לוגיקה מתמטית

משה קמנסקי

20 בינואר 2025

1 מבוא

לוגיקה מתמטית הוא התחום במתמטיקה שחוקר בצורה מדויקת מושגים כמו "טענה" ו-"הוכחה". על מנת לספק מוטיבציה, נתבונן בשתי דוגמאות היסטוריות.

1.1 גאומטריית המישור

אוקלידס רצה לדעת את כל הדברים שנכונים עבור נקודות, קווים ומעגלים במישור[1]. על-מנת להבין זאת, אוקלידס ניסה לנסח רשימה קצרה של הנחות יסוד שנכונותן "אינה מוטלת בספק", ולהוכיח מהן את כל יתר הטענות הנכונות. ארבעת הנחות היסוד הראשונות אכן פשוטות מאד: הראשונה, לדוגמא, אומרת שבין כל שתי נקודות קיים קו ישר אחד (את עבודתו של אוקלידס, "האלמנטים", ניתן לקרוא עד היום, גם באינטרנט: [3]). אוקלידס הצליח להוכיח את עשרים ושמונה הטענות הראשונות שלו בעזרת ארבע הנחות בסיס אלה[2]. על מנת להוכיח טענות נוספות, הוא נזקק להנחת יסוד נוספת, שקולה ל*אקסיומת המקבילים*: דרך נקודה הנמצאת מחוץ לישר נתון, עובר בדיוק ישר אחד מקביל לישר הנתון. הנחת יסוד זו פחות פשוטה ומובנת מאליה, ואוקלידס ניסה, אך לא הצליח, להוכיח אותה מארבע הנחות היסוד הראשונות.

השאלה איך להוכיח את אקסיומת המקבילים נותרה פתוחה מאות שנים, עד שהוכח שהאקסיומה *בלתי תלויה*: לא ניתן להוכיח (או להפריך) אותה מיתר הנחות היסוד. נשים לב, שטענה זו אינה טענה גאומטרית: היא אינה עוסקת בנקודות או קווים, אלא בטענות מתמטיות (מבחינה גאומטרית, אנחנו יודעים שאקסיומת המקבילים תקפה במישור). הטענה שייכת לתחום של *לוגיקה מתמטית*, בו הטענה שאקסיומת המקבילים בלתי תלויה באקסיומות האחרות, היא עצמה טענה מתמטית.

איך הוכחה הטענה? גאוס, לובאצ'בסקי ובוליאי (ובעקבותיהם מתמטיקאים אחרים) בנו *מודל* של ארבע האקסיומות הראשונות של אוקלידס, כלומר מבנה עם "קווים" ו-"נקודות", בו הקווים

[1] ניתן לקרוא את הסיפור הזה יותר בהרחבה ב-[5]

[2] למעשה, כפי שנראה, הוא השתמש בהנחות נוספות

והנקודות מתנהגים כמו שמוכתב על ידי האקסיומות הראשונות, אולם בו אקסיומת המקבילים אינה מתקיימת. מודל זה בהכרח שונה מהמישור הרגיל, בו אקסיומת המקבילים תקפה, אבל הוא "שווה זכויות" לו: כל טענה שניתן להוכיח מארבע האקסיומות הראשונות, תקפה גם בו. *למעשה*, כל הוכחה מתוך אקסיומות אלה נותן טענה תקפה *בכל המבנים המקיימים אותן*.

מה לגבי הכיוון ההפוך? נניח שיש לנו טענה בגאומטריה שנכונה בכל המודלים שסופקו על-ידי גאוס וחבריו, וגם בכל מודל אחר של ארבע האקסיומות הראשונות. האם ניתן אז להוכיח טענה זו מתוך אותן אקסיומות? לכאורה, אפשר לדמיין שהטענה נכונה "במקרה" בכל המבנים הללו, בלי שניתן להוכיח אותה. אנחנו נראה שזה לא כך:

משפט א' (*משפט השלמות*, 3.10.15). כל טענה שנכונה בכל מבנה המקיים את האקסיומות של אוקלידס, ניתן להוכחה מאקסיומות אלה

בניסוח המשפט (שאינו מנוסח בצורה מדויקת בשלב זה) לא הקפדנו לציין על איזו קבוצת אקסיומות מדובר. למעשה, זה לא משנה: המשפט תקף לכל קבוצת אקסיומות, ולא רק לגאומטריה.

כאמור, משפט השלמות אינו משפט בגאומטריה. מהם האובייקטים המתמטיים המופיעים במשפט הזה? על-מנת שנוכל אפילו לנסח את המשפט, עלינו לענות לפחות על השאלות הבאות:

שאלה 1.1.1. איך אפשר לראות טענות כאובייקטים מתמטיים?

שאלה 1.1.2. מהי הוכחה של טענה אחת מטענות אחרות?

שאלה 1.1.3. מהי משמעות האמירה שטענה מסוימת נכונה בגאומטריית המישור? באופן יותר כללי, מתי נאמר שטענה היא נכונה? מה הקשר בין זה לבין הוכחות של הטענה?

שאלה 1.1.4. איך ניתן להוכיח שטענה מסוימת לא תלויה באחרות?

בהינתן שהאקסיומה בלתי תלויה, התוספת שלה כהנחת יסוד מוצדקת. אבל האם יש טענות נוספות שאינן תלויות במערכת האקסיומות החדשה? האם אפשר לרשום רשימת אקסיומות המאפינות את המישור לחלוטין? תשובה אפשרית אחת לשאלה האחרונה נתונה במשפט הבא:

משפט ב' (*משפט לוונהיים-סקולם*, 3.9.12). לכל קבוצה אינסופית A קיים מבנה המקיים את כל הטענות המתקיימות בגאומטריית המישור, שבו קבוצת הנקודות היא A.

שוב, גם משפט זה נכון למבנים כלליים, ולא רק לגאומטריה.

1.2 אריתמטיקה

ראינו לעיל שלא ניתן לאפיין לגמרי את גאומטריית המישור על ידי רשימה של אקסיומות. עדיין, אפשר לשאול האם לפחות אפשר להוכיח את כל מה שנכון בגאומטריית המישור מתוך כל חמש האקסיומות של אוקלידס. מסתבר שלא, ולמעשה אפילו המשפט הראשון בספרו של אוקלידס דורש אקסיומות נוספות. אולם טארסקי, בתחילת המאה ה-20 (בעקבות עבודה של קליין, הילברט, ומתמטיקאים נוספים) הצליח להשלים את הרשימה: הוא נתן רשימה מפורשת של אקסיומות, והוכיח שמהן ניתן להוכיח את כל הטענות הגאומטריות הנכונות במישור.

תחום נוסף שבו עסקו היוונים הוא תורת המספרים. גם שם הניסיון הוא לגלות את כל הטענות הנכונות עבור המספרים הטבעיים. בניגוד לגאומטריה, הם לא ניסו לעבוד בשיטה האקסיומטית.

שאלה 1.2.1. האם ניתן לראות גם טענות על מספרים כאובייקטים מתמטיים?

מערכת אקסיומות עבור המספרים הטבעיים הוצעה על-ידי פיאנו. כמו בגאומטריה, גם כאן ניתן לשאול:

שאלה 1.2.2. האם אקסיומות פיאנו מוכיחות את כל הטענות הנכונות על מספרים טבעיים? אם לא, האם קיימת מערכת אחרת שעושה זאת?

אנחנו נראה:

משפט ג' (*משפט אי השלמות*, **??**). ישנן טענות בתורת המספרים שנכונות בטבעיים, אך אינן ניתנות להוכחה מאקסיומות פיאנו

למעשה, המשפט אינו יחודי לאקסיומות פיאנו, ותקף לכל מערכת אקסיומות שניתנת לתיאור מפורש (במובן שנראה מאוחר יותר).

1.3 מבנים אחרים

שתי הדוגמאות האחרונות דנות בשני נושאים מרכזיים במתמטיקה: גאומטריה ותורת המספרים. אלה תחומים חשובים, אך אינם היחידים.

שאלה 1.3.1. באילו מבנים ותורות מתמטיות ניתן לעסוק בשיטות הנ"ל? אילו כלים קיימים על מנת לענות על שאלות מהסוג לעיל לתורות אחרות?

אנחנו נראה מספר שימושים מפתיעים של טענות בלוגיקה לתחומים אחרים במתמטיקה, ביניהם:

משפט ד' (טענה 2.3.6). אם G גרף שכל תת-גרף (מלא) סופי שלו הוא k-צביע, אז G עצמו k-צביע

משפט ה' (דוגמא 3.8.6). אם $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ העתקה פולינומית חד-חד-ערכית, אז היא על

המשפט הבא הוא משפט קלאסי על פונקציות ממשיות, אולם אנחנו נראה הוכחה פשוטה שלו, בשפה קרובה (אך מדויקת לגמרי!) לניסוחים המקוריים של ניוטון ולייבניץ

משפט ו' (*משפט ערך הביניים*, 3.8.12). אם $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה ומקיימת $f(0)\leq 0\leq f(1)$, אז קיים $c\in[0,1]$ עבורו $f(c)=0$.

הרשימות מבוססות בין היתר על הספרים [2, 6, 7]. הספר [4] מומלץ אף הוא.

2 תחשיב הפסוקים

בסעיף זה נעסוק בסוג פשוט במיוחד של לוגיקה: תחשיב הפסוקים. לוגיקה זו לא מניחה דבר על המבנה של טענות בסיסיות, ובמקום זה עונה על שאלות הנוגעות לבניה של טענה מורכבת מתוך טענות יותר פשוטות על-ידי פעולות לוגיות. בהתאם לשאלות שהותוו במבוא, נראה את התשובות המדויקות שלוגיקה זו נותנת לשאלות:

1. מהי טענה?
2. מהי המשמעות של האמירה "טענה זו נכונה"?
3. מהי הוכחה?

לאחר שנגדיר את כל המושגים, נראה שניתן לענות על כל השאלות מהמבוא עבור לוגיקה זו, ונראה גם כמה שימושים.

2.1 אלגברות בוליאניות

כאמור, בשלב זה אנו מתייחסים אל כל טענה כאל קופסה שחורה. אם a ו-b טענות כלשהן, אינטואיטיבית ניתן ליצור מהן את הטענות החדשות "a וגם b", "a או b" ו-"לא a". אנחנו מעוניינים למצוא מבנה פורמלי בו האינטואיציה הזו באה לידי ביטוי. במילים אחרות, על קבוצת הטענות B בהן אנו מתעניינים מוגדרות פעולות $\wedge : B \times B \to B$ ("וגם"), $\vee : B \times B \to B$ ("או") ו-$\neg : B \to B$ ("שלילה"). הואיל ובשלב זה אנו מתעניינים *בתוכן* של הטענה, ולא בצורת כתיבתה, למשל, הטענות "a וגם b" ו-"b וגם a" הן מבחינתינו *אותה טענה*. באופן דומה, ניתן להצדיק את התנאים האחרים בהגדרה הבאה:

הגדרה 2.1.1 *אלגברה בוליאנית* מורכבת מקבוצה B, איברים $0,1 \in B$ ופעולות $\wedge : B \times B \to B$ ("וגם"), $\vee : B \times B \to B$ ו-$\neg : B \to B$, המקיימים את התנאים הבאים לכל $a, b, c \in B$: אלגברה בוליאנית

1. (חילופיות) $\langle a \wedge b \rangle = \langle b \wedge a \rangle$, $\langle a \vee b \rangle = \langle b \vee a \rangle$
2. (קיבוציות) $\langle a \wedge (\langle b \wedge c \rangle) \rangle = \langle (\langle a \wedge b \rangle) \wedge c \rangle$, $a \vee (\langle b \vee c \rangle) = (\langle a \vee b \rangle) \vee c$
3. (פילוג) $a \wedge (\langle b \vee c \rangle) = (\langle a \wedge b \rangle) \vee (\langle a \wedge c \rangle)$, $a \vee (\langle b \wedge c \rangle) = (\langle a \vee b \rangle) \wedge (\langle a \vee c \rangle)$
4. $\langle a \vee 0 \rangle = a$, $\langle a \wedge 1 \rangle = a$
5. $a \wedge \neg a = 0$, $a \vee \neg a = 1$

נסמן ב-$\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ את המבנה כולו

הערה 2.1.2. כתוצאה מחוקי הקיבוץ, אין צורך לרשום סוגריים כאשר מפעילים אותה פעולה ברצף, ואנחנו נרשום למשל $\langle a \wedge b \rangle \wedge c$ במקום $(\langle a \wedge b \rangle) \wedge c$). כמו-כן, נפעל לפי מוסכמה ש-"וגם" קודם, מבחינת סדר הפעולות, ל-"או", וכך נשמיט סוגריים נוספים (כלומר, נרשום $\langle a \wedge b \rangle \vee c$ במקום $(\langle a \wedge b \rangle) \vee c$)). בנוסף נשתמש לרוב בחילופיות בלי להזכיר זאת.

דוגמא 2.1.3. אם B קבוצה בת איבר אחד, יש עליה מבנה יחיד של אלגברה בוליאנית (שימו לב שלא דרשנו ש-$1 \neq 0$! תרגיל: הוכיחו שאם ב-B יותר מאיבר אחד, אז $1 \neq 0$.)

דוגמא 2.1.4. ישנה אלגברה בוליאנית יחידה בת שני איברים, $B=\{0,1\}$. מבחינה אינטואיטיבית, זוהי האלגברה של ערכי האמת, כאשר 1 מסמל אמת, ו-0 שקר. נסמן אותה לרוב ב-2.

דוגמא 2.1.5. אם X קבוצה כלשהי, המבנה $\mathcal{B}=\langle\mathcal{P}(X),\cap,\cup,\cdot^c,\emptyset,X\rangle$, כאשר $\mathcal{P}(X)=\{A\mid A\subseteq X\}$ היא קבוצת החזקה, ו-$A^c=X\setminus A$, הוא אלגברה בוליאנית. אנחנו נקרא לאלגברות כאלה *אלגברות חזקה*.

אלגברות חזקה

ניתן לזהות את שתי הדוגמאות הקודמות כמקרים פרטיים של הדוגמא הזו, כאשר X קבוצה ריקה או קבוצה בת איבר אחד.

דרך אחת לחשוב על הדוגמא האחרונה היא לחשוב על איברי B כעל טענות על איברי X: נזהה כל טענה עם איברי X המקיימים את הטענה. תחת הפירוש הזה, הפעולות של $\mathcal{B}$ מזוהות עם האינטואיציה של "וגם", "או" ושלילה (כלומר, אם $C\subseteq X$ קבוצת האיברים ב-X המקיימים טענה c, ו-D קבוצת האיברים המקיימים טענה d, אז $C\cap D$ היא קבוצת האיברים המקיימים את הטענה "c וגם d")

דוגמא 2.1.6. אם X קבוצה כלשהי, *תת-קבוצה קוסופית* של X היא תת-קבוצה שהמשלימה שלה (ביחס ל-X) סופית. הקבוצה B המורכבת מתתי הקבוצות של X שהן סופיות או קו-סופיות היא אלגברה בוליאנית (עם פעולות כמו קודם).

תת-קבוצה קוסופית

דוגמא 2.1.7. אם $X=[0,1]$, קבוצת הממשיים בין 0 ל-1, אז קבוצת תתי-הקבוצות של X שהן איחוד סופי של קטעים היא אלגברה בוליאנית (שוב, עם פעולות החיתוך והאיחוד). אנחנו נראה עוד דוגמאות רבות מהסוג הזה בהמשך.

דוגמא 2.1.8. אם $\mathcal{B}=\langle B,\wedge,\vee,\neg,0,1\rangle$ אלגברה בוליאנית כלשהי, אז המבנה $\mathcal{B}^*=\langle B,\vee,\wedge,\neg,1,0\rangle$ גם הוא אלגברה בוליאנית, שנקראת *האלגברה הדואלית*.

האלגברה הדואלית

התרגיל הבא כולל כמה עובדות שימושיות על אלגברות בוליאניות:

תרגיל 2.1.9. לכל אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, ולכל $a,b\in\mathcal{B}$ מתקיים:

1. $\langle a\wedge 0\rangle=0$, $\langle a\vee 1\rangle=1$
2. $\langle a\wedge a\rangle=a$
3. אם $\langle a\wedge b\rangle=\langle a\vee b\rangle$ אז $a=b$
4. אם $\langle a\wedge b\rangle=0$ ו-$\langle a\vee b\rangle=1$ אז $b=\neg a$
5. $\neg(\neg a)=a$
6. $\neg(\langle a\vee b\rangle)=\neg a\wedge\neg b$
7. $a\wedge(\langle a\vee b\rangle)=a$

הערה 2.1.10. בהנתן שוויון כלשהו בין שני ביטויים בוליאניים כמו בתרגיל, *השוויון הדואלי* הוא השוויון המתקבל מהמקורי על-ידי החלפת התפקידים של $\wedge$ ו-$\vee$, והחלפת התפקידים של 1 ו-0. למשל, הדואלי של השוויון $\neg(\langle a\vee b\rangle) = \neg a \wedge \neg b$ הוא השוויון $\neg(\langle a\wedge b\rangle) = \neg a \vee \neg b$. אם השוויון המקורי נכון עבור איברים כלשהם של אלגברה $\mathcal{B}$, אז השוויון הדואלי נכון עבור אותם איברים כאשר חושבים עליהם כאיברי האלגברה הדואלית $\mathcal{B}^*$. לכן, אם שוויון כלשהו נכון לכל האלגברות הבוליאניות, אז גם הדואלי שלו נכון עבורן. אנחנו נשתמש בזה באופן חופשי.

התרגיל הבא מציג דרך נוספת לחשוב על אלגברות בוליאניות, שלעתים מקלה על הוכחת תכונות כמו בתרגיל האחרון.

תרגיל 2.1.11. תהי $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית, ונגדיר לכל שני איברים $a, b \in \mathcal{B}$ ש-$a \leq b$ אם $a\wedge b{=}a$.

1. הוכיחו שזהו סדר חלקי על $\mathcal{B}$, עם מקסימום 1 ומינימום 0.
2. הוכיחו שלכל שני איברים $a, b \in \mathcal{B}$, החסם העליון ביניהם ביחס ל-$\leq$ קיים ושווה ל-$\langle a\vee b\rangle$ והחסם התחתון שווה ל-$\langle a\wedge b\rangle$ (נזכיר ש*חסם עליון* של קבוצה A בסדר חלקי הוא איבר m הגדול או שווה לכל איבר ב-A, וקטן מכל איבר אחר שמקיים זאת. חסם עליון כזה, אם קיים, הוא יחיד) חסם עליון
3. נניח ש-P קבוצה סדורה כמו בסעיפים הקודמים, ונסמן ב-$\langle a\vee b\rangle$ את החסם העליון וב-$\langle a\wedge b\rangle$ את החסם התחתון. נניח שלכל $a \in P$ קיים $b \in P$ כך ש-$\langle a\wedge b\rangle = 0$ ו-$\langle a\vee b\rangle = 1$, ושלכל $a, b, c \in P$ מתקיים: $(\langle a\vee b\rangle) \wedge (\langle a\vee c\rangle) \leq a \vee (\langle b\wedge c\rangle)$. הוכיחו ש-$\langle P, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ אלגברה בוליאנית.
4. פתרו שוב את תרגיל 2.1.9 בעזרת התרגיל הנוכחי

בהמשך, כשנדבר על אלגברות בוליאניות, נתייחס באופן חופשי ליחס הסדר מהתרגיל האחרון.

נחזור למוטיבציה: אם אנחנו חושבים על איברי אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ כטענות, איך לנסח את העובדה שבמצב נתון, כל טענה היא אמיתית או שיקרית? אנחנו רוצים להצמיד לכל טענה $b \in \mathcal{B}$ ערך אמת $v(b)$, שיכול להיות אמת או שקר. כלומר, אנחנו מדברים על פונקציות $v : B \to \{0, 1\}$, אבל הפונקציות צריכות לקיים תנאים מסוימים: אם אמרנו שהטענות a ו-b שתיהן נכונות, אז כך גם $\langle a\wedge b\rangle$, ואילו $\neg a$ שיקרית. במונחים של ההגדרה הבאה, אנחנו מתעניינים בהומומורפיזמים מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathbf{2} = \{0, 1\}$.

הגדרה 2.1.12. *העתקה של אלגברות בוליאניות* מאלגברה בוליאנית $\mathcal{B}_1$ לאלגברה בוליאנית $\mathcal{B}_2$ היא פונקציה $\omega : B_1 \to B_2$ המקיימת: העתקה של אלגברות בוליאניות

1. $\omega(\langle a\wedge b\rangle) = \omega(a) \wedge \omega(b)$
2. $\omega(\neg a) = \neg\omega(a)$

לכל $a, b \in B_1$. (העתקה כזו נקראת גם *הומומורפיזם* של אלגברות בוליאניות) הומומורפיזם

העתקה כזו נקראת *שיכון* אם היא חד-חד-ערכית, ו*איזומורפיזם* אם היא הפיכה. שיכון איזומורפיזם

הערה 2.1.13. בגלל תרגיל 2.1.9, העתקה כזו מקיימת גם $\omega(\langle a \vee b\rangle) = \omega(a) \vee \omega(b)$, $\omega(1) = 1$ ו-$\omega(0) = 0$. כמו-כן, היא שומרת על הסדר החלקי מתרגיל 2.1.11. נשים לב שלמרות הסימון הזהה, הפעולות בצד שמאל הן ב-$\mathcal{B}_1$ ואלה שבצד ימין הן ב-$\mathcal{B}_2$.

דוגמא 2.1.14. לכל אלגברה יש העתקה יחידה אל האלגברה בת איבר אחד. אם ב-$\mathcal{B}$ יש יותר מאיבר אחד, אין העתקה מהאלגברה בת איבר אחד ל-$\mathcal{B}$.

דוגמא 2.1.15. יש העתקה יחידה מ-2 לכל אלגברה בוליאנית. העתקה מאלגברה $\mathcal{B}$ ל-2 נקראת *השמה*. אלה העתקות שנתעניין בהן מאד בהמשך, שכן, כאמור, הן ממדלות את התהליך של בחירת ערכי אמת לטענות. השמה

דוגמא 2.1.16. אם $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ היא אלגברת קבוצת החזקה, כל איבר x של X מגדיר השמה $\omega_x : \mathcal{B} \to 2$, הנתונה על ידי: $\omega_x(A) = 1$ אם $x \in A$, ו-0 אחרת. אם חושבים על איברי $\mathcal{B}$ כטענות על איברי X, אז ω_x היא ההשמה ש"בודקת" האם הטענה נכונה עבור x.

תרגיל 2.1.17. באופן יותר כללי, אם $C \subseteq X$, הוכיחו שהפונקציה $A \mapsto A \cap C$ היא הומומורפיזם מ-$\mathcal{P}(X)$ ל-$\mathcal{P}(C)$.

דוגמא 2.1.18. אם $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית בת יותר מאיבר אחד, אז פונקציית הזהות *אינה* הומומורפיזם מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathcal{B}^*$ (למה?) מאידך, פונקציית השלילה היא איזומורפיזם מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathcal{B}^*$.

סוף הרצאה 1, 4 בנוב

איבר $a \neq 0$ של אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ הוא *אטום* אם אין איבר $b \in \mathcal{B}$ המקיים $0 < b < a$. למשל, אם $\mathcal{B} = \mathcal{P}(A)$ אלגברת חזקה, האטומים הם בדיוק היחידונים. אטום

תרגיל 2.1.19 (אלגברות בוליאניות סופיות). נניח ש-$\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית *סופית*

1. הוכיחו שלכל איבר $b \neq 0$ יש אטום $a \leq b$.
2. הוכיחו ש-$\mathcal{B}$ איזומורפית לאלגברת חזקה
3. הוכיחו שאלגברה בוליאנית אינסופית אינה בהכרח איזומורפית לאלגברת חזקה

2.1.20 משפט סטון

מי שניסה לפתור את תרגיל 2.1.9, גילה אולי שזה יותר קשה ממה שזה נראה. מצד שני, כל הטענות שם קלות מאד להוכחה עבור המקרה בו $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ היא אלגברת החזקה של איזושהי קבוצה. בתרגיל האחרון ראינו שכל אלגברה בוליאנית סופית היא כזו, אבל זה לא נכון לאלגברות כלליות.

נניח עכשיו ש-$\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית כלשהי, עבורה יש לנו שיכון $t : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$ עבור איזושהי קבוצה X. אז אפשר להוכיח את אחד השוויונים עבור $\mathcal{B}$ באופן הבא: נניח שהשוויון אינו נכון עבור איזשהם איברים $a, b \in \mathcal{B}$. אחרי שנפעיל את t נקבל, בגלל ש-t שיכון, שהשוויון אינו נכון עבור האיברים $t(a)$ ו-$t(b)$ ב-$\mathcal{P}(X)$. אבל כבר הוכחנו שהשוויון נכון לכל זוג איברים בכל אלגברה מהצורה הזו.

במילים אחרות, כל משוואה שנכונה לכל האיברים באלגברה $\mathcal{B}$ נכונה גם לכל האיברים באלגברה שמשוכנת בה (בהמשך תהיה לנו השפה לנסח את הטענה הזו באופן יותר מדויק ויותר כללי). הואיל ובדיקת שוויונים כאלה קלה מאד באלגברות חזקה, נשאלת השאלה: אילו אלגברות ניתנות לשיכון באלגברות חזקה?

משפט 2.1.21 (משפט הייצוג של סטון). *לכל אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ קיימת קבוצה X ושיכון $t : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$*

על מנת להוכיח את המשפט, עלינו ראשית לזהות את X. נניח ראשית ש-$\mathcal{B} = \mathcal{P}(Y)$ עבור איזשהו Y. האם אנחנו יכולים לשחזר את איברי Y מתוך מבנה האלגברה של $\mathcal{B}$? ראינו בדוגמא 2.1.16 שלכל איבר $y \in Y$ ניתן להתאים השמה $\omega_y : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$. לכן, קיבלנו העתקה $Y \to \mathscr{S}(\mathcal{B})$, כאשר $\mathscr{S}(B)$ קבוצת ההשמות על $\mathcal{B}$, אשר נתונה על-ידי $y \mapsto \omega_y$. העתקה זו חד-חד-ערכית, משום שאם $y \neq z$, אז $1 = \omega_y(\{y\}) \neq \omega_z(\{y\}) = 0$ (כפי שנראה בהמשך, היא לרוב לא על, אבל זה פחות חשוב, כי אנחנו מחפשים רק שיכון).

אז תיארנו קבוצה X המכילה את Y במונחים של מבנה האלגברה הבוליאנית בלבד. בפרט, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X)$. כעת נוותר על ההנחה ש-$\mathcal{B}$ אלגברת חזקה, ונשתמש באותו רעיון כדי להגדיר את X באופן כללי.

הוכחת משפט סטון. נסמן ב-X את קבוצת ההשמות על $\mathcal{B}$, ונגדיר $t : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$ על-ידי: $t(b) = \{\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2} \mid \omega(b) = 1\} \subseteq X$. אז לכל $b, c \in \mathcal{B}$,

$$t(b \wedge c) = \{\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2} \mid 1 = \omega(b \wedge c) = \omega(b) \wedge \omega(c)\} = \\ \{\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2} \mid 1 = \omega(b)\} \cap \{\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2} \mid 1 = \omega(c)\} = t(b) \cap t(c)$$

ובאופן דומה לשלילה.

זה מראה ש-t העתקה של אלגברות בוליאניות. כדי להוכיח ש-t חד-חד-ערכית, עלינו להוכיח שלכל $a \neq b \in \mathcal{B}$ יש השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega(a) \neq \omega(b)$. זה התוכן של המשפט הבא, שמסיים את ההוכחה. $\square$

משפט 2.1.22. *אם a ו-b שני איברים שונים באלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, אז יש השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega(a) \neq \omega(b)$.*

נשים לב שבפרט, המשפט אומר שלכל אלגברה בוליאנית לא טריוויאלית $\mathcal{B}$ יש השמה, עובדה לא ברורה בכלל.

אנחנו נוכיח את המשפט באמצעות תרגומו לכמה טענות שקולות. הראשונה היא רדוקציה למקרה פרטי:

תרגיל 2.1.23. הוכיחו שהמשפט נובע מהמקרה הפרטי בו $b = 0$

לפי התרגיל האחרון, עלינו להוכיח שאם $b \neq 0$, אז יש השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega(b) = 1$. על מנת להוכיח זאת, נתבונן בהשמה כלשהי $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$, ונשאל: איך נראית הקבוצה $\omega^{-1}(1)$? מסתבר שקבוצות כאלה מתוארות באופן הבא:

על-מסנן

הגדרה 2.1.24. תת-קבוצה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ של אלגברה בוליאנית נקראית *על-מסנן* אם:

1. לכל $a, b \in \mathcal{F}$ גם $\langle a \wedge b \rangle \in \mathcal{F}$.
2. לכל $a \in \mathcal{B}$, אחד מ-$a, \neg a$ שייך ל-$\mathcal{F}$
3. $0 \notin \mathcal{F}$

תרגיל 2.1.25. הוכיחו שאם $\mathcal{F}$ על-מסנן, אז

1. $\mathcal{F}$ לא ריק
2. אם $a \in \mathcal{F}$ ו-$b \geq a$ אז $b \in \mathcal{F}$

תרגיל 2.1.26. הוכיחו ש-$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ על-מסנן אם ורק אם יש השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega^{-1}(1) = \mathcal{F}$

לפי התרגיל האחרון, ניתן לתרגם את הבעיה שלנו לשאלה: האם לכל $b > 0$ יש על-מסנן שמכיל אותו? כדי לענות על השאלה, מסתבר שכדאי לשאול שאלה קצת יותר כללית: אילו קבוצות של איברים של $\mathcal{B}$ מוכלות בעל-מסנן?

מסנן

הגדרה 2.1.27. תת-קבוצה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ נקראת *מסנן* אם:

1. לכל $a, b \in \mathcal{F}$ גם $\langle a \wedge b \rangle \in \mathcal{F}$
2. לכל $a \in \mathcal{F}$ ו-$b \geq a$ גם $b \in \mathcal{F}$
3. $\mathcal{F}$ לא ריקה
4. $0 \notin \mathcal{F}$

היתרון במסננים (על פני על-מסננים) הוא שיש הרבה מסננים שמופיעים באופן טבעי ואפשר לתאר אותם במפורש, בעוד שזה לרוב בלתי אפשרי לתאר על-מסנן. נראה דוגמאות של מסננים בהמשך, אבל בינתיים נשים לב לעובדה הבאה:

תרגיל 2.1.28. נניח ש-$\mathcal{F}_0$ תת-קבוצה של אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ כך שלכל $b_1, \dots, b_k \in \mathcal{F}_0$, $b_1 \wedge \dots \wedge b_k \neq 0$. אז יש מסנן שמכיל את $\mathcal{F}_0$. בפרט, אם $b \neq 0$ אז יש מסנן שכולל אותו.

אינטואיטיבית, אפשר לחשוב על מסנן כעל אוסף הטענות שאדם (רציונלי) יכול להאמין בהן. על-מסנן הוא אז אוסף הדעות של אדם שיש לו דעה על כל דבר. הקשר הפורמלי בין מסננים לעל-מסננים נתון בטענה הבאה.

טענה 2.1.29. *התנאים הבאים על תת-קבוצה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ שקולים*

1. *$\mathcal{F}$ על-מסנן*

2. $\mathcal{F}$ *מסנן מקסימלי (כלומר, לא מוכל ממש במסנן אחר)*

הוכחה. נניח ש-$\mathcal{F}$ על-מסנן, ו-$a \in \mathcal{F}$. אז לכל $b \geq a$, בדיוק אחד מ-b ו-$\neg b$ ב-$\mathcal{F}$. אם זה $\neg b$ אז גם $\mathcal{F} \ni a \wedge \neg b = 0$. בסתירה להגדרה. זה מראה ש-$\mathcal{F}$ מסנן. אם $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}$ מסנן שמרחיב אותו, ניקח $a \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}$. כיוון ש-$a \notin \mathcal{F}$ ההגדרה נותנת $\neg a \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$, ולכן $0 = a \wedge \neg a \in \mathcal{F}_1$, בסתירה להגדרה.

נניח עכשיו ש-$\mathcal{F}$ מסנן מקסימלי. אם אינו על-מסנן, יש $a \in \mathcal{B}$ כך ש-$a, \neg a \notin \mathcal{F}$. אם לכל $b \in \mathcal{F}$, $0 \neq \langle a \wedge b \rangle$, אז לפי תרגיל 2.1.28, יש מסנן שמכיל את $\mathcal{F}$ ואת a, בסתירה למקסימליות של $\mathcal{F}$. לכן יש $b \in \mathcal{F}$ כך ש-$\langle b \wedge a \rangle = 0$. באותו אופן, יש $c \in \mathcal{F}$ כך ש-$c \wedge \neg a = 0$. אבל אז $\langle b \wedge c \rangle = 0$, בסתירה לכך ש-$\mathcal{F}$ מסנן. $\square$

תרגיל 2.1.30. הוכיחו שמסנן $\mathcal{F}$ הוא על-מסנן אם ורק אם לכל $b, c \in \mathcal{B}$, אם $\langle b \vee c \rangle \in \mathcal{F}$ אז $b \in \mathcal{F}$ או $c \in \mathcal{F}$.

הטענה האחרונה, בתוספת התרגיל שלפניה, מראים שהוכחת המשפט תסתיים אם נראה שכל מסנן מוכל במסנן מקסימלי. הכלי הסטנדרטי לעשות זאת נקרא *הלמה של צורן*. כדי לצטט אותה, נזכיר את ההגדרה הבאה.

הגדרה 2.1.31. תהי $(X, \prec)$ קבוצה סדורה חלקית.

1. *שרשרת* ב-X הינה תת-קבוצה Y עליה הסדר *מלא*, כלומר לכל $x \neq y \in Y$, מתקיים $x \prec y$ או $y \prec x$. שרשרת סדר מלא
2. תת-קבוצה $Y \subseteq X$ ב-X היא *חסומה מלעיל* אם קיים $x \in X$ כך ש-$y \prec x$ או $y = x$ לכל $y \in Y$. חסומה מלעיל
3. *איבר מירבי* ב-X הוא איבר $x \in X$ עבורו לכל $y \in X$ מתקיים $x \not\prec y$. איבר מירבי

דוגמא 2.1.32. תהי S קבוצה, ו-X קבוצה של קבוצות המוכלות ב-S. אז X סדורה חלקית ביחס להכלת קבוצות: $x \prec y$ אם $x \subset y$. תת-קבוצה Y של X חסומה מלעיל אם יש קבוצה $y \in X$ המכילה את כל הקבוצות ב-Y. איבר מירבי הוא איבר שלא מוכל בשום קבוצה אחרת ב-X.

לעיתים קרובות נעסוק בקבוצות X מסוג זה, עם התכונה שהאיחוד של כל שרשרת של קבוצות ב-X, גם הוא קבוצה ב-X. במקרה זה, האיחוד הוא חסם מלעיל של השרשרת, ולכן כל שרשרת חסומה מלעיל.

דוגמא 2.1.33. בתור מקרה פרטי של הדוגמא הקודמת, יהי S מרחב וקטורי (מעל שדה כלשהו), ותהי X קבוצת הקבוצות הבלתי תלויות לינארית ב-S. איחוד של שרשרת של קבוצות בלתי תלויות הוא קבוצה בלתי תלויה (שכן כל תלות לינארית היא בין מספר סופי של וקטורים, אשר שייכים לאחד האיברים בשרשרת). איבר מירבי ב-X, כלומר קבוצה בלתי תלויה מירבית, נקרא בסיס של S.

עובדה 2.1.34 (הלמה של צורן). *תהי X קבוצה סדורה חלקית, בה כל שרשרת חסומה מלעיל. אז קיים ב-X איבר מירבי*

תרגיל 2.1.35. הראו שמהלמה של צורן נובעת הגירסא היותר חזקה: עם אותן הנחות, לכל איבר קיים איבר מירבי הגדול ממנו

תרגיל 2.1.36. הקבוצה הריקה הינה קבוצה סדורה חלקית (באופן יחיד). למה היא אינה מהווה סתירה ללמה של צורן?

בגלל הלמה של צורן, משתלם לנסח תכונות של עצמים על-ידי תנאי מקסימליות. למשל:

דוגמא 2.1.37. לפי דוגמא 2.1.33, לכל מרחב וקטורי יש בסיס

מסיבות דומות, הלמה של צורן מופיעה במקומות רבים במתמטיקה. אנחנו נשתמש בה כדי להראות את קיומם של על-מסננים, ובכך להחזיר את כל החובות שצברנו:

טענה 2.1.38. *כל מסנן באלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ מוכל בעל-מסנן*

הוכחה. נתבונן בקבוצת כל המסננים, עם יחס ההכלה. לפי תרגיל 2.1.35, מספיק להראות: איחוד של שרשרת מסננים היא מסנן. נניח ש-C שרשרת כזו, עם איחוד $\mathcal{F}$. אם $a, b \in \mathcal{F}$, קיימים $\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b \in C$, כך ש-$a \in \mathcal{F}_a$ ו-$b \in \mathcal{F}_b$. הואיל ו-C שרשרת, אחד משני המסננים, נניח $\mathcal{F}_a$, מוכל בשני. אז $a, b \in \mathcal{F}_b$, ולכן $\langle a \wedge b \rangle \in \mathcal{F}_b \subseteq \mathcal{F}$ (כי $\mathcal{F}_b$ מסנן). הוכחת התכונות האחרות דומה. $\square$

נסכם את ההוכחה:

הוכחת משפט 2.1.22. לפי תרגיל 2.1.23,עלינו להראות שלכל $b > 0$ ב-$\mathcal{B}$ קיימת השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega(b) = 1$. לפי תרגיל 2.1.28, b שייך למסנן, ולפי הטענה האחרונה, מסנן זה מוכל בעל-מסנן $\mathcal{F}$. נגדיר $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ על-ידי $\omega(a) = 1$ אם ורק אם $a \in \mathcal{F}$. אז $\omega(b) = 1$, ולפי תרגיל 2.1.26, ω השמה. $\square$

סוף הרצאה 2, 7 בנוב

מודל מספקת

המסקנה הבאה היא כמעט טריוויאלית בהקשר הזה, אך בהקשר של הפירוש לפסוקים שיבוא בהמשך היא אחת התוצאות המרכזיות. נגיד שהשמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ היא *מודל* של תת-קבוצה $B_0 \subseteq \mathcal{B}$ (או שהיא *מספקת* את B_0) אם $\omega(b) = 1$ לכל $b \in B_0$.

מסקנה 2.1.39 (משפט הקומפקטיות לאלגברות בוליאניות). *אם B_0 קבוצת איברים של אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, כך שלכל תת-קבוצה סופית $F \subseteq B_0$ יש מודל ω_F, אז ל-B_0 יש מודל*

תרגיל 2.1.40. הוכיחו את המסקנה

תרגיל 2.1.41. נניח ש-$\mathcal{B}_0$ תת-אלגברה של $\mathcal{B}$. הוכיחו שכל השמה ל-$\mathcal{B}_0$ ניתן להרחיב להשמה ל-$\mathcal{B}$.

תרגיל 2.1.42. תהי $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית, ולכל $a, b \in \mathcal{B}$ נסמן $a \to b = \neg(a) \vee b$.

1. הוכיחו שאם $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ השמה, אז $\omega(a \to b) = \omega(a) \to \omega(b)$.

2. נניח ש-$\mathcal{B}$ קבוצה עם איבר נתון $0 \in \mathcal{B}$ ופעולה $(a, b) \mapsto a \to b$. נגיד ש-$\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ השמה אם $\omega(0) = 0$ ומתקיים השוויון מהסעיף הקודם. נניח שמתקיים התנאי הבא: לכל $a, b \in \mathcal{B}$, אם לכל השמה ω מתקיים $\omega(a) = \omega(b)$, אז $a = b$. הוכיחו שיש מבנה יחיד של אלגברה בוליאנית על $\mathcal{B}$, עבורו $\to$ מתקבל כמו בתחילת השאלה.

2.2 פסוקים ואלגברות חפשיות

הדיון שלנו על "טענות" היה, עד כה, קצת ערטילאי: הטענות הן איברים של אלגברה בוליאנית, הדוגמאות היו בעיקר אלגברות של קבוצות, וקשה לראות בקבוצות אלה טענות. יותר מזה, אלגברה בוליאנית מייצגת טענות עד-כדי שקילות: הטענות $\langle a\wedge b\rangle$ ו-$\langle b\wedge a\rangle$ שוות, על-פי הגדרה, בעוד שבעולם האמיתי אולי נרצה לחשוב על הטענה "קר ויורד גשם" כשונה מ-"יורד גשם וקר".

בסעיף זה ניקח את הגישה השניה: נתחיל מקבוצה P של "טענות בסיסיות", ונבנה מהן, ברמה התחבירית, טענות חדשות. על-מנת להפריד בין טענות ברמה הטכנית והטענות בדיון עצמו, נקרא לאיברי P והטענות שנבנות ממהם "פסוקים".

ברמה הטכנית, המשמעות של הבניה היא כזו: אנחנו בונים אלגברה בוליאנית שמכילה את P, אנחנו יכולים לקבוע את ערכי האמת של P כרצוננו, ומרגע שקבענו אותם, ערך האמת של יתר האיברים נקבע. במלים אחרות, האלגברה נתונה על-ידי ההגדרה הבאה:

האלגברה הבוליאנית החפשית $\mathcal{B}(P)$

הגדרה 2.2.1. לכל קבוצה P, *האלגברה הבוליאנית החפשית* על P היא אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}(P)$, המכילה את P ובעלת התכונה הבאה: אם $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית כלשהי, לכל העתקה של קבוצות $t_0 : P \to \mathcal{B}$ יש הרחבה יחידה להעתקה של אלגברות בוליאניות $t : \mathcal{B}(P) \to \mathcal{B}$.

כלומר, t_0 מכתיבה את הערך של האיברים הבסיסיים ב-P, ומשם יש רק דרך אחת לחשב את הערך של כל איבר אחר. המטרה העיקרית שלנו בסעיף זה היא להוכיח:

משפט 2.2.2. *לכל קבוצה P קיימת אלגברה בוליאנית חפשית יחידה $\mathcal{B}(P)$*

היחידות במשפט דורשת קצת הסבר: ניתן כמובן לשנות את השמות של האיברים ב-$\mathcal{B}(P)$ (בהנחה שהיא קיימת), ולקבל אלגברה אחרת, אבל היא תהיה זהה מכל בחינה מעשית לאלגברה המקורית. באופן יותר מדויק:

תרגיל 2.2.3. נניח ש-$t_0 : P \to Q$ פונקציה בין קבוצות, ו-$\mathcal{B}(P), \mathcal{B}(Q)$ אלגברות חפשיות על קבוצות אלה

1. הוכיחו שיש הומומורפיזם יחיד $t : \mathcal{B}(P) \to \mathcal{B}(Q)$ כך ש-$t(p) = t_0(p)$ לכל $p \in P$
2. הוכיחו ש-t_0 חד-חד-ערכית או על אם ורק אם t כזו (רמז: ביחרו פונקציה הפוכה בכיוון אחד). בפרט, אם $P \subseteq Q$, אז ניתן לזהות את $\mathcal{B}(P)$ עם תת-אלגברה של $\mathcal{B}(Q)$ (ואנחנו נעשה זאת)
3. הוכיחו שאם $\mathcal{B}_1$ ו-$\mathcal{B}_2$ שתי אלגברות חפשיות על אותה קבוצה P, אז קיים איזומורפיזם יחיד $t : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ שהצמצום שלו ל-P הוא הזהות

שימו לב שכל הטענות נובעות ישירות *מההגדרה* של אלגברה חפשית, ולא מהבנייה שלה.

הערה 2.2.4. המצב דומה מאד לרעיון של "מרחב לינארי שנוצר על-ידי קבוצה P". נזכיר שבהנתן שדה k וקבוצה P, ניתן לבנות מרחב וקטורי $k\langle P\rangle$ מעל k שמכיל את P, וש-P בסיס שלו.

מהגדרת הבסיס נובע שכל העתקה של קבוצות $T_0 : P \to V$, כאשר V מרחב וקטורי כלשהו מעל k, ניתנת להרחבה יחידה להעתקה לינארית $T : k\langle P\rangle \to V$. כלומר, העתקה לינארית מ-$k\langle P\rangle$ נקבעת בצורה "חפשית" ויחידה על-ידי הצמצום שלה ל-P.

על-מנת להוכיח את חלק הקיום במשפט, אנחנו נבנה את קבוצת הפסוקים מעל P. לשם כך, נזכיר ש*מחרוזת* או *מילה* (מעל קבוצה A) היא סדרה סופית של איברים מ-A (אנחנו מזהים את איברי A עם סדרות באורך 1). מחרוזת מילה

הגדרה 2.2.5. עבור קבוצה P, *קבוצת הפסוקים* $\mathcal{F}(P)$ מעל P היא הקבוצה הקטנה ביותר F של מלים מעל הקבוצה $P \cup \{\langle, \rangle, \to, 0\}$ המקיימת: קבוצת הפסוקים $\mathcal{F}(P)$

1. $0 \in F$
2. $P \subseteq F$
3. אם $x, y \in F$ אז $\langle x{\to}y\rangle \in F$

כל איבר של $\mathcal{F}(P)$ נקרא *פסוק מעל* P. פסוק

כמובן שבהגדרה הזו אנו מניחים ש-P לא כוללת את הסימנים הנוספים $\langle, \rangle, \to, 0$. בשלב ראשון, 0 לא משחק תפקיד מיוחד, ואנחנו נסמן $P_0 = P \cup \{0\}$.

דוגמא 2.2.6. אם $P = \{p, q\}$, המחרוזות הבאות הן פסוקים מעל P: p, 0, $\langle p{\to}0\rangle$, $\langle p{\to}q\rangle$, וכן הלאה.

לקבוצת הפסוקים אין מבנה טבעי של אלגברה בוליאנית, אך מלבד זאת, היא מקיימת את הדרישה:

משפט 2.2.7. *נניח ש-A קבוצה עם פעולה דו-מקומית $*$. לכל העתקה של קבוצות $t_0 : P_0 \to A$ יש הרחבה יחידה $t : \mathcal{F}(P) \to A$ המקיימת:*

$$t(\langle x{\to}y\rangle) = t(x) * t(y) \tag{2.1}$$

לכל $x, y \in \mathcal{F}(P)$.

ההוכחה תדגים את הדרך הרגילה להשתמש בהגדרה, שהיא סוג של אינדוקציה: מסתכלים על קבוצת הפסוקים שמקיימת את התכונה שאנחנו רוצים, ומראים שהיא מכילה את P_0 וסגורה תחת הגרירה. נקודה מעניינת היא שאנחנו מוכיחים קודם את היחידות, ואז משתמשים בה כדי להוכיח את הקיום.

הוכחה. נתחיל מהיחידות. נניח ש-$t_1, t_2 : \mathcal{F}(P) \to A$ שתיהן מקיימות את התנאים. נסמן $X = \{x \in \mathcal{F}(P) \mid t_1(x) = t_2(x)\}$. אז $P_0 \subseteq X$, משום שהצמצום של t_i לקבוצה זו שווה ל-t_0. כמו-כן, אם $x, y \in X$, אז

$$t_1(\langle x \to y \rangle) = t_1(x) * t_1(y) = t_2(x) * t_2(y) = t_2(\langle x \to y \rangle)$$

כלומר, $\langle x \to y \rangle \in X$ גם כן. לכן, $X \subseteq \mathcal{F}(P)$ מקיימת את התנאי בהגדרה של של $\mathcal{F}(P)$, כלומר $X = \mathcal{F}(P)$ ו-$t_1 = t_2$.

להוכחת הקיום, נזדקק לגרסא חזקה יותר של היחידות, שמופיעה בתרגיל 2.2.8. במונחים של תרגיל זה, נתבונן בקבוצה

$$E = \{t : X \to A \mid X \leq \mathcal{F}(P), t\restriction_{X \cap P_0} = t_0\restriction_{X \cap P_0}, \text{הומומורפיזם חלקי } t\}$$

אנחנו טוענים שלכל $x \in \mathcal{F}(P)$ קיים $t \in E$ כך ש-t מוגדר על x. אכן, נסמן את קבוצת האיברים המקיימים תנאי זה ב-T. נשים לב ש-$t_0 \in E$, ולכן $P_0 \subseteq T$. נניח ש-$x_1, x_2 \in T$. אז יש $t_i : X_i \to A$, כאשר $t_i \in E$ ו-$x_i \in X_i$. לפי תרגיל 2.2.8, הצמצומים של t_i ל-$X_1 \cap X_2$ שווים, ולכן לפי תרגיל 2.2.9, יש פונקציה $t : X_1 \cup X_2 \to A$ שהצמצום שלה ל-X_i הוא t_i. נגדיר $t(\langle x_1 \to x_2 \rangle) = t(x_1) * t(x_2)$ (אם t אינה מוגדרת שם).

אנו טוענים ש-t הומומורפיזם חלקי. המקרה היחיד שצריך לבדוק הוא האיבר החדש $\langle x_1 \to x_2 \rangle$. אבל לפי תרגיל 2.2.10, השוויון היחיד שצריך להראות הוא $t(\langle x_1 \to x_2 \rangle) = t(x_1) * t(x_2)$, וזה נכון לפי הגדרה.

הראינו שהאוסף E מקיים את תנאי תרגיל 2.2.9, ולכן קיימת פונקציה יחידה t על התחום $\mathcal{F}(P)$ שהצמצום שלה לכל קבוצה סגורה הוא ב-E. בפרט, t עצמה ה-E, ולכן מקיימת את תנאי הטענה. $\square$

בהוכחה השתמשנו בשלוש הטענות הבאות, שהראשונה שבהן גם מסבירה את המינוח.

תרגיל 2.2.8. נאמר שתת-קבוצה $X \subseteq \mathcal{F}(P)$ היא *סגורה*, $X \leq \mathcal{F}(P)$, אם לכל $x, y \in \mathcal{F}(P)$, אם $\langle x \to y \rangle \in X$ אז גם $x, y \in X$. נאמר ש-$t : X \to A$ (כאשר A כמו במשפט 2.2.7) היא הומומורפיזם חלקי אם $t(\langle x \to y \rangle) = t(x) * t(y)$ לכל $x, y, \langle x \to y \rangle \in X$. סגורה $X \leq \mathcal{F}(P)$

1. הוכיחו שחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה
2. הוכיחו שאם X סגורה, ו-$t_1, t_2 : X \to A$ הומומורפיזמים חלקיים כך ש-$t_1\restriction_{X \cap P_0} = t_2\restriction_{X \cap P_0}$, אז $t_1 = t_2$

התרגיל הבא הוא תרגיל כללי על פונקציות בין קבוצות.

תרגיל 2.2.9. נניח ש-X, Y קבוצות, ו-E קבוצה של פונקציות חלקיות $t : X_t \to Y$ (כאשר $X_t \subseteq X$). נניח שלכל $t, s \in E$ מתקיים $t\restriction_{X_s \cap X_t} = s\restriction_{X_s \cap X_t}$. הוכיחו שקיימת פונקציה יחידה $u : U \to Y$ כאשר $U = \bigcup_{t \in E} X_t$, כך ש-$u\restriction_{X_t} = t$ לכל $t \in E$.

התרגיל האחרון נקרא גם משפט הקריאה היחידה, משום שהוא אומר שיש דרך יחידה "לקרוא" איבר של $\mathcal{F}(P)$, כלומר, להבין איך הוא נבנה מהפסוקים הבסיסיים.

תרגיל 2.2.10 (משפט הקריאה היחידה). הוכיחו שהפונקציה $I:\mathcal{F}(P)\times\mathcal{F}(P)\to\mathcal{F}(P)$ המוגדרת על-ידי $I(x,y)=\langle x\to y\rangle$ היא חד-חד-ערכית, ושהתמונה שלה זרה ל-P_0.

הוכיחו שהטענה לא הייתה נכונה אילו היינו מחליפים את $\langle x\to y\rangle$ ב-$x\to y$ בהגדרת $\mathcal{F}(P)$ (כלומר, מוותרים על הסוגריים)

נגדיר את הפעולות הבאות על $\mathcal{F}(P)$:

$$\neg:\mathcal{F}(P)\to\mathcal{F}(P) \qquad \neg(x)=\langle x\to 0\rangle \tag{2.2}$$

$$\wedge:\mathcal{F}(P)\times\mathcal{F}(P)\to\mathcal{F}(P) \qquad \wedge(x,y)=\neg(\langle x\to\neg(y)\rangle) \tag{2.3}$$

הפעולות הללו לא הופכות את $\mathcal{F}(P)$ לאלגברה בוליאנית: למשל, $\neg(\neg(p))\neq p$. הסיבה, כמו בדוגמא הזו, היא שיש פסוקים שהם שונים כמחרוזות, אך זהים מבחינת המשמעות הלוגית שלהם. במילים אחרות, ישנו יחס שקילות על קבוצת הפסוקים, בו שני פסוקים הם שקולים אם יש להם אותה משמעות לוגית. ישנן לפחות שתי דרכים לתאר את השקילות הזו, אנחנו נראה אחת מהן עכשיו, ואת השניה מאוחר יותר.

לכל אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, נסמן $x\to y=\neg(x)\vee y$ עבור כל $x,y\in\mathcal{B}$.

הגדרה 2.2.11. תהי P קבוצה.

1. *השמה* על $\mathcal{F}(P)$ היא פונקציה $\omega:\mathcal{F}(P)\to\mathbf{2}$ המקיימת: $\omega(0)=0$ ו- $\omega(\langle x\to y\rangle)=\omega(x)\to\omega(y)$. השמה
2. שני איברים $x,y\in\mathcal{F}(P)$ הם *שקולים לוגית* אם לכל השמה $\omega:\mathcal{F}(P)\to\mathbf{2}$ מתקיים $\omega(x)=\omega(y)$. סימון: $x\equiv y$. שקולים לוגית
3. *מודל* של קבוצת פסוקים $\Gamma\subseteq\mathcal{F}(P)$ הוא השמה $\omega:\mathcal{F}(P)\to\mathbf{2}$ המקיימת $\omega(x)=1$ לכל $x\in\Gamma$. נאמר גם ש-ω *מספקת* את Γ. מודל מספקת

טענה 2.2.12. *תהי P קבוצה.*

1. *שקילות לוגית היא יחס שקילות על $\mathcal{F}(P)$.*
2. *אם $x\equiv x'$ ו-$y\equiv y'$ אז $\neg(x)\equiv\neg(x')$ ו-$\wedge(x,y)\equiv\wedge(x',y')$. לכן, $\neg$ ו-$\wedge$ משרות פעולות מוגדרות היטב על המנה $B:=\mathcal{F}(P)/\equiv$ (שמסומנות באותו סימון).*
3. *המבנה $\mathcal{B}=\langle B,\wedge,\neg,0\rangle$ הוא אלגברה בוליאנית עם הפעולות המושרות (כאשר 0 מסמל את המחלקה של $0\in\mathcal{F}(P)$, ויתר המבנה נקבע)*
4. *האיברים של P_0 אינם שקולים, ולכן P_0 משוכנת ב-$\mathcal{B}$.*

תרגיל 2.2.13. הוכיחו את הטענה

הוכחת משפט 2.2.2. נוכיח שהאלגברה $\mathcal{B}$ המופיעה בטענה 2.2.12 היא חפשית על P. נניח ש-$t_0 : P \to \mathcal{B}'$ היא פונקציה כלשהי אל אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}'$. עלינו להוכיח שהיא ניתנת להרחבה יחידה להעתקה $t : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ של אלגברות בוליאניות. נסמן ב-$\pi : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{B} = \mathcal{F}(P)/\equiv$ את העתקת המנה.

יחידות: נניח ש-$t_1, t_2 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ שתיהן מרחיבות את t_0. נסמן $\tilde{t_i} = t_i \circ \pi : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{B}'$. אז $\tilde{t_i}$ מסכימות על P (כי הצמצום של שתיהן הוא t_0) ועל 0, ושתיהן מקיימות $\tilde{t_i}(\langle x \to y \rangle) = \tilde{t_i}(x) \to \tilde{t_i}(y)$ לכל $x, y \in \mathcal{F}(P)$. לפי משפט 2.2.7, $\tilde{t_1} = \tilde{t_2}$. בגלל ש-$\pi$ על, נובע מזה ש-$t_1 = t_2$.

קיום: לפי משפט 2.2.7, יש העתקה $\tilde{t} : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{B}'$ שמרחיבה את t_0, כך ש-$\tilde{t}(0) = 0$ ו-$\tilde{t}(\langle x \to y \rangle) = \tilde{t}(x) \to \tilde{t}(y)$. אנחנו טוענים שאם $x \equiv x'$ אז $\tilde{t}(x) = \tilde{t}(x')$. אחרת, לפי משפט 2.1.22 יש השמה $\omega : \mathcal{B}' \to 2$ כך ש-$\omega(t(x)) \neq \omega(t(x'))$. אז $\omega \circ t$ השמה על $\mathcal{F}(P)$ שנותנת ערכים שונים ל-x ול-x', בסתירה לכך ש-$x \equiv x'$.

לפי הטענה האחרונה, $\tilde{t}$ משרה פונקציה מוגדרת היטב על $\mathcal{B}$. התכונה של $\tilde{t}$ מבטיחה ש-t מרחיבה את t_0, ש-$t(0) = 0$ וש-$t(x \to y) = t(x) \to t(y)$ לכל $x, y \in \mathcal{B}$. פעולות האלגברה הבוליאנית ניתנות לאפיון באמצעות $\to$ (ו-0), ולכן t העתקה של אלגברות בוליאניות. $\square$

אפשר לסכם את הנקודה שאנחנו עומדים בה: בהנתן קבוצה P של "טענות בסיסיות", בנינו את הקבוצה $\mathcal{F}(P)$ של הטענות שניתן להרכיב מהן, ואת הקבוצה $\mathcal{B}(P)$ של "טענות עד כדי שקילות לוגית". לקבוצה $\mathcal{B}(P)$ יש מבנה של אלגברה בוליאנית (ולכן אנחנו יודעים עליה משהו). לקבוצה $\mathcal{F}(P)$ אין מבנה אלגברי פשוט, אבל יש לה את היתרון שאפשר לרשום את האיברים שלה בצורה מפורשת, ולהוכיח עליהם טענות באינדוקציה (על בניית הפסוק). במילים אחרות $\mathcal{F}(P)$ מייצגת את הצד התחבירי (סינטקטי) של הטענות, ו-$\mathcal{B}(P)$ את הצד הסמנטי.

סוף הרצאה 3, 11 בנוב

תרגיל 2.2.14. הוכיחו ש-$\mathcal{B}(P)$ איזומורפית לאלגברת חזקה אם ורק אם P סופית

תרגיל 2.2.15. נניח ש-P קבוצה, ו-$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}(P)$ קבוצה של תתי-קבוצות של P. נזכיר שלכל $P_0 \subseteq P$, אנחנו חושבים על $\mathcal{B}(P_0)$ כתת-אלגברה של $\mathcal{B}(P)$ (תרגיל 2.2.3).

1. הוכיחו שאם $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$, אז $\mathcal{B}(P_1) \cap \mathcal{B}(P_2) = \mathcal{B}(P_1 \cap P_2)$.
2. הוכיחו שאם $\bigcup \mathcal{C} = P$ ולכל $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$ יש $P_3 \in \mathcal{C}$ כך ש-$P_1, P_2 \subseteq P_3$, אז $\mathcal{B}(P) = \bigcup \{\mathcal{B}(P_0) \mid P_0 \in \mathcal{C}\}$. בפרט, לכל P, $\mathcal{B}(P) = \bigcup_{P_0 \subseteq P, |P_0| < \infty} \mathcal{B}(P_0)$.

2.3 שימושים של משפט הקומפקטיות

נזכיר שבמסקנה 2.1.39 הוכחנו את משפט הקומפקטיות לאלגברות בוליאניות. בשביל השימושים יהיה נוח לנסח את התוצאה במונחים של קבוצת הפסוקים $\mathcal{F}(P)$.

מסקנה 2.3.1 (משפט הקומפקטיות לתחשיב הפסוקים). *אם $F \subseteq \mathcal{F}(P)$ קבוצה של פסוקים, כך שלכל תת-קבוצה סופית $F_0 \subseteq F$ יש מודל, אז ל-F יש מודל*

תרגיל 2.3.2. הסיקו את מסקנה 2.3.1 מתוך מסקנה 2.1.39

נראה עכשיו כמה שימושים של המסקנה האחרונה לבעיות מתחומים שונים. האסטרטגיה בכל השימושים דומה: אנחנו מתעניינים במחלקה מסוימת של אובייקטים. אנחנו מניחים את קיומם במקרה הסופי, ורוצים להראות שהם קיימים במקרה הכללי. מייצרים קבוצת פסוקים שמודל שלה מתאר (ומתואר על-ידי) אובייקטים מהסוג המעניין. אז בעיית הקיום של האובייקט הופכת לבעיית קיום מודל עבור אותה קבוצה. לפי משפט הקומפקטיות, הוכחת הקיום הזו נתונה על-ידי קיום במקרה הסופי, שאנחנו מניחים (או מוכיחים בנפרד).

טענה 2.3.3. *כל סדר חלקי $\prec$ על קבוצה X ניתן להרחבה לסדר מלא*

הוכחה. נוכיח ראשית למקרה ש-X סופית, באינדוקציה על גודלה. הטענה ברורה אם X ריקה. אחרת, יהי x איבר מירבי ב-X. אז באינדוקציה $\prec$ ניתן להרחבה לסדר מלא על $Y = X \setminus \{x\}$, וקל לראות שאם מרחיבים סדר זה ל-x על ידי הכלל $y \prec x$ לכל $y \in Y$, מתקבל סדר מלא על X המרחיב את הסדר המקורי.

תהי עתה X קבוצה סדורה חלקית כלשהי, ונתבונן בקבוצת הפסוקים הבסיסיים

$$P_X = \{p_{a,b} \mid a, b \in X\}$$

ובקבוצת הפסוקים Γ_X מעליה המורכבת מכל הפסוקים הבאים:

1. הפסוקים $p_{a,b}$ לכל $a \prec b$
2. $\neg p_{a,a}$ לכל $a \in X$
3. $\langle p_{a,b} \wedge p_{b,c} \rangle \to p_{a,c}$ לכל $a, b, c \in X$
4. $\langle p_{a,b} \vee p_{b,a} \rangle$ לכל $a \neq b \in X$

נשים לב שהמידע של השמה ω המספקת את Γ_X שקול למידע של סדר מלא על X המרחיב את $\prec$, על ידי: $a \prec b$ אם ורק אם $\omega(p_{a,b}) = 1$. לכן, עלינו להוכיח ש-Γ_X ספיקה, ולפי משפט הקומפקטיות, מספיק להוכיח שהיא ספיקה סופית.

תהי $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_X$ קבוצה סופית. אז היא מערבת מספר סופי של פסוקים בסיסיים, ולכן גם תת-קבוצה סופית X_0 של איברי X. כלומר, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_{X_0}$ ומספיק שנוכיח שיש השמה המספקת את Γ_{X_0}. אך לפי האמור לעיל, השמה כזו נתונה על-ידי סדר מלא על X_0 המרחיב את $\prec$ על X_0. סדר כזה קיים לפי המקרה הסופי $\square$

2.3.4 צביעת גרפים

גרף

הדוגמא הבאה קשורה לתורת הגרפים. *גרף* הוא יחס דו-מקומי, סימטרי ואי-רפלקסיבי E על קבוצה V (כלומר, $E(a,b)$ גורר $E(b,a)$ לכל $a, b \in V$, ולכל $a \in V$ לא מתקיים $E(a,a)$). הקבוצה V נקראת *קבוצת הקודקודים*, ו-E *קבוצת הקשתות*. אם S קבוצה, הגרף (V, E)

קבוצת הקודקודים

קבוצת הקשתות

הוא S-*צביע* אם קיימת העתקה $c:V\to S$ (צביעה של קודקודי הגרף) כך שאם $E(a,b)$ אז $c(a){\neq}c(b)$. אם k מספר טבעי, אנו מזהים אותו עם הקבוצה $\{1\dots k-1\}$, ולכן המושג k-צביע מוגדר היטב. למשל, *משפט ארבעת הצבעים* ([1, 10]) קובע שכל גרף מישורי סופי הוא 4-צביע (גרף מישורי הוא גרף שקודקודיו נקודות במישור, וקיימות העתקות רציפות $\gamma_{a,b}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ לכל $(a,b)\in E$, כך ש-$\gamma_{a,b}(0)=a$, $\gamma_{a,b}(1)=b$ ואם $\{a,b\}\neq\{c,d\}$ אז $\gamma_{a,b}((0,1))$ ו-$\gamma_{c,d}((0,1))$ זרות). S-צביע

תת-גרף מלא (ממש) של הגרף (V,E) הוא הגרף $(V_0,E\cap(V_0\times V_0))$, כאשר V_0 תת-קבוצה (ממש) של V. תת-גרף מלא

תרגיל 2.3.5. לכל k טבעי, מצאו דוגמא לגרף שאינו k-צביע, אבל כל תת-גרף מלא ממש שלו הוא k-צביע

טענה 2.3.6. *יהי $G=(V,E)$ גרף, k מספר טבעי. אז G הוא k-צביע אם ורק אם כל תת-גרף מלא סופי שלו הוא k-צביע*

הוכחה. כיוון אחד ברור. בכיוון השני, נתבונן בקבוצת הפסוקים Γ_G

1. $p_{1,a}\vee\dots\vee p_{k,a}$ לכל $a\in V$
2. $\neg\langle p_{i,a}\wedge p_{j,a}\rangle$ עבור $a\in V$ ו-$1\leq i,j\leq k$
3. $\neg\langle p_{i,a}\wedge p_{i,b}\rangle$ לכל $(a,b)\in E$ ו-$1\leq i\leq k$.

אז השמה ω המספקת Γ_G שקולה לצביעה חוקית של G ב-k-צבעים (על ידי $c(a)=i-1$ אםם $\omega(p_{i,a})=1$). לכן מספיק להראות ש-Γ_G ספיקה. ההמשך כמו בדוגמא הקודמת ☐

תרגיל 2.3.7. הראו שאם מחליפים את k בקבוצה אינסופית בטענה האחרונה, הטענה אינה נכונה

2.3.8 משפט החתונה

נניח שנתונות קבוצות F ו-M של נשים וגברים, בהתאמה, ולכל אישה קבוצה סופית של גברים שהיא מעוניינת בהם. האם ניתן לשדך לכל אישה גבר שהיא מעוניינת בו (כך שלכל גבר מותאמת רק אישה אחת)? במלים אחרות, בהנתן יחס $R\subseteq F\times M$ כך שלכל $f\in F$ הקבוצה $R[\{f\}]\subseteq M$ סופית, האם קיימת פונקציה (שידוך) חח"ע $p:F\to M$ כך ש-$p\subseteq R$? (נזכיר שלכל $X\subseteq F$, התמונה של R על X היא הקבוצה $R[X]=\{m\in M\mid\exists f\in X\langle f,m\rangle\in R\}$).

תנאי הכרחי הוא שלכל קבוצה סופית $F_0\subseteq F$ של נשים מתקיים

$$|F_0|\leq|R[F_0]| \tag{2.4}$$

משפט החתונה (משפט Hall) אומר שזה גם תנאי מספיק.

תרגיל 2.3.9. הוכיחו שאם התנאי (2.4) מתקיים לכל $F_0\subseteq F$ סופית, אז קיים פתרון לבעיה הנתונה על ידי R. (הוכיחו ראשית את המקרה הסופי, ואז השתמשו במשפט הקומפקטיות למקרה הכללי.)

2.3.10 הלמה של קניג

מסלול בגרף $G=(V,E)$ מקדקוד a לקדקוד b הוא סדרה סופית של קדקודים $x_1,\dots,x_n$ שונים בזוגות, כך ש-$a=x_1$, $b=x_n$, ולכל $i<n$, $(x_i,x_{i+1})\in E$. האורך של מסלול כזה הוא $n-1$. *המרחק* בין שני קדקודים הוא אורך המסלול הקצר ביותר ביניהם (אם קיים). *השכנים* של קודקוד a הם הקודקודים במרחק 1 ממנו. הגרף G נקרא *עץ* אם בין כל שני קודקודים קיים מסלול יחיד. מסלול שכנים עץ

טענה 2.3.11 (הלמה של קניג). *אם G הוא עץ אינסופי בו לכל קודקוד מספר סופי של שכנים, אז קיים ב-G מסלול אינסופי (כלומר סדרה x_i של קדקודים שונים בזוגות, לכל i טבעי, כך ש-$E(x_i,x_{i+1})$ לכל i).*

הוכחה. שוב, הרעיון הוא לבנות קבוצת פסוקים, שמודל שלהם נותן פתרון, כלומר מסלול אינסופי. נקבע קודקוד a_0, ונסמן ב-S_k את קבוצת האיברים במרחק k מ-a_0. באינדוקציה, כל S_k סופית. נתבונן בקבוצת הפסוקים הבאה:

1. $\bigvee_{a\in S_k} p_a$ לכל k
2. $\neg\langle p_a\wedge p_b\rangle$ לכל $a\neq b\in S_k$, לכל k
3. $p_a\to p_b$ אם b נמצא על המסלול היחיד מ-a_0 ל-a

אז מודל של קבוצה זו מכיל אותו מידע כמו מסלול אינסופי המתחיל ב-a_0. $\square$

תרגיל 2.3.12. השלימו את ההוכחה

תרגיל 2.3.13. נניח ש-$P=\{p_1,\dots\}$ בת-מניה. השתמשו בלמה של קניג כדי להוכיח את משפט הקומפקטיות במקרה זה (רמז: הגדירו גרף בו הקודקודים הם השמות חלקיות)

סוף הרצאה 4, 14 בנוב'

2.3.14 אלגברות בוליאניות

קיבלנו את משפט הקומפקטיות כמסקנה ישירה של הצעד המרכזי בהוכחת משפט סטון (2.1.21), בו הצעד העיקרי הוא ההוכחה שההעתקה הטבעית היא חח"ע. ראינו בתרגיל 2.1.23 שזה נובע מהעובדה הבאה, אותה נוכיח עכשיו באמצעות משפט הקומפקטיות:

טענה 2.3.15. *אם b איבר שונה מ-0 באלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, אז קיימת השמה $\omega:\mathcal{B}\to 2$ עבורה $\omega(b)=1$*

תרגיל 2.3.16. הוכיחו את הטענה עבור אלגברות בוליאניות סופיות (רמז: אפשר להשתמש בתרגיל 2.1.19)

נניח ש-$\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית, ו-b איבר שונה מ-0. תהי $P=\{p_x\mid x\in\mathcal{B}\}$, ונתבונן בקבוצה Γ המכילה את הפסוקים הבאים:

1. $\langle p_{\langle x\wedge y\rangle}\leftrightarrow\langle p_x\wedge p_y\rangle\rangle$ לכל $x,y\in\mathcal{B}$.
2. $\langle p_{\neg x}\leftrightarrow\neg p_x\rangle$ לכל $x\in\mathcal{B}$
3. p_b

תרגיל 2.3.17. השתמשו בקבוצה Γ כדי להוכיח את טענה 2.3.15

2.3.18 משפט רמזי

משפט רמזי שימושי מאד גם בלוגיקה וגם בענפים אחרים במתמטיקה. יש לו גרסא סופית וגרסא אינסופית, ובמקרה הזה נוכיח את הגרסא האינסופית ישירות, ונסיק ממנה את הגרסא הסופית בעזרת משפט הקומפקטיות.

על מנת לנסח את המשפט, ננסח את ההגדרות הבאות: בהנתן קבוצה X, נסמן ב-$\binom{X}{k}$ את קבוצת תתי הקבוצות בגודל k ב-X. אם $Y\subseteq X$, אפשר לחשוב על $\binom{Y}{k}$ באופן טבעי כעל תת-קבוצה של $\binom{X}{k}$. אם $c:\binom{X}{k}\to S$ היא "צביעה" (כלומר, פשוט פונקציה), *תת-קבוצה מונוכרומטית* של X היא תת-קבוצה $Y\subseteq X$ כך שהצמצום של c ל-$\binom{Y}{k}$ הוא פונקציה קבועה (כלומר, כל הקבוצות שכל איבריהן ב-Y נצבעות באותו צבע). תת-קבוצה מונוכרומטית

משפט 2.3.19 (משפט רמזי, גרסא אינסופית). *לכל צביעה $f:\binom{X}{k}\to S$ כאשר X אינסופית ו-S סופית קיימת תת-קבוצה מונוכרומטית אינסופית*

הוכחה. באינדוקציה על k, המקרים $k=0,1$ ברורים. נניח שהטענה נכונה לאיזשהו $k\geq 1$. נגדיר ברקורסיה סדרה X_i של תתי-קבוצות של X, ו-x_i של איברים של X_i. תהי $X_0=X$, ו-x_0 איבר כלשהו של X. בהנתן X_i ו-x_i, נגדיר $f_i:\binom{X_i\setminus\{x_i\}}{k}\to S$ על-ידי $f_i(s)=f(s\cup\{x_i\})$. באינדוקציה, קיימת תת-קבוצה מונוכרומטית אינסופית $X_{i+1}\subseteq X_i$ עבור f_i. נבחר את x_{i+1} להיות איבר כלשהו של X_{i+1}. נסמן ב-c_i את הערך הקבוע של f_i על $\binom{X_{i+1}}{k}$.

לפי המקרה $k=1$, קיימת קבוצה אינסופית $J\subseteq\mathbb{N}$, כך ש-$c_j=c$ לא תלוי ב-j עבור $j\in J$. נתבונן בקבוצה $Y=\{x_j\mid j\in J\}$. אם $s\subseteq Y$ היא בגודל $k+1$, יהי j האינדקס הקטן ביותר עבורו $x_j\in s$ ותהי $s'=s\setminus\{x_j\}$. אז $f(s)=f_j(s')=c_j=c$ שכן $s'\subseteq X_{j+1}$ ו-$j\in J$. לכן Y הקבוצה המונוכרומטית המבוקשת. $\square$

מסקנה 2.3.20 (משפט רמזי, גרסא סופית). *לכל $n,k,l\geq 0$ קיים $m\geq 0$, כך שלכל $c:\binom{m}{k}\to l$ יש קבוצה מונוכרומטית בגודל n.*

הוכחה. לשם הפשטות, נוכיח את הטענה רק למקרה $k=l=2$, ההוכחה למקרה הכללי דומה. נקבע מספר טבעי n. לכל $i<j$ טבעיים, יהי $p_{i,j}$ פסוק בסיסי, ולכל קבוצה I בגודל n של טבעיים, יהי x_I הפסוק $\bigvee_{i,j\in I}p_{i,j}\wedge\bigvee_{i,j}\neg p_{i,j}$. תהי Γ קבוצת הפסוקים x_I עבור $I\in\binom{\mathbb{N}}{n}$. אם ω מודל של Γ, אז לפי הגרסא האינסופית של משפט רמזי, קיימת קבוצה אינסופית $Y\subseteq\mathbb{N}$ כך ש-ω קבועה על $\{p_{i,j}\mid i,j\in Y\}$. לכן ω אינה מספקת את x_I לכל $I\subseteq Y$.

הראינו ש-Γ אינה ספיקה. לפי משפט הקומפקטיות, תת-קבוצה סופית $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ אינה ספיקה. לכן, לכל השמה ω לפסוקים הבסיסיים המופיעים ב-Γ_0, יש I עבורו $\omega(x_I) = 0$, כלומר I קבוצה מונוכרומטית. □

2.4 היסקים

ראינו שניתן להגדיר במדויק את המושגים טענה, ואמיתות של טענה. כעת נעבור למושג ההוכחה. ליתר דיוק, אנו רוצים להגדיר במדויק מהי הוכחה של פסוק x מתוך קבוצת פסוקים Γ. אינטואיטיבית, הוכחה של x מ-Γ היא תהליך בעל מספר סופי של שלבים, כאשר בכל אחד אנו מסיקים פסוק חדש מתוך פסוקים ב-Γ, או אקסיומות, או פסוקים שהוכחנו קודם. כל שלב כזה הוא "מכני": הוא מאפשר לעבור לפסוק המוכח לפי מבנה הפסוק בלבד. בפרט, כל התהליך הוא בלתי תלוי באמיתות או בהשמות.

על מנת למנוע בלבול, נשתמש במונח "היסק" עבור הוכחות במובן הטכני. כמו-כן, נוח יותר בהיקשר זה לעבוד עם הפעולה הלוגית של גרירה ($\rightarrow$) במקום גימום. אין כאן בעיה, שכן זהו פשוט קיצור.

הגדרה 2.4.1. 1. נניח ש-x פסוק ו-Γ קבוצת פסוקים. נסמן $\Gamma \vdash_0 x$ אם קיימת סדרה סופית של פסוקים $(x_1, \ldots, x_n)$, כאשר $x = x_n$, וכל x_i הוא איבר של Γ, או שקיימים $j, k < i$ כך ש-$x_k = \langle x_j \rightarrow x_i \rangle$ (במקרה זה אנו אומרים ש-x_i התקבל מ-x_j ו-x_k על-ידי הפעלת *כלל ההיסק* (*Modus Ponens*). אם Γ ריקה, נשמיט אותה מהסימון: $\vdash_0 x$.

כלל ההיסק

Modus Ponens

האקסיומות הלוגיות

2. מערכת *האקסיומות הלוגיות* A הינה קבוצת כל הפסוקים בעלי אחת משלוש הצורות הבאות:

$$A1 \quad x \rightarrow \langle y \rightarrow x \rangle$$

$$A2 \quad \langle x \rightarrow \langle y \rightarrow z \rangle \rangle \rightarrow \langle \langle x \rightarrow y \rangle \rightarrow \langle x \rightarrow z \rangle \rangle$$

$$A3 \quad \langle \neg(x) \rightarrow \neg(y) \rangle \rightarrow \langle \langle \neg(x) \rightarrow y \rangle \rightarrow x \rangle$$

עבור פסוקים כלשהם x, y, z.

מסקנה

יכיח

3. פסוק x הוא *מסקנה* של Γ או *יכיח* מ-Γ אם $\Gamma \cup \mathrm{A} \vdash_0 x$ (כאשר A קבוצת האקסיומות הלוגיות). במקרה זה נסמן $\Gamma \vdash x$.

המטרה העיקרית שלנו בסעיף הזה היא השוואת המושג התחבירי של יכיחות מהגדרה 2.4.1 למושג הסמנטי המקביל, נביעה לוגית:

נובע לוגית

$\Gamma \models x$

טאוטולוגיה

סתירה

הגדרה 2.4.2. נניח ש-Γ קבוצה של פסוקים, ו-x פסוק. הפסוק x *נובע לוגית* מ-Γ אם לכל מודל ω של Γ מתקיים $\omega(x) = 1$ (סימון: $\Gamma \models x$). הפסוק x הוא *טאוטולוגיה* אם הוא נובע לוגית מהקבוצה הריקה, והוא *סתירה* אם $\neg(x)$ טאוטולוגיה.

תרגיל 2.4.3. המושגים בהגדרה האחרונה הם סמנטיים. נסחו את התנאים במונחים של התמונות של x ושל Γ ב-$\mathcal{B}(P)$.

תרגיל 2.4.4. הוכיחו שמשפט הקומפקטיות שקול לטענה הבאה: אם $\Gamma \models x$ אז יש $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ סופית כך ש-$\Gamma_0 \models x$.

כיוון אחד של ההשוואה בין יכיחות לנביעה הוא שהגדרנו *מערכת היסק נאותה*: אם הצלחנו להסיק פסוק מתוך Γ, אז הוא נובע לוגית מ-Γ, כלומר, אפשר להוכיח רק דברים נכונים. מערכת היסק נאותה

טענה 2.4.5. *אם x מסקנה של Γ, אז* $\Gamma \models x$.

תרגיל 2.4.6. 1. הוכיחו שכל אקסיומה היא טאוטולוגיה

2. הוכיחו שאם z התקבל מ-x ו-y על-ידי MP, אז $x, y \models z$.

3. הוכיחו את טענה 2.4.5

הערה 2.4.7. הרעיון העיקרי בטענה האחרונה הוא שצעד ההיסק שומר על נכונות לוגית. לפני שנמשיך לכיוון השני, נציין שאותו רעיון מאפשר לנו להראות שהאקסיומות שלנו הן *בלתי-תלויות*: אין קבוצת אקסיומות שנובעת מהאקסיומות האחרות.

תרגיל 2.4.8. תהי S קבוצה עם פעולה $\cdot : S \times S \to S$, ונניח ש-$a \in S$ מקיימת: אם $a \cdot x = a$ אז $x = a$.

הוכיחו שאם יש העתקה $\omega : \mathcal{F}(P) \to S$ המקיימת:

$$\omega(x \to y) = \omega(x) \cdot \omega(y)$$
$$\omega(x) = a, \quad x \in \Gamma$$

אז אם $\Gamma \vdash_0 x$, אז $\omega(x) = a$

לדוגמא, טענה 2.4.5 נובעת מתרגיל זה עבור השמות (כלומר, כאשר $S = \{0, 1\}$ ו-$x{\cdot}y{=}0$ אם ורק אם $x > y$, ו-$a = 1$).

כדי להוכיח, למשל, ש-$A1$ אינה מסקנה של יתר האקסיומות, ניקח: $S = \{a, b, c\}$, ונגדיר $a \cdot b = a \cdot c = b \cdot c = c$, ו-$x \cdot y = a$ בכל מקרה אחר. אם ω העתקה כלשהי מקבוצת הפסוקים הבסיסיים ל-S, נרחיב אותה ל-0 על-ידי $\omega(0) = b$. לפי משפט 2.2.7, כל העתקה כזו ניתן להרחיב באופן יחיד לקבוצת כל הפסוקים. קל לבדוק אז שכל "השמה" כזאת נותנת ערך a לכל האקסיומות ב-$A2, A3$, אבל אם $\omega(x) = b$ ו-$\omega(y) = a$ אז $\omega(\langle x{\to}\langle y{\to}x\rangle\rangle) = c$. □

נראה כעת את הדוגמא הראשונה שלנו להיסק, שתשמש אותנו גם בהמשך. היא מדגימה גם, שמציאת היסק, גם של פסוקים פשוטים, אינה בהכרח פשוטה.

טענה 2.4.9. *לכל פסוק t מתקיים* $\vdash \langle t{\to}t\rangle$.

הוכחה. נרשום במפורש היסק של $\langle t \rightarrow t\rangle$:

$$
\begin{array}{ll}
t_1 : t \rightarrow \langle\langle t \rightarrow t\rangle \rightarrow t\rangle & A1[x:t, y:\langle t \rightarrow t\rangle] \\
t_2 : \langle t \rightarrow \langle\langle t \rightarrow t\rangle \rightarrow t\rangle\rangle \rightarrow \langle\langle t \rightarrow \langle t \rightarrow t\rangle\rangle \rightarrow \langle t \rightarrow t\rangle\rangle & A2[x:t, y:\langle t \rightarrow t\rangle, z:t] \\
t_3 : \langle t \rightarrow \langle t \rightarrow t\rangle\rangle \rightarrow \langle t \rightarrow t\rangle & \mathrm{MP}[t_1, t_2] \\
t_4 : t \rightarrow \langle t \rightarrow t\rangle & A1[x:t, y:t] \\
t_5 : t \rightarrow t & \mathrm{MP}[t_3, t_4]
\end{array}
$$

□

2.4.10 משפט השלמות

ראינו בטענה 2.4.5, שכל מה שניתן להוכיח באמצעות מערכת ההיסק הוא נכון. עכשיו נשאל לגבי הכיוון ההפוך: עד כמה מערכת ההיסק חזקה? מה הן הטענות שניתן להוכיח? כפי שראינו, השאלה אינה טריוויאלית: נדרשנו למאמץ אפילו כדי להוכיח שהפסוק $\langle p \rightarrow p\rangle$ ניתן להיסק מהקבוצה הריקה.

משפט 2.4.11 (משפט השלמות). *אם* $\Gamma \models x$ *אז* $\Gamma \vdash x$

ביחד עם הנאותות, הוא אומר ש-$\vdash$ ו-$\models$ הם למעשה אותו יחס. השלב הראשון בהוכחת המשפט הוא הרדוקציה למקרה הסופי.

תרגיל 2.4.12. הראו שמשפט השלמות ל-Γ כלשהי נובע ממשפט השלמות עבור המקרה ש-Γ סופית

הוכחת משפט השלמות מצריכה כלי שמאפשר להראות יכיחות של פסוקים מהצורה $\langle x \rightarrow y\rangle$. הכלי הזה נקרא משפט הדדוקציה. הוא האנלוג הפורמלי של הנוהג הרגיל בהוכחת טענות כאלה: כדי להוכיח את $\langle x \rightarrow y\rangle$, מותר לנו להניח את x ולהוכיח את y.

טענה 2.4.13 (משפט הדדוקציה). *אם* $\Gamma, x \vdash y$ *אז* $\Gamma \vdash \langle x \rightarrow y\rangle$

נשים לב שהכיוון השני גם נכון, באופן מיידי מ-MP.

הוכחה. יהי $(y_1, \ldots, y_n)$ היסק של $y = y_n$ מתוך Γ, x. נוכיח, באינדוקציה על k, ש-$\Gamma \vdash \langle x \rightarrow y_k\rangle$. נניח שהטענה נכונה לכל $i < k$. נתבונן באפשרויות:

1. y_k אקסיומה, או איבר של Γ: במקרה זה נשתמש בכלל ההיסק על y_k ועל המקרה $\langle y_k \rightarrow \langle x \rightarrow y_k\rangle\rangle$ של A_1 כדי להסיק את $\langle x \rightarrow y_k\rangle$

2. $y_k = x$: במקרה זה עלינו להוכיח ש-$\Gamma \vdash \langle x \rightarrow x\rangle$, אולם ראינו כבר ש-$\vdash \langle t \rightarrow t\rangle$ לכל פסוק t.

3. y_k התקבל על-ידי MP מ-y_i ו-$y_j = \langle y_i \to y_k \rangle$ עבור $i, j < k$: במקרה זה נשתמש באקסיומה

$$\langle\langle x \to \langle y_i \to y_k \rangle\rangle \to \langle\langle x \to y_i \rangle \to \langle x \to y_k \rangle\rangle\rangle$$

(מהצורה $A2$), ובעובדה שניתן להסיק את $\langle x \to y_j \rangle$ לפי הנחת האינדוקציה כדי להסיק בעזרת MP את $\langle\langle x \to y_i \rangle \to \langle x \to y_k \rangle\rangle$, ואז שוב בהנחת האינדוקציה עבור i וב-MP כדי להסיק את $\langle x \to y_k \rangle$. □

היעילות של המשפט הזה משתקפת למשל בהוכחת המסקנה הבאה (שתשמש אותנו בהוכחת משפט השלמות).

מסקנה 2.4.14. *1.* $x \vdash \neg\neg x$

2. $\neg\neg x \vdash x$

3. $\neg x \vdash \langle x \to y \rangle$

4. $x, \neg y \vdash \neg\langle x \to y \rangle$

5. $\langle x \to y \rangle \vdash \langle \neg y \to \neg x \rangle$

תרגיל 2.4.15. הוכיחו את המסקנה

סוף הרצאה 5, 21 בנוב' 2024

נעבור כעת להוכחת משפט השלמות. נזכיר שאנחנו מניחים ש-Γ סופית, ובפרט, $\Gamma \subseteq \mathcal{F}(P)$ עבור קבוצה סופית P. נוכיח ראשית את הטענה עבור קבוצות Γ ששקולות לאטום. במלים אחרות, לכל השמה ω נסמן

$$\Gamma_\omega = \{y \in P \mid \omega(y) = 1\} \cup \{\neg y \mid y \in P,\ \omega(y) = 0\} \tag{2.5}$$

למה 2.4.16. *משפט השלמות נכון עבור קבוצות מהצורה Γ_ω: לכל פסוק x, אם $\omega(x) = 1$ אז $\Gamma_\omega \vdash x$, ואם $\omega(x) = 0$ אז $\Gamma_\omega \vdash \neg x$*

החלק השני של הטענה נובע ישירות מהחלק הראשון, אבל הניסוח הזה נוח למטרת האינדוקציה

הוכחה. תהי A קבוצת הפסוקים x מעל P עבורם הטענה נכונה. אז $P \subseteq A$ שכן אז הפסוק שצריך להסיק נמצא ב-Γ_ω (ו-$0 \in A$ באופן ריק)

נניח ש-$x, y \in A$, וש-$\omega(\langle x \to y \rangle) = 1$. אז $\omega(x) = 0$ או $\omega(y) = 1$. במקרה הראשון, $\Gamma_\omega \vdash \neg x$ והתוצאה נובעת מסעיף (3) של מסקנה 2.4.14, ובמקרה השני $\Gamma_\omega \vdash y$, והתוצאה נובעת מהאקסיומה הראשונה. אם $\omega(\langle x \to y \rangle) = 0$ אז $\omega(x) = 1$ ו-$\omega(y) = 0$ ולכן $\Gamma_w \vdash \neg(y), x$ והתוצאה נובעת מסעיף (4) של אותה מסקנה. □

הטענה הבאה מראה שפסוקים שאינם משפיעים, סמנטית, על נביעה לוגית, הם גם מיותרים למטרות היסק.

למה 2.4.17. *נניח ש-* $\Gamma, x \vdash y$ *וגם* $\Gamma, \neg x \vdash y$. *אז* $\Gamma \vdash y$.

תרגיל 2.4.18. הוכיחו את הלמה

הוכחת משפט השלמות ל-Γ *סופית.* באינדוקציה על הגודל של Γ. אם $\Gamma = \Gamma_0 \cup \{x\}$, אז $\Gamma_0 \models \langle x \rightarrow y \rangle$ ולכן באינדוקציה $\Gamma_0 \vdash \langle x \rightarrow y \rangle$. לפי MP, מקבלים $\Gamma \vdash y$.

נותר להוכיח את הבסיס: אם x טאוטולוגיה, אז $\vdash x$. תהי P קבוצת הפסוקים הבסיסיים ב-x. לפי למה 2.4.16, $\Gamma_\omega \vdash x$ לכל השמה ω.

אם P אינה ריקה, יהי $a \in P$, ותהי $P_a = P \setminus \{a\}$. אם ω השמה כלשהי ל-P_a, תהי ω_i, עבור $i = 0, 1$, ההרחבה של ω המקיימת $\omega(a) = i$. אז $\Gamma_{\omega_0} = \Gamma_w \cup \{\neg a\}$ ו-$\Gamma_{\omega_1} = \Gamma_w \cup \{a\}$. הואיל ו-$\Gamma_{\omega_i} \vdash x$, נקבל לפי למה 2.4.17,ש-$\Gamma_\omega \vdash x$. זה נכון לכל ω על P_a, ולכן חזרנו למצב שבו היינו עם P, אבל עבור קבוצה יותר קטנה P_a. באינדוקציה, מקבלים ש-$\Gamma_\omega \vdash x$ עבור השמה ω על קבוצה קטנה כרצוננו. עבור הקבוצה הריקה, זו הטענה שרצינו להוכיח. □

הערה 2.4.19. עם מאמץ נוסף, ניתן להוכיח את משפט השלמות ישירות גם לקבוצות אינסופיות Γ, ללא שימוש במשפט הקומפקטיות. הואיל ומשפט הקומפקטיות נובע ישירות ממשפט השלמות (למה?), זה נותן הוכחה אלטרנטיבית למשפט הקומפקטיות.

הערה 2.4.20. קיבלנו תיאור נוסף של יחס השקילות $\equiv$ באמצעותו בנינו את $\mathcal{B}(P)$: שני פסוקים ϕ ו-ψ הם שקולים אם $\phi \vdash \psi$ ו-$\psi \vdash \phi$. במובן מסוים, זהו תיאור יותר מפורש.

3 תחשיב היחסים

תחשיב הפסוקים עליו דובר בסעיף הקודם לא מאפשר יכולת ביטוי גדולה: לא ניתן לנסח בו טענות מתמטיות אמיתיות, אלא רק הפשטה שלהן שמסומנת על-ידי הפסוקים הבסיסיים. בסעיף זה נחקור לוגיקה בעלת יכולת ביטוי המאפשרת ניסוח טענות מתמטיות. לוגיקה זו מורכבת יותר בצורה משמעותית, אולם המבנה הכללי מבחינת ההגדרות והשאלות שנשאלות בה הוא דומה: נגדיר את התחביר, הסמנטיקה (השמות ומודלים), אקסיומות וכללי היסק, ונוכיח את משפט השלמות ומשפט הקומפקטיות המתאימים.

3.1 דוגמאות

הגדרת התחביר מורכבת ממספר מושגים: *חתימה, שמות עצם, נוסחה, פסוק*, ומושגים נוספים. בהמשך נגדיר *השמות, מודלים* ו*קבוצות גדירות*. על מנת לתת מושג לאן אנחנו שואפים, נדגים את המושגים הללו בצורה לא פורמלית במספר דוגמאות.

דוגמא 3.1.1 (יחס סדר).

חתימה בחתימה ישנו סוג אחד, P, וסימן יחס אחד $E \in \mathscr{R}_{PP}$

נוסחה בסיסית היא מהצורה $E(x, y)$ או $x = y$

נוסחה למשל $\forall x(E(x, y) \vee x = y)$

תורה התורה שאומרת ש-E הוא יחס סדר היא:

$$\forall x, y \neg \langle E(x, y) \wedge E(y, x) \rangle$$
$$\forall x, y, z \langle \langle E(x, y) \wedge E(y, z) \rangle \rightarrow E(x, z) \rangle$$

מודל של התורה הוא קבוצה סדורה

דוגמא 3.1.2 (גרף). בדוגמא זו כל רכיבי התחביר מוגדרים באותה צורה (שכן גם גרף נתון על-ידי יחס דו-מקומי), אבל התורה היא

$$\forall x, y \langle E(x, y) \rightarrow E(y, x) \rangle$$
$$\forall x \neg E(x, x)$$

והמודלים הם גרפים

דוגמא 3.1.3 (חוגים).

חתימה סוג אחד, A, וארבעה סימני פונקציה: $a, m \in \mathscr{F}_{AA,A}$ ו-$0, 1 \in \mathscr{F}_{\epsilon,A}$

שמות עצם שמות העצם הם ביטויים מהצורה $a(m(x, y), z)$ ו-$m(1, z)$ (למשל)

נוסחה בסיסית $a(m(x, x), y) = m(a(1, 1), x)$

נוסחה לדוגמא $\exists x(m(x, y) = 1)$

תורה התורה של החוגים מכילה למשל את הפסוקים הבאים:

$$\forall x, y(a(x, y) = a(y, x))$$
$$\forall x(m(1, x) = x)$$
$$\forall x \exists y(a(x, y) = 0)$$

מודל של התורה (המלאה של חוגים) הוא חוג.

בהמשך נתייחס לדוגמא הזו, ונרשום לרוב $+$ ו-$\cdot$ במקום a ו-m, וכן $x + y$ ו-$x \cdot y$ במקום $a(x, y)$ ו-$m(x, y)$ (לדוגמא).

דוגמא 3.1.4 (גאומטריה).

חתימה שני סוגים, P, L, ושני סימני יחס: $I \in \mathscr{R}_{PL}$ ו-$B \in \mathscr{R}_{PPP}$

שמות עצם שמות העצם הם משתנים משני סוגים: x_P ו-x_L.

נוסחה בסיסית $B(x_P, y_P, z_P)$, $I(x_P, y_L)$

נוסחה לדוגמא $\exists x{\in}P\langle B(y,x,z) \wedge I(x,t)\rangle$

תורה בין היתר, האקסיומות הבאות

$$\forall x,y{\in}P\exists z{\in}L\langle I(x,z) \wedge I(y,z)\rangle$$

$$\forall t{\in}L\exists x,y,z{\in}P\langle I(x,t) \wedge I(y,t) \wedge I(z,t) \wedge \\ x \neq z \wedge x \neq y \wedge y \neq z\rangle$$

$$\forall x,y,z{\in}P\forall t{\in}L\langle\langle I(x,t) \wedge I(y,t) \wedge I(z,t)\rangle \to \\ \langle B(x,y,z) \vee B(y,z,x) \vee B(z,y,x)\rangle\rangle$$

מודל המישור הממשי

דוגמא 3.1.5 (מרחבים וקטוריים מעל שדה קבוע). נקבע שדה K

חתימה סוג אחד V, סימני פונקציה: $+ \in \mathscr{F}_{VV,V}$, $0 \in \mathscr{F}_{\epsilon,V}$, לכל $c \in K$, $\underline{c} \in \mathscr{F}_{V,V}$.

שמות עצם שמות העצם הם למשל $\underline{c}(x+y)$, $x+0$

נוסחה בסיסית לדוגמא $\underline{c}(x+y) = \underline{d}(z)$

נוסחה לדוגמא $\forall x\exists y\underline{c}(y) = x+z$

תורה בין היתר, האקסיומות הבאות

$$\forall x,y\underline{c}(x+y) = \underline{c}(x) + \underline{c}(y) \quad \text{לכל } c \in K$$

$$\forall x\underline{0}(x) = 0$$

$$\forall x,y\langle x+y = y+x\rangle$$

$$\forall x\underline{c \cdot d}(x) = \underline{c}(\underline{d}(x)) \quad \text{לכל } c,d \in K$$

מודל כל מרחב וקטורי מעל K

דוגמא 3.1.6 (מרחבים וקטוריים).

חתימה שני סוגים, K, U, סימני פונקציה: $+_U \in \mathscr{F}_{UU,U}$, $0_U \in \mathscr{F}_{\epsilon,U}$, סימני פונקציה $+_K, \cdot_K, 0_K, 1_K$ על הסוג K, כמו בדוגמא 3.1.3, סימן פונקציה $\cdot \in \mathscr{F}_{KU,U}$.

שמות עצם שמות העצם הם למשל $c \cdot (u +_U v)$, $u +_U 0$, $c \cdot_K d$

נוסחה בסיסית לדוגמא $c \cdot (x +_U y) = d \cdot u$

נוסחה לדוגמא $\exists a \in K \langle u = a \cdot v \rangle$

תורה בין היתר, האקסיומות הבאות

$$\forall a \in K \forall x, y \in U \langle a \cdot (x +_U y) = a \cdot x +_U a \cdot y \rangle$$
$$\forall x \in U 0_K \cdot x = 0_U$$
$$\forall x, y \in K \langle x +_K y = y +_K x \rangle$$

מודל זוג (L, V) כאשר L שדה, ו-V מרחב וקטורי מעליו

3.2 תחביר

כעת נגדיר במדויק את התחביר של תחשיב היחסים. ההגדרה היא ארוכה וכוללת מספר שלבים, ומומלץ בכל שלב לחזור לדוגמאות בסעיף הקודם ולבדוק איך הן מתקבלות, ומה משמעות ההגדרה.

לכל קבוצה A, אנחנו מסמנים ב-A^* את קבוצת המלים מעל A. את המילה הריקה נסמן ב-ϵ, ואת האורך של מילה w נסמן ב-$|w|$. את האיבר ה-i של מילה w נסמן ב-$w(i)$ (האיברים ממוספרים מ-1). אם w_1 ו-w_2 שתי מלים, נסמן ב-$w_1 w_2$ את המילה המתקבלת מהוספת w_2 לסוף של w_1. לרוב נזהה בין איבר $a \in A$ לבין המילה באורך 1 המורכבת מ-a. A^*

האובייקט התחבירי הבסיסי ביותר הוא החתימה.

הגדרה 3.2.1. *חתימה* מורכבת מהנתונים הבאים: חתימה

1. קבוצה $\mathscr{S}$ של *סוגים* סוגים
2. לכל מילה w מעל $\mathscr{S}$, קבוצה $\mathscr{R}_w$, המכונה *קבוצת סימני היחס* מסוג w. קבוצת סימני היחס
3. לכל מילה w מעל $\mathscr{S}$ ולכל איבר $a \in \mathscr{S}$, קבוצה $\mathscr{F}_{w,a}$ המכונה *קבוצת סימני הפונקציה* מ-w ל-a. קבוצת סימני הפונקציה

חתימה כזו תסומן לרוב כ-$\Sigma = (\mathscr{S}, (\mathscr{R}_w)_{w \in \mathscr{S}^*}, (\mathscr{F}_{w,a})_{w \in \mathscr{S}^*, a \in \mathscr{S}})$ או בקיצור כ-$\Sigma = (\mathscr{S}, \mathscr{R}, \mathscr{F})$. סימני הפונקציה ב-$\mathscr{F}_{\epsilon,a}$ מכונים לרוב *סימני קבועים* (מסוג a). סימני קבועים

בהגדרה זו, ובהגדרות דומות בהמשך, אנחנו מניחים שכל הקבוצות המעורבות הן זרות בזוגות.

הערה 3.2.2. אם האורך של w הוא n, איברי $\mathscr{R}_w$ נקראים סימני יחס n-מקומיים, ובדומה לגבי סימני פונקציות. בספרות נוהגים לפעמים להניח ש-$\mathscr{S}$ מורכבת מאיבר אחד ובמקרה זה, ישנה מילה יחידה w מכל אורך n, ואז איברי $\mathscr{R}_w$ הם בדיוק סימני היחס ה-n מקומיים. כפי שראינו, הנחה זו אינה נוחה בחלק מהדוגמאות הטבעיות, ומסבכת דברים מאוחר יותר, ולכן לא נניח אותה.

בהנתן חתימה $\Sigma = (\mathscr{S}, \dots)$, יתר ההגדרות תלויות בנוסף בקבוצות $\mathscr{V}_a$ עבור $a \in \mathscr{S}$, הקרויות *משתנים מסוג* a.

משתנים

הגדרה 3.2.3. בהנתן חתימה $\Sigma = (\mathscr{S}, \mathscr{R}, \mathscr{F})$ ולכל $a \in \mathscr{S}$, קבוצה $\mathscr{V}_a$, *קבוצת שמות העצם* $\mathscr{T}_a$ (מעל $\mathscr{V} = \coprod_{a \in \mathscr{S}} \mathscr{V}_a$) מסוג a עבור $a \in \mathscr{S}$ מוגדרת ברקורסיה כקבוצה הקטנה ביותר המקיימת:

קבוצת שמות העצם

1. $\mathscr{V}_a \subseteq \mathscr{T}_a$

2. לכל $f \in \mathscr{F}_{w,a}$, עם $|w| = n$, ולכל $t_i \in \mathscr{T}_{w(i)}$ עבור $1 \leq i \leq n$ המחרוזת $f(t_1, \dots, t_n)$ היא שם עצם מסוג a.

נשים לב שבפרט, כל סימן קבוע מסוג a הוא שם עצם מסוג a.

תרגיל 3.2.4. עיברו על הדוגמאות בסעיף 3.1, ושכנעו את עצמכם ששמות העצם המוזכרים שם הם אכן כאלה.

כמו במקרה של תחשיב הפסוקים, הוכחות של טענות על שמות עצם (וחלקים אחרים בתחביר) מתבצעות לרוב באינדוקציה על הבניה, וכמו במקרה ההוא, שימושי לדעת שכל שם עצם נבנה בדיוק בדרך אחת. ליתר דיוק, נשים לב שכל $f \in \mathscr{F}_{w,a}$ מגדיר העתקה

$$C_f : \mathscr{T}_{w(1)} \times \dots \times \mathscr{T}_{w(n)} \to \mathscr{T}_a$$

הנתונה על-ידי $C_f(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$.

תרגיל 3.2.5 (קריאה יחידה, שמות עצם). הוכיחו שכל אחת מההעתקות C_f היא חד-חד-ערכית, והתמונות של כל שתי העתקות כאלה הן זרות. הסיקו שכל שם עצם נבנה במספר סופי של הפעלות C_{f_i} כאלה, עבור סדרה יחידה (f_i) של סימני פונקציה.

סוף הרצאה 6, 25 בנוב' 2024

שמות העצם מסוג a יפורשו, כשנגדיר מבנים, כהעתקות שהטווח שלהן הוא (הפירוש של) a. מהו התחום של העתקה כזו? לכאורה, התחום של $f \in \mathscr{F}_{bb,a}$ צריך להיות זוגות של איברים בפירוש של b. אולם נשים לב שראשית, f כזו אינה שם עצם לפי ההגדרה לעיל, ושנית, אם x, y שניהם משתנים מסוג b, אז $f(x,y)$ ו-$f(x,x)$ שניהם שמות עצם שנוצרים מאותו סימן פונקציה, ומשתנים מאותו סוג, אך מייצגים העתקות עם תחומים שונים. כלומר, התחום של ההעתקה תלוי במשתנים עצמם, ולא רק בסוגים שלהם.

הגדרה 3.2.6. קבוצת *המשתנים החפשיים* $\mathscr{V}(t)$ בשם עצם t מוגדרת ברקורסיה על בנית t באופן הבא: אם t הוא משתנה, אז $\mathscr{V}(t) = \{t\}$. אם $t = f(t_1, \dots, t_n)$, אז

המשתנים החפשיים $\mathscr{V}(t)$

$$\mathscr{V}(t) = \mathscr{V}(t_1) \cup \dots \cup \mathscr{V}(t_n).$$

נרשום $t(x_1, \dots, x_n)$ אם $\mathscr{V}(t) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

$t(x_1, \dots, x_n)$

כעת נגדיר את יתר התחביר.

הגדרה 3.2.7. תהי $\Sigma=(\mathscr{S},\mathscr{R},\mathscr{F})$ חתימה, ו-$\mathscr{V}=\coprod_{a\in\mathscr{S}}\mathscr{V}_a$ (האיחוד הזר של $\mathscr{V}_a$) קבוצת משתנים.

1. *נוסחא בסיסית* מעל Σ ו-$\mathscr{V}$ היא מחרוזת מהצורה $E(t_1,\dots,t_n)$, כאשר $E{\in}\mathscr{R}_w$, וכל t_i הוא שם עצם מסוג $w(i)$. נוסחא בסיסית

2. *נוסחא* מעל Σ ו-$\mathscr{V}$ היא איבר בקבוצה הקטנה ביותר Φ המכילה את הנוסחאות הבסיסיות ואת הסימן $\bot$, וכך ש- נוסחא

   (א) אם $\phi,\psi\in\Phi$, אז גם $\langle\phi\to\psi\rangle\in\Phi$

   (ב) אם $x\in\mathscr{V}_a$ ו-$\phi\in\Phi$, אז $\exists x{\in}a\phi\in\Phi$

תרגיל 3.2.8 (קריאה יחידה, נוסחאות). נסחו והוכיחו את משפט הקריאה היחידה עבור נוסחאות

הערה 3.2.9 (קיצורים). בדוגמאות, ובמקרים אחרים בהם לא נזדקק להגדרה המדויקת, נשתמש בקיצורים הבאים:

1. כאשר $u\in\mathscr{F}_{ab,c}$ או $u\in\mathscr{R}_{ab}$ עבור $a,b,c\in\mathscr{S}$, ו-u הוא סימן (ולא אות), נרשום לעתים $\langle t_1ut_2\rangle$ במקום $u(t_1,t_2)$. למשל, בדוגמא 3.1.5 רשמנו $\langle x+y\rangle$ במקום $+(x,y)$. בפרט, עבור יחסי השוויון (כאשר הם בשפה), נרשום $t_1=t_2$ במקום $=(t_1,t_2)$. כמו כן, נרשום c במקום $c()$ עבור $c\in\mathscr{F}_{\epsilon,a}$.

2. נשתמש בקשרים הלוגיים $\neg$, $\vee$ ו-$\wedge$ כפי שעשינו בתחשיב הפסוקים (עם אותם קיצורים). בנוסף, נרשום $\forall x{\in}a\phi$ כקיצור ל- $\neg\exists x{\in}a\neg\phi$. במקרים בהם $\mathscr{S}$ מורכבת מאיבר אחד a, נרשום $\exists x\phi$ במקום $\exists x{\in}a\phi$. נקצר כך גם אם סוג המשתנה מובן מן ההקשר, למשל בנוסחה מהצורה $\exists xE(x,y)$, כאשר הסוג של E ידוע או אינו חשוב. כמו-כן, נרשום $\exists x_1,x_2\dots$ או $\exists\bar{x}\dots$ בתור קיצור ל-$\exists x_1\exists y_2\dots$, וכך הלאה.

כמובן שמשפט הקריאה היחידה לא תקף עם קיצורים אלה, ובכל פעם שנרצה להוכיח או להגדיר משהו על נוסחאות, נשתמש בהגדרה המקורית

כמו במקרה של שמות עצם, נרצה להגדיר את קבוצת המשתנים שנוסחא ϕ תלויה בהם (כלומר, כפי שנראה בהמשך, ערך האמת שלה תלוי בערכיהם). נשים לב שנוסחא מהצורה $\exists xf(x,y)=0$, תלויה ב-y אך לא ב-x.

הגדרה 3.2.10. קבוצת *המשתנים החופשיים* $\mathscr{V}(\phi)$ בנוסחא ϕ מוגדרת ברקורסיה על-ידי: אם ϕ היא הנוסחא הבסיסית $E(t_1,\dots,t_n)$ אז $\mathscr{V}(\phi)=\mathscr{V}(t_1)\cup\dots\cup\mathscr{V}(t_n)$. אחרת, המשתנים החופשיים $\mathscr{V}(\phi)$

$$\mathscr{V}(\bot)=\emptyset \tag{3.1}$$

$$\mathscr{V}(\langle\phi\to\psi\rangle)=\mathscr{V}(\phi)\cup\mathscr{V}(\psi) \tag{3.2}$$

$$\mathscr{V}(\exists x{\in}a\phi)=\mathscr{V}(\phi)\setminus\{x\} \tag{3.3}$$

נרשום $\phi(x_1,\dots,x_n)$ אם $\mathscr{V}(\phi)=\{x_1,\dots,x_n\}$. הנוסחא ϕ נקראת *פסוק* אם $\mathscr{V}(\phi)$ ריקה. פסוק

3.3 סמנטיקה

כעת נגדיר את האופן שבו מפרשים את האובייקטים התחביריים שהוגדרו לעיל. ההגדרות הבאות מקבילות להשמות של תחשיב הפסוקים. שוב, כדאי לחזור לדוגמאות ב-3.1 על-מנת לראות על מה מדובר.

נתחיל עם הפירוש של חתימות.

הגדרה 3.3.1. תהי $\Sigma = (\mathscr{S}, \mathscr{R}, \mathscr{F})$ חתימה. *מבנה* $\mathcal{M}$ עבור Σ מורכב מהנתונים הבאים: מבנה

1. לכל $a \in \mathscr{S}$, קבוצה M_a לה נקרא *העולם של* a (ב-$\mathcal{M}$). בהנתן מילה $w \in \mathscr{S}^*$ באורך n, נסמן $M_w = M_{w(1)} \times M_{w(2)} \times \ldots \times M_{w(n)}$ (בפרט, $M_\epsilon{=}1{=}\{\emptyset\}$ היא קבוצה בת איבר אחד). העולם של a

2. לכל $E \in \mathscr{R}_w$, תת-קבוצה $E^{\mathcal{M}} \subseteq M_w$ (*היחס E ב-$\mathcal{M}$*). היחס E ב-$\mathcal{M}$

3. לכל $f \in \mathscr{F}_{w,a}$, פונקציה $f^{\mathcal{M}} : M_w \to M_a$ (*הפונקציה f ב-$\mathcal{M}$*). בפרט, עבור $c{\in}\mathscr{F}_{\epsilon,a}$, נזהה את ההעתקה $c^{\mathcal{M}} : 1 \to M_a$ עם האיבר $c^{\mathcal{M}}(\emptyset) \in M_a$, ונקרא לו *הקבוע c ב-$\mathcal{M}$*. הפונקציה f ב-$\mathcal{M}$ הקבוע c ב-$\mathcal{M}$

כזכור, הביטויים בשפה שלנו תלויים לא רק בחתימה, אלא גם בקבוצת המשתנים. על מנת לקבוע את ערכי הביטויים הללו, אנו צריכים לכן לקבוע את ערכי המשתנים:

הגדרה 3.3.2. יהי $\mathcal{M}$ מבנה עבור חתימה Σ, ותהי $\mathscr{V} = \coprod_{a \in \mathscr{S}} \mathscr{V}_a$ קבוצה של משתנים עבורה. *השמה ל-$\mathscr{V}$* (בתוך $\mathcal{M}$) הינה אוסף העתקות $\omega = (\omega_a)$ עבור $a \in \mathscr{S}$, כאשר $\omega_a : \mathscr{V}_a \to M_a$. השמה
את אוסף ההשמות ל-$\mathscr{V}$ בתוך $\mathcal{M}$ נסמן ב-$\mathcal{M}^{\mathscr{V}}$. $\mathcal{M}^{\mathscr{V}}$

דוגמא 3.3.3. נניח ש-Σ היא חתימה עם סוג אחד G, סימן פונקציה דו-מקומי $+$, סימן קבוע 0, וסימני יחס דו-מקומיים $<$ ו-$=$. מבנה אפשרי עבור Σ משייך ל-G את הקבוצה $\mathbb{Z}$ של השלמים, ל-$+$ את העתקת החיבור על G, ל-0 את האיבר $0 \in \mathbb{Z}$, ל-$<$ את יחס הסדר על השלמים ול-$=$ את יחס השוויון. אם x ו-y הם משתנים, ההתאמה שמשייכת ל-x את 3 ול-y את 5 היא השמה. באופן כללי, ניתן לזהות את $\mathcal{M}^{\{x,y\}}$ עם קבוצת הזוגות הסדורים של איברי $\mathbb{Z}$ (אם בוחרים סדר על $\{x, y\}$).

כעת ניתן לפרש את כל הביטויים של השפה. כפי שכבר הוזכר, שמות עצם ונוסחאות תלויים במשתנים החופשיים שלהם, והם יגדירו העתקות על ההשמות למשתנים החופשיים שלהם.

הגדרה 3.3.4. יהי $\mathcal{M}$ מבנה לחתימה Σ.

1. לכל שם עצם t מסוג a נגדיר העתקה $t^{\mathcal{M}} : M^{\mathscr{V}(t)} \to M_a$, ברקורסיה:

   (א) אם t משתנה, אז $\mathscr{V}(t) = \{t\}$, ונגדיר $t^{\mathcal{M}}(\omega) = \omega(t)$.

(ב) אם $t=f(t_1,\dots,t_n)$, אז

$$t^{\mathcal{M}}(\omega)=f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\omega\restriction_{\mathscr{V}(t_1)}),\dots,t_n^{\mathcal{M}}(\omega\restriction_{\mathscr{V}(t_n)}))$$

לביטוי האחרון יש משמעות, שכן $\mathscr{V}(t_i)\subseteq\mathscr{V}(t)$ לכל i, ולכן ניתן לצמצם את ω ל-$\mathscr{V}(t_i)$.

בהמשך, לא נקפיד לרשום את הצימצומים הללו: אם פונקציה g מוגדרת על $\mathcal{M}^{\mathscr{V}}$, נרשום $g(\omega)$ גם עבור $\omega\in\mathcal{M}^{\mathscr{V}_1}$ אם $\mathscr{V}\subseteq\mathscr{V}_1$, כאשר הכוונה היא ל-$g(\omega\restriction_{\mathscr{V}})$.

2. לכל נוסחא ϕ, נגדיר תת-קבוצה $\phi^{\mathcal{M}}\subseteq\mathcal{M}^{\mathscr{V}(\phi)}$ ברקורסיה, באופן הבא:

(א) אם ϕ היא מהצורה $E(t_1,\dots,t_n)$, אז

$$\phi^{\mathcal{M}}=\{\omega\in\mathcal{M}^{\mathscr{V}(\phi)}\mid(t_1^{\mathcal{M}}(\omega),\dots,t_n^{\mathcal{M}}(\omega))\in E^{\mathcal{M}}\}$$

(ב) עבור נוסחאות ϕ ו-ψ,

$$(\bot)^{\mathcal{M}}=\emptyset \tag{3.4}$$

$$\langle\phi\to\psi\rangle^{\mathcal{M}}=(\phi^{\mathcal{M}})^c\cup\psi^{\mathcal{M}} \tag{3.5}$$

$$(\exists x{\in}a\phi)^{\mathcal{M}}=\{\omega\restriction_{\mathscr{V}(\phi)\setminus\{x\}}\mid\omega\in\phi^{\mathcal{M}}\} \tag{3.6}$$

תרגיל 3.3.5. בדקו שלהגדרות לעיל יש משמעות. בפרט, הבהירו את משמעות האיחוד ב-(3.5)

בפרט, אם ϕ פסוק, אז $\phi^{\mathcal{M}}$ היא תת-קבוצה של $\mathcal{M}^0=1$, כלומר איבר של $2=\{0,1\}$.

ערך האמת

$\mathcal{M}$ מספק את ϕ

הגדרה 3.3.6. אם $\mathcal{M}$ מבנה עבור חתימה Σ, ו-ϕ פסוק בחתימה זו, אז $\phi^{\mathcal{M}}$ נקרא *ערך האמת* של ϕ ב-$\mathcal{M}$. אם $\phi^{\mathcal{M}}=1$, נאמר ש-$\mathcal{M}$ *מספק את* ϕ וש-ϕ נכון ב-$\mathcal{M}$.

תרגיל 3.3.7. הראו שאם ϕ ו-ψ הם פסוקים, אז $(\neg\phi)^{\mathcal{M}}=1-\phi^{\mathcal{M}}$, ו-$\langle\phi\wedge\psi\rangle^{\mathcal{M}}=\phi^{\mathcal{M}}\cdot\psi^{\mathcal{M}}$. במילים אחרות, $\phi\mapsto\phi^{\mathcal{M}}$ היא השמה על קבוצת הפסוקים, במובן של תחשיב הפסוקים

תרגיל 3.3.8. הוכיחו ש-$(\forall x{\in}a\phi)^{\mathcal{M}}$ היא קבוצת כל ההשמות עבור $\mathscr{V}(\phi)\setminus\{x\}$ שכל הרחבה שלהן ל-x שייכת ל-$\phi^{\mathcal{M}}$.

דוגמא 3.3.9. נמשיך עם החתימה והמבנה מדוגמא 3.3.3. שם העצם $x+y$ מגדיר את ההעתקה הנתונה על-ידי $\omega\mapsto\omega(x)+\omega(y)$. לעומת זאת, שם העצם $x+x$ מגדיר את ההעתקה $\omega\mapsto\omega+\omega$ (אם מזהים השמות על $\{x\}$ עם איברי $\mathbb{Z}$).

הנוסחא הבסיסית $x+y=0$ מגדירה את קבוצת כל ה-$\omega\in\mathbb{Z}^{\{x,y\}}$ כך ש-$\omega(x)+\omega(y){=}0$, כלומר, כל הזוגות מהצורה $(a,-a)$ עם $a\in\mathbb{Z}$. לכן, $\exists y(x+y=0)$ מגדירה את קבוצת כל ההשמות ω ל-x שניתן להרחיב אותן ל-y באופן ש-$\omega(x)+\omega(y)=0$. במלים אחרות, זוהי כל הקבוצה $\mathbb{Z}$. לכן $\forall x\exists y(x+y=0)$ מגדירה את קבוצת כל ההשמות שלכל הרחבה שלהן ל-x קיימת הרחבה ל-y כך ש-$\omega(x)+\omega(y)=0$. הואיל וזה נכון, המבנה $\mathcal{M}$ מספק את $\forall x\exists y(x{+}y=0)$.

סוף הרצאה 7, 28 בנוב' 2024

נסכם במספר הגדרות נוספות הקושרות בין פסוקים למבנים, ובין קבוצות לנוסחאות.

הגדרה 3.3.10. תהי Σ חתימה, ויהי $\mathcal{M}$ מבנה עבור Σ.

מספק

1. אם φ נוסחא ב-Σ, נאמר ש-$\mathcal{M}$ *מספק* את φ אם $\varphi^{\mathcal{M}} \neq \emptyset$. נאמר ש-$\mathcal{M}$ מספק קבוצה Γ של נוסחאות אם קיימת השמה ששייכת ל-$\varphi^{\mathcal{M}}$ לכל $\varphi \in \Gamma$.

תורה

התורה של המבנה

$\mathbf{Th}(\mathcal{M})$

2. קבוצת פסוקים בחתימה Σ נקראת *תורה* (*מעל* Σ). קבוצת הפסוקים φ עבורם $\varphi^{\mathcal{M}} = 1$ נקראת *התורה של המבנה* $\mathcal{M}$, מסומנת ב-$\mathbf{Th}(\mathcal{M})$.

מודל

3. $\mathcal{M}$ הוא *מודל* של תורה $\mathbb{T}$ אם $\varphi^{\mathcal{M}} = 1$ לכל $\varphi \in \mathbb{T}$ (כלומר, כל הפסוקים ב-$\mathbb{T}$ נכונים ב-$\mathcal{M}$).

קבוצה גדירה

נוסחאות שקולות

4. תת-קבוצה מהצורה $\varphi^{\mathcal{M}}$ נקראת *קבוצה גדירה*. נוסחאות φ ו-ψ הן *נוסחאות שקולות* (ביחס ל-$\mathcal{M}$) אם $\varphi^{\mathcal{M}} = \psi^{\mathcal{M}}$.

נובעת לוגית

$\Gamma \models \varphi$

$\Gamma \models \Gamma_1$

5. נוסחא φ *נובעת לוגית* מקבוצת הנוסחאות Γ אם לכל מבנה $\mathcal{M}$ והשמה ω המספקים את Γ, השמה זו מספקת גם את φ. קבוצה Γ_1 נובעת לוגית מ-Γ אם כל איבר של Γ_1 נובע מ-Γ. סימון: $\Gamma \models \varphi$ או $\Gamma \models \Gamma_1$.

בפרט, כל מבנה הוא מודל של התורה שלו.

3.3.11 מבנים עם שוויון

יחס השוויון מוגדר על כל קבוצה, ולרוב התכונות המעניינות אותנו מנוסחות בעזרתו. כפי שנראה בהמשך, לא ניתן לכפות על יחס להיות יחס השוויון באמצעות הנוסחאות שהגדרנו, ולכן יש להוסיף את זה כדרישה חיצונית.

מבנה עם שוויון

הגדרה 3.3.12. תהי Σ חתימה עם קבוצת סוגים $\mathscr{S}$. *מבנה עם שוויון* עבור Σ הוא מבנה $\mathcal{M}$ עבור החתימה $\Sigma_=$ המרחיבה את Σ על-ידי יחס חדש $=_a \in \mathscr{R}_{aa}$ לכל סוג a, בו היחס $=_a$ מתפרש כשוויון על M_a.

בהקשר של מבנים עם שוויון, הנוסחאות, הפסוקים ויתר האלמנטים התחביריים יהיו ביחס לחתימה $\Sigma_=$. למשל, התורה של מבנה עם שוויון $\mathcal{M}$ היא קבוצת הפסוקים *מעל* $\Sigma_=$ הנכונים ב-$\mathcal{M}$ עם השוויון הרגיל.

3.4 שאלות ודוגמאות נוספות

נתבונן עתה במספר דוגמאות.

3.4.1 קבוצות גדירות בשדות

יהי K שדה ונתבונן כמבנה (הטבעי) לחתימה החד-סוגית $(L, 0, 1, +, -, \cdot)$. איזה קבוצות גדירות במבנה הזה? נתחיל בנוסחאות הבסיסיות במשתנה אחד. נוסחא בסיסית שקולה (ביחס ל-K) לנוסחא מהצורה $a_n x^n + \cdots + a_0 = 0$, כלומר, משוואה פולינומית במשתנה אחד, עם מקדמים ב-$\mathbb{Z}$ (ליתר דיוק, בתמונה של $\mathbb{Z}$ בתוך K). למשוואה כזו לכל היותר n פתרונות ב-K אם לפחות אחד המקדמים שונה מאפס. קבוצה חסרת כמתים במשתנה אחד היא צירוף בוליאני של קבוצות כאלה. בפרט, כל קבוצה כזו היא סופית או קו-סופית ומורכבת מאיברים אלגבריים מעל השדה הראשוני.

במספר משתנים התמונה דומה: קבוצות חסרות כמתים מוגדרות על-ידי מערכות של משוואות פולינומיות ושלילותיהן. במקרה של יותר ממשתנה אחד, קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות אינה בהכרח סופית (אך ניתן לחשוב עליה כעל קבוצה עם מבנה גאומטרי; זהו הנושא של התחום *גאומטריה אלגברית*).

מה בנוגע לנוסחאות עם כמתים? דוגמא אחת לנוסחא כזו היא $\exists y(xy = 1)$. נוסחא זו מגדירה את קבוצת כל האיברים להם יש הפכי כפלי, ולכן היא שקולה לנוסחא $x \neq 0$. האם קיימות נוסחאות שאינן שקולות לנוסחא חסרת כמתים?

תרגיל 3.4.2. מצאו נוסחה (בחתימה של חוגים) המגדירה ב-$\mathbb{R}$ את הממשיים החיוביים. הסיקו שלא כל נוסחא שקולה ב-$\mathbb{R}$ לנוסחא חסרת כמתים. מהי הקבוצה שאותה נוסחא מגדירה ב-$\mathbb{C}$?

בפרט, אנו רואים שהתיאור של הקבוצות הגדירות משתנה משדה לשדה.

שאלה 3.4.3. מהן הקבוצות הגדירות בשדות $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$? האם ניתן להגדיר את $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$? האם ניתן להגדיר את (הגרף של) הפונקציה $x \mapsto e^x$ ב-$\mathbb{R}$, ב-$\mathbb{C}$?

תרגיל 3.4.4. איפה, בתיאור לעיל, השתמשנו בעובדה ש-K הוא שדה (ולא חוג חילופי כללי יותר)?

3.4.5 גאומטריית המישור

נתבונן במבנה לחתימה של גיאומטריית המישור המורכב מנקודות וקוים, עם היחסים הרגילים של שייכות נקודה לקו וביניות. האם ניתן להגדיר את היחס "הקטע בין x ל-y שווה אורך לקטע zw"? נעשה זאת אם הקו L_{xy} העובר דרך x, y מקביל לקו L_{zw} העובר דרך z, w (ניתן כמובן להניח ש-$x \neq y$ ו-$z \neq w$, ולכן הקווים מוגדרים היטב).

תרגיל 3.4.6. מצאו נוסחאות שמגדירות את היחסים ב-$\mathbb{R}^2$ כמבנה לגאומטריית המישור:

1. הקו L_{xy} מקביל (או שווה) ל-L_{zw}
2. אם L_{xy} מקביל ל-L_{zw} ושונה ממנו אז האורך של הקטע xy שווה לאורך של zw
3. אותו דבר בלי ההנחה ש-L_{xy} שונה מ-L_{zw}

שאלה 3.4.7. האם היחס "xy שווה אורך ל-zw" גדיר לקטעים כלליים? האם הנקודה $(0,0)$ במישור גדירה?

את פרויקט הגאומטריה של אוקלידס ניתן לנסח כך:

שאלה 3.4.8. באיזו חתימה ניתן לנסח את גאומטריית המישור? האם ניתן לתאר את התורה של המישור הממשי בחתימה זו?

3.4.9 השלמים והטבעיים

נתבונן במבנה של השלמים $\mathbb{Z}$ בשפת החוגים. התיאור של קבוצות חסרות כמתים בדוגמא זו זהה למקרה של שדות. האם ניתן להגדיר את הטבעיים בתוך $\mathbb{Z}$?

עובדה 3.4.10 (משפט לגרנז'). *כל מספר טבעי ניתן להציג כסכום של ארבעה ריבועים (של מספרים שלמים)*

לכן הטבעיים מוגדרים על-ידי הנוסחא $\exists a,b,c,d(x=a^2+b^2+c^2+d^2)$.

תרגיל 3.4.11. במבנה $\mathbb{Z}$, רשמו נוסחאות המגדירות את הקבוצות הבאות:

1. קבוצת הראשוניים
2. קבוצת החזקות של 5

שאלה 3.4.12. האם ניתן להגדיר ב-$\mathbb{Z}$ את קבוצת החזקות של 10? את הפונקציה $n \mapsto 5^n$?

שאלה 3.4.13. האם ניתן לתאר את $\mathbf{Th}(\mathbb{Z},+,\cdot)$?

שאלה 3.4.14. האם קיים פסוק בשפה של מרחבים וקטוריים מעל שדה קבוע K, שהמודלים שלו הם מרחבים וקטוריים ממימד 7?

שאלה 3.4.15. האם קיימת קבוצה של פסוקים בשפה של שדות שהמודל היחיד שלה הוא $\mathbb{R}$?

שאלה 3.4.16. האם קיימת תורה שהמודלים שלה הם הגרפים הקשירים?

שאלה 3.4.17. האם לחבורה החפשית מעל שני איברים אותה תורה כמו לחבורה החפשית על שלושה איברים?

תרגיל 3.4.18. הראו שלחבורה החפשית מעל איבר אחד תורה שונה מזאת שלחבורה החפשית מעל שני איברים. הראו שלחבורה האבלית החפשית מעל שני איברים תורה שונה מלחבורה האבלית החפשית על שלושה איברים

סוף הרצאה 8, 2 בדצמ' 2024

3.4.19 התורה של קבוצה אינסופית

נתבונן בחתימה הריקה על סוג אחד, כלומר, זו שהיחס היחיד בה הוא שוויון. על-פי ההגדרה, מבנה לחתימה זו הוא פשוט קבוצה. מה יכולה להיות התורה של מבנה כזה? אם לקבוצה גודל סופי n, אז הוא מתואר לחלוטין על-ידי פסוק מהצורה $\phi_n \wedge \neg\phi_{n-1}$, כאשר ϕ_n הוא הפסוק $\forall x_0 \dots x_n \langle x_0 = x_1 \rangle \vee \dots \vee \langle x_{n-1} = x_n \rangle$. נתבונן בתורה $\mathbb{T}$ המורכבת מכל הפסוקים $\neg\phi_n$.

כל מודל $\mathcal{M}$ של $\mathbb{T}$ הוא קבוצה אינסופית. מהן הקבוצות הגדירות במודל כזה? הנוסחאות הבסיסיות הן מהצורה $x = y$ כאשר x, y משתנים (לא בהכרח שונים). כלומר, קבוצה גדירה על ידי נוסחא ללא כמתים היא צירוף בוליאני של "אלכסונים". מה לגבי נוסחאות מהצורה $\exists x \phi(x, \bar{y})$ כאשר ϕ ללא כמתים? ראשית, הואיל ו-$\exists$ מתחלף עם $\vee$, ניתן להניח ש-ϕ היא מהצורה $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$, כאשר ϕ_1 היא מהצורה $x = y_1 \wedge \dots \wedge x = y_k$, ϕ_2 היא מהצורה $x \neq z_1 \wedge \dots \wedge x \neq z_l$, ו-$\phi_3$ לא מכילה את x כלל. לכן, ניתן לשכוח מ-ϕ_3, ולהתבונן בשני מקרים:

1. ϕ_1 אינה ריקה. במקרה זה $\exists \langle \phi_1 \wedge \phi_2 \rangle$ שקולה ל-$y_1 = y_2 \wedge \dots \wedge y_1 = y_k \wedge y_1 \neq z_1 \wedge \dots y_1 \neq z_l$ (אם y_i הוא x בשביל i כלשהו, פשוט מוחקים את השוויון. אם $x = z_i$, אז הנוסחא מגדירה את הקבוצה הריקה).

2. ϕ_1 ריקה. במקרה זה הנוסחא מגדירה את כל התחום שלה (משום שהעולם אינסופי).

בסך הכל הראינו, באופן מפורש: כל נוסחא מהצורה $\exists x \phi(x, y)$ שקולה לנוסחא ללא כמתים. לנוסחאות אחרות, הטענה נובעת באינדוקציה. כלומר הוכחנו:

טענה 3.4.20. *לכל נוסחא ϕ בשפת השוויון קיימת נוסחא ללא כמתים ψ השקולה לה בכל מודל של $\mathbb{T}$*

תרגיל 3.4.21. הוכיחו את הטענה

מסקנה 3.4.22. *לכל המודלים האינסופיים של שפת השוויון יש אותה תורה.*

הוכחה. אם ϕ פסוק בשפת השוויון יהי ψ פסוק כמו בטענה. הואיל ו-ψ חסר כמתים, הוא חייב להיות 1 או 0. לכן התורה היא בדיוק התורה המורכבת מהפסוקים השקולים ל-1. $\square$

3.5 הגדרות נוספות

נקבע חתימה Σ. כל המבנים והנוסחאות בסעיף זה יהיו ביחס לחתימה זו. על-מנת להתחיל לענות על חלק מהשאלות ששאלנו, עלינו לנסח אותן יותר במדויק. למשל, בשאלה 3.4.15 שאלנו האם קיימת תורה ש-$\mathbb{R}$ הוא השדה היחיד שמקיים אותה. באיזה מובן היחידות הזו יכולה להיות נכונה? ניתן כמובן לשנות את ה"שמות" של האיברים ב-$\mathbb{R}$ ולקבל מבנה אחר, אבל הוא יהיה *איזומורפי* ל-$\mathbb{R}$ כשדה. למושג האיזומורפיזם יש הכללה טבעית למבנים עבור חתימה כלשהי. באופן יותר כללי, אנחנו רוצים להגדיר העתקות של מבנים:

הגדרה 3.5.1. יהיו $\mathcal{M}$ ו-$\mathcal{N}$ שני מבנים עבור חתימה Σ.

1. *הומומורפיזם* מ-$\mathcal{M}$ ל-$\mathcal{N}$ מורכב ממערכת העתקות $\tau_a : M_a \to N_a$, לכל סוג a, כך שלכל סימן יחס E ולכל $\bar{m} \in \mathcal{M}$ מתקיים $\bar{m} \in E^{\mathcal{M}}$ אם ורק אם $\tau(\bar{m}) \in E^{\mathcal{N}}$, ולכל סימן פונקציה f מתקיים $f^{\mathcal{N}}(\tau(\bar{m})) = \tau(f^{\mathcal{M}}(\bar{m}))$. הומומורפיזם

2. *תת-מבנה* של מבנה $\mathcal{M}$ הוא מבנה $\mathcal{N}$ שעולמו תת-קבוצה של M, ושההכלה שלו ב-M היא הומומורפיזם. תת-מבנה

3. אם $\mathcal{M}$ מודל של תורה $\mathbb{T}$, אז *תת-מודל* של $\mathcal{M}$ (ביחס ל-$\mathbb{T}$) הוא תת-מבנה שגם הוא מודל של $\mathbb{T}$. תת-מדל

4. *איזומורפיזם* הוא הומומורפיזם $\tau : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ שיש לו הופכי, כלומר, הומומורפיזם $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ כך ש-$\sigma \circ \tau$ ו-$\tau \circ \sigma$ שתיהן הזהות. אם קיים איזומורפיזם מ-$\mathcal{M}$ ל-$\mathcal{N}$, נאמר שהם *מבנים איזומורפיים*. איזומורפיזם מבנים איזומורפיים

5. *אוטומורפיזם* של מבנה $\mathcal{M}$ הוא איזומורפיזם מ-$\mathcal{M}$ לעצמו. אוטומורפיזם

כמובן שבהגדרה הזו, $\bar{m} \in \mathcal{M}$ זה קיצור ל-$\langle m_1, \dots, m_k \rangle \in M_w$ כאשר האורך של w הוא k, ו-$\tau(\langle m_1, \dots, m_k \rangle) = \langle \tau_{w(1)}(m_1), \dots, \tau_{w(k)}(m_k) \rangle$.

תרגיל 3.5.2. הוכיחו:

1. כל הומומורפיזם ממבנה עם שוויון הוא חד-חד-ערכי

2. הומומורפיזם הוא איזומורפיזם אם ורק אם הוא על

3. למבנים איזומורפיים יש אותה עוצמה

4. עבור מרחבים וקטוריים מעל שדה K (כמבנים עבור החתימה החד-סוגית מדוגמא 3.1.5) ועבור חוגים (כמבנים לחתימה של חוגים), מושג ההומומורפיזם שהגדרנו מתלכד עם המושג של העתקה לינארית חד-חד-ערכית והומומורפיזם חד-חד ערכי של חוגים (בהתאמה), ועבור גרפים, הומומורפיזם הוא שיכון חח"ע (בפרט, עבור קבוצות סדורות, זו פונקציה עולה ממש).

המושג של איזומורפיזם נותן לנו את המושג הסביר החזק ביותר של "אותו מבנה". אנחנו מעוניינים להשוות אותו למושג יותר חלש לכאורה, המוגדר בצורה תחבירית:

הגדרה 3.5.3. 1. מבנה $\mathcal{M}$ *שקול אלמנטרית* למבנה $\mathcal{N}$ אם יש להם אותה תורה. שקול אלמנטרית

2. *מחלקה אלמנטרית* היא מחלקת כל המודלים של תורה נתונה מחלקה אלמנטרית

3. תורה $\mathbb{T}$ היא *תורה שלמה* אם לכל פסוק ϕ (בחתימה שלה) $\mathbb{T} \models \phi$ או $\mathbb{T} \models \neg\phi$. תורה שלמה

תרגיל 3.5.4. נניח ש-$\mathbb{T}$ תורה ספיקה וסגורה תחת $\models$ (כלומר, אם $\mathbb{T} \models \phi$ אז $\phi \in \mathbb{T}$). הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

1. $\mathbb{T}$ שלמה
2. קיים מבנה $\mathcal{M}$ כך ש-$\mathbb{T} = \mathbf{Th}(\mathcal{M})$
3. כל שני מודלים של $\mathbb{T}$ שקולים אלמנטרית
4. $\mathbb{T}$ מקסימלית בין התורות הספיקות

תרגיל 3.5.5. הוכיחו שאם $\mathcal{M}$ ו-$\mathcal{N}$ איזומורפיים, אז הם שקולים אלמנטרית

דוגמא 3.5.6. במסקנה 3.4.22 ראינו שכל שתי קבוצות אינסופיות הן שקולות אלמנטרית. כיוון שאיזומורפיזם שומר על עוצמה, ישנן קבוצות כאלה שאינן איזומורפיות. במילים אחרות, התורה שאומרת שהקבוצה אינסופית היא תורה שלמה.

מאידך, אם M קבוצה סופית, ראינו בסעיף 3.4.19 שהתורה יכולה להגיד את זה (באמצעות הפסוקים ϕ_n), ולכן כל מבנה השקול אלמנטרית ל-M, גם איזומורפי לו.

אפשר עכשיו לנסח בצורה יותר מדויקת את שאלות 3.4.14 ו-3.4.15:

שאלה 3.5.7. נניח ש-V מרחב וקטורי ממימד 7 מעל שדה K (כמבנה לחתימה מדוגמא 3.1.5), ו-U מרחב וקטורי מעל K אשר שקול אלמנטרית ל-V. האם בהכרח U איזומורפי ל-V? במילים אחרות, האם המימד של U הוא בהכרח 7?

שאלה 3.5.8. נניח ש-L שדה השקול אלמנטרית ל-$\mathbb{R}$. האם הוא בהכרח איזומורפי ל-$\mathbb{R}$?

3.6 משפט הקומפקטיות ושימושיו

על-מנת לענות על חלק מהשאלות ששאלנו, נשתמש באחד המשפטים המרכזיים בתחום, *משפט הקומפקטיות* עבור תחשיב היחסים. משפט זה אנלוגי לגמרי לאותו משפט בתחשיב הפסוקים. כזכור (הגדרה 3.3.10), מבנה $\mathcal{M}$ מספק קבוצה Γ של נוסחאות אם יש ב-$\mathcal{M}$ השמה ω שמספקת את כל הנוסחאות ב-Γ.

הגדרה 3.6.1. קבוצה Γ של נוסחאות בחתימה נתונה היא *קבוצה ספיקה* אם קיים מבנה $\mathcal{M}$ עבור אותה חתימה שמספק אותה. Γ היא *ספיקה סופית* אם כל תת-קבוצה סופית של Γ היא ספיקה. קבוצה ספיקה ספיקה סופית

משפט 3.6.2 (משפט הקומפקטיות). *אם קבוצה Γ של נוסחאות היא ספיקה סופית, אז Γ ספיקה*

לפני שנוכיח את המשפט, נראה מספר ניסוחים ושימושים שלו. ראשית, נשים לב למקרה הפרטי כאשר Γ קבוצה של פסוקים. אז הנחת הספיקות אומרת פשוט של-Γ יש מודל, אז מקבלים את המסקנה הבאה. בהמשך נראה שהמסקנה למעשה שקולה למשפט הכללי.

מסקנה 3.6.3. *אם $\mathbb{T}$ תורה שלכל תת-קבוצה סופית שלה יש מודל, אז גם ל-$\mathbb{T}$ יש מודל.*

צורה נוספת של המשפט נתונה במסקנה הבאה, שמוכחת בדיוק כמו בתרגיל 2.4.4.

מסקנה 3.6.4. *אם* $\Gamma \models \phi$ *אז* $\Gamma_0 \models \phi$ *עבור תת-קבוצה סופית* Γ_0 *של* Γ.

תרגיל 3.6.5. נניח ש-ψ פסוק בחתימת השוויון. הוכיחו שקיים מספר טבעי n, כך שאחת האפשרויות הבאות נכונה: כל קבוצה שגודלה גדול מ-n מקיימת את ψ, או כל קבוצה שגודלה גדול מ-n לא מקיימת את ψ.

המסקנה הבאה היא שימוש טיפוסי של משפט הקומפקטיות, והיא תאפשר לנו לענות על כמה מהשאלות ששאלנו:

מסקנה 3.6.6 (משפט לוונהיים-סקולם העולה). *נניח שעבור תורה* $\mathbb{T}$ *ונוסחא* ϕ *קיים, לכל מספר טבעי* n*, מודל* $\mathcal{M}$ *של* $\mathbb{T}$ *כך שעצמת* $\phi^{\mathcal{M}}$ *גדולה מ-*n*. אז לכל עוצמה* κ *קיים מודל* $\mathcal{M}$ *של* $\mathbb{T}$ *כך שעצמת* $\phi^{\mathcal{M}}$ *היא לפחות* κ*. בפרט, אם ל-*$\mathbb{T}$ *יש מודלים בהם עצמת סוג* a *לא חסומה על-ידי שום מספר טבעי, אז יש לה מודלים בהם עצמת* a *גדולה כרצוננו.*

מסקנה 3.6.7. *נניח ש-*$\mathcal{M}$ *מבנה אינסופי (כלומר,* $\mathcal{M}_a$ *אינסופית עבור אחד הסוגים* a*). אז יש מבנה שאינו איזומורפי ל-*$\mathcal{M}$*, אך שקול לו אלמנטרית.*

הוכחה. נשתמש במסקנה 3.6.6 עבור התורה של $\mathcal{M}$, הנוסחא $x =_a x$, ועוצמה גדולה מעוצמת M_a. מודל כמובטח במסקנה שקול אלמנטרית ל-$\mathcal{M}$, אך אינו שווה עוצמה ל-$\mathcal{M}$, ולכן גם לא איזומורפי אליו. $\square$

המסקנה נותנת לנו תשובה לשאלה 3.5.8:

דוגמא 3.6.8. השדה $\mathbb{R}$ הוא אינסופי, ולכן יש שדות שקולים לו אלמנטרית מעוצמה גדולה כרצוננו. בפרט, יש כאלה שאינם איזומורפיים לו.

תרגיל 3.6.9. מדוע הדוגמא האחרונה לא סותרת את האפיון הידוע של $\mathbb{R}$ כשדה סדור השלם היחיד (עד כדי איזומורפיזם)?

סוף הרצאה 9, 5 בדצמ' 2024

דוגמא 3.6.10. המשפט מוכיח פעם נוספת גרסא קצת חלשה של מסקנה 3.4.22: לכל קבוצה אינסופית יש קבוצה מעוצמה (אינסופית) אחרת השקולה לה.

באופן יותר כללי, אותה הוכחה נותנת

מסקנה 3.6.11. *אם* $\mathcal{M}$ *מבנה אינסופי (בחתימה כלשהי), לא קיימת קבוצה של פסוקים המגדירה אותו ביחידות עד כדי איזומורפיזם.*

הוכחת מסקנה 3.6.6. נתבונן בקבוצת הנוסחאות מעל משתנים $\bar{x}_\alpha$ עבור $\alpha < \kappa$, כאשר כל $\bar{x}_\alpha$ מסוג $\mathscr{V}(\phi)$, המורכבת מהנוסחאות $\phi(\bar{x}_\alpha)$ לכל α, ולכל $\alpha \neq \beta$, הנוסחא $x_\alpha \neq x_\beta$. לפי ההנחה, קבוצה זו ספיקה סופית, ולכן ספיקה. השמה למשתנים אלה נותנת במודל המספק κ פתרונות שונים של ϕ. הטענה האחרונה היא המקרה הפרטי $x =_a x$. $\square$

תרגיל **3.6.12**. תהי $\mathbb{T}$ תורה, ויהי $\mathcal{M}$ מודל של $\mathbb{T}$.

1. הוכיחו שקיימת תורה $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$ (בחתימה שונה) כך שמודל של $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$ זה "אותו דבר" כמו מודל $\mathcal{N}$ של $\mathbb{T}$, ביחד עם הומומורפיזם $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ (כלומר, כל מודל של $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$ ניתן לראות גם כמודל של $\mathbb{T}$, ובנוסף מגדיר באופן טבעי הומומורפיזם כזה, ולהפך, אם $\mathcal{N}$ מודל של $\mathbb{T}$ ונתון הומומורפיזם $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, אז ניתן להפוך את $\mathcal{N}$ באופן טבעי למודל של $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$).

2. הוכיחו את הגרסא הבאה של משפט לוונהיים–סקולם העולה: אם κ עצמה כלשהי, ϕ נוסחא, ו-$\mathcal{M}$ מודל של תורה $\mathbb{T}$ כך ש-$\phi^{\mathcal{M}}$ אינסופית, אז קיים מודל $\mathcal{N}$ של $\mathbb{T}$ כך שעצמת $\phi^{\mathcal{N}}$ היא לפחות κ, ו-$\mathcal{N}$ מכיל את $\mathcal{M}$ בתור תת-מודל.

משפט לוונהיים–סקולם העולה שימושים במיוחד ביחד עם משפט לוונהיים-סקולם היורד, אותו ננסח עכשיו, ונוכיח מאוחר יותר.

משפט 3.6.13 (משפט לוונהיים–סקולם היורד). *אם $\mathcal{M}$ מודל של תורה $\mathbb{T}$, אז יש לו תת-מודל שעצמתו עוצמת השפה לכל היותר*

מסקנה 3.6.14. *אם $\mathbb{T}$ תורה עם מודל אינסופי $\mathcal{M}$, אז יש לה מודל בכל עצמה גדולה או שווה לעצמת $\mathbb{T}$, אותו ניתן לבחור שיכיל או יהיה מוכל (בהתאם לעצמה) ב-$\mathcal{M}$.*

הוכחה. אם κ גדולה מעצמת $\mathcal{M}$, אז נחליף את $\mathbb{T}$ בתורה $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$ המופיעה בתרגיל 3.6.12, ונבחר את $\mathcal{N}$ להיות מודל מעצמה לפחות κ (המכיל את $\mathcal{M}$) כפי שמובטח באותו תרגיל, אחרת נבחר $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. נוסיף לשפה κ קבועים, ול-$\mathbb{T}$ את הטענות שהם שונים, כמו בהוכחת 3.6.6. אז הואיל ועצמת $\mathcal{N}$ היא לפחות κ, ניתן להרחיב את $\mathcal{N}$ למודל של התורה המורחבת. לפי משפט 3.6.13, ל-$\mathcal{N}$ יש תת-מודל מעצמה κ. שוב לפי תרגיל 3.6.12, זהו המודל המבוקש. $\square$

באמצעות השילוב של שני המשפטים, נוכל לענות על שאלה 3.5.7.

מסקנה 3.6.15. *נניח ש-K שדה אינסופי. אז כל שני מרחבים וקטוריים לא טריוויאליים מעליו שקולים אלמנטרית (בשפה החד-סוגית עם סימני פונקציה עבור איברי K מדוגמא 3.1.5).*

הוכחה. יהיו V, U מרחבים לא טריוויאליים. בפרט, עוצמתם לפחות עצמת K, ולכן קיימים להם מבנים שקולים אלמנטרית V', U', בהתאמה, שעצמתם κ שווה, וגדולה מעצמת K. אולם אז המימד של כל אחד מהם הוא κ, ולכן הם איזומורפיים, והתורות שלהם שוות. $\square$

ממשפטי לוונהיים-סקולם נובע שלתורה (עם מודלים אינסופיים) לא יכול להיות רק מודל אחד, עד כדי איזומורפיזם. אך כמו שראינו במסקנה האחרונה, יתכן שיהיה לה רק מודל אחד מעוצמה נתונה κ. תורה כזו נקראת *תורה κ-קטגורית*. אותו טיעון כמו בהוכחת המסקנה מראה: **תורה κ-קטגורית**

טענה 3.6.16. *תורה $\mathbb{T}$ שהיא κ-קטגורית בעצמה $|\mathbb{T}| \geq \kappa$, ואין לה מודלים סופיים היא שלמה*

בפרט, אנחנו מקבלים הוכחה חדשה של מסקנה 3.4.22: התורה של קבוצות אינסופיות (בשפת השוויון) היא שלמה. אכן, היא κ-קטגורית לכל κ אינסופית.

סוף הרצאה 10, 9 בדצמ' 2024

3.7 על-מכפלות והוכחת משפט הקומפקטיות

אנו מכוונים כעת להוכיח את משפט הקומפקטיות (משפט 3.6.2). נעיר ראשית, שמספיק למעשה להוכיח את המקרה הפרטי לפסוקים, מסקנה 3.6.3. כדי לראות זאת, בהנתן חתימה Σ וקבוצה $\mathscr{V}$ של משתנים, נתבונן בחתימה חדשה $\Sigma_{\mathscr{V}}$ המתקבלת מהוספת איברי $\mathscr{V}_a$ (עבור כל סוג a של Σ) לקבוצת הקבועים מסוג a. אז כל נוסחא ϕ ב-Σ עם משתנים חפשיים ב-$\mathscr{V}$ ניתן לראות גם כפסוק $\phi_{\mathscr{V}}$ ב-$\Sigma_{\mathscr{V}}$ (ולהפך).

תרגיל 3.7.1. יהי $\mathcal{M}$ מבנה עבור Σ. הראו שקיימת התאמה חד-חד-ערכית בין השמות ω ל-$\mathscr{V}$ ב-$\mathcal{M}$, לבין הרחבות $\mathcal{M}_\omega$ של $\mathcal{M}$ למבנים עבור $\Sigma_{\mathscr{V}}$ (*הרחבה* כאן פירושה שנותנים ערכים לקבועים החדשים, ללא שינוי יתר המידע), כך ש-$\omega\in\phi^{\mathcal{M}}$ אם ורק אם $\mathcal{M}_\omega$ מודל של $\phi_{\mathscr{V}}$. בפרט, קבוצת הנוסחאות Γ היא ספיקה אם ורק אם קבוצת הפסוקים $\phi_{\mathscr{V}}$ ספיקה (כלומר, יש לה מודל).

מהתרגיל האחרון נובע, שמספיק להוכיח את משפט הקומפקטיות במקרה ש-Γ קבוצת פסוקים. כמו במקרה של תחשיב הפסוקים, ניתן להניח (ואנחנו נעשה זאת) ש-Γ סגורה תחת $\wedge$.

3.7.2 על-מכפלות

ההנחה של משפט הקומפקטיות מספקת, לכל $\psi\in\Gamma$, מבנה $\mathcal{M}_\psi$ כך ש-$\psi^{\mathcal{M}_\psi}=1$. המטרה שלנו היא לייצר מבנה חדש שיהיה מודל של Γ. על מנת לעשות זאת, נעסוק בשאלה יותר כללית: בהינתן אוסף מבנים $\mathcal{M}_i$ (כולם לאותה חתימה Σ), איך לייצר מבנה $\mathcal{M}$ שתכונותיו קשורות לתכונות האוסף? כאן i הוא איבר בקבוצה נתונה כלשהי I, קבוצת האינדקסים, אותה אנחנו קובעים עד סוף הבנייה.

אוסף כזה של מבנים מורכב, בראש ובראשונה, מאוסף $a^{\mathcal{M}_i}$ של פירושים לכל סוג a, כלומר אוסף A_i של קבוצות. יהיה נוח לחשוב על אוסף כזה כפונקציה $\pi_A:A\to I$, כאשר $A_i{=}{\pi_A}^{-1}(i)$. נאמר ש-A היא *קבוצה מעל* I. אנחנו נתעניין בקבוצה

$$\mathcal{L}(A)=\{s:J\to A\mid J\subseteq I,\pi_A\circ s=\mathrm{Id}_J\}$$

כלומר, סדרות s של איברים ב-A, שתחומן תת-קבוצה של I, ולכל סדרה כזו מתקיים $s(i)\in A_i$ לכל i בתחום. נסמן ב-$\mathbf{d}(s)$ את התחום J של s, ועבור קבוצה S של איברים כאלה, או פונקציה $\bar{s}$ עם ערכים שם, נסמן $\mathbf{d}(S)=\bigcap_{s\in S}\mathbf{d}(s)$ או $\mathbf{d}(\bar{s})=\mathbf{d}(\mathrm{Im}(\bar{s}))$ בהתאמה את תחום ההגדרה המשותף.

אינטואיטיבית, אפשר לחשוב על A כ"קבוצה שמשתנה בזמן", כאשר A_i היא הגרסא שלה ב"זמן" i. באופן דומה, סדרה $s\in\mathcal{L}(A)$ היא "איבר שמשתנה עם הזמן", כאשר $s(i)$ הגרסא שלו בזמן i (ובחלק מהזמן הוא אולי לא קיים). אם B תת-קבוצה של A מעל I (כלומר, B קבוצה מעל I ו-$B_i\subseteq A_i$ לכל i), ו-$s\in\mathcal{L}(A)$, נרשום $T_s(B)=\{i\in\mathbf{d}(s)\mid i\in B_i\}$. זוהי תת-קבוצה של I, קבוצת ה"זמנים" i בהם s היה שייך ל-B.

נניח עכשיו שלכל $i\in I$ נתון מבנה $\mathcal{M}_i$, ונסמן $\mathcal{M}=(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$. אז:

- לכל סוג a בחתימה Σ מתקבלת קבוצה $a^{\mathcal{M}}$ מעל I, כלומר ${(a^{\mathcal{M}})}_i=a^{\mathcal{M}_i}$.

- אם $\mathscr{V}$ קבוצת משתנים, מתקבלת קבוצה $\mathcal{M}^{\mathscr{V}}$ מעל I הנתונה על-ידי: $(\mathcal{M}^{\mathscr{V}})_i = (\mathcal{M}_i)^{\mathscr{V}}$.
- אם ϕ נוסחא שהמשתנים החפשיים שלה כלולים ב-$\mathscr{V}$, היא מגדירה תת-קבוצה $\phi^{\mathcal{M}}$ של $\mathcal{M}^{\mathscr{V}}$, הנתונה על-ידי $(\phi^{\mathcal{M}})_i = \phi^{\mathcal{M}_i}$.

בפרט, אם $\mathscr{V} = \{x_1, \dots, x_n\}$ כאשר x_k מסוג a_k, אז לכל "השמה" $x_k \mapsto s_k \in {a_k}^{\mathcal{M}}$ מתקבלת כמו קודם תת-הקבוצה

$$T_s(\phi) = T_s(\phi^{\mathcal{M}}) = \{i \in \mathbf{d}(s) \mid \langle s_1(i), \dots, s_n(i)\rangle \in \phi^{\mathcal{M}_i}\} \subseteq I$$

כלומר, $T_s(\phi)$ היא קבוצת כל ה"זמנים" i בהם האיבר $s(i) = \langle s_1(i), \dots, s_n(i)\rangle$ (קיים ו-) שייך ל-$\phi^{\mathcal{M}_i}$. שוב, אפשר לחשוב על הקבוצה הזו כ"ערך אמת מוכלל" לטענה ש-$s \in \phi^{\mathcal{M}}$. נשים לב שכמקרה פרטי, אם ϕ פסוק, אז הסדרה s ריקה, ו-$T_0(\phi)$ היא קבוצת כל האינדקסים i עבורם ϕ נכונה ב-$\mathcal{M}_i$.

הפונקציות T_s מתנהגות כמו השמה במובן הבא:

טענה 3.7.3. *בסימונים לעיל:*

1. *אם ψ נוסחא נוספת עם אותם משתנים חפשיים, אז*

$$T_s(\langle\phi\to\psi\rangle) = (\mathbf{d}(s) \setminus T_s(\phi)) \cup T_s(\psi)$$

2. *אם $\phi = \exists y{\in}a\theta(\bar{x}, y)$, אז $T_s(\phi) = \max\{T_{s\cdot b}(\theta) \mid b \in a^{\mathcal{M}}\}$, כאשר $s \cdot b$ ההרחבה של s על-ידי $y \mapsto b$, והמקסימום הוא ביחס להכלה (בפרט, המקסימום קיים).*

תרגיל 3.7.4. הוכיחו את הסעיף הראשון בטענה.

הוכחה. הסעיף הראשון הוא התרגיל. לסעיף השני, לפי ההגדרה,

$$T_s(\phi) = T_s(\exists y{\in}a\theta(x, y)) = \{i \in \mathbf{d}(s) \mid \text{קיים } b_i \in a^{\mathcal{M}_i} \text{ כך ש-} s(i) \cdot b_i \in \theta^{\mathcal{M}_i}\}$$

מאידך, ל-$b \in a^{\mathcal{M}}$,

$$T_{s\cdot b}(\theta(x, y)) = \{i \in \mathbf{d}(s \cdot b) \mid s(i) \cdot b(i) \in \theta^{\mathcal{M}_i}\}$$

וברור שהקבוצה השניה מוכלת בראשונה. נותר להראות שקיים b עבורו יש שוויון.

נבחר את b באופן הבא: עבור $i \in T_s(\phi)$, נבחר את $b(i)$ להיות אחד מאלה שמקיימים את θ ב-$\mathcal{M}_i$. עבור i אחר נבחר את $b(i)$ להיות איבר כלשהו ב-$a^{\mathcal{M}_i}$ אם קבוצה זו לא ריקה (אחרת $b(i)$ לא מוגדר). בפרט, $T_s(\phi) \subseteq \mathbf{d}(s \cdot b)$, ולכן מהבנייה של b הקבוצה השנייה שווה לראשונה. $\square$

תרגיל 3.7.5. באותם סימונים, נניח ש-$I = \mathbf{1} = \{0\}$. הוכיחו ש-$\phi^{\mathcal{M}_0} = \{s(0) \mid T_s(\phi) = \mathbf{1}\}$

התכנית שלנו תהיה לבחור פונקציה $\omega:\mathcal{P}(I)\to\mathbf{2}$ ולבנות ממנה מבנה $\mathcal{M}_\omega$ שבו $a^{\mathcal{M}_w}\subseteq a^{\mathcal{M}}$, עם התכונה: $\phi^{\mathcal{M}_\omega}=\{s\mid\omega(T_s(\phi))=\mathbf{1}\}$ לכל נוסחא ϕ והשמה מתאימה s. על מנת שיהיה לכך סיכוי, הפונקציה ω חייבת להיות העתקה של אלגברות בוליאניות. ראינו בתרגיל 2.1.26 שהעתקות כאלה מתאימות לעל-מסננים מעל I, ובמונחים של על-המסנן $\mathcal{F}$, אנחנו אומרים שב-$\mathcal{M}_\mathcal{F}=\mathcal{M}_\omega$ מתקיים $s\in\phi^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}$ אם ורק אם $s(i)\in\phi^{\mathcal{M}_i}$ עבור "רוב" האינדקסים i, כאשר "רוב" מפורש ביחס לעל-המסנן $\mathcal{F}$.

כמובן שאנחנו לא יכולים *להגדיר* כך את הפירוש: הפירוש של נוסחא כללית במבנה כבר מוגדר. אבל אנחנו יכולים להגדיר את הפירוש של החתימה לאור הדרישה הזו. בפרט, הפירוש של הסוגים הוא כקבוצת הסדרות שמוגדרות עבור "רוב" האינדקסים. ההגדרה המלאה היא זו:

הגדרה 3.7.6. יהיו Σ חתימה, I קבוצה, ולכל $i\in I$ מבנה $\mathcal{M}_i$ עבור Σ. עבור על-מסנן $\mathcal{F}$ על I, *העל-מכפלה* $\mathcal{M}_\mathcal{F}$ של $\mathcal{M}=(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ ביחס ל-$\mathcal{F}$ מוגדרת באופן הבא:

על-מכפלה

1. לכל סוג a של Σ, הפירוש $a^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}$ של a ב-$\mathcal{M}_\mathcal{F}$ הוא $\{s\in\mathcal{L}(a^{\mathcal{M}})\mid\mathbf{d}(s)\in\mathcal{F}\}$. לכל מילה w באורך n מעל הסוגים, נסמן $w^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}=w(1)^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}\times\ldots\times w(n)^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}$.

2. אם E סימן יחס מסוג w, אז

$$E^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}=\{\bar{s}\in w^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}\mid T_{\bar{s}}(E^{\mathcal{M}})\in\mathcal{F}\}\tag{3.7}$$

3. לכל סימן פונקציה $g:\in\mathscr{F}_{w,a}$, ולכל איבר $\bar{s}\in w^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}$, תחום ההגדרה של $g(\bar{s})$ הוא תחום ההגדרה של $\bar{s}$, ולכל i בתחום זה,

$$g^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}(\bar{s})(i)=g^{\mathcal{M}_i}(\bar{s}(i))\tag{3.8}$$

תרגיל 3.7.7. הוכיחו שהתנאי שמגדיר את סימני הפונקציה ב-$\mathcal{M}_\mathcal{F}$ חל גם על שמות עצם אחרים, כלומר: לכל שם עצם $t(\bar{x})$ ולכל השמה s ב-$\mathcal{M}_\mathcal{F}$ מתקיים $\mathbf{d}(t^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}(\bar{s}))=\mathbf{d}(\bar{s})$ ולכל i שנמצא בתחום הזה, $t^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}(\bar{s})(i)=t^{\mathcal{M}_i}(\bar{s}(i))$

כזכור, לכל איבר $i\in I$ מתאים על-מסנן $\mathcal{F}_i=\{J\subseteq I\mid i\in J\}$ (אלה העל-מסננים הראשיים). במובן הזה, אפשר לחשוב על על-מסנן כלשהו כ"איבר מוכלל" של I. על-המכפלה ביחס ל-$\mathcal{F}_i$ קרובה מאוד למבנה המקורי $\mathcal{M}_i$, כפי שמוסבר בתרגיל הבא.

תרגיל 3.7.8. נניח ש-$\mathcal{F}=\mathcal{F}_i$ הוא על-מסנן ראשי המתאים ל-$i\in I$, וש-$\mathcal{M}_i$ הוא מבנה עם שוויון. הראו ש-$\mathcal{M}_\mathcal{F}$ כמעט זהה ל-$\mathcal{M}_i$, במובן הבא: קיים הומומורפיזם חד-חד-ערכי $\mathcal{M}_i\to\mathcal{M}_\mathcal{F}$, וב-$\mathcal{M}_\mathcal{F}$ לכל איבר a קיים איבר b בתמונה של העתקה זו, כך ש-$a=^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}b$

העובדה שהמבנה שהגדרנו מקיים את התכונה שרצינו נתונה במשפט הבא:

משפט 3.7.9 (משפט ווש). *לכל נוסחא ϕ מתקיים* $\phi^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}=\{s\mid T_s(\phi)\in\mathcal{F}\}$

בפרט, אם $\mathcal{F}=\mathcal{F}_i$ ראשי, אז $\phi^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}=\{s\mid s(i)\in\phi^{\mathcal{M}_i}\}$.
בהוכחה נרשום בקיצור $\phi^{\mathcal{F}}$ במקום $\phi^{\mathcal{M}_\mathcal{F}}$ וכו'.

סוף הרצאה 11, 10 בדצמ' 2024

הוכחה. באינדוקציה. אם $\phi(\bar{x})$ נוסחא בסיסית, אז יש סימן יחס E ושמות עצם $t_1(\bar{x}),\dots,t_k(\bar{x})$ כך ש-$\phi=E(t_1,\dots,t_k)$. אז $\bar{s}\in\phi^{\mathcal{F}}$ אם ורק אם $\langle t_1^{\mathcal{F}}(\bar{s}),\dots,t_k^{\mathcal{F}}(\bar{s})\rangle\in E^{\mathcal{F}}$, אם ורק אם $\{i\in\mathbf{d}(\bar{s})\,|\,\langle t_1^{\mathcal{F}}(\bar{s})(i),\dots,t_k^{\mathcal{F}}(\bar{s})(i)\rangle\in E^{\mathcal{M}_i}\}\in\mathcal{F}$ (לפי הגדרת $E^{\mathcal{F}}$). לפי תרגיל 3.7.7, הקבוצה בתנאי האחרון שווה ל- $\{i\in\mathbf{d}(\bar{s})\,|\,\langle t_1^{\mathcal{M}_i}(\bar{s}(i)),\dots,t_k^{\mathcal{M}_i}(\bar{s}(i))\rangle\in E^{\mathcal{M}_i}\}$ וזה בדיוק $T_{\bar{s}}(\phi)$.

סוף הרצאה 12, 16 בדצמ' 2024

נניח שהטענה נכונה לנוסחאות ϕ ו-ψ. אז

$$\langle\phi\to\psi\rangle^{\mathcal{F}}=(\phi^{\mathcal{F}})^c\cup\psi^{\mathcal{F}}=\{\bar{s}\,|\,T_{\bar{s}}(\phi)\in\mathcal{F}\}^c\cup\{\bar{s}\,|\,T_{\bar{s}}(\psi)\in\mathcal{F}\}=$$
$$\{\bar{s}\,|\,T_{\bar{s}}(\phi)\notin\mathcal{F}\}\cup\{\bar{s}\,|\,T_{\bar{s}}(\psi)\in\mathcal{F}\}=\{\bar{s}\,|\,T_{\bar{s}}(\langle\phi\to\psi\rangle)\in\mathcal{F}\}$$

כאשר השוויון האחרון נובע מהסעיף הראשון של 3.7.3.

עבור כמתים, תהי D הקבוצה

$$(\exists y\theta(x,y))^{\mathcal{F}}=\{\bar{s}\,|\,\exists b(\bar{s}\cdot b\in\theta(\bar{x},y)^{\mathcal{F}})\}=\{\bar{s}\,|\,\exists b(T_{\bar{s}\cdot b}(\theta)\in\mathcal{F})\}$$

מאידך, ראינו בטענה 3.7.3 ש-$T_{\bar{s}}(\exists y(\theta))$ שווה למקסימום של $T_{\bar{s}b}(\theta)$ על פני כל ה-b. כיוון ש-$\mathcal{F}$ סגור כלפי מעלה, המקסימום הזה נמצא ב-$\mathcal{F}$ אם יש b עבורו $T_{\bar{s}b}(\theta)\in\mathcal{F}$. לכן שתי הקבוצות שוות. $\square$

מסקנה 3.7.10. *אם ϕ פסוק, אז $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ מודל של ϕ אם ורק אם קבוצת ה-$i\in I$ עבורם $\mathcal{M}_i$ מודל של ϕ היא ב-$\mathcal{F}$.*

ההוכחה של משפט הקומפקטיות היא עתה העתק מדויק של ההוכחה עבור תחשיב הפסוקים.

הוכחת משפט הקומפקטיות. כזכור, נתונה קבוצה Γ של פסוקים, סגורה תחת $\wedge$. נסמן $I=\Gamma$. עבור כל איבר $\phi\in\Gamma$, קיים לפי ההנחה מודל $\mathcal{M}_\phi$ של ϕ. נגדיר

$$\mathcal{F}_0=\{T_\emptyset(\psi)\,|\,\psi\in\Gamma\} \tag{3.9}$$

אם $\psi\in\Gamma$ אז $T(\psi)$ לא ריקה, שכן $\psi\in T(\psi)$, ולכל ϕ ו-ψ מתקיים $T(\phi)\cap T(\psi)=T(\langle\phi\wedge\psi\rangle)$. לכן $\mathcal{F}_0$ ניתן להרחבה לעל-מסנן $\mathcal{F}$. לפי מסקנה 3.7.10, העל-מכפלה $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ של ה-$\mathcal{M}_\psi$ ביחס ל-$\mathcal{F}$ היא מודל של Γ. $\square$

3.7.11 קומפקטיות למבנים עם שוויון

כפי שכבר ראינו, בדוגמאות אנו מתעניינים בעיקר במבנים עם שוויון. אם השפה שהתחלנו איתה היא בעלת שוויון, המשפט שהוכחנו תקף גם לגביה, כלומר אם Γ קבוצה ספיקה סופית של פסוקים (עם שוויון), אז יש לה מודל $\mathcal{M}$. אבל בהנחה שלכל תת-קבוצה סופית של פסוקים יש מודל עם שוויון, האם ניתן לצפות שגם $\mathcal{M}$ יהיה מבנה עם שוויון?

דרך אחת להבטיח זאת הייתה יכולה להיות אם הייתה תורה Γ_0 (בשפת השוויון) שמבטיחה שסימן השוויון מתפרש כשוויון אמיתי, כלומר, כל מודל של Γ_0 הוא מודל עם שוויון. אז היינו יכולים להוסיף את Γ_0 לקבוצה המקורית Γ ולהשתמש במשפט שכבר הוכחנו. אולם מסתבר שזה לא המצב:

תרגיל 3.7.12. בתנאים של הגדרה 3.7.6, נניח שעבור סוג a, לכל $i \in$ הקבוצה $a^{\mathcal{M}_i}$ בת שני איברים לפחות (ושיש יותר מאיבר אחד ב-I).

הוכיחו שאם $\mathcal{N} = \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ על-מכפלה של המבנים, אין נוסחה $\phi(x, y)$ עם משתנים חפשיים מסוג a, כך ש-$\langle a, b\rangle \in \phi^{\mathcal{N}}$ אם ורק אם $a = b$.

באופן יותר כללי:

תרגיל 3.7.13. יהי $\mathcal{M}$ מבנה עם שוויון עבור חתימה Σ ללא סימני פונקציה, ותהי $\mathbb{T}$=$\mathbf{Th}(\mathcal{M})$ התורה שלו (בחתימה $\Sigma_=$). הוכיחו שאם A קבוצה לא ריקה כלשהי, אז קיים מודל (חסר שוויון) $\mathcal{M}_A$ של $\mathbb{T}$, בו לכל איבר a, קבוצת האיברים b המקיימים $a =^{\mathcal{M}_A} b$ שוות עוצמה ל-A.

למרות זאת, ישנן טענות לגבי השוויון אותן ניתן לתאר בלוגיקה מסדר ראשון. אם $\mathcal{M}$ מבנה, *יחס שקילות גדיר* ב-$\mathcal{M}$ (על קבוצה גדירה X) הוא תת-קבוצה גדירה $E \subseteq X \times X$ המהווה יחס שקילות על X. לדוגמא, אם $\mathcal{M}$ הוא מבנה עם שוויון, אז השוויון הוא יחס שקילות גדיר על כל סוג. באופן יותר כללי, הנוסחא $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n$ מגדירה יחס שקילות גדיר $=_w$ על $w^{\mathcal{M}}$ (כאשר $w(i)$ הוא הסוג של x_i). נזכיר שיחס שקילות E_1 *מעדן* את יחס שקילות E_2 אם xE_1y גורר xE_2y לכל x, y. בניגוד לשוויון ממש, מושגים אלה ניתנים לביטוי בשפה: יחס שקילות גדיר מעדן

תרגיל 3.7.14. יהי $\mathcal{M}$ מבנה, $\mathbb{T}$ התורה שלו, ו-ϕ נוסחא המגדירה ב-$\mathcal{M}$ יחס שקילות

1. הראו שאם $\mathcal{M}'$ מודל אחר של $\mathbb{T}$, אז ϕ מגדירה יחס שקילות ב-$\mathcal{M}'$

2. הראו שאם $\mathcal{M}$ מבנה עם שוויון, אז לכל קבוצה גדירה X, השוויון על X מעדן כל יחס שקילות גדיר על X

3. הראו שהסעיף הקודם נכון גם אם נחליף את $\mathcal{M}$ במודל אחר $\mathcal{M}'$ של $\mathbb{T}$ (לא בהכרח עם שוויון).

התרגיל מצדיק את ההגדרה הבאה:

הגדרה 3.7.15. נגיד שמבנה חסר שוויון $\mathcal{M}$ עבור החתימה $\Sigma_=$ הוא *בעל שוויון מקורב* אם לכל סוג a, היחס ${=_a}^{\mathcal{M}}$ מגדיר יחס שקילות, ולכל w, היחס ${=_w}^{\mathcal{M}}$ מעדן כל יחס שקילות גדיר על $w^{\mathcal{M}}$ בעל שוויון מקורב

לפי התרגיל, כל מבנה עם שוויון הוא בעל שוויון מקורב. כפי שראינו, ההיפך אינו נכון, אך כפי שנראה מיד, המצב ניתן לתיקון.

תרגיל 3.7.16. נניח ש-$\mathcal{M}$ מבנה בעל שוויון מקורב, ותהי $\mathbb{T}$ התורה שלו (בחתימה $\Sigma_=$). הוכיחו שקיים מבנה $\overline{\mathcal{M}}$ של עם שוויון אמיתי, והומומורפיזם $\pi : \mathcal{M} \to \overline{\mathcal{M}}$ *על*. בפרט, $\overline{\mathcal{M}}$ מודל של $\mathbb{T}$.

תרגיל זה מאפשר להסיק מיד את הגרסא של משפט הקומפקטיות למבנים עם שוויון:

מסקנה 3.7.17 (משפט הקומפקטיות למבנים עם שוויון). *אם Γ קבוצה של פסוקים בחתימה $\Sigma_=$ עם שוויון, כך שלכל תת-קבוצה סופית של Γ יש מודל עם שוויון, אז גם ל-Γ יש מודל עם שוויון.*

תרגיל 3.7.18. הסיקו את משפט הקומפקטיות למבנים עם שוויון.

התרגיל האחרון מסיק את משפט הקומפקטיות עם שוויון פורמלית מתוך המשפט חסר השוויון. לפעמים מעניין לתאר במפורש את המבנה בעל השוויון המתקבל מעל-מכפלה של מבנים עם שוויון, כפי שנעשה בתרגיל הבא.

תרגיל 3.7.19. במצב של הגדרה 3.7.6, נניח שכל המבנים $\mathcal{M}_i$ הם עם שוויון.

1. הראו ש-$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ הוא בעל שוויון מקורב, אך באופן כללי לא מבנה עם שוויון.
2. תארו במפורש את המבנה $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}^{\mathcal{F}}}$ המתקבל מ-$\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ על-ידי התהליך המתואר בתרגיל 3.7.16. מבנה זה הוא שנקרא לרוב העל-מכפלה, כאשר ההקשר מוגבל למבנים עם שוויון. נשים לב שלפי אותו תרגיל, התורה לא משתנה, ובפרט, משפט ווש נכון גם עבור $\mathcal{M}$.
3. הראו שעל-מכפלה עם שוויון מתחלפת עם חישוב נוסחאות, במובן הבא: לכל נוסחא ϕ, ניתן לזהות את $\phi^{\mathcal{M}}$ עם העל-מכפלה-עם-שוויון של הקבוצות $\{\phi^{\mathcal{M}_i} \mid i \in I\}$ ביחס ל-$\mathcal{F}$.
4. הראו שאם $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$ הוא מסנן ראשי, אז ניתן לזהות את $\mathcal{M}$ עם $\mathcal{M}_i$.

תרגיל 3.7.20. נסמן ב-I את קבוצת הראשוניים, ולכל $p \in I$, נסמן ב-$\mathcal{M}_p = \mathbb{F}_p$ את השדה עם p איברים (כמבנה לחתימה של חוגים). נבחר על-מסנן לא ראשי $\mathcal{F}$ על I, ונסמן ב-$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ את על-המכפלה, וב-$L = \overline{\mathcal{M}}$ את על המכפלה עם שוויון.

1. הוכיחו ש-L שדה, אבל $\mathcal{M}$ אינו חוג. מהו המציין של L?
2. לכל אחד מהאיברים הבאים של M, מיצאו את ההפכי הכפלי שלו ב-M ואת ההפכי הכפלי של האיבר שהוא מייצג ב-L (אם הם קיימים)
   (א) $\langle 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \dots \rangle$ (כל יתר האיברים 1)
   (ב) $\langle 1, 1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}, \dots \rangle$
   (ג) $\langle 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots \rangle$
3. האם ל-5 יש שורש ריבועי ב-L? (דורש תורת מספרים)

מעכשיו, אנחנו נעבוד במבנים עם שוויון (וסימני פונקציה), ועל-מכפלות יהיו במובן של התרגיל האחרון (אלא אם צוין אחרת).

סוף הרצאה 13, 17 בדצמ' 2024

3.8 מסקנות ושימושים של משפט הקומפקטיות

3.8.1 שדות סגורים אלגברית

מונום מעלה פולינום

כזכור (דוגמא 3.1.3), החתימה של חוגים מורכבת מסוג אחד, סימני פונקציה דו-מקומיים $+$, $-$ ו-$\cdot$, ושני סימני קבועים 0 ו-1. ניתן לרשום בקלות את אקסיומות השדה בחתימה זו, ונסמן תורה זו ב-$\mathbb{F}$. בגלל חוק הקיבוץ של הכפל, אין צורך לרשום סוגריים בשמות עצם שנוצרים משימוש חוזר ב-$\cdot$. בפרט, אם $x_1,\dots,x_n$ הם משתנים, שם עצם שנוצר מהם על-ידי שימוש חוזר בסימן הכפל נקרא *מונום* (מעל $x_1,\dots,x_n$), ועד כדי שקילות ניתן לרשום אותו כ-$x_1^{i_1}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}$, כאשר $i_k\geq 0$. בתור קיצור, נרשום מונום זה כ-$\bar{x}^{\bar{\imath}}$, כאשר $\bar{\imath}=(i_1,\dots,i_n)$. סכום ה-$i_k$ נקרא *המעלה* של המונום. בגלל חוקי השדה, כל שם עצם מעל $\bar{x}$ שקול לסכום של מונומים מעל $\bar{x}$, כלומר ל*פולינום* על $\bar{x}$ (עם מקדמים שלמים). המעלה של הפולינום היא מקסימום מעלות המונומים בו. אם m מספר טבעי, קיים "פולינום כללי" ממעלה (לכל היותר) m על $\bar{x}$, כלומר פולינום $p(\bar{x},\bar{y})$ עם התכונה שלכל הצבה $\bar{a}$ במשתנים $\bar{y}$ מתוך שדה נתון K מתקבל פולינום $p(\bar{x},\bar{a})$ ממעלה לכל היותר m על $\bar{x}$ עם מקדמים ב-K, וכל פולינום כזה מתקבל על-ידי הצבה מתאימה (למשל, אם $n=1$, אז $p(x,\bar{y})=y_mx^m+\dots+y_0$).

שורש שדה סגור אלגברית

אם $p(x)$ הוא פולינום עם מקדמים בשדה K, *שורש* של p הוא איבר $a\in K$ המקיים $p(a)=0$. שדה K הוא *שדה סגור אלגברית* אם לכל פולינום במשתנה אחד עם מקדמים מ-K ממעלה גדולה מ-0 יש שורש ב-K. נזכיר מספר עובדות נוספות:

3.8.2 עובדה.

מציין

1. *אם K שדה, ו-m מספר טבעי, נסמן ב-$\underline{m}$ את האיבר של K המתקבל כסכום של m עותקים של 1. אם קיים $m>0$ כך ש-$\underline{m}=0$, אז המספר הטבעי הקטן ביותר מסוג זה נקרא המציין של K, אחרת המציין הוא 0. אם המציין חיובי, הוא בהכרח ראשוני. לכל ראשוני p קיים שדה $\mathbb{F}_p$ עם p איברים, הניתן לתיאור כקבוצת הטבעיים הקטנים מ-p, עם חיבור וכפל מודולו p. כל שדה ממציין p מכיל את $\mathbb{F}_p$, וכל שדה ממציין 0 מכיל את $\mathbb{Q}$.*

סגור אלגברי

2. *כל שדה K ניתן לשיכון בשדה סגור אלגברית (כלומר, יש הומומורפיזם מ-K לשדה סגור אלגברית). קיים שדה סגור אלגברית מינימלי K^a המכיל את K (במובן שאין לו תת-שדה ממש סגור אלגברית המכיל את K), וכל שניים כאלה הם איזומורפיים, על-ידי איזומורפיזם שהוא הזהות על K. כל שדה כזה נקרא* סגור אלגברי *של K.*

3. *השדה $\mathbb{C}$ של המספרים המרוכבים הוא סגור אלגברית (הוא סגור אלגברי של $\mathbb{R}$).*

פונקציה רציונלית

4. *אם A קבוצה של משתנים (לא בהכרח סופית), ו-K שדה,* פונקציה רציונלית *על A מעל K היא מנה $\frac{p(\bar{t})}{q(\bar{t})}$ של שני פולינומים על A מעל K, כאשר q אינו פולינום האפס. הקבוצה $K(A)$ של כל הפונקציות הרציונליות על A מעל K, ביחד עם הפעולות הרגילות של כפל וחיבור של פונקציות כאלה, היא שדה שמרחיב את K. כל שדה סגור אלגברית איזומורפי לסגור האלגברי של שדה מהצורה $K(A)$, כאשר K הוא $\mathbb{F}_p$ או $\mathbb{Q}$, בהתאם*

למציין. הסגור האלגברי של $K(A)$ איזומורפי לסגור האלגברי של $K(B)$ אם ורק אם העוצמות של A ושל B שוות. לכן, לכל שדה סגור אלגברית L העצמה של קבוצה כזו מוגדרת היטב, ונקראת דרגת הטרנסנדנטיות *של L (ניתן להשוות את הקבוצה A לבסיס של מרחב וקטורי, ואת דרגת הטרנסנדנטיות למימד).* דרגת הטרנסנדנטיות

5. *סגור אלגברי של $\mathbb{F}_p$ הוא איחוד עולה $\mathbb{F}_p^a = \bigcup_i K_i$, כאשר כל K_i הוא שדה סופי. לכן, אם $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{F}_p^a$, אז קיים תת-שדה סופי K המכיל את כל ה-b_i.*

התורה של שדות סגורים אלגברית $\mathbb{ACF}$

התורה של שדות סגורים אלגברית, $\mathbb{ACF}$, היא התורה בשפת החוגים שמרחיבה את תורת השדות על ידי האקסיומות שאומרות שהשדה סגור אלגברית, כלומר האקסיומות $\forall a_1, \dots, a_n \exists x(x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0)$, לכל $n > 0$. עבור כל שלם חיובי p, התורה $\mathbb{ACF}_p$ מתקבלת על-ידי הוספת האקסיומה $\underline{p} = 0$, בעוד ש-$\mathbb{ACF}_0$ מתקבלת על-ידי הוספת השלילה של כל הפסוקים הללו. לכן, עבור p ראשוני או 0, המודלים של $\mathbb{ACF}_p$ הם בדיוק השדות הסגורים אלגברית ממציין p. $\mathbb{ACF}_p$

תרגיל 3.8.3. הראו שסגור אלגברי של שדה אינסופי K הוא מאותה עצמה כמו K (רמז: משפט לוונהיים–סקולם). הסיקו שאם L שדה סגור אלגברית שאינו בן-מניה, אז דרגת הטרנסנדנטיות של L שווה לעצמת L.

מסקנה 3.8.4. *לכל p ראשוני או 0, התורה $\mathbb{ACF}_p$ היא שלמה*

הוכחה. לפי תרגיל 3.8.3, אם L_1 ו-L_2 הם שני מודלים מאותה עצמה $\kappa > \aleph_0$, אז דרגת הטרנסנדנטיות של שניהם היא κ. לכן, לפי עובדה 3.8.2, L_1 ו-L_2 הם איזומורפיים. הראינו ש-$\mathbb{ACF}_p$ היא κ-קטגורית לכל עצמה κ שאינה בת-מניה, ולכן היא שלמה לפי מסקנה 3.6.16. □

מסקנה 3.8.5 ("עקרון לפשץ"). *יהי ϕ פסוק בשפה של שדות. אז הטענות הבאות שקולות:*

1. *ϕ נכון ב-$\mathbb{C}$*
2. *ϕ נכון בכל שדה סגור אלגברית ממציין 0*
3. *ϕ נכון בכל שדה סגור אלגברית ממציין $p > 0$ פרט למספר סופי של ראשוניים p*
4. *ϕ נכון עבור שדה סגור אלגברית כלשהו ממציין $p > 0$ עבור אינסוף ראשוניים p*

הוכחה. השקילות של שני הסעיפים הראשונים היא פשוט חזרה על המסקנה האחרונה (בתוספת העובדה ש-$\mathbb{C}$ סגור אלגברית). נניח ש-ϕ נכון בכל שדה סגור אלגברית ממציין 0. לפי מסקנה 3.6.4, ϕ נובע מתת-קבוצה סופית Γ_0 של $\mathbb{ACF}_0$. בפרט, Γ_0 מכילה מספר סופי של פסוקים מהצורה $\underline{p} \neq 0$. לכן ϕ נכון בכל שדה סגור אלגברית מכל מציין אחר.

מאידך, אם ϕ נובע מ-$\mathbb{ACF}_p$ עבור אינסוף ראשוניים p, אך אינו נכון ב-$\mathbb{C}$, אז $\neg\phi$ נכון ב-$\mathbb{C}$, ולכן, לפי הטיעון הקודם, נובע מ-$\mathbb{ACF}_p$ עבור כמעט כל p, סתירה. □

סוף הרצאה 14, 23 בדצמ' 2024

דוגמא 3.8.6. יהיו $p_1, \dots, p_n$ פולינומים ב-n משתנים מעל $\mathbb{C}$. פולינומים אלה מגדירים העתקה $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, על-ידי $F(a_1, \dots, a_n) = (p_1(\bar{a}), \dots, p_n(\bar{a}))$. נוכיח את הטענה: אם F חד-חד-ערכית, אז F על.

נשים לב, ראשית, שטענה זו ניתנת לביטוי על ידי פסוק בשפת השדות: אם m המעלה המקסימלית של הפולינומים p_i, ו-$p(\bar{x}, \bar{y})$ הוא הפולינום הכללי ממעלה m, אז קיימים $\bar{y}_i \in \mathbb{C}$ כך ש-$p_i(\bar{x}) = p(\bar{x}, \bar{y}_i)$. לכן הטענה נתונה על-ידי הפסוק ϕ:

$$\forall \bar{y}_1 \dots \bar{y}_n ((\forall \bar{x}\bar{z}(\bigwedge_{i=1}^{n} p(\bar{x}, \bar{y}_i) = p(\bar{z}, \bar{y}_i)) \to \bar{x} = \bar{z}) \to$$

$$\forall \bar{x} \exists \bar{z} (\bigwedge_{i=1}^{n} p(\bar{z}, \bar{y}_i) = x_i))$$

לפי המסקנה האחרונה, כדי להוכיח שפסוק זה נכון ב-$\mathbb{C}$, מספיק להוכיח שעבור כל ראשוני $p > 0$ הוא נכון באיזשהו שדה סגור אלגברית ממציין p. נשים לב, ראשית, ש-ϕ נכון בכל שדה סופי K: עבור שדה כזה, K^n סופית גם כן, וכל העתקה חד-חד-ערכית מקבוצה סופית לעצמה היא גם על. לכן, בהנתן ראשוני p, הפסוק תקף בכל הרחבה סופית של $\mathbb{F}_p$. אולם אז הוא נכון גם בסגור אלגברי L של $\mathbb{F}_p$: בהנתן פונקציה פולינומית F מעל L, ואיבר $\bar{x} \in L^n$, קיימת, לפי עובדה 3.8.2, הרחבה *סופית* K של $\mathbb{F}_p$, אליה שייכים מקדמי F, וגם $\bar{x}$. לכן, לפי המקרה הסופי, $\bar{x}$ שייך ל-$F(K^n)$, ובפרט ל-$F(L^n)$.

3.8.7 אנליזה לא סטנדרטית

השימוש של משפט לוונהיים–סקולם עבור מבנים שמרחיבים את השדה הממשי מאפשר לנסח מחדש ולהוכיח טענות באנליזה, בצורה שדומה לניסוח המקורי שלה, על ידי ניוטון ולייבניץ. השימוש הזה, שנקרא *אנליזה לא סטנדרטית*, הוצע על-ידי אברהם רובינסון ב-[8].

נתבונן במבנה $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$. לפי משפט לוונהיים–סקולם, קיים מבנה $\mathcal{R}$ המרחיב מבנה זה, ושקול לו אלמנטרית. כל מבנה כזה נקרא הרחבה לא סטנדרטית של $\mathbb{R}$. אם ϕ טענה שאנו מנסים להוכיח לגבי $\mathbb{R}$, לפי השקילות האלמנטרית, מספיק להוכיח שהיא נכונה ב-$\mathcal{R}$. אותו עקרון תקף גם כאשר נתונה לנו פונקציה ממשית f, או יחס P על הממשיים, והוספנו סימני יחס ופונקציה כנדרש.

איך נראה איבר a ב-$\mathcal{R}$ אשר אינו ב-$\mathbb{R}$? ראינו כבר ש-$\mathbb{R}$ הוא שדה סדור (כלומר, הסדר על הממשיים גדיר על ידי נוסחא), ולכן גם $\mathcal{R}$ כזה, ובפרט, a או $-a$ הוא חיובי, ונניח שזה a. נניח שקיים מספר טבעי n, כך ש-$\frac{1}{n} < a < n$. אז הקבוצה $\{r \in \mathbb{R} \,|\, 0 < r < a\}$ היא חסומה ולא ריקה, ולכן יש לה חסם עליון $\mathbf{s}(a)$. הואיל ו-$\mathbb{R} \subseteq \mathcal{R}$, החסם העליון $\mathbf{s}(a)$ שייך גם ל-$\mathcal{R}$, ונתבונן ב-$\epsilon = a - \mathbf{s}(a)$. אז לפי הגדרה, $\epsilon > 0$ (כי $a \notin \mathbb{R}$), אבל $\epsilon < r$ לכל $0 < r \in \mathbb{R}$, כלומר ϵ הוא "אינפינטיסימל", איבר חיובי הקטן מכל ממשי סטנדרטי. את ϵ בנינו מתוך הנחה על a, אבל אם $a < \frac{1}{n}$ לכל n, אז הוא עצמו אינפינטיסימל, בעוד שאם $a > n$ לכל n, נוכל לקחת $\epsilon = \frac{1}{a}$.

בכל מקרה, הראינו שכל הרחבה לא סטנדרטית מכילה אינפינטיסימלים. אם $\mathcal{R}^b$, קבוצת *האיברים החסומים*, היא קבוצת האיברים a המקיימים $-n < a < n$ עבור איזשהו n טבעי, הגדרנו העתקה $a \mapsto \mathbf{s}(a)$ המתאימה לכל $a \in \mathcal{R}^b$ איבר ממשי (ב-$\mathbb{R}$) הקרוב לו ביותר (עבור a שלילי, נגדיר $\mathbf{s}(a) = -\mathbf{s}(-a)$). האיבר $\mathbf{s}(a)$ נקרא *החלק הסטנדרטי* של a.

האיברים החסומים

החלק הסטנדרטי

תרגיל 3.8.8. הוכיחו ש-$\mathcal{R}^b$ היא אלגברה מעל $\mathbb{R}$, וש-$a \mapsto \mathbf{s}(a)$ היא העתקה של אלגברות מעל $\mathbb{R}$ מ-$\mathcal{R}^b$ ל-$\mathbb{R}$. הראו ש-$\mathbf{s}(a) = 0$ אם ורק אם a הוא אינפינטיסימל (כלומר, $|a| < \frac{1}{n}$ לכל n טבעי). בפרט, קבוצת האינפנטסימלים היא אידיאל מקסימלי ב-$\mathcal{R}^b$.

עבור $a, b \in \mathcal{R}$, נסמן $a \sim b$ אם $a - b \in \mathcal{R}^b$, ו-$\mathbf{s}(a-b) = 0$ (אם $a, b \in \mathcal{R}^b$, זה אומר $\mathbf{s}(a) = \mathbf{s}(b)$ לפי התרגיל האחרון).

סוף הרצאה 15, 24 בדצמבר, 2024

כאמור, כל הדיון ממשיך להיות נכון אם מוסיפים לשפה סימני פונקציה ויחס נוספים. למעשה, אפשר להוסיף מראש סימני יחס ופונקציה עבור *כל* היחסים והפונקציות שיש ב-$\mathbb{R}$. אז לכל פונקציה f או יחס P על $\mathbb{R}$ קיימים פונקציה $^*f$ או יחס $^*P$ מתאימים ב-$\mathcal{R}$. נשים לב ש-$^*f$ מרחיבה את f, ו-$^*P$ מכילה את P. למשל, לקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ ב-$\mathbb{R}$ מתאימה תת-קבוצה $^*\mathbb{Z}$ של $\mathcal{R}$ המכילה את כל השלמים. הואיל ו-$\mathbb{Z}$ היא תת-חוג של $\mathbb{R}$ (תכונה גדירה של $\mathbb{Z}$), הקבוצה $^*\mathbb{Z}$ אף היא תת-חוג של $\mathcal{R}$.

מה מרוויחים מכל המעבר הזה? מסתבר שתכונות טופולוגיות ואנליטיות ב-$\mathbb{R}$ ניתנות לניסוח אינטואיטיבי בעזרת אינפינטיסימלים ב-$\mathcal{R}$. למשל:

טענה 3.8.9. *תהי* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *פונקציה. אז הגבול של* f *ב-*a *הוא* L *אם ורק אם* $^*f(b) \sim L$ *לכל* $b \sim a$ *שונה מ-*a*. בפרט,* f **רציפה** *ב-*a *אם ורק אם* $^*f(b) \sim f(a)$ *לכל* $b \sim a$.

הוכחה. לכל n טבעי, תהי $\phi_n(r)$ הנוסחא הנתונה על-ידי

$$\forall x \langle 0 < |x-a| < r \rightarrow |f(x) - L| < \frac{1}{n} \rangle$$

נניח שהגבול של f ב-a הוא L, ויהי $b \sim a$ שונה מ-a. אז לכל n טבעי קיים ממשי חיובי r_n כך שהפסוק $\phi_n(r_n)$ תקף ב-$\mathbb{R}$. לכן הוא תקף גם ב-$\mathcal{R}$. בפרט, עבור $x = b$, אנו מקבלים ש-$|f(b) - L| < \frac{1}{n}$ לכל n טבעי, כלומר $f(b) \sim L$.

בכיוון השני, בהנתן n טבעי, מתקיים $\exists r(r > 0 \wedge \phi_n(r))$ ב-$\mathcal{R}$ (נבחר $r > 0$ כל אינפינטיסימל), ולכן ב-$\mathbb{R}$. □

נזכיר, *שקבוצה פתוחה* ב-$\mathbb{R}$ היא תת-קבוצה $P \subseteq \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in P$ קיים קטע פתוח המכיל את a ומוכל ב-P. *קבוצה סגורה* היא קבוצה שהמשלימה שלה פתוחה. *קבוצה קומפקטית* היא קבוצה סגורה וחסומה.

קבוצה פתוחה

קבוצה סגורה

קבוצה קומפקטית

תרגיל 3.8.10. תהי P תת-קבוצה של $\mathbb{R}^n$. הוכיחו:

1. P פתוחה אם ורק אם לכל $a \in P$ ולכל $b \sim a$ מתקיים $b \in {}^*P$.
2. P סגורה אם ורק אם לכל $a \in {}^*P \cap (\mathcal{R}^b)^n$, גם $\mathbf{s}(a) \in P$

3. P קומפקטית אם ורק אם $^*P \subseteq (\mathcal{R}^b)^n$, ו-$\mathbf{s}(a) \in P$ לכל $a \in {}^*P$.

בפרט, אם $a \leq 0$ ב-$\mathcal{R}$, אז גם $\mathbf{s}(a) \leq 0$ (עבור $a \in \mathcal{R}^b$), אבל לא בהכרח לגבי אי-שוויון ממש.

תרגיל 3.8.11. נניח ש-P תת-קבוצה של $\mathbb{R}^n$. הוכיחו ש-$P = {}^*P$ אם ורק אם P סופית. הראו שב-$^*\mathbb{N}$ קיים איבר n גדול יותר מכל המספרים הטבעיים, וכל האיברים החדשים ב-$^*\mathbb{N}$ הם כאלה.

איך אפשר להשתמש בטענות אלה כדי להוכיח טענות על הממשיים? נראה למשל בדוגמא הבאה:

טענה 3.8.12 (משפט ערך הביניים). *אם f פונקציה רציפה על הקטע הסגור $[0,1]$, ומתקיים $f(0) \leq 0 \leq f(1)$, אז קיים $c \in [0,1]$ כך ש-$f(c) = 0$.*

הוכחה. ב-$\mathbb{R}$ נכון הפסוק $\forall n \in \mathbb{N} \exists i < n (f(\frac{i}{n}) \leq 0 \leq f(\frac{i+1}{n}))$ (באינדוקציה על n). לכן הוא נכון גם ב-$\mathcal{R}$, ובפרט, עבור $n \in {}^*\mathbb{N}$ גדול מכל מספר טבעי, מקבלים $i \in {}^*\mathbb{N}$ כך שעבור $a = \frac{i}{n}$ ו-$b = \frac{i+1}{n}$ מתקיים $^*f(a) \leq 0 \leq {}^*f(b)$. נשים לב ש-$b - a = \frac{1}{n}$, ולכן $a \sim b$, והיות ש-f רציפה, $^*f(a) \sim {}^*f(b)$. כלומר, $0 \geq \mathbf{s}({}^*f(a)) = \mathbf{s}({}^*f(b)) \geq 0$, ומכאן $\mathbf{s}({}^*f(a)) = f(\mathbf{s}(a)) = 0$, ו-$c = \mathbf{s}(a)$ הוא הממשי המבוקש. $\square$

סוף הרצאה 16, 30 בדצמבר, 2024

3.9 מבנים הנוצרים מקבועים

משפט הקומפקטיות, והטכניקה של על-מכפלות, מאפשרים לנו לייצר מבנים "גדולים" מתוך מבנים קטנים יותר. בסעיף זה נראה איך לייצר מודלים "קטנים". בפרט, נוכיח את משפט לוונהיים–סקולם היורד.

הרעיון הבסיסי הוא להכליל את הבניה של "תת-מבנה שנוצר על-ידי קבוצה A", או "מבנה חופשי שנוצר על-ידי A". נראה שהבנייה תמיד אפשרית, אך לא תמיד יוצרת מודל של התורה בה אנו מתעניינים. נתבונן במספר דוגמאות:

דוגמא 3.9.1. תהי $\mathbb{T}$ התורה של מרחבים וקטוריים מעל שדה קבוע K. בשפה יש סימן קבוע אחד, 0, וכל שם-עצם ללא משתנים הפשיים מתפרש כ-0 בכל מודל של $\mathbb{T}$. לכן, אם V מבנה (כלומר מרחב וקטורי מעל K), אז קבוצת הפירושים של שמות העצם ב-V היא מרחב ה-0, שהוא תת-מודל של V. מאידך, אם $\mathbb{T}$ היא התורה של מרחבים וקטוריים לא טריוויאליים, אז זהו תת-מבנה שאינו תת-מודל.

באופן יותר כללי, אם $A \subseteq V$ קבוצה כלשהי, קבוצת האיברים המתקבלים מהצבות איברי A בשמות העצם היא תת-מרחב, המרחב הנוצר על-ידי A.

דוגמא 3.9.2. אם K הוא שדה (כמודל לתורת השדות), אז קבוצת האיברים ב-K המתקבלים מפירוש שמות העצם היא $\mathbb{Z}$ אם המציין של K הוא 0, ו-$\mathbb{F}_p$ אם המציין הוא $p > 0$. זהו שדה (כלומר תת-מודל) במקרה השני, אך לא במקרה הראשון. נוכל לתקן זאת אם נוסיף חילוק לשפה: אז נקבל את $\mathbb{Q}$ במקרה הראשון, ובאופן כללי, אם A תת-קבוצה כלשהי של K, נקבל את תת-השדה של K שנוצר על-ידי A. אבל אם $\mathbb{T}$ הייתה התורה של שדות סגורים אלגברית (ו-K שדה סגור אלגברית), שדה זה לא יהיה סגור אלגברית.

נגדיר כעת את המושגים שהופיעו בדוגמאות באופן כללי. **בסעיף זה, כל התורות יהיו סגורות תחת נביעה לוגית (כלומר, אם $\mathbb{T} \models \phi$ אז $\phi \in \mathbb{T}$).**

תת-המבנה הנוצר על-ידי A

הגדרה 3.9.3. אם $\mathcal{M}$ מבנה, ו-A קבוצה כלשהי של איברים ב-$\mathcal{M}$ (מסוגים שונים), *תת-המבנה הנוצר על-ידי* A הוא תת-הקבוצה

$$\langle A \rangle_{\mathcal{M}} = \{t^{\mathcal{M}}(\omega) \mid \text{עם ערכים ב-} A \text{ השמה ל-} \mathscr{V}(t) \text{ , } \omega \text{ שם עצם} \ t\}$$

של $\mathcal{M}$.

תרגיל 3.9.4. אם $A \subseteq \mathcal{M}$, הוכיחו ש-$\langle A \rangle_{\mathcal{M}}$ היא אכן תת-מבנה של $\mathcal{M}$, שמוכל בכל תת-מבנה אחר המכיל את A.

כפי שכבר ראינו, אם $\mathcal{M}$ מודל של תורה $\mathbb{T}$, לא כל תת-מבנה של $\mathcal{M}$ הוא תת-מודל, ובפרט $\langle A \rangle$ לא חייב להיות כזה. האם ניתן לאפיין את התורות עבורן כל תת-מבנה של מודל הוא תת-מודל?

פסוק כולל

תורה כוללת

$\mathbb{T}_\forall$

תרגיל 3.9.5. *פסוק כולל* הוא פסוק מהצורה $\forall \bar{x} \phi(\bar{x})$, כאשר ϕ נוסחא ללא כמתים (כלומר, צירוף בוליאני של נוסחאות בסיסיות). *תורה כוללת* היא תורה שנובעת מקבוצה של פסוקים כוללים. בהנתן תורה $\mathbb{T}$, נסמן ב-$\mathbb{T}_\forall$ את התורה שנוצרת מכל הפסוקים הכוללים ב-$\mathbb{T}$.

1. הראו שאם $\mathcal{M}$ מודל של $\mathbb{T}_\forall$ (בפרט, אם הוא מודל של $\mathbb{T}$), ו-$\mathcal{N}$ תת-מבנה של $\mathcal{M}$, אז $\mathcal{N}$ מודל של $\mathbb{T}_\forall$.

2. אם $\mathcal{M}$ מודל של $\mathbb{T}_\forall$ (בפרט של $\mathbb{T}$), נרחיב את החתימה על-ידי הוספת קבוע c_m לכל $m \in \mathcal{M}$ (מהסוג המתאים). נרחיב את התורה $\mathbb{T}$ לתורה $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$ בחתימה החדשה, על-ידי הוספת הפסוק $\phi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k})$ ל-$\mathbb{T}$ עבור כל נוסחא חסרת כמתים ϕ וכל $(m_1, \dots, m_k) \in \phi^{\mathcal{M}}$. הוכיחו (בעזרת משפט הקומפקטיות) ש-$\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$ ספיקה.

3. הסיקו מהסעיף הקודם שכל מודל של $\mathbb{T}_\forall$ הוא תת-מבנה של מודל של $\mathbb{T}$. בפרט מחלקת המבנים שהם תתי-מבנים של מודלים של $\mathbb{T}$ היא אלמנטרית.

4. הסיקו שתורה $\mathbb{T}$ מקיימת שכל תת-מבנה של מודל הוא תת-מודל אם ורק אם היא שקולה לתורה כוללת

כפי שראינו בדוגמאות ובתרגיל, המכשול להיותו של $\langle A \rangle$ תת-מודל הוא האפשרות ש-$\mathbb{T}$ אומרת שקיים איבר המקיים נוסחא כלשהי ϕ, אבל אין איבר כזה מהצורה $t(\bar{a})$ עבור $\bar{a} \in A$. במונחים מדויקים, זוהי תורה שאין בה פונקציות סקולם, במובן הבא:

פונקצית סקולם

הגדרה 3.9.6. נאמר שבתורה $\mathbb{T}$ יש לנוסחא $\phi(x, y)$ *פונקצית סקולם* (מפורשת) עבור המשתנים x אם קיים שם עצם $t(x)$, כך שהפסוק $\forall x((\exists y \phi(x, y)) \to \phi(x, t(x)))$ נובע מ-$\mathbb{T}$. נאמר של-$\mathbb{T}$ יש פונקציות סקולם (מפורשות) אם לכל נוסחא חסרת כמתים ולכל קבוצה של משתנים חפשיים שלה יש פונקציית סקולם.

במלים אחרות, אם, לטענת $\mathbb{T}$, קיים איבר y המקיים את $\phi(a,y)$, אז מובטח ש-$y{=}t(a)$ הוא איבר כזה. תנאי זה הוא חזק מאוד, ובפרט, ממנו נובעת התוצאה שאנו מחפשים:

טענה 3.9.7. *אם ב-$\mathbb{T}$ יש פונקציות סקולם מפורשות, אז לכל נוסחא $\psi(x)$ קיימת נוסחא $\psi'(x)$ ללא כמתים, כך ש-$\mathbb{T}_\forall \models \forall x(\langle\psi'(x)\leftrightarrow\psi(x)\rangle)$. בפרט, כל תת-מבנה של מודל $\mathcal{M}$ של $\mathbb{T}$ הוא תת-מודל.*

הוכחה. נשים לב, ראשית, שבהנתן נוסחא חסרת כמתים $\phi(x,y)$ ופונקציית סקולם $t(x)$ עבורה, הפסוק שאומר זאת שייך ל-$\mathbb{T}_\forall$, כלומר, גם ב-$\mathbb{T}_\forall$ יש פונקציות סקולם.

כעת, נוכיח את הטענה באינדוקציה על בניית הנוסחא. המקרה הלא טריוויאלי היחיד הוא כש-$\psi(x) = \exists y\phi(x,y)$. לפי הנחת האינדוקציה, ϕ שקולה ל-ϕ' חסרת כמתים, ולכן ψ שקולה ל-$\exists y\phi'(x,y)$. ל-ϕ' קיימת פונקציית סקולם t, ולכן ψ שקולה (ביחס ל-$\mathbb{T}_\forall$) ל-$\phi'(x,t(x))$, נוסחה חסרת כמתים.

החלק השני של הטענה נובע, כי אם $\phi \in \mathbb{T}$, אז לפי החלק הראשון, ϕ שקול ביחס ל-$\mathbb{T}_\forall$ לפסוק חסר כמתים. לכן $\mathbb{T}$ שקולה ל-$\mathbb{T}_\forall$. לכן לפי תרגיל 3.9.5, כל תת-מבנה הוא תת-מודל. $\square$

סוף הרצאה 17, 31 בדצמבר, 2024

הערה 3.9.8. בהגדרה 3.9.6 התנאי הוא שלכל הנוסחאות *חסרות הכמתים* יש פונקציות סקולם מפורשות. בדיעבד, אנחנו יודעים שתחת הנחה זו כל נוסחא שקולה לנוסחא חסרת כמתים, ולכן יש פונקציות סקולם לכל הנוסחאות. אם נניח מראש שב-$\mathbb{T}$ יש פונקציות סקולם *לכל הנוסחאות*, אפשר להוכיח את החלק השני של המשפט ישירות באופן הבא.

בהנתן תת-מבנה $\mathcal{M}$ של מודל $\mathcal{N}$ של $\mathbb{T}$, נוכיח באינדוקציה את הטענה הבאה: לכל נוסחא ϕ, מתקיים $\phi^{\mathcal{M}} = \phi^{\mathcal{N}} \cap \mathcal{M}$. עבור נוסחאות בסיסיות, זו ההגדרה, ולצירופים בוליאניים זה קל. נניח ש-$\phi(x) = \exists y\psi(x,y)$. ראשית, אם $m \in \phi^{\mathcal{M}}$, אז קיים $m' \in \mathcal{M}$ כך ש-$(m,m') \in \psi^{\mathcal{M}}$. לפי הנחת האינדוקציה, $(m,m') \in \psi^{\mathcal{N}}$, ולכן $m \in \phi^{\mathcal{N}}$ (בכיוון הזה לא השתמשנו בפונקציות סקולם).

נניח כעת ש-$m \in \phi^{\mathcal{N}} \cap \mathcal{M}$. אז אם t היא פונקציית סקולם ל-ψ, אנו מקבלים ש-$(m,t(m)) {\in} \psi^{\mathcal{N}}$. אולם, הואיל ו-$\mathcal{M}$ תת-מבנה, $t(m) \in \mathcal{M}$. לכן, $(m,t(m)) {\in} \psi^{\mathcal{N}} {\cap} \mathcal{M}$, ולפי הנחת האינדוקציה, $(m,t(m)) \in \psi^{\mathcal{M}}$. לכן $m \in \phi^{\mathcal{M}}$.

המצב המתואר בהערה האחרונה מבהיר שמושג התת-מודל כפי שהוגדר הוא פחות שימושי, באופן כללי, מהתנאי החזק יותר של תת-מבנה אלמנטרי, כפי שנתון בהגדרה הבאה.

הגדרה 3.9.9. תת-מבנה $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ המקיים $\phi^{\mathcal{M}} = \phi^{\mathcal{N}} \cap \mathcal{M}$ לכל נוסחא ϕ נקרא *תת-מבנה אלמנטרי*. המבנה $\mathcal{N}$ נקרא *הרחבה אלמנטרית* של $\mathcal{M}$ במקרה זה.

תת-מבנה אלמנטרי

הרחבה אלמנטרית

דוגמא 3.9.10. אם $\mathcal{M} = \mathbb{Q}$ ו-$\mathcal{N} = \mathbb{C}$ (כמבנים לשפת החוגים), נתבונן בנוסחא $\phi(x)$ הנתונה על-ידי $\exists y(y^2 = x)$. אז $\phi^{\mathbb{C}}$ היא קבוצת כל המרוכבים שיש להם שורש, כלומר $\mathbb{C}$, ולכן $\phi^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. מאידך, $\phi^{\mathbb{Q}}$ היא קבוצת הרציונליים שיש להם שורש רציונלי. בפרט, היא מוכלת ממש ב-$\mathbb{Q}$, ו-$\mathbb{Q}$ אינו תת-מבנה אלמנטרי.

אם נוסיף לשפה סימן פונקציה t, ולתורת השדות את הפסוק $\forall x(t(x)^2=x)$ (כלומר, t בוחרת שורש ריבועי של x), אז t היא פונקציית סקולם עבור $x=y^2$, וכעת, אם $K\subseteq\mathbb{C}$ הוא תת-מבנה, אז $\phi^K=\phi^{\mathbb{C}}\cap K$. נשים לב שלא כל תת-שדה הוא תת-מבנה בשפה החדשה: K הוא תת-מבנה אם ורק אם לכל $a\in K$, השורשים הריבועיים של a גם ב-K.

אם $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}$ הוא תת-מבנה, אז הוא תת-מודל (לפי המקרה הפרטי של התנאי עבור פסוקים), אך התנאי חזק יותר.

דוגמא 3.9.11. נתבונן בשלמים $\mathbb{Z}$ כחבורה אבלית (כלומר מבנה לחתימה $((+,0)$). אז קבוצת הזוגיים $2\mathbb{Z}$ היא תת-מודל של $\mathbb{Z}$ (שכן היא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}$), אבל אינה תת-מודל אלמנטרי: אם $\phi(x)$ היא הנוסחא $\exists y(y+y=x)$, אז $2\in\phi^{\mathbb{Z}}$, ו-$2\in 2\mathbb{Z}$, אבל $2\notin\phi^{2\mathbb{Z}}$.

בהנתן תורה עם פונקציות סקולם, הוכחנו לכן את הטענה החזקה יותר:

מסקנה 3.9.12. *אם ב-$\mathbb{T}$ יש פונקציות סקולם מפורשות, אז כל תת-מבנה של מודל $\mathcal{M}$ של $\mathbb{T}$ הוא תת-מודל אלמנטרי*

כאמור, ההנחה שב-$\mathbb{T}$ יש פונקציות סקולם היא חזקה מאד, ולא מתקיים כמעט אף פעם בדוגמאות טבעיות. איך ניתן להשתמש במה שלמדנו על פונקציות סקולם עבור תורה כללית?

טענה 3.9.13. *בהנתן חתימה Σ, קיימת הרחבה שלה לחתימה Σ^s, ותורה $\mathbb{T}_\Sigma$ בחתימה המורחבת, כך ש:*

1. *העוצמה של שפת Σ^s שווה לזו של Σ*
2. *כל מבנה $\mathcal{M}$ לחתימה המקורית ניתן להרחיב למודל $\mathcal{M}^s$ של $\mathbb{T}_\Sigma$ (להרחיב במובן של לתת פירוש לסימנים החדשים על המבנה המקורי)*
3. *בכל מודל של $\mathbb{T}_\Sigma$ יש פונקציות סקולם מפורשות*

הוכחה. לכל נוסחא חסרת כמתים $\phi(x,y)$ בשפה של Σ, נרחיב את החתימה על ידי סימן פונקציה $F_{\phi,x}(x)$. תהי Σ_1 החתימה המתקבלת, ותהי $\mathbb{T}(\Sigma_1)$ התורה בשפה זו שאומרת שכל F_ϕ פונקציית סקולם עבור ϕ: $\forall x(\exists y(\phi(x,y))\to\phi(x,F_{\phi,x}(x)))$. נשים לב שעוצמות השפה של Σ ושל Σ_1 שוות.

בכל מודל של $\mathbb{T}(\Sigma_1)$ יש פונקציות סקולם לכל נוסחא ב-Σ. כל מבנה $\mathcal{M}$ עבור Σ ניתן להרחיב למודל $\mathcal{M}_1$ של $\mathbb{T}(\Sigma_1)$, על ידי כך שמפרשים את F_ϕ כפונקציה שמתאימה לכל $m\in\exists y\phi(x,y)^{\mathcal{M}}$ את אחד ה-y-המקיימים $(m,y)\in\phi^{\mathcal{M}}$, ולכל m אחר ערך כלשהו.

נגדיר $\Sigma_{n+1}=(\Sigma_n)_1$, $\Sigma^s=\bigcup_i\Sigma_i$ ו-$\mathbb{T}_\Sigma=\bigcup_i\mathbb{T}(\Sigma_i)$. לכל מבנה $\mathcal{M}$ נגדיר $\mathcal{M}_{i+1}=(\mathcal{M}_i)_1$, ואת $\mathcal{M}^s$ להיות הרחבת האיחוד. אז ברור ש-$\mathcal{M}^s$ מודל של $\mathbb{T}_\Sigma$. נשים לב שהשפה של Σ^s היא איחוד השפות של ה-Σ_i, כלומר איחוד בן-מניה של קבוצות שעצמת כל אחת העצמה של השפה המקורית. לכן גם עצמת השפה הזו היא העצמה המקורית.

נותר להוכיח שבכל מודל של $\mathbb{T}_\Sigma$ יש פונקציות סקולם מפורשות. טענה זו ניתן להוכיח לכל נוסחא בנפרד, אך אמור, כל נוסחא כזו היא בחתימה Σ_n עבור איזשהו n, והמודל הוא בפרט מודל של $\mathbb{T}(\Sigma_n)$, ולכן לפי השלב הסופי יש לנוסחא פונקציית סקולם. $\square$

השילוב של טענות 3.9.7 ו-3.9.13 נותן גרסא חזקה של משפט לוונהיים–סקולם היורד:

משפט 3.9.14 (לוונהיים–סקולם). *לכל מבנה $\mathcal{M}$ קיים תת-מבנה אלמנטרי שעצמתו לכל היותר עצמת השפה*

הוכחה. נרחיב את $\mathcal{M}$ למבנה $\mathcal{M}^s$ עם פונקציות סקולם מפורשות, כמו בטענה 3.9.13. לפי הטענה, עצמת השפה של $\mathcal{M}^s$ שווה לעצמת השפה המקורית. יהי $\mathcal{M}_0$ תת-המבנה של $\mathcal{M}^s$ הנוצר על ידי הקבוצה הריקה. לפי מסקנה 3.9.12, $\mathcal{M}_0$ הוא תת-מודל אלמנטרי של $\mathcal{M}^s$. לכן הוא גם תת-מודל אלמנטרי של $\mathcal{M}$ (זהו תנאי יותר חלש, בשפה המקורית יש פחות נוסחאות). נותר להראות שעצמת $\mathcal{M}_0$ אינה גדולה מעצמת השפה. אך לפי הגדרה 3.9.3, כל איבר ב-$\mathcal{M}_0$ הוא מהצורה $t^{\mathcal{M}^s}$, כאשר t שם עצם ללא משתנים חפשיים בשפת $\mathcal{M}_0$. במילים אחרות, יש העתקה מתת-קבוצה של השפה על M_0. $\square$

3.10 משפט השלמות

בסעיף זה נוכיח את משפט השלמות, שאומר שאם פסוק ϕ נובע לוגית מתורה $\mathbb{T}$, אז ניתן להסיק אותו (במובן מדויק שיוגדר) מ-$\mathbb{T}$. דרך אחרת לנסח את אותה טענה היא שאם לא ניתן להסיק את ϕ מ-$\mathbb{T}$, אז שלילתו אינה סותרת לוגית את ϕ, כלומר $\mathbb{T}\cup\{\neg\phi\}$ ספיקה. ניסוח זה מאפשר לנסח את הבעיה במונחים של מציאת מודל לתורה, וזה מסוג הבעיות בהן כבר עסקנו. לכן, לפחות בתחילת הדיון, נשתמש ברעיונות דומים לסעיף הקודם, על מנת לבנות מודל. ההבדל הוא שהפעם אין לנו מבנה להתחיל ממנו, ובמקום זה נבנה מבנה מתוך השפה עצמה.

סוף הרצאה 18, 6 בינואר, 2025

נאמר ששם עצם הוא *שם עצם סגור* אם אין בו משתנים חפשיים.

שם עצם סגור

הגדרה 3.10.1. תהי $\mathbb{T}$ תורה בחתימה Σ. המבנה $\mathcal{M}=\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ מוגדר באופן הבא:

1. לכל סוג a, העולם $a^{\mathcal{M}}$ הוא קבוצת שמות העצם הסגורים מסוג a
2. לכל סימן יחס n-מקומי E, הקבוצה $E^{\mathcal{M}}$ היא קבוצת כל ה-n-יות $(t_1,\dots,t_n)$, כך ש-$E(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{T}$
3. לכל סימן פונקציה n-מקומי f, ולכל סדרת שמות עצם $t_1,\dots,t_n\in\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$, $f^{\mathcal{M}}(t_1,\dots,t_n)=f(t_1,\dots,t_n)$.

נשים לב, שהמבנה שהוגדר תלוי רק בחלק חסר הכמתים של התורה $\mathbb{T}$, ושהוא חסר שוויון. בפרט, איננו יכולים לצפות ש-$\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ מודל של $\mathbb{T}$. למעשה, הוא לא חייב להיות אפילו מודל של החלק חסר הכמתים: אם $\mathbb{T}$ התורה בחתימה עם סימן יחס דו-מקומי E ושני סימני קבועים c,d שאומרת $E(c,d)\vee E(d,c)$, ב-$\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$, היחס ריק, ולכן אינו מקיים את $\mathbb{T}$. אנו רוצים לנסח תנאים תחביריים על $\mathbb{T}$ שיבטיחו תוצאות יותר טובות.

ראשית, נניח מעכשיו *שהתורות שלנו סגורות תחת היסק פסוקי*, כלומר, אם $\mathbb{T}$ מסיקה את ϕ במובן של תחשיב הפסוקים, אז $\phi \in \mathbb{T}$[3] בפרט, $\mathbb{T}$ מכילה את כל הטאוטולוגיות של תחשיב הפסוקים.

הגדרה 3.10.2. תהי $\mathbb{T}$ תורה (סגורה תחת היסק פסוקי)

1. $\mathbb{T}$ היא *תורה עקבית* אם לא קיים פסוק ϕ כך ש-$\phi, \neg\phi \in \mathbb{T}$ תורה עקבית
2. $\mathbb{T}$ היא *תורה סבירה* אם לכל נוסחא $\phi(x)$, אם $\forall x\phi(x) \in \mathbb{T}$ אז לכל שם עצם סגור t מתקיים $\phi(t) \in \mathbb{T}$ תורה סבירה
3. $\mathbb{T}$ היא *תורה החלטית* אם לכל ϕ, מתקיים $\phi \in \mathbb{T}$ או $\neg\phi \in \mathbb{T}$ תורה החלטית

נשים לב שכל התנאים בהגדרה לעיל הם תחביריים, כלומר תלויים רק בצורת הפסוק, ולא בתנאים על מבנים, למשל. נשים לב גם שאם קיים פסוק שאינו ב-$\mathbb{T}$, אז $\mathbb{T}$ עקבית, ושכל תורה מכילה את כל הטאוטולוגיות של תחשיב הפסוקים.

טענה 3.10.3. *נניח ש-$\mathbb{T}$ תורה עקבית, סבירה והחלטית. אז $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ מספק כל פסוק כולל ב-$\mathbb{T}$*

הוכחה. נוכיח באינדוקציה שלכל נוסחה חסרת כמתים $\phi(\bar{x})$, ולכל שמות עצם $\bar{t}$ מתקיים $\bar{t}\in\phi^{\mathcal{M}_{\mathbb{T}}}$ אם ורק אם $\phi(\bar{t}) \in \mathbb{T}$. עבור נוסאחות בסיסיות זו (כמעט) ההגדרה. בהנתן נוסחא ללא כמתים ϕ ו-ψ, $\bar{t} \in \neg\phi^{\mathcal{M}}$ אםם $\bar{t} \notin \phi^{\mathcal{M}}$ אםם $\phi(\bar{t}) \notin \mathbb{T}$ (הנחת האינדוקציה), אםם $\neg\phi(\bar{t}) \in \mathbb{T}$ (החלטיות ועקביות). בדומה, $\bar{t} \in \langle\phi\wedge\psi\rangle^{\mathcal{M}}$ אם ורק אם $\phi(\bar{t}) \in \mathbb{T}$ ו-$\psi(\bar{t}) \in \mathbb{T}$, אם ורק אם $\phi(\bar{t})\wedge\psi(\bar{t})\in\mathbb{T}$ (סגירות תחת היסק פסוקי).

כעת, אם $\mathbb{T}$ סבירה ו-$\forall\bar{x}\phi(\bar{x}) \in \mathbb{T}$, אז באינדוקציה, לכל $\bar{t}$ מתקיים $\phi(\bar{t}) \in \mathbb{T}$. לכן, $\bar{t} \in \phi^{\mathcal{M}}$ לכל $\bar{t}$, ולכן $\forall x\phi(x)$ תקף ב-$\mathcal{M}$. $\square$

הערה 3.10.4. בהוכחה השתמשנו בהחלטיות ובסבירות רק עבור פסוקים ללא כמתים

כדי לקבל מודל של התורה המלאה, נזדקק לתנאי בכיוון ההפוך: אם $\exists x\phi(x)$ שייך ל-$\mathbb{T}$, אז קיים לזה עד: $\phi(t)$ שייך ל-$\mathbb{T}$ עבור איזשהו t (זהו התנאי של קיום פונקציות סקולם קבועות). התנאי הזה אינו נכון לכל התורות הספיקות, אבל כמו שראינו בדיון על פונקציות סקולם, תמיד ניתן להרחיב תורה ספיקה לתורה ספיקה המקיימת את התנאי הזה, ולאחר ההרחבה, מבנים (כלומר מודלים של $\mathbb{T}_{\forall}$) הם מודלים. ההוכחה במקרה זה דומה אף היא.

מסקנה 3.10.5. *אם $\mathbb{T}$ כמו בטענה 3.10.3, ובנוסף לכל פסוק $\exists x\phi(x)$ ב-$\mathbb{T}$ קיים פסוק מהצורה $\phi(t)$ ב-$\mathbb{T}$ (כאשר t שם עצם), אז $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ מודל של $\mathbb{T}$.*

---

[3] באופן יותר פורמלי, נתבונן בקבוצת הפסוקים $\mathcal{F}(P)$ של תחשיב הפסוקים, כאשר P קבוצת הפסוקים בחתימה הנתונה, במובן של תחשיב היחסים. לפי ההגדרה של $\mathcal{F}(P)$, יש העתקה יחידה $t : \mathcal{F}(P) \to P$ שהיא הזהות על P וכך ש-$t(\langle x\to y\rangle) = \langle t(x)\to t(y)\rangle$, כאשר בצד שמאל הגרירה היא של תחשיב הפסוקים (כלומר x, y הם איברים של P), ובצד ימין של תחשיב היחסים. אז $\mathbb{T}$ סגורה תחת היסק פסוקי אם לכל $\phi \in \mathcal{F}(P)$ שנובע לוגית מ-$t^{-1}(\mathbb{T})$ במובן של תחשיב הפסוקים, $t(\phi) \in \mathbb{T}$

הוכחה. נוכיח באינדוקציה ש-$t \in \phi^{\mathcal{M}}$ אם ורק אם $\phi(t) \in \mathbb{T}$. לפעולות לוגיות זה כבר הוכח. נניח ש-$t \in \exists x \phi(x,y)$. אז קיים שם עצם s כך ש-$(s,t) \in \phi^{\mathcal{M}}$ ובאינדוקציה $\phi(s,t) \in \mathbb{T}$. אם $\exists x \phi(x,t) \notin \mathbb{T}$ אז מהחלטיות $\forall x \neg\phi(x,t) \in \mathbb{T}$. אז לפי סבירות $\neg\phi(s,t) \in \mathbb{T}$, בסתירה לעקביות.

בכיוון השני, אם $\exists x \phi(x,t) \in \mathbb{T}$, אז לפי התנאי קיים שם עצם c כך ש-$\phi(c,t) \in \mathbb{T}$. קבוע זה מראה ש-$t \in \exists x \phi(x,y)$. $\square$

בשלב זה סיימנו את החלק הסמנטי של הדיון, ונעבור לדון במערכות היסק. אם נסמן ב-$\mathbb{T} \vdash_0 \phi$ את היחס שאומר ש-ϕ ניתן להסקה מ-$\mathbb{T}$ במובן של תחשיב הפסוקים, אז מסיבות דומות לאלה שראינו, אין ליחס זה סיכוי להיות שלם: למשל, לא ניתן להסיק את $\phi(c)$ מ-$\forall x \phi(x)$ רק על בסיס תחשיב הפסוקים, כי תחשיב הפסוקים לא "יודע" מה הקשר בין שני פסוקים אלה. לכן, אם אנו רוצים שמשפט השלמות יהיה נכון, עלינו להרחיב את יחס ההיסק של תחשיב הפסוקים ליחס חדש, $\vdash$. קיימות מספר דרכים לעשות זאת, ולא ברור שקיימת אחת מועדפת, ולכן נעדיף ראשית לאפיין את היחסים "הטובים" באופן מופשט. האפיון מודרך על-ידי התוצאות הסמנטיות לעיל.

סוף הרצאה 19, 7 בינואר 2025

הגדרה 3.10.6. נסמן ב-$\mathscr{S}$ את קבוצת הפסוקים בחתימה נתונה Σ, ויהי $\vdash$ יחס דו-מקומי על $\mathcal{P}(\mathscr{S})$, קבוצת החזקה של $\mathscr{S}$ (אז האיברים של $\mathcal{P}(\mathscr{S})$ הם תורות). נסמן $\Gamma \vdash \phi$ במקום $\Gamma \vdash \{\phi\}$ עבור יחידונים.

יחס היסק

1. $\vdash$ נקרא *יחס היסק* אם:
   (א) לכל $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{P}(\mathscr{S})$ מתקיים $\Gamma_1 \vdash \Gamma_2$ אם ורק אם $\Gamma_1 \vdash \phi$ לכל $\phi \in \Gamma_2$.
   (ב) $\vdash$ הוא טרנזיטיבי
   (ג) $\vdash$ מכיל את יחס ההיסק הרגיל $\vdash_0$ של תחשיב הפסוקים (כלומר, אם $\Gamma \vdash_0 \phi$ אז $\Gamma \vdash \phi$)

אופי סופי

2. נאמר שליחס היסק $\vdash$ *יש אופי סופי* אם לכל $\Gamma \vdash \phi$ קיימת תת-קבוצה סופית $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ כך ש-$\Gamma_0 \vdash \phi$

יחס דדוקטיבי

3. נאמר ש-$\vdash$ הוא *יחס דדוקטיבי* אם מתקיים משפט הדדוקציה, כלומר, אם $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$, אז $\Gamma \vdash \phi \to \psi$

מכבד כמתים

4. נאמר ש-$\vdash$ *מכבד כמתים* אם לכל Γ ולכל נוסחא $\phi(x)$ מתקיים $\Gamma \vdash \forall x \phi(x)$ אם ורק אם $\Gamma \vdash \phi(c)$ לכל שם עצם סגור (כולל קבועים "חדשים", כלומר, כאלה שלא מופיעים בחתימה של Γ ו-ϕ)

תקף לוגית

5. נאמר ש-$\vdash$ *תקף לוגית* אם $\Gamma \vdash \phi$ גורר ש-$\Gamma \models \phi$

עקבית ביחס ל-$\vdash$

אם $\vdash$ יחס היסק, נאמר שקבוצה של פסוקים Γ היא *עקבית ביחס ל-*$\vdash$ אם לא קיים ϕ כך ש-$\Gamma \vdash \phi$ ו-$\Gamma \vdash \neg\phi$.

דוגמא 3.10.7. יחס ההיסק $\vdash_0$ של תחשיב הפסוקים הוא יחס היסק במובן של ההגדרה הזו, ומקיים את כל שאר התכונות, מלבד כיבוד כמתים.

דוגמא 3.10.8. היחס $\models$ של גרירה לוגית הוא יחס היסק המקיים את כל שאר התכונות

תרגיל 3.10.9. הוכיחו את האמור בשתי הדוגמאות האחרונות

המטרה שלנו היא להראות שהדוגמא האחרונה היא הדוגמא היחידה:

משפט 3.10.10 (משפט השלמות, גירסא מופשטת). *אם $\vdash$ הוא יחס היסק בעל אופי סופי, דדוקטיבי, מכבד כמתים ותקף לוגית, אז הוא מתלכד עם* $\models$

הואיל ו-$\vdash$ תקף לוגית, עלינו להוכיח רק את הכיוון השני, כלומר, שאם $\Gamma \models \phi$ אז $\Gamma \vdash \phi$. כאמור בתחילת הסעיף, זה שקול ל: אם $\Gamma \nvdash \phi$ אז ל-$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ יש מודל. נוכיח זאת בסדרת תרגילים, שתוביל אותנו למצב של מסקנה 3.10.5.

תרגיל 3.10.11. יהי $\vdash$ יחס היסק. בתרגיל זה, *עקבית* פירושו *עקבית ביחס ל-*$\vdash$.

1. הוכיחו שאם $\Gamma \vdash \phi$ ו-$\Gamma \subset \Gamma_1$, אז $\Gamma_1 \vdash \phi$, וגם שאם Γ אינה עקבית, אז $\Gamma \vdash \psi$ לכל ψ

2. הוכיחו שאם $\vdash$ הוא בעל אופי סופי, אז כל קבוצה עקבית מוכלת בקבוצה עקבית מקסימלית.

3. הוכיחו שאם $\vdash$ בעל אופי סופי ודדוקטיבי, אז כל קבוצה עקבית מוכלת בקבוצה עקבית והחלטית

4. הוכיחו שאם $\vdash$ מקיים את כל ההנחות הקודמות, וגם מכבד כמתים, ואם Γ עקבית והחלטית, אז Γ מקיימת את ההנחות של מסקנה 3.10.5

5. הוכיחו את משפט 3.10.10

כדי לצקת תוכן במשפט, נותר למצוא יחס $\vdash$ המקיים את התכונות לעיל. כמובן, יחס הגרירה הלוגית מקיים תכונות אלה, אך אנו מעוניינים ביחס שתיאורו תחבירי.

הגדרה 3.10.12. סדרה סופית $\phi_1, \dots, \phi_n$ של פסוקים תקרא *היסק* של ϕ_n מתוך קבוצה של פסוקים Γ אם לכל $i \leq n$ מתקיים אחד מהתנאים הבאים: היסק

1. ϕ_i טאוטולוגיה (של תחשיב הפסוקים)

2. ϕ_i הוא מהצורה $\forall x\psi(x) \to \psi(c)$ כאשר ψ נוסחא ו-c שם עצם סגור (שלא בהכרח מוזכר בפסוקים האחרים)

3. ϕ מהצורה $\forall x\langle\psi \to \theta(x)\rangle \to \langle\psi \to \forall x\theta(x)\rangle$ כאשר ψ פסוק

4. ϕ_i שייך ל-Γ

5. (MP) קיימים $j,k<i$ כך ש-$\phi_j = \langle \phi_k \rightarrow \phi_i \rangle$

6. (Gen) קיימת נוסחא $\psi(x)$ כך ש-ϕ_i הוא $\forall x \psi(x)$, וקיים $j<i$ וסימן קבוע c שאינו מופיע ב-Γ, כך ש-ϕ_j הוא $\psi(c)$

נאמר ש-Γ מסיקה את ϕ (סימון: $\Vdash$) אם קיים היסק של ϕ_n מתוך Γ

תרגיל 3.10.13. נניח שקבוצה Γ מסיקה את הפסוק $\phi(c)$, כאשר c קבוע שלא מופיע ב-Γ. הוכיחו שאם d קבוע אחר שלא מופיע ב-Γ, אז Γ מסיקה גם את $\phi(d)$. הסיקו שהיחס $\Vdash$ הוא יחס היסק בעל אופי סופי ותקף לוגית, במובן של הגדרה 3.10.6.

טענה 3.10.14. *אם* $\Gamma \cup \phi \Vdash \psi$ *אז* $\Gamma \Vdash \phi \rightarrow \psi$

הוכחה. נוכיח, באינדוקציה על n, שבהיסק $\psi_1,\ldots,\psi_n$ מתוך $\Gamma \cup \phi$ מתקיים $\Gamma \Vdash \phi {\rightarrow} \psi_n$. נשים לב ראשית שהפסוק $p \rightarrow \langle q \rightarrow p \rangle$ הוא טאוטולוגיה של תחשיב הפסוקים, ולכן עבור $p{=}\psi_n$ ו-$q=\phi$ המסקנה נובעת בשלושת המקרים הראשונים של ההגדרה בעזרת MP. כמו-כן, במקרה ש-ψ_n הוסק על-ידי שימוש ב-MP, ההוכחה מהמקרה של תחשיב הפסוקים עובדת גם כאן.

נותר להתבונן במקרה ש-ψ_n הוא $\forall x \theta(x)$, ו-ψ_i, עבור $i<n$ הוא $\theta(c)$, כאשר c לא מופיע ב-$\Gamma \cup \phi$. במקרה זה, לפי הנחת האינדוקציה, ניתן להסיק את $\phi \rightarrow \theta(c)$ מתוך Γ. הואיל ו-c לא מופיע ב-Γ, נסיק על-ידי Gen את $\forall x(\phi \rightarrow \theta(x))$ (נשים לב ש-x לא מופיע ב-ϕ, שכן c לא הופיע בו). כעת נשתמש באקסיומה וב-MP כדי להסיק את $\phi \rightarrow \forall x \phi(x)$, כנדרש. $\square$

מסקנה 3.10.15. *לכל פסוק ϕ וקבוצת פסוקים Γ מתקיים $\Gamma \models \phi$ אם ורק אם* $\Gamma \Vdash \phi$

הוכחה. ראינו בתרגיל 3.10.13 שהיחס $\Vdash$ הוא יחס היסק בעל אופי סופי, ותקף לוגית, ובטענה 3.10.14 שהוא דדוקטיבי. אם $\Gamma \Vdash \forall x \phi(x)$ אז לפי אקסיומה מהסוג השני ו-MP מתקיים $\Gamma \Vdash \phi(c)$ לכל שם עצם סגור c, בעוד שאם $\Gamma \Vdash \phi(c)$ לכל שם עצם סגור c (ובפרט לקבוע c שאינו מופיע ב-Γ) אז $\Gamma \Vdash \forall x \phi(x)$ לפי Gen. לכן לפי משפט 3.10.10, $\Vdash$ ו-$\models$ הם אותו יחס. $\square$

נשים לב, שבהוכחת משפט השלמות לא הסתמכנו על משפט הקומפקטיות. מצד שני, הראינו שהיחס האחרון מקיים את הנחות משפט 3.10.10. לכן קיבלנו עוד הוכחה של משפט הקומפקטיות: ל-$\models$ יש אופי סופי. טענה נוספת, שלא נוכל לנסח במדויק, אך ברורה אינטואיטיבית היא: אם קיימת תכנית מחשב שפולטת את כל הפסוקים בתורה Γ, אז קיימת תכנית מחשב שפולטת את כל המסקנות של Γ.

4 משפט אי-השלמות

בסעיף זה נוכיח את משפט אי השלמות של גדל. משפט זה אינו שלילת משפט השלמות, אלא הוא הטענה שתורה מסוימת בשפה של תורת המספרים — אקסיומות פיאנו — אינה אקסיומטיזציה

מלאה של תורת המספרים, כלומר, קבוצת הפסוקים הנובעים מאקסיומות פיאנו אינה שלמה. במלים אחרות, קיים פסוק שתקף במספרים הטבעיים, אך אינו ניתן להסקה מתוך אקסיומות פיאנו.

נציין שהבחירה באקסיומות פיאנו, ובמידה מסוימת, בתורת המספרים, היא מעניינת מבחינה היסטורית, אך אינה הכרחית. למעשה, נראה שהמשפט נותן את התוצאה המקבילה עבור כל בחירה "סבירה" של אקסיומות. נשים לב שאיזושהי מגבלת "סבירות" דרושה, שכן קבוצת כל הפסוקים הנכונים ב-$\mathbb{N}$ היא, על-פי ההגדרה, מערכת אקסיומות שלמה עבור $\mathbb{N}$. הבעיה עם המערכת הזו היא שהיא לא מפורשת מספיק: בהנתן פסוק, אין דרך קלה לדעת האם הוא אקסיומה. המשפט של גדל יראה שכל מערכת אקסיומות שאינה סובלת מהבעיה הזו, אינה שלמה. בפרט, משפט זה עונה בצורה מדויקת (ושלילית) על השאלה הפילוסופית: האם ניתן לייצר תהליך מכני שמוכיח את כל העובדות על $\mathbb{N}$? נזכיר, שהמצב שונה לגבי מבנים אחרים: למשל, ראינו שלשדה $\mathbb{C}$ יש מערכת אקסיומות "סבירה": לכל פולינום ממעלה חיובית יש שורש (בנוסף על אקסיומות השדה ממציין 0).

ההוכחה תתחלק לשני חלקים: ראשית, נבחן מהן הקבוצות הגדירות ב-$\mathbb{N}$. נגלה שב-$\mathbb{N}$ יש "המון" קבוצות גדירות. בפרט, נצליח לענות על שאלה 3.4.12, ועל שאלות דומות נוספות. נראה גם שעושר הקבוצות הגדירות הוא כזה, שהמבנה יכול לדבר על מבנים רבים אחרים במתמטיקה, ובפרט, על הלוגיקה של עצמו.

בשלב שני נראה טענה כללית, שאומרת שאם יש לנו מבנה כזה, שיכול באופן גדיר, "לדבר על עצמו", אז התופעות שתוארו לעיל קורות בו — אין לו מערכת אקסיומות "סבירה". שלב זה לא מתייחס לתורת המספרים כלל.

ההצגה מבוססת (באופן חלקי) על הספר [9].

4.1 קבוצות גדירות בטבעיים

בסעיף זה נחקור מהן הקבוצות הגדירות בטבעיים. נתחיל מהגדרת השפה: החתימה עבור הטבעיים מורכבת מסוג אחד, פעולות דו-מקומיות $+$ ו-$\cdot$, ושני קבועים $\underline{0}$ ו-$\underline{1}$. אנחנו נעבוד עם מבנה הטבעיים (עם שוויון), שבו הפעולות והקבועים מתפרשים באופן הנרמז.

ראינו כבר מספר קבוצות גדירות במבנה זה, למשל קבוצת הראשוניים, או קבוצת החזקות של 5. מאידך, ראינו שקבוצות אחרות, כגון החזקות של 10 הן קשות להגדרה, וכרגע עוד לא ברור אם הן גדירות. מיד נראה שקבוצות אלה גדירות, בנוסף, למשל, לקבוצות הבאות (נזכיר שהעתקה נקראת *העתקה גדירה* אם הגרף שלה הוא קבוצה גדירה): העתקה גדירה

טענה 4.1.1. *ההעתקות הבאות גדירות ב-$\mathbb{N}$*

1. $f(n,m)=n^m$
2. $f(n)=n!$ *(עצרת)*
3. *ההעתקה המתאימה ל-i את הראשוני ה-i*
4. *בהנתן העתקה גדירה* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$*, ההעתקה* $s(n)=\sum_{i=0}^{n} f(i)$

המשותף לכל הפונקציות והקבוצות שאנו מעוניינים בהן הוא שהן מוגדרות ברקורסיה באופן טבעי, למשל $m^{n+1} = m \cdot m^n$. למעשה, *אחת ההגדרות* של הטבעיים היא שניתן להגדיר עליה פונקציות ברקורסיה: זו קבוצה $\mathbb{N}$ עם איבר $0 \in \mathbb{N}$ ופונקציה $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (עוקב), שהיא אוניברסלית, במובן הבא: אם A קבוצה, $a \in A$ איבר, ו-$f : A \to A$ פונקציה, אז יש פונקציה יחידה $g : \mathbb{N} \to A$ עם התכונה ש-$g(0) = a$ ו-$g(s(n)) = f(g(n))$ לכל n.

תרגיל 4.1.2. הוכיחו שהתכונה לעיל מגדירה את $\mathbb{N}$ ביחידות: אם $\mathbb{N}', 0', s'$ מבנה אחר עם אותן תכונות, אז יש איזומורפיזם יחיד $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ (כמבנים לחתימה עם פונקציה אחת וסימן קבוע אחד). ההוכחה דומה לפתרון תרגיל 2.2.3.

תרגיל 4.1.3. השתמשו בטענה על מנת להוכיח את קיומה של סדרת פיבונצ׳י

תכונת ההגדרה ברקורסיה מבטיח קיומה של פונקציה. היא לא מבטיח, כמובן, שהפונקציה תהיה גדירה בחתימה שלנו. על-מנת שהפונקציה תהיה גדירה, ברור שהכרחי להתחיל מנתונים גדירים, כלומר, שהקבוצה A והפונקציה f יהיו גדירות. באופן מפתיע, זה גם מספיק (אפילו בגרסא קצת יותר חזקה):

טענה 4.1.4 (משפט ההגדרה ברקורסיה). *תהי X קבוצה גדירה (ב-$\mathbb{N}$)*

1. *נניח ש-$A_0 \subseteq X$ קבוצה גדירה. תהי $D \subseteq \mathbb{N} \times X^m \times X$ קבוצה גדירה כלשהי, ונגדיר ברקורסיה*

$$A_{n+1} = \{x \in X \mid \exists x_1, \dots, x_m \in A_n,\ (n, x_1, \dots, x_m, x) \in D\}$$

אז הסדרה A_i גדירה באופן אחיד, כלומר, הקבוצה $A = \{(n, x) \mid x \in A_n\} \subseteq \mathbb{N} \times X$ גדירה.

2. *נניח ש-$f : \mathbb{N} \times Y \to Y$ פונקציה גדירה. אז הפונקציה $g : \mathbb{N} \times Y \to Y$ הנתונה על-ידי $g(0, y) = y$ ו-$g(i + 1, y) = f(i, g(i, y))$ גדירה אף היא.*

נציין שבתנאים של הטענה, העובדה ש-A_i גדירה עבור כל i בנפרד נכונה בכל תורה, אך באופן כללי, הנוסחאות שמגדירות את A_i ואת A_j שונות מאד עבור $i \neq j$. החוזק כאן הוא שקיימת נוסחא אחת שמגדירה את כל הקבוצות הללו באופן אחיד, כאשר i פרמטר.

תרגיל 4.1.5. הסיקו את טענה 4.1.1 ממשפט ההגדרה ברקורסיה 4.1.4

סוף הרצאה 20, 13 בינואר, 2025

על מנת להוכיח את משפט ההגדרה ברקורסיה, נצטרך לקודד סדרות סופיות: אנו רוצים לדעת שאם X קבוצה גדירה, אז קבוצת המלים מעל X, כלומר סדרות סופיות של איברים ב-X, גדירה אף היא. באופן יותר מדויק, זה אומר את הדבר הבא:

קבוצת המלים מעל X גדירה

הגדרה 4.1.6. תהי X קבוצה גדירה (ב-$\mathbb{N}$). נאמר *שקבוצת המלים מעל X גדירה* אם קיימת קבוצה גדירה X^+, העתקה גדירה $|\cdot| : X^+ \to \mathbb{N}$, והעתקה גדירה $p : \mathbb{N} \times X^+ \to X$, כך שלכל $k_0, \dots, k_{n-1} \in X$ קיים $a \in X^+$ יחיד עבורו $|a| = n$, ולכל $i < n$ מתקיים $p(i, a) = k_i$.

עבור קבוצה גדירה נתונה X, קבוצת המלים היא יחידה באותו מובן בו $\mathbb{N}$ או האלגברה הבוליאנית החפשית הם יחידים: יתכנו שתי שלשות שונות המקיימות את תנאי ההגדרה, אולם בין כל שתיים כאלה יש התאמה *גדירה* יחידה:

תרגיל 4.1.7. נניח ש-X גדירה, ו-$(X^+, |\cdot|, p)$ קבוצת מלים גדירה עבור X.

1. הוכיחו שקיימת העתקה יחידה $f : X^+ \to X^*$ (כאשר X^* קבוצת המלים במובן הרגיל), כך שלכל $a \in X^+$ עבורו $|a| = n$, האורך של $f(a)$ הוא n, ולכל $i < n$ מתקיים $p(i, a) = f(a)_{i+1}$.
2. הוכיחו ש-f הפיכה
3. הוכיחו שאם $(X_1^+, |\cdot|_1, p_1)$ קבוצת מלים גדירה אחרת, עם העתקה מתאימה f_1, אז $f^{-1} \circ f_1$ היא העתקה גדירה.
4. הוכיחו שההעתקה $(w_1, w_2) \mapsto w_1 * w_2$ מ-$X^+ \times X^+$ ל-X^+ המקיימת $f(w_1 * w_2) = f(w_1) f(w_2)$ (שרשור של מלים) היא גדירה

המטרה שלנו היא להראות שלכל קבוצה גדירה קיימת קבוצת מלים גדירה. נתחיל מהאבחנה הבאה:

תרגיל 4.1.8. הוכיחו:

1. אם ל-$\mathbb{N}$ יש קבוצת מלים גדירה, אז לכל קבוצה גדירה אחרת גם יש קבוצת מלים גדירה.
2. נניח שקיימת קבוצה גדירה A והעתקה גדירה $p : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N}$ כך שלכל $k_0, \dots, k_{n-1}$ קיים $a \in A$ עבורו $p(i, a) = k_i$ לכל $i < n$. אז ל-$\mathbb{N}$ יש קבוצת מלים גדירה.

טענה 4.1.9. *לכל קבוצה גדירה יש קבוצת מלים גדירה*

בהוכחת הטענה נזדקק לטענה קלאסית בתורת המספרים, משפט השאריות הסיני.

משפט 4.1.10 (משפט השאריות הסיני). *אם $n_1, \dots, n_k$ מספרים טבעיים זרים בזוגות, ו-$m_1, \dots, m_k$ מספרים שלמים כלשהם, אז קיים מספר טבעי יחיד $L < n_1 \dots n_k$ כך שלכל i, ל-L ול-m_i אותה שארית ביחס ל-n_i.*

הוכחה. באינדוקציה מספיק להראות זאת כש-$k = 2$. לכל r, נסמן ב-$C_r = \{0, \dots, r-1\}$, ונתבונן בהעתקה R ששולחת כל $x \in C_{n_1 n_2}$ לשאריות שלו ביחס ל-n_1 ו-n_2 ב-$C_{n_1} \times C_{n_2}$. אם $R(x) = R(y)$, אז $R(x-y) = (0, 0)$, כלומר $x - y$ מתחלק ב-n_1 וב-n_2. הואיל ו-n_i-זרים, זה אומר ש-$x - y$ מתחלק ב-$n_1 n_2$. אבל $x - y$ טבעי (בלי הגבלת הכלליות) וקטן מ-$n_1 n_2$, ולכן שווה ל-0, כלומר $x = y$.

זה מראה ש-R חד-חד-ערכית, כלומר את היחידות. הואיל ושתי הקבוצות ושוות גודל, R היא גם על, ומכך נובע גם הקיום. □

הוכחת טענה 4.1.9. לפי תרגיל 4.1.8, מספיק להוכיח שקיימת קבוצה גדירה A והעתקה גדירה p כך שעבור מספרים טבעיים $k_0,\dots,k_{n-1}$ קיים $t\in A$ עבורו $p(i,t)=k_i$ לכל $i<n$.

נגדיר: $A=\mathbb{N}^2$ ועבור מספרים טבעיים i,a,b, $p(i,a,b)=\mathrm{Rem}(a,b(i+1)+1)$, כאשר $\mathrm{Rem}(x,y)$ הוא השארית של x כשמחלקים אותו ב-y. קל לראות ש-Rem, ולכן גם p, היא העתקה גדירה. נניח שנתונים $k_0,\dots,k_{n-1}$. נבחר $b=kn!$ כאשר k גדול מכל k_i. אנו טוענים שכל המספרים $b(i+1)+1$ (עבור $i<n$ שונים) הם זרים בזוגות. בהנתן הטענה, לפי משפט השאריות הסיני, קיים a כך ש-k_i השארית של a בחלוקה ב-$b(i+1)+1$, וסיימנו.

על מנת להוכיח את הטענה, נשים לב ראשית שלכל $i<n$, ל-$b(i+1)+1$ אין מחלקים ראשוניים קטנים מ-n (שכן כל מחלק כזה מחלק את $n!$). אם, עבור $i,j<n$ הראשוני q מחלק את $bi+1$ וגם את $bj+1$, אז הוא מחלק גם את הפרשם $b(i-j)$, והואיל ואינו יכול לחלק את b, הוא מחלק את $i-j$. אבל $p\geq n$, ולכן $i=j$. $\square$

בהנתן סדרה $k_0,\dots,k_n$ של איברי קבוצה גדירה X, נסמן ב-$\langle k_0,\dots,k_n\rangle$ את האיבר a של X^+ עבורו $|a|=n+1$ ו-$p(i,a)=k_i$. זוהי העתקה גדירה מ-X^{n+1} ל-X^+.

הוכחת טענה 4.1.4. 1. לשם פשטות הסימון, נניח ש-$m=1$. נגדיר

$$B=\{\langle x_0,\dots,x_n\rangle\in X^+ \mid x_0\in A_0, \forall i<n\,(i,x_i,x_{i+1})\in D\}$$

אנו טוענים ש-B גדירה. אכן, B היא התת-קבוצה של X^+ הנתונה על-ידי הנוסחא

$$p(0,w)\in A_0\wedge\forall i<|w|-1\,(i,p(i,w),p(i+1,w))\in D$$

מאידך, אנחנו טוענים ש-

$$A=\{(n,x)\mid\exists w\in B(|w|=n+1\wedge p(n,w)=x)\}$$

(ולכן גדירה). נסמן $C_n=\{x\in X\mid(n,x)\in A\}$, ונוכיח באינדוקציה על n ש-$A_n{=}C_n$. עבור $n=0$, C_0 היא קבוצת האיברים x כך ש-$\langle x\rangle\in B$, כלומר בדיוק A_0.

אם $x\in C_{n+1}$, אז קיימת מילה מהצורה $\langle x_0,\dots,x_n,x\rangle$ ב-B. לכן גם $\langle x_0,\dots,x_n\rangle\in B$, ולפי הנחת האינדוקציה, $x_n\in A_n$. לפי הגדרת B מתקיים $(n,x_n,x)\in D$, ולכן $x\in A_{n+1}$.

מאידך, אם $x\in A_{n+1}$, אז קיים $x_n\in A_n$ כך ש-$(n,x_n,x)\in D$. לפי הנחת האינדוקציה, $x_n\in C_n$, ולכן קיים איבר ב-B מהצורה $\langle x_0,\dots,x_n\rangle$. אז $\langle x_0,\dots,x_n,x\rangle$ ב-B, ומראה ש-$x\in C_{n+1}$.

2. זה המקרה הפרטי של הסעיף הקודם בו $X=Y\times Y$, $A_0=\{(y,y)\mid y{\in}Y\}$ ו-$D{=}\{(n,a,b,a,f(n,b))\mid a,b\in Y\}$. $\square$

סוף הרצאה 21, 14 בינואר, 2025

תרגיל 4.1.11. הוכיחו את הגרסא הבאה של משפט ההגדרה ברקורסיה: תהי X קבוצה גדירה ב-$\mathbb{N}$, ונניח ש-$D \subseteq \mathbb{N} \times X^+ \times X$ קבוצה גדירה. תהי $A_0 \subseteq X$ קבוצה גדירה כלשהי, ונגדיר ברקורסיה

$$A_{n+1} = \{x \in X \mid \exists w \in {A_n}^+,\ (n, w, x) \in D\}$$

(כאשר אנחנו מזהים את ${A_n}^+$ כתת-קבוצה של X^+). אז הסדרה A_i גדירה באופן אחיד, כלומר, הקבוצה $A = \{(n, x) \mid x \in A_n\} \subseteq \mathbb{N} \times X$ גדירה.

4.2 לוגיקה בתוך $\mathbb{N}$

ראינו לעיל שמשפט הרקורסיה מאפשר להראות שקבוצות והעתקות מוכרות מתורת המספרים הן גדירות בשפה הטבעיות עבור $\mathbb{N}$. המספרים הטבעיים מופיעים גם כמעט בכל תחום אחר במתמטיקה, וטבעי לשאול: האם העצמים המופיעים בתחומים אלה, גדירים אף הם ב-$\mathbb{N}$. בסעיף זה נענה (באופן חלקי) על השאלה הזו עבור התחום האהוב עלינו — לוגיקה.

בסעיף זה, *קבוצה גדירה* תהיה קבוצה גדירה ב-$\mathbb{N}$, כלומר תת-קבוצה של חזקה קרטזית סופית של $\mathbb{N}$ הנתונה על-ידי נוסחה בשפה של $\mathbb{N}$. ההגדרות הבאות מתקבלות פשוט על-ידי תוספת המילה "גדירה" לכל מופע של המילה "קבוצה" בהגדרה המקורית (באופן זהיר). למעשה, עבור ההוכחה של משפט אי השלמות, מספיק לנו מקרה פרטי, אבל נוח לעבוד באופן כללי:

הגדרה 4.2.1. *חתימה גדירה* (ב-$\mathbb{N}$) מורכבת מקבוצה גדירה $\mathbf{S}$ של *סוגים*, קבוצה גדירה $\mathbf{R}$ של *סימני יחס*, עם העתקה גדירה $\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{S}^+$ וקבוצה גדירה $\mathbf{F}$ של *סימני פונקציה* עם העתקה גדירה $\mathbf{f} : \mathbf{F} \to \mathbf{S}^+ \times \mathbf{S}$.

אם $\Sigma = (\mathscr{S}, \mathscr{R}, \mathscr{F})$ חתימה במובן הרגיל (הגדרה 3.2.1), נאמר ש-Σ היא גדירה אם קיימת חתימה גדירה כנ"ל, והתאמה הפיכה בין $\mathscr{S}$ ל-$\mathbf{S}$, ולכל מילה $w \in \mathscr{S}^*$, התאמה הפיכה בין $\mathscr{R}_w$ ו-$\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{w})$ (כאשר $\mathbf{w}$ המילה הגדירה המתאימה ל-w), ובאופן דומה עבור סימני הפונקציה. במצב זה, נניח שהתאמות כאלה נבחרו.

נשים לב שחתימה גדירה היא, בפרט, חתימה במובן הרגיל, ולכן אפשר לדבר על שמות עצם, נוסחאות, וכו' מעליה. אם נתונה קבוצה *גדירה* של משתנים חפשיים, אז קבוצות שמות העצם והנוסחאות (בחתימה ומשתנים חפשיים נתונים) גדירות אף הן. על מנת לומר זאת במדויק, נאמר ראשית *שקבוצה גדירה מעל* $\mathbf{S}$ היא קבוצה גדירה $\mathbf{X}$ ביחד עם העתקה גדירה נתונה $\mathbf{g} : \mathbf{X} \to \mathbf{S}$. קבוצה גדירה מעל S
במצב זה, אם $s \in \mathbf{S}$, נסמן ב-$\mathbf{X}_s$ את הסיב $\mathbf{g}^{-1}(s)$. למשל, בהגדרה של חתימה גדירה, $\mathbf{R}$ היא קבוצה גדירה מעל $\mathbf{S}^+$.

תרגיל 4.2.2. תהי $\mathbf{\Sigma} = (\mathbf{S}, \mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{F}, \mathbf{f})$ חתימה גדירה, ותהי $\mathbf{v} : \mathbf{V} \to \mathbf{S}$ קבוצה גדירה מעל $\mathbf{S}$.

1. הוכיחו שקבוצת שמות העצם מעל $\mathbf{\Sigma}$ ו-$\mathbf{V}$ גדירה, במובן הבא: קיימים
   (א) קבוצה גדירה $\mathbf{t} : \mathbf{T} \to \mathbf{S}$ מעל $\mathbf{S}$
   (ב) העתקה גדירה $\mathbf{i} : \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ מעל $\mathbf{S}$ (כלומר $\mathbf{t} \circ \mathbf{i} = \mathbf{v}$)

(ג) העתקה גדירה $\mathbf{p}:\mathbf{F}\times\mathbf{T}^{+}\to\mathbf{T}$ מעל $\mathbf{S}$

כך שההעתקה היחידה $u:\mathscr{T}\to\mathbf{T}$ מעל $\mathbf{S}$ הנקבעת על-ידי התנאים:

(א) $u(x)=\mathbf{i}(x)$ לכל $x\in\mathbf{V}$ ו-

(ב) $\mathbf{p}(f,\langle u(t_1),\dots,u(t_k)\rangle)=u(f(t_1,\dots,t_k))$ לכל $f\in\mathbf{F}$ ו- $t_i\in\mathscr{T}$ (בצד ימין, $f(t_1,\dots,t_k)$ הוא שם העצם שנקבע על ידי f ו-t_i, כמו בהגדרה של שמות עצם)

היא חד-חד-ערכית ועל. במלים אחרות, ניתן לזהות (באמצעות u) את קבוצת שמות העצם עם קבוצה גדירה.

2. נסחו באופן דומה והוכיחו את הטענה שהקבוצות הבאות הן גדירות:

(א) קבוצת הנוסחאות $\mathbf{\Phi}=\mathbf{\Phi}_{\Sigma,\mathbf{V}}$ מעל $\mathbf{\Sigma}$ ו-$\mathbf{V}$

(ב) עבור תת-קבוצה גדירה $\mathbf{X}$ של $\mathbf{V}$, קבוצת הנוסחאות $\mathbf{\Phi}(\mathbf{X})$ ב-$\mathbf{\Phi}$ בהן המשתנים החפשיים הם בקרב $\mathbf{X}$ (בפרט, קבוצת הפסוקים $\mathbf{\Phi}(0)$).

(ג) ההעתקה $\mathbf{s}_x:\mathbf{\Phi}\times\mathbf{T}\to\mathbf{\Phi}$ אשר שולחת את (האיברים המייצגים את) הנוסחה $\phi(x,\dots)$ ושם העצם t לאיבר המייצג את $\phi[x=t]$ (הנוסחה המתקבלת מהצבת t במקום x)

התרגיל מאפשר להגדיר את המושג של *תורה גדירה:* זוהי פשוט תת-קבוצה גדירה של $\mathbf{\Phi}$. תורה גדירה
נעיר שטענת היחידות בתרגיל 4.2.2 מראה שהתכונה של תורה להיות גדירה לא תלויה באופן שבו בחרנו להגדיר את $\mathbf{\Sigma}$ או את $\mathbf{V}$. זוהי תכונה של התורה (בדומה לכך שתכונות קבוצת המלים הגדירה אינן תלויות בהצגה המסוימת שבחרנו לה).

בהנתן תורה, השלבים בתהליך ההיסק ניתנים אף הם לתיאור גדיר. לכן התרגיל הבא מוכח שוב על-ידי משפט הרקורסיה.

תרגיל 4.2.3. לכל תורה גדירה $\mathbf{\Theta}$ (בחתימה גדירה נתונה), קבוצת המסקנות שלה $\mathbf{\Theta}_{\vdash}$ גדירה אף היא

מטרת הדיון הכללי לעיל היא לאפשר לנו לדון בתורה גדירה אחת מסוימת, *אקסיומות פיאנו*, שהיא המועמד הקלאסי למערכת אקסיומות שלמה עבור תורת המספרים. אך התכונה היחידה של אקסיומות פיאנו בה נשתמש היא שזו תורה גדירה.

הגדרה 4.2.4. תהי Σ החתימה של חוגים (כלומר, עם סוג אחד, סימני פעולה $+$ ו-$\cdot$, וסימני קבועים $\underline{0}$ ו-$\underline{1}$).

1. לכל נוסחא $\phi(x)$ ב-Σ, *אינדוקציה עבור* ϕ הוא הפסוק $I(\phi)$ הבא: אינדוקציה עבור ϕ

$$\langle\phi(\underline{0})\wedge\forall x\langle\phi(x)\to\phi(x+\underline{1})\rangle\rangle\to\forall x\phi(x)$$

2. *אקסיומות פיאנו* הן קבוצת הפסוקים $I(\phi)$ עבור כל הנוסחאות ϕ, בתוספת הפסוקים הבאים אקסיומות פיאנו

$$\forall x,y\langle x+\underline{1}=y+\underline{1}\to x=y\rangle \tag{4.1}$$
$$\forall x\langle x+\underline{1}\neq\underline{0}\rangle \tag{4.2}$$
$$\forall x\langle x+\underline{0}=x\wedge x\cdot\underline{0}=\underline{0}\rangle \tag{4.3}$$
$$\forall x,y\langle x+(y+\underline{1})=(x+y)+\underline{1}\rangle \tag{4.4}$$
$$\forall x,y\langle x\cdot(y+\underline{1})=(x\cdot y)+x\rangle \tag{4.5}$$

תורה זו תסומן ב-$\mathbb{PA}$. $\mathbb{PA}$

בתרגילים הבאים ננסה להשתכנע שסביר לחשוב שאקסיומות פיאנו הן אכן מערכת אקסיומות שלמה עבור $\mathbb{N}$.

תרגיל 4.2.5. הוכיחו שמאקסיומות פיאנו נובעות הטענות הבאות:

1. חוקי הקיבוץ והחילוף עבור $+$ ו-$\cdot$.
2. חוק הפילוג
3. $x\cdot\underline{1}=x$ לכל x
4. אם $x\neq 0$ ו-$xy=xz$ אז $y=z$

תרגיל 4.2.6. הוכיחו שאקסיומה (4.2) באקסיומות פיאנו לא נובעת מיתר האקסיומות.

נשים לב שהחתימה של $\mathbb{PA}$ היא גדירה, שכן היא מורכבת מקבוצות סופיות. לכל נוסחא, פסוק או שם עצם ϕ, נסמן ב-$\ulcorner\phi\urcorner$ את האיבר המתאים בקבוצה הגדירה הרלוונטית ($\ulcorner\phi\urcorner$ קרוי לרוב *מספר גדל* של ϕ). כמו כן, לכל טבעי n, נסמן ב-c_n שם עצם שמייצג אותו (למשל, $c_0=\underline{0}$, מספר גדל ו-$c_{n+1}=\underline{1}+c_n$).

הטענה היחידה שנצטרך להוכיח עבור מערכת האקסיומות $\mathbb{PA}$ היא:

טענה 4.2.7. *$\mathbb{PA}$ היא תורה גדירה*

הוכחה. קבוצת האקסיומות היא איחוד של קבוצה סופית עם סכימת האינדוקציה ולכן מספיק להוכיח שסכימת האינדוקציה גדירה.

לפי תרגיל 4.2.2, קבוצת הנוסחאות $\mathbf{\Phi}(x)$ במשתנה אחד x היא גדירה, כמו גם ההעתקות $s:\mathbf{\Phi}(x)\to\mathbf{\Phi}(x)$ ו-$z:\mathbf{\Phi}(x)\to\mathbf{\Phi}(x)$ הנתונות על-ידי $s(\ulcorner\phi(x)\urcorner)=\ulcorner\phi(x+\underline{1})\urcorner$ ו-$z(\ulcorner\phi(x)\urcorner)=\ulcorner\phi(\underline{0})\urcorner$. מכאן שההעתקה $\ulcorner\phi\urcorner\mapsto\ulcorner I(\phi)\urcorner$ מ-$\mathbf{\Phi}(x)$ ל-$\mathbf{\Phi}(0)$ גדירה אף היא, וסכימת האינדוקציה היא התמונה של I, כלומר נתונה על-ידי הנוסחא $\exists y\in\mathbf{\Phi}(x)(u{=}I(y))$.
□

המסקנה הבאה היא תולדה ישירה של הטענה האחרונה בצירוף תרגיל 4.2.3.

מסקנה 4.2.8. *קבוצת המסקנות של אקסיומות פיאנו היא גדירה*

סוף הרצאה 22, 20 בינואר, 2025

מעכשיו נסמן ב-$\mathbf{P}$ את קבוצת המסקנות הזו, כלומר, $\ulcorner\phi\urcorner \in \mathbf{P}$ אם ורק אם ϕ נובעת מ-$\mathbb{PA}$.

מקורות

[1] Kenneth Appel and Woflgang Haken. "The solution of the four-color-map problem." In: *Sci. Amer.* 237.4 ,(1977) pp. −108,121 .152 ISSN: .0036-8733

[2] Herbert B. Enderton. *A mathematical introduction to logic.* 2nd ed. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, ,2001 pp. xii+317. ISBN: -0-12 .238452-0

[3] Euclid. *The Elements.* Online version with Java illusetrations by David E. Joyce. URL: `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`.

[4] Martin Hils and François Loeser. *A first journey through logic.* Student Mathematical Library .89 American Mathematical Society, Providence, RI, ,2019 pp. xi+185. ISBN: .978-1-4704-5272-8 DOI: `10.1090/stml/089`.

[5] Douglas R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid.* New York, NY, USA: Basic Books, Inc., .1979 ISBN: .0465026850

[6] Elliott Mendelson. *Introduction to mathematical logic.* 4th ed. Chapman & Hall, London, ,1997 pp. x+440. ISBN: .0-412-80830-7

[7] Woflgang Rautenberg. *A concise introduction to mathematical logic.* 2nd ed. Universitext. With a foreword by Lev Beklemishev. Springer, New York, ,2006 pp. xviii+256. ISBN: .978-0387-30294-2

[8] Abraham Robinson. *Non-standard analysis.* Princeton Landmarks in Mathematics. Reprint of the second (1974) edition, With a foreword by Wilhelmus A. J. Luxemburg. Princeton University Press, Princeton, NJ, ,1996 pp. xx+293. ISBN: .0-691-04490-2

[9] Raymond M. Smullyan. *Gödel's incompleteness theorems.* Vol. .19 Oxford Logic Guides. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, ,1992 pp. xvi+139. ISBN: .0-19-504672-2

[10] *The Four color theorem.* URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem`.