בשלב זה סיימנו את החלק הסמנטי של הדיון, ונעבור לדון במערכות היסק. אם נסמן ב-$\mathbb{T} \vdash_0 \phi$ את היחס שאומר ש-ϕ ניתן להסקה מ-$\mathbb{T}$ במובן של תחשיב הפסוקים, אז מסיבות דומות לאלה שראינו, אין ליחס זה סיכוי להיות שלם: למשל, לא ניתן להסיק את $\phi(c)$ מ-$\forall x\phi(x)$ רק על בסיס תחשיב הפסוקים, כי תחשיב הפסוקים לא "יודע" מה הקשר בין שני פסוקים אלה. לכן, אם אנו רוצים שמשפט השלמות יהיה נכון, עלינו להרחיב את יחס ההיסק של תחשיב הפסוקים ליחס חדש, $\vdash$. קיימות מספר דרכים לעשות זאת, ולא ברור שקיימת אחת מועדפת, ולכן נעדיף ראשית לאפיין את היחסים "הטובים" באופן מופשט. האפיון מודרך על-ידי התוצאות הסמנטיות לעיל.

הגדרה 3.8.5. יהי $\vdash$ יחס בין קבוצות של פסוקים ופסוקים (כלומר, לכל קבוצה של פסוקים Γ ופסוק ϕ ניתן לשאול האם $\Gamma \vdash \phi$). היחס $\vdash$ נקרא *טרנזיטיבי* אם לכל קבוצות פסוקים Γ ו-Γ_1, ולכל פסוק ϕ, אם $\Gamma_1 \vdash \phi$ ולכל פסוק $\psi \in \Gamma_1$, $\Gamma \vdash \psi$, אז $\Gamma \vdash \phi$.

1. $\vdash$ נקרא *יחס היסק* אם הוא טרנזיטיבי, ומכיל את יחס ההיסק הרגיל $\vdash_0$ של תחשיב הפסוקים (כלומר, אם $\Gamma \vdash_0 \phi$ אז $\Gamma \vdash \phi$) — יחס היסק
2. נאמר שליחס היסק $\vdash$ יש *אופי סופי* אם לכל $\Gamma \vdash \phi$ קיימת תת-קבוצה סופית $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ כך ש-$\Gamma_0 \vdash \phi$ — אופי סופי
3. נאמר ש-$\vdash$ הוא *יחס דדוקטיבי* אם מתקיים משפט הדדוקציה, כלומר, אם $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$, אז $\Gamma \vdash \phi \to \psi$ — יחס דדוקטיבי
4. נאמר ש-$\vdash$ *מכבד כמתים* אם לכל Γ ולכל נוסחא $\phi(x)$ מתקיים $\Gamma \vdash \forall x\phi(x)$ אם ורק אם $\Gamma \vdash \phi(c)$ לכל שם עצם סגור (כולל קבועים "חדשים", כלומר, כאלה שלא מופיעים בחתימה של Γ ו-ϕ) — מכבד כמתים
5. נאמר ש-$\vdash$ *תקף לוגית* אם $\Gamma \vdash \phi$ גורר ש-$\Gamma \models \phi$ — תקף לוגית

אם $\vdash$ יחס היסק, נאמר שקבוצה של פסוקים Γ היא *עקבית ביחס ל-*$\vdash$ אם לא קיים ϕ כך ש-$\Gamma \vdash \phi$ ו-$\Gamma \vdash \neg\phi$. — עקבית ביחס ל-$\vdash$

דוגמא 3.8.6. יחס ההיסק $\vdash_0$ של תחשיב הפסוקים הוא יחס היסק במובן של ההגדרה הזו, ומקיים את כל שאר התכונות, מלבד כיבוד כמתים.

דוגמא 3.8.7. היחס $\models$ של גרירה לוגית הוא יחס היסק המקיים את כל שאר התכונות

תרגיל 3.8.8. הוכח את האמור בשתי הדוגמאות האחרונות

המטרה שלנו היא להראות שהדוגמא האחרונה היא הדוגמא היחידה:

משפט 3.8.9 (משפט השלמות, גירסא מופשטת). *אם $\vdash$ הוא יחס היסק בעל אופי סופי, דדוקטיבי, מכבד כמתים ותקף לוגית, אז הוא מתלכד עם $\models$*

הואיל ו-$\vdash$ תקף לוגית, עלינו להוכיח רק את הכיוון השני, כלומר, שאם $\Gamma \models \phi$ אז $\Gamma \vdash \phi$. כאמור בתחילת הסעיף, זה שקול ל: אם $\Gamma \not\vdash \phi$ אז ל-$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ יש מודל. נוכיח זאת בסדרת תרגילים, שתוביל אותנו למצב של מסקנה 3.8.4.

תרגיל 3.8.10. יהי $\vdash$ יחס היסק. בתרגיל זה, *עקבית* פירושו *עקבית ביחס ל-*$\vdash$.

1. הוכח שאם $\Gamma \vdash \phi$ ו-$\Gamma \subset \Gamma_1$, אז $\Gamma_1 \vdash \phi$, וגם שאם Γ אינה עקבית, אז $\Gamma \vdash \psi$ לכל ψ

2. הוכח שאם $\vdash$ הוא בעל אופי סופי, אז כל קבוצה עקבית מוכלת בקבוצה עקבית מקסימלית.

3. הוכח שאם $\vdash$ בעל אופי סופי ודדוקטיבי, אז כל קבוצה עקבית מוכלת בקבוצה עקבית והחלטית

4. הוכח שאם $\vdash$ מקיים את כל ההנחות הקודמות, וגם מכבד כמתים, ואם Γ עקבית והחלטית, אז Γ מקיימת את ההנחות של מסקנה 3.8.4

5. הוכח את משפט 3.8.9

כדי לצקת תוכן במשפט, נותר למצוא יחס $\vdash$ המקיים את התכונות לעיל. כמובן, יחס הגרירה הלוגית מקיים תכונות אלה, אך אנו מעוניינים ביחס שתיאורו תחבירי.

הגדרה 3.8.11. סדרה סופית $\phi_1, \ldots, \phi_n$ של פסוקים תקרא *היסק* של ϕ_n מתוך קבוצה של פסוקים Γ אם לכל $i \leq n$ מתקיים אחד מהתנאים הבאים: היסק

1. ϕ_i טאוטולוגיה (של תחשיב הפסוקים)

2. ϕ_i הוא מהצורה $\forall x \psi(x) \to \psi(c)$ כאשר ψ נוסחא ו-c שם עצם סגור (שלא בהכרח מוזכר בפסוקים האחרים)

3. ϕ מהצורה $\forall x \langle \psi \to \theta(x) \rangle \to \langle \psi \to \forall x \theta(x) \rangle$ כאשר ψ פסוק

4. ϕ_i שייך ל-Γ

5. (MP) קיימים $j, k < i$ כך ש-$\phi_j = \langle \phi_k \to \phi_i \rangle$

6. (Gen) קיימת נוסחא $\psi(x)$ כך ש-ϕ הוא $\forall x \psi(x)$, וקיים $j < i$ וסימן קבוע c שאינו מופיע ב-Γ, כך ש-ϕ_j הוא $\psi(c)$

נאמר ש-Γ מסיקה את ϕ (סימון: $\Vdash$) אם קיים היסק של ϕ_n מתוך Γ

תרגיל 3.8.12. נניח שקבוצה Γ מסיקה את הפסוק $\phi(c)$, כאשר c קבוע שלא מופיע ב-Γ. הוכח שאם d קבוע אחר שלא מופיע ב-Γ, אז Γ מסיקה גם את $\phi(d)$. הסק שהיחס $\Vdash$ הוא יחס היסק בעל אופי סופי ותקף לוגית, במובן של הגדרה 3.8.5.

טענה 3.8.13. *אם* $\Gamma \cup \phi \Vdash \psi$ *אז* $\Gamma \Vdash \phi \to \psi$

הוכחה. נוכיח, באינדוקציה על n, שבהיסק $\psi_1, \dots, \psi_n$ מתוך $\Gamma \cup \phi$ מתקיים $\Gamma \Vdash \phi \to \psi_n$. נשים לב ראשית שהפסוק $p \to \langle q \to p \rangle$ הוא טאוטולוגיה של תחשיב הפסוקים, ולכן עבור $p = \psi_n$ ו-$q = \phi$ המסקנה נובעת בשלושת המקרים הראשונים של ההגדרה בעזרת MP. כמו-כן, במקרה ש-ψ_n הוסק על-ידי שימוש ב-MP, ההוכחה מהמקרה של תחשיב הפסוקים עובדת גם כאן.

נותר להתבונן במקרה ש-ψ_n הוא $\forall x \theta(x)$, ו-ψ_i, עבור $i < n$ הוא $\theta(c)$, כאשר c לא מופיע ב-$\Gamma \cup \phi$. במקרה זה, לפי הנחת האינדוקציה, ניתן להסיק את $\phi \to \theta(c)$ מתוך Γ. הואיל ו-c לא מופיע ב-Γ, נסיק על-ידי Gen את $\forall x(\phi \to \theta(x))$ (נשים לב ש-x לא מופיע ב-ϕ, שכן c לא הופיע בו). כעת נשתמש באקסיומה וב-MP כדי להסיק את $\phi \to \forall x \phi(x)$, כנדרש. □

מסקנה 3.8.14. *לכל פסוק* ϕ *וקבוצת פסוקים* Γ *מתקיים* $\Gamma \models \phi$ *אם ורק אם* $\Gamma \Vdash \phi$

הוכחה. ראינו בתרגיל 3.8.12 שהיחס $\Vdash$ הוא יחס היסק בעל אופי סופי, ותקף לוגית, ובטענה 3.8.13 שהוא דדוקטיבי. אם $\Gamma \Vdash \forall x \phi(x)$ אז לפי אקסיומה מהסוג השני ו-MP מתקיים $\Gamma \Vdash \phi(c)$ לכל שם עצם סגור c, בעוד שאם $\Gamma \Vdash \phi(c)$ לכל שם עצם סגור c (ובפרט לקבוע c שאינו מופיע ב-Γ) אז $\Gamma \Vdash \forall x \phi(x)$ לפי Gen. לכן לפי משפט 3.8.9, $\Vdash$ ו-$\models$ הם אותו יחס. □

נשים לב, שבהוכחת משפט השלמות לא הסתמכנו על משפט הקומפקטיות. מצד שני, הראינו שהיחס האחרון מקיים את הנחות משפט 3.8.9. לכן קיבלנו עוד הוכחה של משפט הקומפקטיות: ל-$\models$ יש אופי סופי. טענה נוספת, שלא נוכל לנסח במדויק, אך ברורה אינטואיטיבית היא: אם קיימת תכנית מחשב שפולטת את כל הפסוקים בתורה Γ, אז קיימת תכנית מחשב שפולטת את כל המסקנות של Γ.

4 משפט אי-השלמות

בסעיף זה נוכיח את משפט אי השלמות של גדל. משפט זה אינו שלילת משפט השלמות, אלא הוא הטענה שתורה מסוימת בשפה של תורת המספרים — אקסיומות פיאנו — אינה אקסיומטיזציה מלאה של תורת המספרים, כלומר, קבוצת הפסוקים הנובעים מאקסיומות פיאנו אינה שלמה. במלים אחרות, קיים פסוק שתקף במספרים הטבעיים, אך אינו ניתן להסקה מתוך אקסיומות פיאנו.

נציין שהבחירה באקסיומות פיאנו, ובמידה מסוימת, בתורת המספרים, היא מעניינת מבחינה היסטורית, אך אינה הכרחית. למעשה, נראה שהמשפט נותן את התוצאה המקבילה עבור כל בחירה "סבירה" של אקסיומות. נשים לב שאיזושהי מגבלת "סבירות" דרושה, שכן קבוצת כל הפסוקים הנכונים ב-$\mathbb{N}$ היא, על-פי ההגדרה, מערכת אקסיומות שלמה עבור $\mathbb{N}$. הבעיה עם המערכת הזו היא שהיא לא מפורשת מספיק: בהנתן פסוק, אין דרך קלה לדעת האם הוא אקסיומה. המשפט של גדל יראה שכל מערכת אקסיומות שאינה סובלת מהבעיה הזו, אינה שלמה. בפרט, משפט זה עונה בצורה מדויקת (ושלילית) על השאלה הפילוסופית: האם ניתן לייצר תהליך מכני שמוכיח את כל העובדות על $\mathbb{N}$? נזכיר, שהמצב שונה לגבי מבנים אחרים: למשל, ראינו שלשדה $\mathbb{C}$ יש מערכת

אקסיומות "סבירה": לכל פולינום ממעלה חיובית יש שורש (בנוסף על אקסיומות השדה ממציין 0).

ההוכחה תתחלק לשני חלקים: ראשית, נבחן מהן הקבוצות הגדירות ב-$\mathbb{N}$. נגלה שב-$\mathbb{N}$ *יש* "המון" קבוצות גדירות. בפרט, נצליח לענות על שאלה 3.4.12, ועל שאלות דומות נוספות. נראה גם שעושר הקבוצות הגדירות הוא כזה, שהמבנה יכול לדבר על מבנים רבים אחרים במתמטיקה, ובפרט, על הלוגיקה של עצמו.

בשלב שני נראה טענה כללית, שאומרת שאם יש לנו מבנה כזה, שיכול באופן גדיר, "לדבר על עצמו", אז התופעות שתוארו לעיל קורות בו — אין לו מערכת אקסיומות "סבירה". שלב זה לא מתייחס לתורת המספרים כלל.

ההצגה מבוססת (באופן חלקי) על הספר [9].

4.1 קבוצות גדירות בטבעיים

בסעיף זה נחקור מהן הקבוצות הגדירות בטבעיים. נתחיל מהגדרת השפה: החתימה עבור הטבעיים מורכבת מסוג אחד, פעולות דו-מקומיות $+$ ו-$\cdot$, ושני קבועים $\underline{0}$ ו-$\underline{1}$. אנחנו נעבוד עם מבנה הטבעיים (עם שוויון), שבו הפעולות והקבועים מתפרשים באופן הנרמז.

ראינו כבר מספר קבוצות גדירות במבנה זה, למשל קבוצת הראשוניים, או קבוצת החזקות של 5. מאידך, ראינו שקבוצות אחרות, כגון החזקות של 10 הן קשות להגדרה, וכרגע עוד לא ברור אם הן גדירות. מיד נראה שקבוצות אלה גדירות, בנוסף, למשל, לקבוצות הבאות (נזכיר שהעתקה נקראת *העתקה גדירה* אם הגרף שלה הוא קבוצה גדירה): העתקה גדירה

טענה 4.1.1. *ההעתקות הבאות גדירות ב-$\mathbb{N}$*

1. $f(n,m)=n^m$
2. $f(n)=n!$ *(עצרת)*
3. *ההעתקה המתאימה ל-i את הראשוני ה-i*
4. *בהנתן העתקה גדירה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, ההעתקה $s(n)=\sum_{i=0}^{n}f(i)$*

המשותף לכל הפונקציות והקבוצות שאנו מעוניינים בהן הוא שהן מוגדרות ברקורסיה באופן טבעי, למשל $m^{n+1}=m\cdot m^n$. למעשה, *אחת ההגדרות* של הטבעיים היא שניתן להגדיר עליה פונקציות ברקורסיה: זו קבוצה $\mathbb{N}$ עם איבר $0\in\mathbb{N}$ ופונקציה $s:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (עוקב), שהיא אוניברסלית, במובן הבא: אם A קבוצה, $a\in A$ איבר, ו-$f:A\to A$ פונקציה, אז יש פונקציה יחידה $g:\mathbb{N}\to A$ עם התכונה ש-$g(0)=a$ ו-$g(s(n))=f(g(n))$ לכל n.

תרגיל 4.1.2. הוכיחו שהתכונה לעיל מגדירה את $\mathbb{N}$ ביחידות: אם $\mathbb{N}',0',s'$ מבנה אחר עם אותן תכונות, אז יש איזומורפיזם יחיד $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}'$ (כמבנים לחתימה עם פונקציה אחת וסימן קבוע אחד). ההוכחה דומה לפתרון תרגיל 2.2.3.

תרגיל 4.1.3. השתמשו בטענה על מנת להוכיח את קיומה של סדרת פיבונצ'י

תכונת ההגדרה ברקורסיה מבטיח קיומה של פונקציה. היא לא מבטיח, כמובן, שהפונקציה תהיה גדירה בחתימה שלנו. על-מנת שהפונקציה תהיה גדירה, ברור שהכרחי להתחיל מנתונים גדירים, כלומר, שהקבוצה A והפונקציה f יהיו גדירות. באופן מפתיע, זה גם מספיק (אפילו בגרסא קצת יותר חזקה):

טענה 4.1.4 (משפט הרקורסיה). *תהי X קבוצה גדירה (ב-$\mathbb{N}$)*

1. *נניח ש-$D \subseteq \mathbb{N} \times X^m \times X$ קבוצה גדירה כלשהי, ונגדיר $A_0 \subseteq X$ קבוצה גדירה. תהי ברקורסיה*

$$A_{n+1} = \{x \in X \mid \exists x_1, \dots, x_m \in A_n,\ (n, x_1, \dots, x_m, x) \in D\}$$

אז הסדרה A_i גדירה באופן אחיד, כלומר, הקבוצה $A = \{(n,x) \mid x \in A_n\} \subseteq \mathbb{N} \times X$ גדירה.

2. *נניח ש-$f : \mathbb{N} \times Y \to Y$ פונקציה גדירה. אז הפונקציה $g : \mathbb{N} \times Y \to Y$ הנתונה על-ידי $g(0,y) = y$ ו-$g(i+1,y) = f(i, g(i,y))$ גדירה אף היא.*

נציין שבתנאים של הטענה, העובדה ש-A_i גדירה עבור כל i בנפרד נכונה בכל תורה, אך באופן כללי, הנוסחאות שמגדירות את A_i ואת A_j שונות מאד עבור $i \neq j$. החוזק כאן הוא שקיימת נוסחא אחת שמגדירה את כל הקבוצות הללו באופן אחיד, כאשר i פרמטר.

תרגיל 4.1.5. הסק את טענה 4.1.1 ממשפט הרקורסיה 4.1.4

על מנת להוכיח את משפט הרקורסיה, נצטרך לקודד סדרות סופיות: אנו רוצים לדעת שאם X קבוצה גדירה, אז קבוצת המלים מעל X, כלומר סדרות סופיות של איברים ב-X, גדירה אף היא. באופן יותר מדויק, זה אומר את הדבר הבא:

הגדרה 4.1.6. תהי X קבוצה גדירה (ב-$\mathbb{N}$). נאמר *שקבוצת המלים מעל X גדירה* אם קיימת קבוצה גדירה X^+, העתקה גדירה $|\cdot| : X^+ \to \mathbb{N}$, והעתקה גדירה $p : \mathbb{N} \times X^+ \to X$, כך שלכל $k_0, \dots, k_{n-1} \in X$ קיים $a \in X^+$ יחיד עבורו $|a| = n$, ולכל $i < n$ מתקיים $p(i,a) = k_i$. קבוצת המלים מעל X גדירה

עבור קבוצה גדירה נתונה X, קבוצת המלים היא יחידה באותו מובן בו $\mathbb{N}$ או האלגברה הבוליאנית החפשית הם יחידים: יתכנו שתי שלשות שונות המקיימות את תנאי ההגדרה, אולם בין כל שתיים כאלה יש התאמה *גדירה* יחידה:

תרגיל 4.1.7. נניח ש-X גדירה, ו-$(X^+, |\cdot|, p)$ קבוצת מלים גדירה עבור X.

1. הוכיחו שקיימת העתקה יחידה $f : X^+ \to X^*$ (כאשר X^* קבוצת המלים במובן הרגיל), כך שלכל $a \in X^+$ עבורו $|a| = n$, האורך של $f(a)$ הוא n, ולכל $i < n$ מתקיים $p(i,a) = f(a)_{i+1}$.

2. הוכח ש-f הפיכה

3. הוכח שאם $(X_1^+, |\cdot|_1, p_1)$ קבוצת מלים גדירה אחרת, עם העתקה מתאימה f_1, אז $f^{-1} \circ f_1$ היא העתקה גדירה.

4. הוכח שההעתקה $w_1 * w_2 \mapsto (w_1, w_2)$ מ-$X^+ \times X^+$ ל-X^+ המקיימת $f(w_1 * w_2) = f(w_1)f(w_2)$ (שרשור של מלים) היא גדירה

המטרה שלנו היא להראות שלכל קבוצה גדירה קיימת קבוצת מלים גדירה. נתחיל מהאבחנה הבאה:

תרגיל 4.1.8. הוכח:

1. אם ל-$\mathbb{N}$ יש קבוצת מלים גדירה, אז לכל קבוצה גדירה אחרת גם יש קבוצת מלים גדירה.

2. נניח שקיימת קבוצה גדירה A והעתקה גדירה $p : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N}$ כך שלכל $k_0, \dots, k_{n-1}$ קיים $a \in A$ עבורו $p(i, a) = k_i$ לכל $i < n$. אז ל-$\mathbb{N}$ יש קבוצת מלים גדירה.

טענה 4.1.9. *לכל קבוצה גדירה יש קבוצת מלים גדירה*

בהוכחת הטענה נזדקק לטענה קלאסית בתורת המספרים, משפט השאריות הסיני.

משפט 4.1.10 (משפט השאריות הסיני). *אם $n_1, \dots, n_k$ מספרים טבעיים זרים בזוגות, ו-$m_1, \dots, m_k$ מספרים שלמים כלשהם, אז קיים מספר טבעי יחיד $L < n_1 \dots n_k$ כך שלכל i, ל-L ול-m_i אותה שארית ביחס ל-n_i.*

הוכחה. באינדוקציה מספיק להראות זאת כש-$k = 2$. לכל r, נסמן ב-$C_r = \{0, \dots, r-1\}$, ונתבונן בהעתקה R ששולחת כל $x \in C_{n_1 n_2}$ לשאריות שלו ביחס ל-n_1 ו-n_2 ב-$C_{n_1} \times C_{n_2}$. אם $R(x) = R(y)$, אז $R(x-y) = (0,0)$, כלומר $x - y$ מתחלק ב-n_1 וב-n_2. הואיל ו-n_i זרים, זה אומר ש-$x - y$ מתחלק ב-$n_1 n_2$. אבל $x - y$ טבעי (בלי הגבלת הכלליות) וקטן מ-$n_1 n_2$, ולכן שווה ל-0, כלומר $x = y$.

זה מראה ש-R חד-חד-ערכית, כלומר את היחידות. הואיל ושתי הקבוצות ושוות גודל, R היא גם על, ומכך נובע גם הקיום. □

הוכחת טענה 4.1.9. לפי תרגיל 4.1.8, מספיק להוכיח שקיימת קבוצה גדירה A והעתקה גדירה p כך שעבור מספרים טבעיים $k_0, \dots, k_{n-1}$ קיים $t \in A$ עבורו $p(i, t) = k_i$ לכל $i < n$.

נגדיר: $A = \mathbb{N}^2$ ועבור מספרים טבעיים i, a, b, $p(i, a, b) = \mathrm{Rem}(a, b(i+1)+1)$, כאשר $\mathrm{Rem}(x, y)$ הוא השארית של x כשמחלקים אותו ב-y. קל לראות ש-Rem, ולכן גם p, היא העתקה גדירה. נניח שנתונים $k_0, \dots, k_{n-1}$. נבחר $b = kn!$ כאשר k גדול מכל k_i. אנו טוענים שכל המספרים $b(i+1)+1$ (עבור $i < n$ שונים) הם זרים בזוגות. בהנתן הטענה, לפי משפט השאריות הסיני, קיים a כך ש-k_i השארית של a בחלוקה ב-$b(i+1)+1$, וסיימנו.

על מנת להוכיח את הטענה, נשים לב ראשית שלכל $i < n$, ל-$b(i+1)+1$ אין מחלקים ראשוניים קטנים מ-n (שכן כל מחלק כזה מחלק את $n!$). אם, עבור $i, j < n$ הראשוני q מחלק את $bi+1$ וגם את $bj+1$, אז הוא מחלק גם את הפרשם $b(i-j)$, והואיל ואינו יכול לחלק את b, הוא מחלק את $i-j$. אבל $p \geq n$, ולכן $i = j$. $\square$

בהנתן סדרה $k_0, \dots, k_n$ של איברי קבוצה גדירה X, נסמן ב-$\langle k_0, \dots, k_n \rangle$ את האיבר a של X^+ עבורו $|a| = n+1$ ו-$p(i, a) = k_i$. זוהי העתקה גדירה מ-X^{n+1} ל-X^+.

הוכחת טענה 4.1.4. 1. לשם פשטות הסימון, נניח ש-$m = 1$. נגדיר

$$B = \{\langle x_0, \dots, x_n \rangle \in X^+ \mid x_0 \in A_0, \forall i < n\, (i, x_i, x_{i+1}) \in D\}$$

אנו טוענים ש-B גדירה. אכן, B היא התת-קבוצה של X^+ הנתונה על-ידי הנוסחא

$$p(0, w) \in A_0 \wedge \forall i < |w| - 1\, (i, p(i, w), p(i+1, w)) \in D$$

מאידך, אנחנו טוענים ש-

$$A = \{(n, x) \mid \exists w \in B(|w| = n+1 \wedge p(n, w) = x)\}$$

(ולכן גדירה). נסמן $C_n = \{x \in X \mid (n, x) \in A\}$, ונוכיח באינדוקציה על n ש-$A_n = C_n$. עבור $n = 0$, C_0 היא קבוצת האיברים x כך ש-$\langle x \rangle \in B$, כלומר בדיוק A_0.

אם $x \in C_{n+1}$, אז קיימת מילה מהצורה $\langle x_0, \dots, x_n, x \rangle$ ב-B. לכן גם $\langle x_0, \dots, x_n \rangle \in B$, ולפי הנחת האינדוקציה, $x_n \in A_n$. לפי הגדרת B מתקיים $(n, x_n, x) \in D$, ולכן $x \in A_{n+1}$.

מאידך, אם $x \in A_{n+1}$, אז קיים $x_n \in A_n$ כך ש-$(n, x_n, x) \in D$. לפי הנחת האינדוקציה, $x_n \in C_n$, ולכן קיים איבר ב-B מהצורה $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$. אז $\langle x_0, \dots, x_n, x \rangle$ ב-B, ומראה ש-$x \in C_{n+1}$.

2. זה המקרה הפרטי של הסעיף הקודם בו $X = Y \times Y$, $A_0 = \{(y, y) \mid y \in Y\}$ ו-$D = \{(n, a, b, a, f(n, b)) \mid a, b \in Y\}$. $\square$

4.2 לוגיקה בתוך $\mathbb{N}$

ראינו לעיל שמשפט הרקורסיה מאפשר להראות שקבוצות והעתקות מוכרות מתורת המספרים הן גדירות בשפה הטבעיות עבור $\mathbb{N}$. המספרים הטבעיים מופיעים גם כמעט בכל תחום אחר במתמטיקה, וטבעי לשאול: האם העצמים המופיעים בתחומים אלה, גדירים אף הם ב-$\mathbb{N}$. בסעיף זה נענה (באופן חלקי) על השאלה הזו עבור התחום האהוב עלינו — לוגיקה.

בסעיף זה, *קבוצה גדירה* תהיה קבוצה גדירה ב-$\mathbb{N}$, כלומר תת-קבוצה של חזקה קרטזית סופית של $\mathbb{N}$ הנתונה על-ידי נוסחה בשפה של $\mathbb{N}$. ההגדרות הבאות מתקבלות פשוט על-ידי תוספת המילה "גדירה" לכל מופע של המילה "קבוצה" בהגדרה המקורית (באופן זהיר). למעשה, עבור ההוכחה של משפט אי השלמות, מספיק לנו מקרה פרטי, אבל נוח לעבוד באופן כללי:

הגדרה 4.2.1. *חתימה גדירה* (ב-$\mathbb{N}$) מורכבת מקבוצה גדירה $\mathbf{S}$ של *סוגים*, קבוצה גדירה $\mathbf{R}$ של *סימני יחס*, עם העתקה גדירה $\mathbf{r}:\mathbf{R}\to\mathbf{S}^+$ וקבוצה גדירה $\mathbf{F}$ של *סימני פונקציה* עם העתקה גדירה $\mathbf{f}:\mathbf{F}\to\mathbf{S}^+\times\mathbf{S}$.

אם $\Sigma=(\mathscr{S},\mathscr{R},\mathscr{F})$ חתימה במובן הרגיל (הגדרה 3.2.1), נאמר ש-Σ היא גדירה אם קיימת חתימה גדירה כנ"ל, והתאמה הפיכה בין $\mathscr{S}$ ל-$\mathbf{S}$, ולכל מילה $w\in\mathscr{S}^*$, התאמה הפיכה בין $\mathscr{R}_w$ ו-$\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{w})$ (כאשר $\mathbf{w}$ המילה הגדירה המתאימה ל-w), ובאופן דומה עבור סימני הפונקציה. במצב זה, נניח שהתאמות כאלה נבחרו.

נשים לב שחתימה גדירה היא, בפרט, חתימה במובן הרגיל, ולכן אפשר לדבר על שמות עצם, נוסחאות, וכו' מעליה. אם נתונה קבוצה *גדירה* של משתנים חפשיים, אז קבוצות שמות העצם והנוסחאות (בחתימה ומשתנים חפשיים נתונים) גדירות אף הן. על מנת לומר זאת במדויק, נאמר ראשית *שקבוצה גדירה מעל* $\mathbf{S}$ היא קבוצה גדירה $\mathbf{X}$ ביחד עם העתקה גדירה נתונה $\mathbf{g}:\mathbf{X}\to\mathbf{S}$. במצב זה, אם $s\in\mathbf{S}$, נסמן ב-$\mathbf{X}_s$ את הסיב $\mathbf{g}^{-1}(s)$. למשל, בהגדרה של חתימה גדירה, $\mathbf{R}$ היא קבוצה גדירה מעל $\mathbf{S}^+$. קבוצה גדירה מעל S

תרגיל 4.2.2. תהי $\mathbf{\Sigma}=(\mathbf{S},\mathbf{R},\mathbf{r},\mathbf{F},\mathbf{f})$ חתימה גדירה, ותהי $\mathbf{v}:\mathbf{V}\to\mathbf{S}$ קבוצה גדירה מעל $\mathbf{S}$.

1. הוכח שקבוצת שמות העצם מעל $\mathbf{\Sigma}$ ו-$\mathbf{V}$ גדירה, במובן הבא: קיימים
   (א) קבוצה גדירה $\mathbf{t}:\mathbf{T}\to\mathbf{S}$ מעל $\mathbf{S}$
   (ב) העתקה גדירה $\mathbf{i}:\mathbf{V}\to\mathbf{T}$ מעל $\mathbf{S}$ (כלומר $\mathbf{t}\circ\mathbf{i}=\mathbf{v}$)
   (ג) העתקה גדירה $\mathbf{p}:\mathbf{F}\times\mathbf{T}^+\to\mathbf{T}$ מעל $\mathbf{S}$

   כך שההעתקה היחידה $u:\mathscr{T}\to\mathbf{T}$ מעל $\mathbf{S}$ הנקבעת על-ידי התנאים:

   (א) $u(x)=\mathbf{i}(x)$ לכל $x\in\mathbf{V}$ ו-
   (ב) $\mathbf{p}(f,\langle u(t_1),\dots,u(t_k)\rangle)=u(f(t_1,\dots,t_k))$ לכל $f\in\mathbf{F}$ ו-$t_i\in\mathscr{T}$ (בצד ימין, $f(t_1,\dots,t_k)$ הוא שם העצם שנקבע על ידי f ו-t_i, כמו בהגדרה של שמות עצם)

   היא חד-חד-ערכית ועל. במלים אחרות, ניתן לזהות (באמצעות u) את קבוצת שמות העצם עם קבוצה גדירה.

2. נסח באופן דומה והוכח את הטענה שהקבוצות הבאות הן גדירות:
   (א) קבוצת הנוסחאות $\mathbf{\Phi}=\mathbf{\Phi}_{\mathbf{\Sigma},\mathbf{V}}$ מעל $\mathbf{\Sigma}$ ו-$\mathbf{V}$
   (ב) עבור תת-קבוצה גדירה $\mathbf{X}$ של $\mathbf{V}$, קבוצת הנוסחאות $\mathbf{\Phi}(\mathbf{X})$ ב-$\mathbf{\Phi}$ בהן המשתנים החפשיים הם בקרב $\mathbf{X}$ (בפרט, קבוצת הפסוקים $\mathbf{\Phi}(0)$).

(ג) ההעתקה $\mathbf{s}_x : \mathbf{\Phi} \times \mathbf{T} \to \mathbf{\Phi}$ אשר שולחת את (האיברים המייצגים את) הנוסחה $\phi(x, \dots)$ ושם העצם t לאיבר המייצג את $\phi[x=t]$ (הנוסחה המתקבלת מהצבת t במקום x)

התרגיל מאפשר להגדיר את המושג של *תורה גדירה*: זוהי פשוט תת-קבוצה גדירה של $\mathbf{\Phi}$. תורה גדירה
נעיר שטענת היחידות בתרגיל 4.2.2 מראה שהתכונה של תורה להיות גדירה לא תלויה באופן שבו בחרנו להגדיר את $\mathbf{\Sigma}$ או את $\mathbf{V}$. זוהי תכונה של התורה (בדומה לכך שתכונות קבוצת המלים הגדירה אינן תלויות בהצגה המסוימת שבחרנו לה).

בהנתן תורה, השלבים בתהליך ההיסק ניתנים אף הם לתיאור גדיר. לכן התרגיל הבא מוכח שוב על-ידי משפט הרקורסיה.

תרגיל 4.2.3. לכל תורה גדירה $\mathbf{\Theta}$ (בחתימה גדירה נתונה), קבוצת המסקנות שלה $\mathbf{\Theta}_{\vdash}$ גדירה אף היא

מטרת הדיון הכללי לעיל היא לאפשר לנו לדון בתורה גדירה אחת מסוימת, *אקסיומות פיאנו*, שהיא המועמד הקלאסי למערכת אקסיומות שלמה עבור תורת המספרים. אך התכונה היחידה של אקסיומות פיאנו בה נשתמש היא שזו תורה גדירה.

הגדרה 4.2.4. תהי Σ החתימה של חוגים (כלומר, עם סוג אחד, סימני פעולה $+$ ו-$\cdot$, וסימני קבועים $\underline{0}$ ו-$\underline{1}$).

1. לכל נוסחא $\phi(x)$ ב-Σ, *אינדוקציה עבור* ϕ הוא הפסוק $I(\phi)$ הבא: אינדוקציה עבור ϕ

$$\langle \phi(\underline{0}) \wedge \forall x \langle \phi(x) \to \phi(x+\underline{1}) \rangle \rangle \to \forall x \phi(x)$$

2. *אקסיומות פיאנו* הן קבוצת הפסוקים $I(\phi)$ עבור כל הנוסחאות ϕ, בתוספת הפסוקים הבאים אקסיומות פיאנו

$$\forall x, y \langle x+\underline{1} = y+\underline{1} \to x = y \rangle \tag{4.1}$$
$$\forall x \langle x+\underline{1} \neq \underline{0} \rangle \tag{4.2}$$
$$\forall x \langle x+\underline{0} = x \wedge x \cdot \underline{0} = \underline{0} \rangle \tag{4.3}$$
$$\forall x, y \langle x+(y+\underline{1}) = (x+y)+\underline{1} \rangle \tag{4.4}$$
$$\forall x, y \langle x \cdot (y+\underline{1}) = (x \cdot y)+x \rangle \tag{4.5}$$

תורה זו תסומן ב-$\mathbb{PA}$. $\mathbb{PA}$

בתרגילים הבאים ננסה להשתכנע שסביר לחשוב שאקסיומות פיאנו הן אכן מערכת אקסיומות שלמה עבור $\mathbb{N}$.

תרגיל 4.2.5. הוכח שמאקסיומות פיאנו נובעות הטענות הבאות:

1. חוקי הקיבוץ והחילוף עבור $+$ ו-$\cdot$.

2. חוק הפילוג

3. $x \cdot \underline{1} = x$ לכל x

4. אם $x \neq 0$ ו-$xy = xz$ אז $y = z$

תרגיל 4.2.6. הוכח שאקסיומה (4.2) באקסיומות פיאנו לא נובעת מיתר האקסיומות.

נשים לב שהחתימה של $\mathbb{PA}$ היא גדירה, שכן היא מורכבת מקבוצות סופיות. לכל נוסחא, פסוק או שם עצם ϕ, נסמן ב-$\ulcorner\phi\urcorner$ את האיבר המתאים בקבוצה הגדירה הרלוונטית ($\ulcorner\phi\urcorner$ קרוי לרוב *מספר גדל של* ϕ). כמו כן, לכל טבעי n, נסמן ב-c_n שם עצם שמייצג אותו (למשל, $c_0 = \underline{0}$, ו-$c_{n+1} = \underline{1} + c_n$). מספר גדל

הטענה היחידה שנצטרך להוכיח עבור מערכת האקסיומות $\mathbb{PA}$ היא:

טענה 4.2.7. *$\mathbb{PA}$ היא תורה גדירה*

הוכחה. קבוצת האקסיומות היא איחוד של קבוצה סופית עם סכימת האינדוקציה ולכן מספיק להוכיח שסכימת האינדוקציה גדירה.

לפי תרגיל 4.2.2, קבוצת הנוסחאות $\mathbf{\Phi}(x)$ במשתנה אחד x היא גדירה, כמו גם ההעתקות $s : \mathbf{\Phi}(x) \to \mathbf{\Phi}(x)$ ו-$z : \mathbf{\Phi}(x) \to \mathbf{\Phi}(x)$ הנתונות על-ידי $s(\ulcorner\phi(x)\urcorner) = \ulcorner\phi(x+\underline{1})\urcorner$ ו-$z(\ulcorner\phi(x)\urcorner) = \ulcorner\phi(\underline{0})\urcorner$. מכאן שההעתקה $\ulcorner\phi\urcorner \mapsto \ulcorner I(\phi)\urcorner$ מ-$\mathbf{\Phi}(x)$ ל-$\mathbf{\Phi}(0)$ גדירה אף היא, וסכימת האינדוקציה היא התמונה של I, כלומר נתונה על-ידי הנוסחא $\exists y \in \mathbf{\Phi}(x)(u{=}I(y))$.
□

המסקנה הבאה היא תולדה ישירה של הטענה האחרונה בצירוף תרגיל 4.2.3.

מסקנה 4.2.8. *קבוצת המסקנות של אקסיומות פיאנו היא גדירה*

מעכשיו נסמן ב-$\mathbf{P}$ את קבוצת המסקנות הזו, כלומר, $\ulcorner\phi\urcorner \in \mathbf{P}$ אם ורק אם ϕ נובעת מ-$\mathbb{PA}$.

4.3 משפט אי-השלמות הראשון

בסעיף הקודם ראינו שהתורה $\mathbb{PA}$ ומסקנותיה גדירות ב-$\mathbb{N}$. אולם עד כה העובדה שהחתימה של התורה הגדירה הזו היא גם החתימה של המבנה בו היא מוגדרת, והעובדה ש-$\mathbb{PA}$ מסופקת על-ידי $\mathbb{N}$ לא שיחקו שום תפקיד. בפרט, אם $\phi(x)$ היא נוסחא בחתימה זו, העובדה ש-$\phi^{\mathbb{N}}$ היא תת-קבוצה של $\mathbb{N}$, העולם בו $\ulcorner\phi\urcorner$ נמצא, לא קיבלה שום ביטוי.

משפט אי-השלמות הראשון שנראה אומר, בקירוב, שאם יש דרך לראות איברים של מבנה $\mathcal{M}$ כפסוקים בשפה של $\mathcal{M}$ (כפי שקורה ב-$\mathbb{N}$), ו-$\mathcal{M}$ *יודע* את זה, במובן לעיל, אז קבוצת האיברים שמתאימים לפסוקים שתקפים ב-$\mathcal{M}$ אינה גדירה. זוהי גרסא של "אי-גדירות האמת" של טרסקי.

הרעיון דומה מאד לרעיון שמופיע בפרדוקס של ראסל ובמשפט קנטור, ולכן נתחיל מתזכורת לגביהם.

פרדוקס ראסל הוא טיעון פילוסופי שמטרתו להראות שיש צורך בהגדרה מדויקת של מושג הקבוצה, ושהגישה שאומרת שניתן להתייחס באופן לא פורמלי לכל אוסף שניתן על-ידי איזשהו תנאי, מובילה לסתירה. הטיעון הוא זה: אם ניתן להגדיר קבוצה על-ידי כל תנאי שנרצה, יהיו קבוצות שיכילו את עצמן כאיבר, כלומר קבוצות S המקיימות $S \in S$ (למשל, קבוצת כל הקבוצות היא כזו). נקרא לקבוצה עבורה זה קורה 'מוזרה', ונתבונן בקבוצה S המורכבת מהקבוצות שאינן מוזרות. אז S שייכת לעצמה אם ורק אם היא מוזרה (לפי הגדרת מוזרות), אם ורק אם אינה שייכת לעצמה (לפי הגדרת S), כלומר קיבלנו סתירה.

הטיעון של ראסל הוא טיעון פילוסופי שמראה שהמונח "קבוצה" צריך להיות מוגדר היטב אם נרצה להשתמש בו בטיעונים מתמטיים. קיימות מספר הגדרות למונח זה, וכאשר בוחרים הגדרה כזו, ניתן להפוך את פרדוקס ראסל למשפט מתמטי, כפי שנראה (בקירוב) בתרגיל הבא.

תרגיל 4.3.1. נניח שבקרב כל הקבוצות (במובן האינטואיטיבי) ישנן כאלה שאנחנו קוראים להן *קבוצה לגיטימית*. נניח שנתון שכל איבר של קבוצה לגיטימית גם הוא קבוצה לגיטימית, ושבהנתן נוסחה $\phi(x)$ בשפה עם סימן יחס דו-מקומי ϵ וקבוצה לגיטימית S, אוסף כל איברי S המקיימים את ϕ (כאשר ϵ מתפרש כשייכות) אף הוא קבוצה לגיטימית. הוכח שאוסף כל הקבוצות הלגיטימיות אינו קבוצה לגיטימית.

נשים לב שפרדוקס ראסל משתמש בצורה חזקה שמשני צידי יחס השייכות נמצאים איברים מאותו סוג: אנו שואלים האם קבוצה שייכת לעצמה. קנטור שם לב[4] שהתאמה בין קבוצה A לקבוצת החזקה שלה $\mathcal{P}(A)$ מאפשרת שוב להפוך את יחס השייכות ליחס עם אותה תכונה, ולכן לשחזר את פרדוקס. המסקנה היא שהתאמה כזו לא קיימת. ביתר פירוט:

משפט 4.3.2 (משפט קנטור). *לכל קבוצה A, לא קיימת העתקה חד-חד-ערכית מקבוצת החזקה שלה $\mathcal{P}(A)$ ל-A.*

הוכחה. נניח בשלילה ש-$g : \mathcal{P}(A) \to A$ היא העתקה חד-חד-ערכית. נתבונן בתת-הקבוצה $B = \{g(X) \in A \mid g(X) \notin X\} \in \mathcal{P}(A)$. יהי $b = g(B)$. אז $b \in B$ אם ורק אם $b = g(B) \notin B$ (לפי הגדרת B), סתירה. $\square$

נראה עתה טענה מקבילה בעולם הלוגיקה מסדר ראשון. נזכיר, שאם $\mathcal{M}$ מבנה עם עולם M[5], תת-קבוצה גדירה של M היא קבוצה מהצורה $\phi^{\mathcal{M}}$, כאשר ב-ϕ משתנה חפשי אחד. אם השפה היא בת-מניה, אז עצמת "קבוצת החזקה הגדירה" של M, כלומר קבוצת תתי-הקבוצות הגדירות של M, היא לכל היותר בת-מניה. בפרט, אם M אינסופית, אז ניתן למצוא התאמה חד-חד-ערכית מקבוצת תתי-הקבוצות הגדירות לקבוצת האיברים של M. אנחנו נתעניין אם אפשר למצוא התאמה כזו שהיא גדירה, במובן הבא.

---

[4] זה כנראה לא נכון מבחינה הסטורית

[5] בסעיף זה בכל החתימות יהיה רק סוג אחד

נניח ש-$\phi(x,\bar{y})$ נוסחא (x משתנה אחד). אפשרות אחת לייצר נוסחא במשתנה אחד x היא לבחור קבועים $\bar{c}$, ולהציבם במקום $\bar{y}$ ב-ϕ, כך שתתקבל הנוסחא $\phi(x,\bar{c})$. אם כל תת-קבוצה גדירה של M היא מהצורה $\phi(x,\bar{c})^{\mathcal{M}}$ עבור איזשהו $\bar{c}$, נאמר ש-ϕ *ממיינת את הקבוצות הגדירות ב-$\mathcal{M}$*.

ϕ ממיינת את הקבוצות הגדירות ב-$\mathcal{M}$

דוגמא 4.3.3. נניח ש-$\mathcal{M}$ הוא מבנה אינסופי עבור שפת השוויון, עם שני סימני קבוע a ו-b, כך ש-a ו-b מתפרשים כאיברים שונים. תהי $\psi(x,y_1,y_2)$ הנוסחא $x=y_1 \vee x=y_2$, ותהי הנוסחא $\phi(x,y_1,y_2,y_3,y_4)$

$$\begin{aligned} &y_3=a\wedge y_4=a\wedge\psi(x,y_1,y_2) && \vee \\ &y_3=a\wedge y_4=b\wedge\neg\psi(x,y_1,y_2) && \vee \\ &y_3=b\wedge y_4=a \end{aligned} \tag{4.6}$$

אז קל לראות שכל נוסחא חסרת כמתים במשתנה x שקולה ל-$\phi(x,c_1,c_2,c_3,c_4)$ עבור בחירה מתאימה של קבועים $\bar{c}$ (למשל, הנוסחא $x=b$ שקולה ל-$\phi(x,b,b,a,a)$). ראינו בטענה 3.4.15 שכל נוסחא שקולה לנוסחא חסרת כמתים במבנה כזה, ולכן ϕ ממיינת קבוצות גדירות.

אם $\phi(x,\bar{y})$ ממיינת קבוצות גדירות, אז אפשר לחשוב על הצבות ב-$\bar{y}$ כשמות לתתי-קבוצות, ועל ϕ כיחס השייכות, כלומר, את הטענה $\phi(x,\bar{y})$ ניתן לקרוא כ:"x שייך לקבוצה (הגדירה) $\bar{y}$". כעת, העקרון לעיל מראה שנגיע לסתירה אם x ו-$\bar{y}$ הם מאותו סוג, כלומר, אם $\bar{y}$ הוא משתנה יחיד מאותו סוג.

טענה 4.3.4. *אם $\mathcal{M}$ מבנה לחתימה כלשהי, אז לא קיימת נוסחא $\phi(x,y)$ בחתימה זו הממיינת קבוצות גדירות (כאשר y משתנה יחיד מאותו סוג כמו x)*

הוכחה. נניח בשלילה ש-ϕ כזו קיימת, ונתבונן בקבוצה המוגדרת על-ידי $\neg\phi(x,x)$. הואיל ו-ϕ ממיינת קבוצות גדירות, קיים קבוע c כך ש-$\phi(x,c)$ שקולה ל-$\neg\phi(x,x)$. עבור $x=c$ מתקבלת סתירה. □

תרגיל 4.3.5. השתמש בטענה האחרונה כדי להסיק את משפט קנטור על עצמת קבוצת החזקה (בהינתן קבוצה A הסותרת את הטענה, התבונן על A כמבנה לשפה עם סימן יחס דו-מקומי)

נשוב כעת אל ההקשר של $\mathbb{N}$. כזכור, סימנו ב-$\mathbf{\Phi}(x)$ את הקבוצה הגדירה של נוסחאות בחתימה של $\mathbb{PA}$ עם משתנה חפשי x. קבוצה זו מכילה את קבוצת הפסוקים, $\mathbf{\Phi}(0)$. את העובדה ש-$\mathbb{N}$ "יודע" שפסוקים אלה מדברים עליו ניתן לסכם בטענה הבאה.

טענה 4.3.6. *ההעתקה $n\mapsto\ulcorner c_n\urcorner$ (מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbf{T}$, קבוצת שמות העצם הגדירה) היא גדירה. כך גם ההעתקה $s:\mathbb{N}\times\mathbf{\Phi}(x)\to\mathbf{\Phi}(0)$ הנתונה על-ידי $s(n,\ulcorner\phi(x)\urcorner)=\ulcorner\phi(c_n)\urcorner$*

הוכחה. החלק השני מתקבל מהראשון כתוצאה מתרגיל 4.2.2. החלק הראשון נובע מאותו תרגיל ומשפט הרקורסיה □

השילוב של הטענה האחרונה עם שיטת הליכסון מטענה 4.3.4 מאפשר להוכיח את המסקנה הבאה, שנקראת משפט "אי-גדירות האמת" של טארסקי, ואת משפט אי-השלמות הראשון של גדל.

משפט 4.3.7 (אי גדירות האמת). *תהי* $V = \{\ulcorner\phi\urcorner \in \mathbf{\Phi}(0) \mid \phi^{\mathbb{N}} = 1\}$ *קבוצת מספרי גדל של התורה השלמה של* $\mathbb{N}$. *אז* V *אינה גדירה.*

הוכחה. במהלך ההוכחה, נרשום c_ϕ עבור $c_{\ulcorner\phi\urcorner}$ לכל נוסחא ϕ. נניח בשלילה ש-V גדירה על-ידי נוסחא $\theta(x)$, ונתבונן בנוסחא $\phi(x,y)$ הנתונה על-ידי $\theta(s(x,y))$, כאשר s כמו בטענה 4.3.6. אז בהנתן נוסחא $\psi(x)$, מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
& n \in \phi(x,c_\psi)^{\mathbb{N}} && \iff && (\text{פירוש } c_n \text{ ב-}\mathbb{N}) \\
& \phi(c_n,c_\psi)^{\mathbb{N}} = 1 && \iff && (\text{הגדרת } \phi) \\
& \theta(s(c_n,c_\psi))^{\mathbb{N}} = 1 && \iff && (\text{הגדרת } \theta) \\
& s(c_n,c_\psi)^{\mathbb{N}} \in V && \iff && (\text{הגדרת } s \text{ ו-} V) \\
& \psi[x=c_n]^{\mathbb{N}} = 1 && \iff && (\text{פירוש } c_n \text{ ב-}\mathbb{N}) \\
& n \in \psi^{\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

כלומר, הנוסחאות $\psi(x)$ ו-$\phi(x,c_\psi)$ מגדירות אותה קבוצה. הואיל וזה נכון לכל נוסחא ψ במשתנה אחד, קיבלנו ש-ϕ ממיינת קבוצות גדירות, בסתירה לטענה 4.3.4. □

כמסקנה מיידית, אנו מקבלים את משפט אי-השלמות:

משפט 4.3.8 (משפט אי השלמות הראשון). *התורה* $\mathbb{PA}$ *אינה מערכת אקסיומות שלמה עבור התורה של* $\mathbb{N}$. *באופן כללי יותר, ל-*$\mathbb{N}$ *אין מערכת אקסיומות שלמה וגדירה.*

הוכחה. הטענה השניה היא פשוט משפט 4.3.7 בניסוח אחר. הטענה על $\mathbb{PA}$ נובעת מזה, בצירוף מסקנה 4.2.8. □

4.4 משפט אי-השלמות השני

את הוכחת משפט אי השלמות ניתן לסכם באופן הבא: קיימת נוסחה $\mathbf{Q}(x,y)$ כך שלכל פסוק ϕ וכל מספר n מתקיים: $(n, \ulcorner\phi\urcorner) \in \mathbf{Q}^{\mathbb{N}}$ תקף אם ורק אם n הוא הקידוד של הוכחה של ϕ מ-$\mathbb{PA}$. לכן, הנוסחא $\mathbf{P}(y) = \exists x \mathbf{Q}(x,y)$ מקודדת את הטענה שלפסוק המקודד על-ידי y יש הוכחה מ-$\mathbb{PA}$. בהנתן נוסחא זו, מצאנו מספר m, כך ש-m הוא מספר גדל של הפסוק $\mathbf{G} = \neg\mathbf{P}(c_m)$. אז $\mathbf{G}$ מתפרש כטענה ש-$\mathbb{PA}$ לא מוכיחה את $\mathbf{G}$, ולכן (הואיל ו-$\mathbb{N}$ מודל של $\mathbb{PA}$), חייב להיות נכון.

ההוכחה מאפשרת לקודד טענות נוספות לגבי יכיחות: בהנתן פסוק ϕ, את שאלת היכיחות של ϕ ניתן לתרגם לשאלת התקיפות של הפסוק $\mathbf{P}(\ulcorner\phi\urcorner)$. בפרט, עבור הפסוק $0=1$, ניתן לשאול האם הפסוק $\neg\mathbf{P}(\ulcorner 0=1\urcorner)$ נובע מ-$\mathbb{PA}$. במלים אחרות, האם ניתן להוכיח מ-$\mathbb{PA}$ שב-$\mathbb{PA}$ אין סתירה. משפט אי השלמות השני אומר שלא:

משפט 4.4.1 (משפט אי-השלמות השני של גדל). *אם* $\mathbb{PA}$ *עקבית, אז גם* $\mathbb{PA} \cup \mathbf{P}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ *עקבית*

בדרך להוכחת המשפט, נענה על מספר שאלות נוספות. נניח מעכשיו ש-$\mathbb{PA}$ עקבית. אז משפט אי השלמות הראשון אומר ש-$\mathbf{G}$ אינו יכיח מ-$\mathbb{PA}$, ולכן ש-$\mathbb{PA} \cup \neg\mathbf{G}$ עקבית. לכן, על מנת להוכיח את משפט אי-השלמות השני, מספיק להוכיח את הטענה הבאה:

טענה 4.4.2. *עבור פסוק גדל* $\mathbf{G}$*, מ-*$\mathbb{PA}$ *נובע הפסוק* $\neg\mathbf{G} \to \mathbf{P}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$

כלומר, בכל מודל $\mathcal{M}$ של $\mathbb{PA}$ בו $\mathbf{P}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$ תקף, גם $\mathbf{P}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ תקף.

תרגיל 4.4.3. מדוע העובדה ש-$\neg\mathbf{G}$ תקף במודל $\mathcal{M}$ לא מובילה לסתירה?

הניסוח לעיל מראה, שעל מנת להוכיח את המשפט, עלינו להבין איך נראים מודלים של $\mathbb{PA}$ שאינם $\mathbb{N}$ (בניגוד למשפט אי השלמות הראשון, בו עבדנו כל הזמן ב-$\mathbb{N}$). השאלות שנצטרך לענות עליהן קשורות בשאלה: נניח ש-$\mathbb{PA}$ מוכיחה פסוק ϕ. האם היא גם מוכיחה שהיא מוכיחה אותו? כלומר, האם $\mathbb{PA}$ מוכיחה את $\mathbf{P}(\ulcorner \phi \urcorner)$? למעשה, התכונות הרלוונטיות נתונות בטענה הבאה:

טענה 4.4.4. *היחס* $\mathbf{P}(x)$ *מקיים את התנאים הבאים (לכל* ϕ *ו-*ψ*):*

1. *אם* $\mathbb{PA} \models \phi$ *אז* $\mathbb{PA} \models \mathbf{P}(\ulcorner \phi \urcorner)$
2. $\mathbb{PA} \models \mathbf{P}(\ulcorner \phi \to \psi \urcorner) \to (\mathbf{P}(\ulcorner \phi \urcorner) \to \mathbf{P}(\ulcorner \psi \urcorner))$
3. $\mathbb{PA} \models \mathbf{P}(\ulcorner \phi \urcorner) \to \mathbf{P}(\ulcorner \mathbf{P}(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner)$

בהנתן הטענה האחרונה, נוכיח עכשיו את משפט אי השלמות השני. נציין שההוכחה הבאה לא משתמשת במפורש בשום תכונה חוץ מאלה שנמנו בטענה האחרונה. בפרט, אותה הוכחה מראה משפט דומה עבור כל מערכת אקסיומות אחרת (במקום $\mathbb{PA}$) עבורה קיים יחס $\mathbf{P}$ המקיים את התכונות לעיל (יחס המקיים תכונות אלה נקרא *יחס יכיחות*). יחס יכיחות

הוכחת טענה 4.4.2. נשים לב ראשית שהשקילות $\mathbf{G} \leftrightarrow \neg\mathbf{P}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$ מוכחת על-ידי $\mathbb{PA}$ (למעשה, שני הצדדים כמעט שווים כמחרוזות). לכן, לפי החלק הראשון של טענה 4.4.4, $\mathbb{PA}$ מוכיחה גם את

$$\mathbf{P}(\ulcorner \mathbf{G} \leftrightarrow \neg\mathbf{P}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \urcorner) \tag{4.7}$$

ומשום כך, לפי החלק השני, את

$$\mathbf{P}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \leftrightarrow \mathbf{P}(\ulcorner \neg\mathbf{P}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \urcorner) \tag{4.8}$$

מאידך, לפי החלק השלישי, $\mathbb{PA}$ מוכיחה את

$$\mathbf{P}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \to \mathbf{P}(\ulcorner \mathbf{P}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \urcorner) \tag{4.9}$$

הואיל ו-$\mathbf{G} = \neg\mathbf{P}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$, אנו מקבלים שמ-$\mathbb{PA} \cup \neg\mathbf{G}$ ניתן להסיק את $\mathbf{P}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \wedge \mathbf{P}(\ulcorner \neg\mathbf{G} \urcorner)$. מהתכונות של $\mathbf{P}$ נובע שניתן להסיק את $\mathbf{P}(\ulcorner \mathbf{G} \wedge \neg\mathbf{G} \urcorner)$, ולכן גם את $\mathbf{P}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$. □

עד סוף סעיף זה נעסוק בהשלמת ההוכחה, על-ידי הוכחת טענה 4.4.4. נתחיל מהסעיף השני, שנובע ישירות מההגדרות.

תרגיל 4.4.5. הוכח את הסעיף השני של טענה 4.4.4

על מנת להוכיח את הסעיף הראשון של הטענה, נצטרך לבחון יותר מקרוב את הנוסחא שמגדירה את **P**, ובעיקר את הכמתים המעורבים בהגדרה. אם t ו-s שני שמות עצם, נרשום $t < s$ עבור הנוסחא $\exists y(t + y + 1 = s)$ (כאשר y לא מופיע ב-t או ב-s), ואם ϕ נוסחא, נרשום $\exists x < y\phi$ במקום $\exists x(x < y \wedge \phi)$ (כאן y משתנה שונה מ-x או שם עצם קבוע). נאמר שהנוסחא האחרונה התקבלה מ-ϕ על-ידי *כימות חסום*. כימות חסום

הגדרה 4.4.6. קבוצות הנוסחאות Σ_n ו-Π_n מוגדרות ברקורסיה באופן הבא.

1. לכל n, Σ_n היא קבוצת הנוסחאות ששלילתן ב-Π_n.

2. Π_0 היא הקבוצה הקטנה ביותר של נוסחאות שמכילה את הנוסחאות הבסיסיות, וסגורה תחת שלילה, גימום וכימות חסום.

3. Π_{n+1} היא קבוצת הנוסחאות מהצורה $\forall\bar{x}\phi$ כאשר $\phi \in \Sigma_n$ (נשים לב ש-$\bar{x}$ יכולה להיות באורך 0, כלומר, $\Sigma_n \subseteq \Pi_{n+1}$).

נוסחא נקראת *נוסחא רקורסיבית* אם היא שקולה (ביחס ל-$\mathbb{PA}$) לנוסחא ב-Σ_1 וגם לנוסחא ב-Π_1. נוסחא רקורסיבית
תת-קבוצה של $\mathbb{N}^m$ שייכת לאחת המחלקות הללו אם היא ניתנת להגדרה על-ידי נוסחא מאותה מחלקה.

אנחנו נתעניין בעיקר בתחתית ההירכיה הזו: Σ_0, נוסחאות רקורסיביות, ו-Σ_1. הסיבות לכך הן שמצד אחד, כל הנוסחאות שעסקנו בהן באופן מפורש נמצאות באחת הקבוצות הללו, ומצד שני, יש להן תכונות הרצויות לנו. ביתר פירוט, יש לנו התוצאות הבאות.

תרגיל 4.4.7. 1. הוכח שפעולות האריתמטיקה, והעתקת השארית Rem הן ב-Σ_0 (העתקה היא ב-Γ אם הגרף שלה ב-Γ)

2. הוכח שאם X ב-Σ_0 (או רקורסיבית), אז קיימת לה קבוצת מלים באותה מחלקה (כלומר, קבוצת מלים $(X^+, |\cdot|, p)$ כאשר כל הרכיבים באותה מחלקה).

3. הוכח שאם העתקה היא ב-Σ_1, אז היא רקורסיבית (רמז: אם $f(x) \neq y$ אז $f(x) = y_1$ עבור $y_1 \neq y$).

4. הוכח שאם f העתקה ב-Σ_1, ו-$\phi(x, y)$ יחס רקורסיבי, אז היחס $\exists y{<}f(x)(\phi(x, y))$ רקורסיבי אף הוא.

5. בתנאים של משפט הרקורסיה (חלק ראשון), נניח ש-$X = \mathbb{N}$ (לשם הפשטות), ש-A_0 ו-D רקוריסיביים, וגם: קיימת העתקה $b : \mathbb{N} \times X \to \mathbb{N}$ ב-Σ_1 כך שאם $(n, x_1, \dots, x_m, x) \in D$ אז $x_i < b(n, x)$. הוכח כי בתנאים אלה, הקבוצה A הנתונה על-ידי משפט הרקורסיה היא רקורסיבית

6. הוכח שקבוצת (מספרי גדל של) שמות העצם היא רקורסיבית

7. הוכח שקבוצת הנוסחאות, הפסוקים, ההוכחות, ויתר האלמנטים התחביריים הם רקורסיביים

בתרגיל הבא, נראה שלנוסחאות הרקורסיביות תכונות הרצויות לנו:

תרגיל 4.4.8 1. הוכח ש-$\mathbb{N}$ הוא תת-מבנה של כל מודל של $\mathbb{PA}$

2. הוכח שאם ϕ פסוק ב-Σ_1, ו-$\mathbb{N} \models \phi$, אז $\mathbb{PA} \models \phi$

3. הוכח שאם ϕ נוסחא רקורסיבית, אז לכל מודל $\mathcal{M}$ של $\mathbb{PA}$ ולכל מספר טבעי n מתקיים: $n \in \phi^{\mathcal{M}}$ אם ורק אם $n \in \phi^{\mathbb{N}}$

4. הוכח שקבוצת הפסוקים הניתנים להוכחה מ-$\mathbb{PA}$ היא ב-Σ_1, אך אינה רקורסיבית

5. הסק את הסעיף הראשון של טענה 4.4.4

נותר לנו להוכיח את החלק השלישי של הטענה: אם, במודל $\mathcal{M}$ של $\mathbb{PA}$, מתקיים $\mathbf{P}(\ulcorner\phi\urcorner)$, אז מתקיים גם $\mathbf{P}(\ulcorner\mathbf{P}(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner)$. נשים לב שהתרגיל האחרון מראה שזה נכון עבור המודל $\mathbb{N}$. הרעיון יהיה לחזור על התרגיל האחרון בתוך $\mathcal{M}$. למעשה, הטענה היא מקרה פרטי של הטענה הבאה:

טענה 4.4.9. *לכל פסוק* $\phi \in \Sigma_1$ *מתקיים* $\mathbb{PA} \models \phi \rightarrow \mathbf{P}(\ulcorner\phi\urcorner)$

כאמור, על מנת להוכיח את הטענה האחרונה, ננסה לחזור על הוכחת החלק הראשון במודל כללי של $\mathbb{PA}$. אם $\mathcal{M}$ מודל של $\mathbb{PA}$ שגם מספק את ϕ, עלינו להראות ש-$\mathbf{P}(\ulcorner\phi\urcorner)^{\mathcal{M}} = 1$, כלומר ש-$\phi$ יכיח מ"נקודת המבט" של $\mathcal{M}$.

כשדיברנו, בסעיף 4.2, על לוגיקה גדירה ב-$\mathbb{N}$, הזכרנו למעשה רק את הצד התחבירי של הלוגיקה. עכשיו הגיע הזמן להזכיר גם את הצד הסמנטי. הרעיון אז יהיה להמיר את הטענה לטענה סמנטית, בעזרת אנאלוג מתאים של משפט השלמות. נפתח במספר הערות.

ראשית, הואיל ועכשיו אנחנו עובדים עם *התורה* (הלא שלמה) $\mathbb{PA}$, במקום עם המבנה $\mathbb{N}$, מונחים כמו "קבוצה גדירה" יש לפרש כ-"נוסחא, עד כדי שקילות ביחס ל-$\mathbb{PA}$". למשל, חתימה מורכבת מנוסחא $\phi(x)$ (במספר כלשהו של משתנים) של סוגים, נוסחא $\rho(y)$ של סימני יחס, ונוסחא $\psi(y,z)$ ש-$\mathbb{PA}$ מוכיחה שמגדירה העתקה מ-$\rho^{\mathcal{M}}$ ל-$\theta^{\mathcal{M}}$, כאשר θ מגדירה את קבוצת המלים מעל ϕ (נשים לב שקבוצת המלים קיימת באחידות ביחס ל-$\mathbb{PA}$). מעכשיו נפרש את כל הקבוצות הגדירות באופן הזה.

נשים לב שאם $\mathbf{M}$ קבוצה גדירה מעל קבוצה גדירה $\mathbf{S}$, אז את קבוצת המלים $\mathbf{M}^+$ אפשר לראות כקבוצה מעל $\mathbf{S}^+$ (על-ידי כך שמפעילים את ההעתקה על כל "אות"). כמו-כן, אם $\mathbf{X}$ ו-$\mathbf{Y}$ שתי קבוצות מעל $\mathbf{S}$, נסמן ב-$\mathbf{X} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{Y}$ את קבוצת הזוגות (x,y) כך ש-x ו-y יושבים מעל אותו איבר ב-$\mathbf{S}$ (זוהי קבוצה גדירה מעל $\mathbf{S}$).

הגדרה 4.4.10. נניח ש-$\mathbf{\Sigma} = (\mathbf{S}, \mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{F}, \mathbf{f})$ חתימה גדירה. *מבנה גדיר* עבור $\mathbf{\Sigma}$ מורכב מהנתונים הבאים: מבנה גדיר

1. קבוצה גדירה $\mathbf{m} : \mathbf{M} \to \mathbf{S}$ מעל $\mathbf{S}$,

2. תת-קבוצה גדירה $\mathbf{U}$ של $\mathbf{R} \times_{\mathbf{S}^+} \mathbf{M}^+$

3. העתקה גדירה $\mathbf{e} : \mathbf{F} \times_{\mathbf{S}^+} \mathbf{M}^+ \to \mathbf{M}$ כך ש-$\mathbf{m}(\mathbf{e}(f,m)) = \pi_2(\mathbf{f}(f))$

אם $(\mathbf{M}, \mathbf{U}, \mathbf{e})$ מבנה גדיר עבור החתימה הגדירה $\mathbf{\Sigma}$, אז הוא מגדיר מבנה במובן הרגיל עבור החתימה $\mathbf{\Sigma}^{\mathbb{N}}$, באופן הבא: העולם עבור הסוג $a \in \mathbf{S}^{\mathbb{N}}$ הוא $\mathbf{M}_a^{\mathbb{N}}$. סימן היחס $R \in \mathbf{R}^{\mathbb{N}}$ מתפרש כ-$\mathbf{U}_R = \{\bar{m} \mid (R, \bar{m}) \in \mathbf{U}^{\mathbb{N}}\}$, וסימן הפונקציה $f \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$ מתפרש על-ידי $f(\bar{m}) = \mathbf{e}(f, \bar{m})$.

אם $\mathbf{V}$ קבוצה גדירה של משתנים (מעל $\mathbf{S}$), אפשר לחשוב על איבר (x,m) של $(\mathbf{V} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{M})^{\mathbb{N}}$ כעל השמה למשתנה x בתוך $\mathbf{M}^{\mathbb{N}}$, ולכן קבוצת ההשמות לסדרות סופיות של משתנים מקודדת על-ידי תת-קבוצה (גדירה) של $(\mathbf{V} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{M})^+$. נסמן קבוצה זו ב-$\mathbf{M}^{\mathbf{V}}$. באופן דומה אפשר להגדיר את יתר האלמנטים הסמנטיים:

תרגיל 4.4.11. נסמן ב-$\mathbf{\Phi}_k$ את הקבוצה הגדירה של הנוסחאות (בחתימה גדירה כלשהי) מעל $\mathbf{V}$ שניתן לבנות ב-k שלבים.

1. הוכח שקיימת קבוצה גדירה $\mathbf{U}_k \subseteq \mathbf{\Phi}_k \times \mathbf{M}^{\mathbf{V}}$ כך ש-$(\ulcorner\phi\urcorner, \bar{m}) \in \mathbf{U}_k^{\mathbb{N}}$ אם ורק אם $\bar{m} \in \phi^{\mathbf{M}^{\mathbb{N}}}$. בפרט, קבוצת הפסוקים ב-$\mathbf{\Phi}_k$ אשר תקפים ב-$\mathbf{M}^{\mathbb{N}}$ היא גדירה

2. איפה הטעות בטיעון הבא? בסעיף הקודם ראינו ש-$\mathbf{U}_k$ גדירה לכל k. ההגדרה של פירוש הנוסחא ניתנת לביטוי ב-$\mathbb{PA}$, ולכן לפי משפט הרקורסיה, הקבוצה $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{\Phi} \times \mathbf{M}^{\mathbf{V}}$ הממיינת את כל הקבוצות הגדירות. זו סתירה למשפט 4.3.7

הגענו עתה למצב שמאפשר לנו לפחות לנסח את הגרסא הגדירה של מספר תוצאות שראינו, בפרט:

משפט 4.4.12 (משפט השלמות הגדירה). *נניח ש-$\mathbf{\Theta}$ תורה גדירה, יהי ϕ פסוק גדיר באותה חתימה, ויהי ψ הפסוק $\mathbf{\Theta} \vdash \phi$. אז קיים מודל גדיר $\mathbf{M}$ של $\mathbf{\Theta}$ כך ש-$\mathbb{PA} \models (\psi \leftrightarrow \phi^{\mathbf{M}} = 1)$*

נדלג על הפרטים של ההוכחה, אבל הנקודה היא שההוכחה של משפט השלמות הרגיל היא פחות או יותר מפורשת: הנחנו ש-$\mathbf{\Theta}$ אינה מוכיחה את ϕ, ובנינו מודל מפורש מתוך המבנה הסינטקטי של $\mathbf{\Theta}$ בו $\neg\phi$. ניתן לחזור על הבניה המפורשת הזו בתוך $\mathbb{PA}$.

נחזור כעת לתורה הגדירה $\mathbb{PA}$, ונוכיח את טענה 4.4.9. הרעיון הוא לחזור על הוכחת טענה 4.4.4 בתוך $\mathbb{PA}$.

הוכחת טענה 4.4.9. נניח ש-$\mathcal{N}$ מודל של $\mathbb{PA}$ כך ש-$\phi^{\mathcal{N}} = 1$. עלינו להוכיח ש-$\mathbf{P}(\ulcorner\phi\urcorner)^{\mathcal{N}} = 1$, כלומר, שב-$\mathcal{N}$ מתקיים $\ulcorner\mathbb{PA}\urcorner^{\mathcal{N}} \vdash \phi$. לפי משפט 4.4.12, מספיק להראות שלכל מודל גדיר $\mathbf{M}$ של $\mathbb{PA}$, הפסוק ϕ תקף ב-$\mathbf{M}^{\mathcal{N}}$.

על פי הנתון, $\phi = \exists x \psi(x)$, כאשר ψ רקורסיבית. אז קיים $n_0 \in \mathcal{N}$, כך ש-$n_0 \in \psi^{\mathcal{N}}$. כזכור, ההעתקה $x \mapsto \ulcorner c_x \urcorner$ גדירה, ולכן לכל איבר של $\mathcal{N}$ קיים קבוע מתאים, והתורה $\mathbb{PA}^{\mathcal{N}}$ מכילה את כל היחסים חסרי הכמתים בין איברי $\mathcal{N}$. המודל הגדיר $\mathbf{M}$ מפרש את כל הקבועים

הללו, ולכן נתון לנו הומומורפיזם מ-$\mathcal{N}$ ל-$\mathbf{M}^{\mathcal{N}}$ (ונזהה מעכשיו את $\mathcal{N}$ עם התמונה). יתר-על-כן, כמו במקרה הסטנדרטי, אם $m < n$ כאשר $m \in \mathbf{M}^{\mathcal{N}}$ ו-$n \in \mathcal{N}$, אז $m \in \mathcal{N}$. לכן n_0 ממשיך להיות איבר גם ב-$\psi^{\mathbf{M}^{\mathcal{N}}}$. □

הוכחת הטענה מסיימת את (סקירת) ההוכחה של משפט אי השלמות השני. עבור מי שמצא את ההוכחה ארוכה ומסובכת, [2] מכיל הסבר במילים בנות הברה אחת.

5 גאומטריית המישור

בסעיף זה נחזור לשאלות שהתחלנו איתן לגבי הפרויקט של אוקלידס: מהן האקסיומות של הגאומטריה של המישור? נראה שבניגוד למצב בתורת המספרים, ניתן לתת רשימה מפורשת של אקסיומות שמתארות לחלוטין את גאומטריית המישור. במלים אחרות, מערכת האקסיומות הזו היא *שלמה*.

5.1 מערכת אקסיומות לגאומטריה

ישנן מספר בחירות טבעיות לחתימה של גאומטריית המישור. החתימה בה נשתמש תהיה שונה מעט מהחתימה המקורית של טארסקי, שכללה רק סוג אחד, עבור הנקודות. הסיבה היא בעיקר נוחות הרישום.

החתימה של גאומטריית המישור

הגדרה 5.1.1. *החתימה של גאומטריית המישור* מורכבת משני סוגים, **P** (נקודות) ו-**S** (קטעים), ומשני סימני יחס, $\in \in \mathscr{R}_{\mathrm{PS}}$ (שייכות) ו-$\sim \in \mathscr{R}_{\mathrm{SS}}$ (חפיפה).

על מנת להקל על הרישום, נשתמש באותיות גדולות עבור משתנים וקבועים ב-S, וכך נימנע מרישום הסוג. כמו-כן, נרשום כרגיל $x \in I$ או $I \sim J$ במקום צורת הרישום הפורמלית. במהלך מניית האקסיומות נוכיח שיחסים ופונקציות מסוימים הם גדירים, וכשנעשה זאת נוסיף עבורם סימונים, בתור קיצור. יתר-על-כן, נקצר נוסחא מהצורה $\forall x(x \in I \rightarrow \dots)$ על-ידי $\forall x \in I(\dots)$ (ובאופן דומה עבור יחסים נוספים שנגדיר), ואת הנוסחה $\forall x \in I(x \in J)$ על-ידי $I \subseteq J$.

כמו במקרה של תורת המספרים, אנו מתעניינים במבנה מסוים עבור החתימה הזו, המישור האוקלידי. בתקופתו של אוקלידס לא היה תיאור מדויק של המבנה הזה (זה מה שאוקלידס ניסה לייצר!), אולם אנחנו מכירים מבנה כזה:

המישור האפיני הממשי $\mathbb{A}(\mathbb{R})$

הגדרה 5.1.2. *המישור האפיני הממשי* $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ הוא המבנה עבור החתימה לעיל, בו הסוג **P** מתפרש כ-$\mathbb{R}^2$, הסוג **S** מתפרש כקבוצת הקטעים הסגורים במישור (כלומר, קבוצות מהצורה $I_{a,v} = \{a + tv \mid 0 \le t \le 1\}$, כאשר $a \in \mathbb{R}^2$, ו-v וקטור), $\in$ הוא יחס השייכות, ו-$\sim$ הוא יחס החפיפה.

את המשימה שלנו, אם-כן, היא לענות על השאלה הבאה:

שאלה 5.1.3. האם קיימת אקסיומטיזציה מפורשת של המבנה $\mathbb{A}(\mathbb{R})$?

טארסקי הראה שהתשובה היא "כן", כלומר הציג מערכת כזו. נתחיל כעת למנות את האקסיומות בשלבים. בכל המקרים, קל לבדוק שהאקסיומות הללו אכן תקיפות ב-$\mathbb{A}(\mathbb{R})$.

$$\forall I, J((I \subseteq J \wedge J \subseteq I) \rightarrow I = J) \tag{$G1$}$$

$$\forall x, y \exists I(x, y \in I \wedge \forall J(x, y \in J \rightarrow I \subseteq J)) \tag{$G2$}$$

תרגיל 5.1.4. הסק משתי האקסיומות הללו שההעתקה (ב-$\mathbb{A}(\mathbb{R})$) ששולחת שתי נקודות a, b לקטע $[a, b]$ שקצוותיו a ו-b היא גדירה, ושלכל שתי נקודות x, y (בכל מודל) מתקיים $[x, y] = [y, x]$.[6]
הוכח גם שלא נובע מהאקסיומות שהעתקה זו היא על.

$[x, y]$
קטע מנוון

מעכשיו נוסיף את הסימון $[x, y]$ עבור הפונקציה הנ"ל לשפה. נאמר ש-I הוא *קטע מנוון* אם הוא מכיל רק נקודה אחת. כמובן שאם $x \neq y$, אז $[x, y]$ אינו מנוון.

השלב הבא הוא לדבר על קווים:

קולינאריות

הגדרה 5.1.5. נאמר שנקודות x, y, z הן *קולינאריות* אם מתקיים

$$x \in [y, z] \vee y \in [x, z] \vee z \in [x, y]$$

$L(x, y, z)$

נסמן נוסחא זו ב-$L(x, y, z)$

האקסיומות הבאות מבטאות את העובדה שכל קטע שמכיל יותר מנקודה אחת מגדיר קו יחיד. זוהי גרסא של היחידות באקסיומה הראשונה של אוקלידס.

$$\forall I \forall x, y, z \in I(L(x, y, z)) \tag{$G3$}$$

$$\begin{gathered}\forall x_1, x_2, x_3, x_4(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \rightarrow (\\ (L(x_1, x_2, x_3) \wedge L(x_2, x_3, x_4)) \rightarrow L(x_1, x_2, x_4)))\end{gathered} \tag{$G4$}$$

תרגיל 5.1.6. הוכח שמשתי האקסיומות האחרונות נובע: אם $x, y, x_1, y_1 \in I$ ו-$x \neq y$ ו-$x_1 \neq y_1$, אז לכל z מתקיים $L(x, y, z)$ אם ורק אם $L(x_1, y_1, z)$

מהתרגיל האחרון שהקו המוגדר על-ידי קטע מוגדר היטב:

הקו הנקבע על-ידי I
$L_I(x)$

הגדרה 5.1.7. אם I קטע בו שתי נקודות שונות a, b, אז *הקו הנקבע על-ידי* I הוא הקבוצה $L_I(x)$ המוגדרת על-ידי $L(a, b, x)$ (לפי התרגיל האחרון, קבוצה זו אינה תלויה ב-a, b)

$L_I = L_J$
$L_I \pitchfork L_J$

עבור קטעים לא מנוונים I ו-J, נסמן ב-$L_I = L_J$ את הנוסחא $\forall x(L_I(x) \leftrightarrow L_J(x))$, וב-$L_I \pitchfork L_J$ את הנוסחא $\forall x \neg(L_I(x) \wedge L_J(x))$.

מושג הקו מאפשר לנו להגדיר מתי שני קטעים בלתי-מנוונים הם מקבילים:

הגדרה 5.1.8. נאמר שקטעים לא מנוונים I ו-J הם *קטעים מקבילים* אם הם מקיימים את היחס $I \parallel J$ המוגדר על-ידי הנוסחא קטעים מקבילים

$I \parallel J$

$$L_I{=}L_J \vee L_I \pitchfork L_J$$

במישור האוקלידי, יחס המקבילות על קטעים הוא יחס שקילות. אפשר להראות בקלות שזה לא נובע מהאקסיומות שיש לנו עד כה. למעשה, הטענה שזהו יחס שקילות מהווה חלק מאקסיומת המקבילים: ישנם מודלים גאומטריים בהם קיימים שני ישרים שונים המקבילים לישר נתון, ועוברים דרך נקודה נתונה. שני ישרים אלה כמובן אינם מקבילים אחד לשני. נוסיף, אם כן, את אקסיומת המקבילים לתורה:

$$\forall I \forall x (\exists J \parallel I (L_J(x)) \wedge \forall J, K \parallel I (L_J(x) \wedge L_K(x) \to J \parallel K)) \qquad (G5)$$

(כל הקטעים המופיעים כאן הם בלתי-מנוונים).

תרגיל 5.1.9.

תרגיל 5.1.10. הוכח את המסקנות הבאות של האקסיומות שניתנו עד-כה:

1. $\parallel$ יחס שקילות

2. אם $L_I \cap L_J$ מכיל לפחות שתי נקודות שונות, אז $L_I = L_J$

3. אם $[a,c] \parallel [a,b]$, אז $L(a,b,c)$. בפרט, אם $b \neq c$, אז $[b,c] \parallel [a,b]$.

4. אם I אינו מקביל ל-J, אז בחיתוך של L_I ו-L_J יש בדיוק נקודה אחת. נסמן נקודה זו ב-$I.J$. $I.J$

טענה 5.1.11. *אם* a,b,c *שלוש נקודות שונות, כך ש-*$[a,c] \nparallel [a,b]$*, אז קיימת נקודה יחידה* d *כך ש-*$[a,c] \parallel [b,d]$ *ו-*$[c,d] \parallel [a,b]$*. יתר-על-כן,* $[a,d]$ *אינו מקביל ל-*$[a,c]$ *או ל-*$[b,d]$.

גאומטרית, d הוא הקדקוד הרביעי במקבילית שקדקדיה הם a,b,c.

הוכחה. קיום: לפי $(G5)$, קיים קטע I כך ש-$[a,b] \parallel I$ ו-$L(I,c)$. כמו-כן, קיים קטע J כך ש-$[a,c] \parallel J$ ו-$L(J,b)$. אנו טוענים ש-$J \nparallel I$: אחרת, $[a,c] \parallel J \parallel I \parallel [a,b]$, בסתירה להנחה. תהי $d = I.J$. אז $b \neq d$: אחרת, הואיל ו-I מקביל ל-$[a,b]$ ועובר דרך d, נקבל ש-$L_I = L_{[a,b]}$, והואיל ו-$c \in L_I$, נקבל ש-$[a,c]$ מקביל ל-$[a,b]$, שוב בסתירה להנחה. לכן, $L_J = L_{[b,d]}$, כלומר $[b,d] \parallel J$, ולכם $[a,c] \parallel [b,d]$. באופן דומה, $[a,b] \parallel [c,d]$.

יחידות: אם e פתרון נוסף, אז $[b,e]$ ו-$[b,d]$ שניהם מקבילים ל-$[a,c]$, ולכן $[b,e] \parallel [b,d]$. מכאן ש-$L(b,d,e)$, ובאופן דומה $L(c,d,e)$. לכן $L(b,c,d)$ ולכן $[a,b] \parallel [c,d] \parallel [b,d]$, בסתירה להנחה

להוכחת הטענה האחרונה, נשים לב ראשית ש-$a \neq d$. נניח ש-$[a,b] \parallel [a,d]$. הואיל ו-$[c,d] \parallel [a,b]$, מתקבל מטרנזיטיביות ש-$[c,d] \parallel [a,d]$, ולכן לפי התרגיל, $[a,b] \parallel [c,d] \parallel [a,c]$, בניגוד לנתון. ☐

[6] לכן, ניתן לחשוב על האקסיומות הללו כגרסה של האקסיומה הראשונה של אוקלידס

לכל שלשה של נקודות כמו בטענה האחרונה, נסמן ב-$\lozenge(a,b,c)$ את הנקודה d. מהטענה קל לראות שהיחס $\lozenge(a,b,c)=d$ הוא סימטרי (כלומר $\lozenge(a,b,c)=d$ אם ורק אם $\lozenge(\sigma(a),\sigma(b),\sigma(c))=\sigma(d)$, כאשר σ תמורה כלשהי של הקבוצה $\{a,b,c,d\}$). נקרא לרביעיה המקיימת את היחס הזה *מקבילית*.

מקבילית

יהיה לנו נוח לקבוע מקבילית אחת, שתיקרא *מערכת קואורדינטות*, ולעבוד איתה. על-מנת לעשות זאת, נוסיף קבועים $\mathbf{o},\mathbf{a},\mathbf{b}$ מסוג $\mathbf{P}$ לשפה, ואת האקסיומה

מערכת קואורדינטות

$\mathbf{o},\mathbf{a},\mathbf{b}$

$$\mathbf{o}\neq\mathbf{a}\wedge\mathbf{o}\neq\mathbf{b}\wedge\mathbf{a}\neq\mathbf{b}\wedge[\mathbf{o},\mathbf{a}]\nparallel[\mathbf{o},\mathbf{b}] \qquad (G6)$$

לתורה. מבנה זה אינו חלק מהתורה הסופית, ובהמשך נוותר עליו. את האיבר הגדיר $\lozenge(\mathbf{o},\mathbf{a},\mathbf{b})$ נסמן ב-$\mathbf{1}$.

1

מקורות

[1] Kenneth Appel and Woflgang Haken. “The solution of the four-color-map problem.” In: *Sci. Amer.* 237.4 ,(1977) pp. −108,121 .152 ISSN: .0036-8733

[2] George Boolos. *Gödel’s second incompleteness theorem explained in words of one syllable.* .1994 URL: http://www2.kenyon.edu/Depts/Math/Milnikel/boolos-godel.pdf.

[3] Herbert B. Enderton. *A mathematical introduction to logic.* 2nd ed. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, ,2001 pp. xii+317. ISBN: -0-12 .238452-0

[4] Euclid. *The Elements.* Online version with Java illusetrations by David E. Joyce. URL: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html.

[5] Douglas R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid.* New York, NY, USA: Basic Books, Inc., .1979 ISBN: .0465026850

[6] Elliott Mendelson. *Introduction to mathematical logic.* 4th ed. Chapman & Hall, London, ,1997 pp. x+440. ISBN: .0-412-80830-7

[7] Woflgang Rautenberg. *A concise introduction to mathematical logic.* 2nd ed. Universitext. With a foreword by Lev Beklemishev. Springer, New York, ,2006 pp. xviii+256. ISBN: .978-0387-30294-2

[8] Abraham Robinson. *Non-standard analysis.* Princeton Landmarks in Mathematics. Reprint of the second (1974) edition, With a foreword by Wilhelmus A. J. Luxemburg. Princeton University Press, Princeton, NJ, ,1996 pp. xx+293. ISBN: .0-691-04490-2

[9] Raymond M. Smullyan. *Gödel's incompleteness theorems*. Vol. .19 Oxford Logic Guides. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, ,1992 pp. xvi+139. ISBN: .0-19-504672-2

[10] *The Four color theorem*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem.