# מבוא לתורת הקבוצות

משה קמנסקי

15 במאי 2024

## 1 מבוא

מטרת הקורס היא לתת מבוא לתורה של המבנים המתמטיים הכי בסיסיים, קבוצות. קבוצה $A$ מאופיינת על-ידי אוסף האיברים ששייכים אליה: לכל עצם $x$, ניתן לשאול: האם $x$ שייך ל-$A$? אנחנו נסמן את הטענה ש-$x$ שייך ל-$A$ ב-$x \in A$. הנה כמה מהשאלות בהן נתמקד:

### 1.1 איזה מבנים מעניינים ניתן לתאר באמצעות קבוצות?

1. תכונות כתתי קבוצות
2. בניית קבוצות חדשות מקבוצות קיימות
3. יחסים ופעולות

### 1.2 איך אפשר לעבוד עם קבוצות אינסופיות?

1. קבוצות סופיות ואינסופיות
2. גדלים של קבוצות אינסופיות
3. על מה אפשר לעשות אינדוקציה?

### 1.3 מהן קבוצות?

1. הגישה האקסיומטית
2. הגדרה ותכונות של קבוצות מוכרות

### 1.4 כמה שאלות

1. האם לכל מרחב וקטורי יש בסיס?
2. האם קיים מספר ממשי שאינו אלגברי?
3. האם קיימת פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שהיא חיבורית אבל לא רציפה?
4. האם אפשר להגדיר באופן סביר את האורך של כל תת-קבוצה של קטע ממשי חסום?
5. האם כל פונקציה מהטבעיים לטבעיים ניתנת לחישוב על-ידי תכנית מחשב?
6. האם קיימת קבוצה של נקודות במישור שכל ישר פוגש בשתי נקודות בדיוק?
7. האם המישור הוא איחוד של מעגלים זרים? מה לגבי המרחב התלת-מימדי?

## 2 תורת קבוצות אלמנטרית (תזכורת)

### 2.1 פעולות בסיסיות

1. הכלה
2. חיתוך, איחוד, הפרש, הפרש סימטרי
3. קבוצת חזקה

### 2.2 גרפים

מכפלה קרטזית, יחסים, פונקציות, תחום, תמונה, הרכבה, יחס הפוך

**הגדרה 2.2.1.** *גרף* הוא זוג $\Gamma=\langle X,R\rangle$ כאשר $X$ קבוצה ו-$R\subseteq X\times X$ יחס מעל $X$. גרף

**הגדרה 2.2.2.** נניח ש-$\langle A,R\rangle$ ו-$\langle B,S\rangle$ שני גרפים ו-$f:A\to B$ פונקציה. אז $f$ נקראת *העתקה* (של גרפים) אם לכל $a,a'\in A$, אם $aRa'$ אז $f(a)Sf(a')$. אם בנוסף גם הכיוון השני נכון (כלומר לכל $a,a'\in A$, אם $f(a)Sf(a')$ אז $aRa'$), אז $f$ נקראת *שיכון*. אם $f$ העתקה שהפיכה כפונקציה, וההופכית היא גם העתקה של גרפים, אז $f$ נקראת *איזומורפיזם*. העתקה שיכון איזומורפיזם

### 2.3 יחסי שקילות, מנות

**הגדרה 2.3.1.** *יחס שקילות* על קבוצה $A$ הוא יחס סימטרי, טרנזיטיבי ורפלקסיבי מעל $A$. יחס שקילות

*דוגמה* 2.3.2. $A$ קבוצת המשולשים במישור שאינם שווי שוקיים. יחס החפיפה על $A$ הוא יחס שקילות, וכך גם יחס הדמיון. $\diamondsuit$

*דוגמה* 2.3.3. נניח ש-$n$ מספר שלם, ו-$A = \mathbb{Z}$. נגדיר יחס $E_n$ על $\mathbb{Z}$ על-ידי: $mE_nk$ אם $n \mid m-k$, כאשר יחס החלוקה $p \mid q$ (כלומר "$p$ מחלק את $q$") מתקיים אם יש $l$ שלם עבורו $q = pl$. אז לכל $n$ שלם, $E_n$ יחס שקילות (תרגיל) $\diamondsuit$

אינטואיטיבית, יחס שקילות על $A$ מבטא את הרעיון שאנחנו רוצים לזהות איברים שונים של $A$. דרך אחת שזה יכול לקרות היא שערכי פונקציה מסוימת על האיברים הללו הם זהים.

**הגדרה 2.3.4.** אם $f : A \to B$ פונקציה, *הגרעין* של $f$ הוא היחס $\ker(f) = \{\langle a_1, a_2\rangle \in A \times A \mid f(a_1) = f(a_2)\}$. הגרעין

*תרגיל* 2.3.5. הוכיחו שלכל $f : A \to B$, הגרעין של $f$ הוא יחס שקילות.

*דוגמה* 2.3.6. נניח ש-$n > 0$ שלם, ונסמן $C_n = \{0, \dots, n-1\}$. נגדיר $r_n : \mathbb{Z} \to C_n$ על-ידי: $r_n(m)$ הוא השארית של $m$ בחלוקה ב-$n$ (כלומר, המספר היחיד $k \in C_n$ כך ש-$m-k$ מתחלק ב-$n$). אז $\ker(r_n) = E_n$ מדוגמה 2.3.3 (תרגיל). $\diamondsuit$

נמשיך להשתמש בסימונים $r_n$, $C_n$ ו-$E_n$ מהדוגמה האחרונה גם בהמשך.

*דוגמה* 2.3.7. אם $A$ קבוצת המשולשים במישור שאינם שווי שוקיים, נגדיר את $f : A \to B$ להיות הפונקציה שמתאימה לכל משולש את קבוצת אורכי הצלעות שלו (הבחירה במשולשים שאינם שווי שוקיים היא כדי להבטיח שהקבוצה הזו היא בת שלושה איברים בדיוק, ולכן ניתן לשחזר את אורכי כל הצלעות בצורה יחידה). לפי משפט החפיפה צלע-צלע-צלע, $f$ היא העתקת מנה עבור יחס החפיפה. $\diamondsuit$

*תרגיל* 2.3.8. מצאו פונקציה $f$ על אותה קבוצת משולשים כך ש-$\ker(f)$ הוא יחס הדמיון

יחסי שקילות מהצורה $\ker(f)$ הם נוחים במיוחד: על מנת לקבוע האם $a_1$ ו-$a_2$ שקולים, מספיק לחשב את הערכים $f(a_i)$. לכן, מעניין לשאול אילו יחסי שקילות הם מהצורה הזו. מסתבר שהתשובה היא: כולם.

**משפט 2.3.9.** *לכל יחס שקילות $E$ על קבוצה $A$ קיימת פונקציה $f : A \to B$ שהיא על, כך ש-$\ker(f) = E$. כל פונקציה כזו נקראת העתקת מנה עבור $E$.* העתקת מנה

על-מנת להוכיח את המשפט, נציג את המינוח הבא: אם $E$ יחס שקילות על $A$, ו-$a \in A$, *מחלקת השקילות* של $a$ היא הקבוצה $[a]_E = \{a' \in A \mid aEa'\}$. מחלקת השקילות

*הוכחה.* נגדיר $B = \{[a]_E \mid a \in A\}$ ו-$f : A \to B$ על ידי $f(a) = [a]_E$. $\square$

*תרגיל* 2.3.10. השלימו את ההוכחה (הנקודה העיקרית היא ש-$[a_1]_E = [a_2]_E$ אם ורק אם $a_1Ea_2$).

*הערה* 2.3.11. בניגוד למקובל במקומות אחרים, אנחנו לא נשתמש במפורש בבנייה שמופיעה בהוכחת המשפט (כלומר, בקבוצת מחלקות השקילות) אלא רק במשפט עצמו. הסיבה היא שהמידע הנוסף שהבנייה הזו מספקת אינו שימושי לרוב, ומאידך הגמישות שבבחירת העתקת מנה כלשהי היא לעתים שימושית ויותר אינטואיטיבית. למשל, ראינו את העתקת המנה $r_n$ עבור היחס $E_n$, שהיא יותר טבעית מהבניה בהוכחה.

כאמור, ניתן לחשוב על יחס שקילות $E$ על $A$ כעל מושג מוחלש של שוויון בין איברי $A$. מנקודת המבט הזו, העתקת מנה $f : A \to B$ "שוכחת" את המידע הלא רלוונטי על איברי $A$, והופכת את השוויון המוחלש לשוויון ממש: $aEa'$ אם ורק אם $f(a) = f(a')$. לכן, ניתן לחשוב על איבר $b \in B$ כמחזיק "המידע הרלוונטי" אודות $a \in A$ עבורו $f(a) = b$ (ההנחה ש-$f$ מבטיחה שלכל $b \in B$ אכן קיים $a$ כזה). לכן, מעניין להבין איזה מידע מעניין על $A$ מושרה ל-$B$. נדגים זאת באמצעות השימוש הבא.

*שלשה פיתגורית* היא שלשה $a, b, c$ של מספרים טבעיים כך ש-$a^2 + b^2 = c^2$ (לכן, הם אורכים של צלעות משולש ישר זווית). אנחנו רוצים להוכיח את הטענה הבאה: שלשה פיתגורית

**טענה 2.3.12.** *לא קיימת שלשה פיתגורית בה אורכי הניצבים $a, b$ הם אי-זוגיים.*

על מנת להוכיח את הטענה הזו, נשתמש בטענה הבאה:

**טענה 2.3.13.** *נניח ש-$n$ טבעי חיובי, ו-$\pi : \mathbb{Z} \to B$ העתקת מנה עבור $E_n$. אז קיימות פעולות יחידות $\oplus$ ו-$\odot$ על $B$ המקיימות לכל $m, k \in \mathbb{Z}$ את השוויונות $\pi(m + n) = \pi(m) \oplus \pi(n)$ ו-$\pi(mn) = \pi(m) \odot \pi(n)$.*

נוכיח את הטענה הזו בהמשך. בינתיים, נשים לב שהתנאים בטענה מאפשרים לחשב את הפעולות על כל זוג איברים: למשל, כדי לחשב את $b_1 \oplus b_2$, עלינו לבחור $a_i \in A$ כך ש-$\pi(a_i) = b_i$, ולחשב את $\pi(a_1 + a_2)$. הטענה מבטיחה שהתשובה אינה תלויה בבחירה של $a_i$. תכונות של הפעולות הללו גם ניתן להסיק מתוך הטענה. למשל:

*תרגיל* 2.3.14. הוכיחו שלכל $u, v, w \in B$ מתקיים $u \oplus v = v \oplus u$, $u \odot v = v \odot u$ ו-$u \odot (v \oplus w) = (u \odot v) \oplus (u \odot w)$ (במונחים של טענה 2.3.13)

עבור $n = 4$ ו-$\pi = r_4$ כמו בדוגמא 2.3.6, אפשר בקלות לחשב את טבלת ה"חיבור" וה"כפל" ב-$C_4$, קבוצה בת ארבעה איברים. אנחנו בעיקר רוצים לשים לב שאם $u \in C_4$ זוגי (כלומר 0 או 2) אז $u \odot u = 0$ ואחרת $u \odot u = 1$. עכשיו אפשר להוכיח את טענה 2.3.12:

*הוכחת טענה 2.3.12.* נניח בשלילה שקיימים מספרים אי-זוגיים $a, b$ ושלם $c$ כך ש-$a^2 + b^2 = c^2$. נחשב את $r_4$ בשני הצדדים:

$$\begin{aligned} r_4(c) \odot r_4(c) = r_4(c \cdot c) = r_4(a \cdot a + b \cdot b) = \\ (r_4(a) \odot r_4(a)) \oplus (r_4(b) \odot r_4(b)) = 1 \oplus 1 = 2 \in C_4 \end{aligned}$$

כאשר השוויון הלפני אחרון נובע מההנחה ש-$a, b$ אי-זוגיים, ומהחישוב שעשינו לפני ההוכחה. אותו חישוב מראה שהגענו לסתירה, שכן צד שמאל חייב להיות 0 או 1. $\square$

על-מנת להשלים את ההוכחה, עלינו להוכיח את טענה 2.3.13. נשים לב ראשית שהטענה אינה טריוויאלית: ישנן פעולות על השלמים שלא מקיימות את התכונה המקבילה.

*תרגיל* 2.3.15. נסמן $m \star k = m^{|k|}$ עבור מספרים שלמים $m, k$. הוכיחו שלא קיימת פעולה $\circledast$ על $C_4$ כך שלכל $m, k \in \mathbb{Z}$ מתקיים $r_4(m \star k) = r_4(m) \circledast r_4(k)$.

אנחנו נוכיח את טענה 2.3.13 כמסקנה מטענה כללית על יחסי שקילות. אנחנו מתעניינים בטענה מהצורה הבאה: נתון יחס שקילות $E$ על קבוצה $A$, עם העתקת מנה $\pi : A \to B$. יש לנו "מבנה מעניין" על $A$, ואנחנו מעוניינים להבין באיזה תנאי הוא "משרה" מבנה דומה על $B$. בטענה 2.3.13 המבנה המעניין היה פעולות החיבור והכפל. באופן כללי, זה יכול להיות למשל פונקציה מ-$A$, תת-קבוצה של $A$, יחס על $A$ וכו'.

אנחנו נתמקד ראשית במקרה הפשוט של פונקציה. נתונה לנו פונקציה $g : A \to C$ (כאשר $C$ קבוצה כלשהי). מתי הפונקציה הזו "משרה" פונקציה על $B$? אנחנו שואלים האם קיימת פונקציה $\bar{g} : B \to C$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $g(a) = \bar{g}(\pi(a))$ (כלומר, האם הגודל $g$ שאנחנו מודדים על איברי $A$ תלוי בעצם רק במידע שבאמת מעניין אותנו, כלומר בתמונה של האיבר ב-$B$). נשים לב שאם זה המצב, ו-$a'$ שקול ל-$a$, אז $g(a) = \bar{g}(\pi(a)) = \bar{g}(\pi(a')) = g(a')$. לכן, מצאנו תנאי הכרחי. מסתבר שהוא גם תנאי מספיק:

**משפט 2.3.16.** *נניח ש-$E$ יחס שקילות על קבוצה $A$, עם העתקת מנה $\pi : A \to B$, ונניח ש-$g : A \to C$ פונקציה כלשהי. אז התנאים הבאים שקולים:*

1. *קיימת פונקציה $\bar{g} : B \to C$ כך ש-$g = \bar{g} \circ \pi$.*
2. *לכל $a, a' \in A$, אם $aEa'$ אז $g(a) = g(a')$ (במילים אחרות, $E \subseteq \ker(g)$).*

*אם התנאים מתקיימים, אז $\bar{g}$ יחידה.*

סוף הרצאה 1, 1 במאי 2024

*הוכחה.* כיוון אחד ראינו בדיוק לפני הניסוח של המשפט. בכיוון השני, נגדיר

$$\bar{g} = \{\langle \pi(a), g(a) \rangle \mid a \in A\}$$

נוכיח ש-$\bar{g}$ פונקציה: אם $\langle u, v\rangle$ ו-$\langle u, w\rangle$ שייכים ל-$\bar{g}$ אז קיים $a \in A$ כך ש-$u = \pi(a)$ ו-$v = g(a)$ וקיים $a' \in A$ כך ש-$u = \pi(a')$ ו-$w = g(a')$. כיוון ש-$\pi(a) = u = \pi(a')$, מתקיים $aEa'$ ולכן לפי ההנחה $g(a) = g(a')$, כלומר $v = w$.

השוויון $g = \bar{g} \circ \pi$ נובע ישירות מהבניה. העובדה ש-$\bar{g}$ מוגדרת על $B$ ויחידה נובעת מכך ש-$\pi$ על: הערך של $\bar{g}$ על כל איבר $b \in B$ נקבע על-ידי התנאי $g = \bar{g} \circ \pi$. □

למשפט יש מספר מסקנות והכללות שימושיות:

**מסקנה 2.3.17.** *נניח ש-$E$ יחס שקילות על $X$, עם העתקת מנה $\pi_X : X \to \bar{X}$, ו-$F$ יחס שקילות על $Y$, עם העתקת מנה $\pi_Y : Y \to \bar{Y}$. נניח ש-$h : Y \to X$ פונקציה. אז שני התנאים הבאים שקולים:*

1. *קיימת פונקציה $\bar{h} : \bar{Y} \to \bar{X}$ כך שלכל $y \in Y$ מתקיים $\pi_X(h(y)) = \bar{h}(\pi_Y(y))$.*
2. *לכל $y, y' \in Y$, אם $yFy'$ אז $h(y)Eh(y')$.*

*הוכחה.* נגדיר $g : Y \to \bar{X}$ על-ידי $g = \pi_X \circ h$. אז לכל $y, y' \in Y$ מתקיים: $g(y) = g(y')$ אם ורק אם $h(y)Eh(y')$. לכן, לפי משפט 2.3.16, התנאי השני שקול לקיומה של פונקציה $\bar{h} : \bar{Y} \to \bar{X}$ כך ש-$\bar{h} \circ \pi_Y = g = \pi_X \circ h$, כנדרש. □

*דוגמה* 2.3.18. נניח ש-$X = Y = \mathbb{Z}$, $E = E_2$ ו-$F = E_6$, עם העתקות מנה $r_2$ ו-$r_6$, כמו בדוגמא 2.3.6, ונניח ש-$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ נתונה על-ידי $h(n) = 7n$. אם $nFn'$ אז $n - n'$ מתחלק ב-6. לכן $h(n) - h(n') = 7(n - n')$ מתחלק ב-6 ולכן גם ב-2, כלומר $h(n)Eh(n')$. המסקנה מבטיחה שקיימת פונקציה (יחידה) $\bar{h} : C_6 \to C_2$ עם התכונה: $\bar{h}(r_6(n)) = r_2(7n)$ לכל $n \in \mathbb{Z}$. במלים אחרות, הזוגיות של $7n$ (שנמדדת על-ידי $r_2$) תלויה רק בשארית של $n$ ביחס ל-6: אם השארית הזו ידועה, אנחנו יודעים האם $7n$ זוגי. לא קשה לחשב את $\bar{h}$: לכל $k \in C_6$ מתקיים $\bar{h}(k) = 1$ אם ורק אם $k$ אי-זוגי (כמספר טבעי).

אפשר גם לחשוב על אותה דוגמא כאשר מחליפים בין $E$ ו-$F$. במקרה הזה, אין $\bar{h}$ המקיימת $\bar{h}(r_2(n)) = r_6(7n)$: השארית של $7n$ ביחס ל-6 לא תלויה רק בזוגיות של $n$, איבדנו יותר מדי מידע. $\diamondsuit$

**מסקנה 2.3.19.** *נניח ש-$E$ יחס שקילות על קבוצה $X$ עם העתקת מנה $\pi : X \to \bar{X}$, וש-$h : X \times X \to X$ פונקציה. אז התנאים הבאים שקולים:*

1. *קיימת פונקציה (יחידה) $\bar{h} : \bar{X} \times \bar{X} \to \bar{X}$ כך שלכל $x_1, x_2 \in X$ מתקיים $\bar{h}(\pi(x_1), \pi(x_2)) = \pi(h(x_1, x_2))$.*
2. *לכל $x_1, x_1', x_2, x_2' \in X$, אם $x_1Ex_1'$ ו-$x_2Ex_2'$ אז $h(x_1, x_2)Eh(x_1', x_2')$.*

לפני שנוכיח את המסקנה, נסיק ממנה את טענה 2.3.13.

*הוכחת טענה 2.3.13.* ניקח $X = \mathbb{Z}$ עם $E = E_n$ ו-$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ פונקציית החיבור $h(m, k) = m + k$. התנאי הראשון במסקנה 2.3.19 מבטיח פונקציה (יחידה) $\bar{h} : B \times B \to B$ כך שלכל $m, k \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\pi(m + k) = \pi(h(m, k)) = \bar{h}(\pi(m), \pi(k))$, כלומר $\oplus = \bar{h}$ היא בדיוק הפונקציה שאנחנו מחפשים.

המסקנה אומרת שקיומה של הפונקציה הזו שקול לתנאי שאם $mEm'$ וגם $kEk'$ אז $m + kEm' + k'$. ההנחה במקרה שלנו היא ש-$m - m'$ מתחלק ב-$n$ וגם $k - k'$ מתחלק ב-$n$. אם זה אכן המצב, אז גם הסכום שלהם $m - m' + k - k' = m + k - (m' + k')$ מתחלק ב-$n$, כנדרש.

ההוכחה עבור כפל דומה (תרגיל). $\square$

סוף הרצאה 2, 6 במאי, 2024

עכשיו נוכיח את המסקנה

*הוכחת מסקנה 2.3.19.* נסמן ב-$F$ את היחס על $Y = X \times X$ הנתון על-ידי $\langle x_1, x_2\rangle F\langle x_1', x_2'\rangle$ אם $x_1Ex_1'$ וגם $x_2Ex_2'$. אז $F$ הוא הגרעין של הפונקציה $\pi_Y : X \times X \to \bar{X} \times \bar{X}$ הנתונה על-ידי $\pi_2(x_1, x_2) = \langle\pi(x_1), \pi(x_2)\rangle$ (בפרט, הוא יחס שקילות), וכיוון ש-$\pi_Y$ על, זוהי העתקת מנה עבור $F$. עכשיו הטענה נובעת מיידית ממסקנה 2.3.17. $\square$

**מסקנה 2.3.20.** *נניח ש-$E$ יחס שקילות על קבוצה $X$ עם מנה $\pi : X \to \bar{X}$, ונניח ש-$S \subseteq X$ תת-קבוצה. אז התנאים הבאים שקולים:*

1. *קיימת תת-קבוצה $\bar{S} \subseteq \bar{X}$ כך שלכל $x \in X$ מתקיים: $x \in S$ אם ורק אם $\pi(x) \in \bar{S}$.*

2. *לכל* $x, x' \in X$, *אם* $xEx'$ *אז* $x \in S$ *אם ורק אם* $x' \in S$.

*הוכחה.* נגדיר $C = \{0,1\}$, ו-$g : X \to C$ *הפונקציה המציינת* של $S$, כלומר: $g(x) = 1$ אם ורק אם $x \in S$. אז התנאי השני שקול לתנאי השני עבור $g$ במסקנה 2.3.17. לכן, לפי אותה מסקנה, הוא שקול לקיומה של פונקציה $\bar{g} : \bar{X} \to C$ כך ש-$g(x) = \bar{g}(\pi(x))$ לכל $x \in X$. נגדיר $\bar{S} = \bar{g}^{-1}[\{1\}]$. אז התנאי האחרון שקול לתנאי הראשון במסקנה (תרגיל). $\square$

*דוגמה* 2.3.21. נניח שאני יודע מהי השארית של מספר שלם $m$ ביחס ל-7. האם אני יכול לגלות אם $m$ הוא זוגי? התשובה היא לא: ל-3 ול-10 זוגיות שונה, אבל אותה שארית ביחס ל-7. זהו המקרה של מסקנה 2.3.20 בו $S \subseteq X = \mathbb{Z}$ קבוצת הזוגיים.

התשובה שונה אם מחליפים את 7 ב-6: לכל שני מספרים שההפרש ביניהם מתחלק ב-6 אותה זוגיות. הקבוצה $\bar{S} \subseteq C_6$ מהמסקנה היא, במקרה הזה, $\{0, 2, 4\}$. $\diamondsuit$

*הערה* 2.3.22. נשים לב לעקרון הכללי שהשתמשנו בו בהוכחת מסקנה 2.3.20: יש התאמה טבעית בין תתי-קבוצות $S$ של קבוצה $X$, ופונקציות $c : X \to \{0,1\}$. ההתאמה נתונה על-ידי: לכל תת-קבוצה $S \subseteq X$ מתאימה הפונקציה $c_S : X \to \{0,1\}$ המוגדרת כ-1 $c_S(x) = 1$ אם ורק אם $x \in S$. הפונקציה $c_S$ נקראת *הפונקציה המציינת* של $S$. בכיוון ההפוך, אם $c : X \to \{0,1\}$ פונקציה כלשהי, מתאימה לה קבוצה $S_c = \{x \in X \mid c(x) = 1\}$. הפונקציה המציינת

*תרגיל* 2.3.23. הוכיחו (בסימונים של הערה 2.3.22) שלכל $S \subseteq X$ מתקיים $S = S_{c_S}$, ולכל $c : X \to \{0,1\}$ מתקיים $c = c_{S_c}$ (כלומר, שתי ההתאמות הפוכות אחת לשנייה).

לסיום, נאמר מילה על יחידות המנה והעתקת המנה. כפי שכבר ראינו, בהינתן יחס שקילות $E$ על $X$, ישנן לרוב הרבה העתקות מנה עבור $E$ (וראינו שלעתים זה מועיל). למרות זאת, נסביר בתרגיל הבא שניתן לזהות כל שתיים מהן באופן יחיד.

*תרגיל* 2.3.24. נניח ש-$E$ יחס שקילות על קבוצה $X$, עם העתקת מנה $\pi : X \to \bar{X}$.

1. נניח ש-$h : \bar{X} \to \bar{X}$ פונקציה המקיימת $h \circ \pi = \pi$. הוכיחו ש-$h$ היא הזהות.

2. נניח ש-$\pi_1 : X \to \bar{X}_1$ העתקת מנה נוספת עבור $E$. הוכיחו שקיימת פונקציה יחידה $f : \bar{X} \to \bar{X}_1$ כך ש-$f \circ \pi = \pi_1$, ופונקציה יחידה $g : \bar{X}_1 \to \bar{X}$ כך ש-$g \circ \pi_1 = \pi$ (רמז: משפט 2.3.16).

3. הוכיחו ש-$f$ ו-$g$ הפוכות אחת לשניה.

בגלל התרגיל הזה, לרוב מתייחסים אל העתקת מנה שונות (עבור יחס שקילות נתון) כאל אובייקט יחיד, וקוראים לו העתקת המנה.

### 2.3.25 מנות במרחבים וקטוריים

נניח ש-$T : U \to V$ העתקה לינארית בין שני מרחבים וקטוריים מעל שדה $k$. כמו לכל פונקציה, ל-$T$ יש גרעין $E = \ker(T) = \{\langle u_1, u_2 \rangle \mid u_1, u_2 \in U, T(u_1) = T(u_2)\}$, אבל המבנה הלינארי מאפשר לרשום את התנאי האחרון כ-0 $T(u_1 - u_2) = T(u_1) - T(u_2) = 0$, כלומר $u_1 - u_2 \in \underline{\ker}(T)$, כאשר $\underline{\ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0\} \subseteq U$ היא הקבוצה שנקראת

הגרעין של $T$ באלגברה לינארית. זוהי בדיוק מחלקת השקילות של 0 ביחס ל-$E$. אז המידע של $E$ ושל $\underline{\ker}(T)$ שקול עבור העתקות לינאריות.

איזה תתי-קבוצות $W$ של $U$ הן מהצורה $\underline{\ker}(T)$ עבור העתקה לינארית $T$ כלשהי? האבחנה הבסיסית היא שאם $W$ היא גרעין של העתקה לינארית, אז $W$ תת-מרחב וקטורי. מסתבר, שזו ההגבלה היחידה.

**משפט 2.3.26.** *נניח ש-$W$ תת-מרחב וקטורי של מרחב וקטורי $U$ מעל שדה $k$. אז קיים מרחב וקטורי $V$ והעתקה לינארי $T:U\to V$ כך ש-$T$ על ו-$\underline{\ker}(T)=W$.*

*הוכחה.* נגדיר יחס $E$ על $U$ על-ידי: $u_1Eu_2$ אם $u_1-u_2\in W$. זהו יחס שקילות (תרגיל). לפי משפט 2.3.9, קיימת ל-$E$ העתקת מנה $T:U\to V$ (בפרט $T$ על). עלינו להגדיר מבנה של מרחב וקטורי על $V$, עבורו $T$ תהיה העתקה לינארית. ביתר פירוט, עלינו להראות:

1. קיימת פעולה $\oplus : V\times V\to V$ כך שלכל $u_1,u_2\in U$ מתקיים $T(u_1+u_2)=T(u_1)\oplus T(u_2)$
2. לכל $c\in k$, קיימת פונקציה $f_c:V\to V$ (הכפלה בסקלר $c$), המקיימת לכל $u\in U$ ש-$T(cu)=f_c(T(u))$.
3. $V$ ביחד עם הפעולות $\oplus$ והכפל בסקלרים שנתון על-ידי $c\cdot_V v=f_c(v)$ לכל $c\in k$ ו-$v\in V$ מקיימים את ההגדרה של מרחב וקטורי מעל $k$.

על מנת להוכיח את (1), נשתמש במסקנה 2.3.19, עבור הנתונים $X=U$, יחס השקילות $E$ שהגדרנו, $\bar{X}=V$ ו-$\pi=T$, כאשר $h:X\times X\to X$ פונקציית החיבור של $U$. התנאי הראשון באותה מסקנה מבטיח שקיימת פונקציה $\bar{h}=\oplus:V\times V\to V$ כך שלכל $u_1,u_2\in U$ מתקיים $T(u_1)\oplus T(u_2)=\bar{h}(T(u_1),T(u_2))=T(u_1+u_2)$, כלומר בדיוק תנאי (1) שלנו. לכן, מספיק להוכיח את התנאי השקול באותה מסקנה, כלומר שלכל $u_1,u_1',u_2,u_2'\in U$, אם $u_1Eu_1'$ וגם $u_2Eu_2'$ אז $u_1+u_2Eu_1'+u_2'$. לפי הגדרת $E$, ההנחה פירושה ש-$u_1-u_1'\in W$ ו-$u_2-u_2'\in W$. כיוון ש-$W$ תת-מרחב, הוא סגור לחיבור, ולכן גם $u_1+u_2-(u_1'+u_2')=(u_1-u_1')+(u_2-u_2')\in W$, כנדרש (השוו להוכחת טענה 2.3.13).

באופן דומה, כדי להוכיח את (2), נקבע $c\in k$, ונשתמש במסקנה 2.3.17 עבור $X=Y=U$, $\pi_X=\pi_Y=T$ ו-$\bar{X}=\bar{Y}=V$, כאשר $h$ היא פונקצית הכפל בסקלר ב-$U$, כלומר $h(u)=cu$. עלינו לבדוק שאם $uEu'$ אז $cuEcu'$, כלומר שאם $u-u'\in W$ אז גם $cu-cu'=c(u-u')\in W$, וזה נובע מהעובדה שתת-המרחב $W$ סגור לכפל בסקלר $c$.

תכונות המרחב הווקטורי נובעות בקלות ממה שכבר הוכחנו. למשל, על-מנת להוכיח ש-$v_1\oplus v_2=v_2\oplus v_1$ לכל $v_1,v_2\in V$, נבחר $u_1,u_2\in U$ כך ש-$T(u_i)=v_i$ (זה אפשרי משום ש-$T$ על). אז

$$\begin{aligned}v_1\oplus v_2=T(u_1)\oplus T(u_2)=T(u_1+u_2)=&\\ =T(u_2+u_1)=T(u_2)\oplus T(u_1)=v_2\oplus v_1&\end{aligned}$$

הוכחת יתר האקסיומות דומה. □

*תרגיל* 2.3.27. השלימו את ההוכחה

מרחב מנה

מרחב $V$ כמו במשפט נקרא *מרחב מנה* של $U$ ב-$W$, ומסומן ב-$U/W$. ההעתקה $T$ נקראת העתקת מנה. כמו במקרה של קבוצות, מרחב המנה והעתקת המנה אינם יחידים, אבל הם יחידים עד כדי העתקה *לינארית* יחידה:

*תרגיל* 2.3.28. נניח ש-$W \subseteq U$, ו-$T_1 : U \to V_1$ ו-$T_2 : U \to V_2$ שתי העתקות מנה עבור $W$. הוכיחו שקיימת העתקה לינארית הפיכה יחידה $S : V_1 \to V_2$ כך ש-$S \circ T_1 = T_2$.

סוף הרצאה 3, 8 במאי, 2024

## 2.4 יחסי סדר

יחס סדר

קבוצה סדורה חלקית (קס"ח)

**הגדרה 2.4.1.** *יחס סדר* על קבוצה $X$ הוא יחס רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי מעל $X$. *קבוצה סדורה חלקית (קס"ח)* היא זוג $\langle X, R\rangle$ כאשר $X$ קבוצה לא ריקה, ו-$R$ יחס סדר מעל $X$.

*דוגמה* 2.4.2. קבוצות המספרים $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ו-$\mathbb{Q}$ עם הסדר הרגיל $R = \leqslant$. ♢

*דוגמה* 2.4.3. אם $A$ קבוצה כלשהי, אז $\subseteq$ הוא יחס סדר על קבוצת החזקה $X = \mathcal{P}(A)$. ♢

אם $\langle X, R\rangle$ קס"ח ו-$Y \subseteq X$, אז הצמצום $R\restriction_Y = R \cap (Y \times Y)$ הוא יחס סדר על $Y$. לעתים נמשיך לסמן $R$ במקום $R\restriction_Y$.

*דוגמה* 2.4.4. המקרים הפרטיים הבאים עשויים להיות מעניינים: אם $A$ קבוצה, נגדיר $\mathcal{F}(A) = \{B \subseteq A \mid \text{סופית}B\}$ ו-$\Phi(A) = \mathcal{F}(A) \cup \{B \subseteq A \mid A \setminus B \in \mathcal{F}(A)\}$ ♢

*דוגמה* 2.4.5. יחס החלוקה $|$ הוא יחס סדר על $\mathbb{N}$, אך אינו סדר חלקי על $\mathbb{Z}$: מתקיים $-1 \mid 1$ ו-$1 \mid -1$, למרות שהם שונים. ♢

*דוגמה* 2.4.6. נניח ש-$A$ קבוצה. נגדיר יחס $\preceq$ על $X = \mathcal{P}(A)$ על-ידי: $B \preceq C$ אם יש קבוצה סופית $D$ כך ש-$B \subseteq C \cup D$ (נאמר ש-$B$ "כמעט מוכלת" ב-$C$ במצב הזה). היחס $\preceq$ רפלקסיבי וטרנזיטיבי, אך אינו אנטי-סימטרי: למשל, לכל שתי קבוצות סופיות $B, C$ מתקיים $B \preceq C$.

אינטואיטיבית, אם $B \preceq C$ ו-$C \preceq B$, כלומר כל אחת מהן "כמעט מוכלת" בשניה, היינו רוצים לומר שהן "כמעט שוות", ולהתייחס אליהן כאל אותו איבר. ראינו איך ניתן לעשות זאת: עלינו לחלק ביחס שקילות. בתרגיל הבא נעשה זאת באופן כללי. ♢

קדם סדר

*תרגיל* 2.4.7. נניח ש-$\preceq$ יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי על קבוצה $X$ (יחס כזה נקרא *קדם סדר*). נגדיר יחס $\sim$ על $X$ על-ידי: $x \sim y$ אם $x \preceq y$ וגם $y \preceq x$.

1. הוכיחו ש-$\sim$ יחס שקילות על $X$.
2. נניח ש-$p : X \to B$ העתקת מנה עבור $\sim$. הוכיחו שקיים יחס יחיד $\leqslant$ על $B$ כך שלכל $x, y \in X$ מתקיים $x \preceq y$ אם ורק אם $p(x) \leqslant p(y)$.
3. הוכיחו $\leqslant$ יחס סדר על $B$.
4. נניח ש-$q : Y \to C$ פונקציה, ו-$R$ יחס סדר על $C$. נגדיר $\tilde{R} = \{\langle x, y\rangle \in Y \times Y \mid \langle q(x), q(y)\rangle \in R\}$. הוכיחו ש-$\tilde{R}$ קדם-סדר, אך לא בהכרח סדר.

5. הוכיחו ש-$|$ קדם-סדר על $\mathbb{Z}$, ושפונקציית הערך המוחלט $|\cdot|:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ היא העתקת מנה עבור יחס השקילות המתאים $\sim$. תארו את יחס הסדר שמתקבל מהבנייה בסעיפים הקודמים.

6. הוכיחו שבדוגמא האחרונה, יחס השקילות שמתקבל מקדם הסדר הוא: $B\sim C$ אם ורק אם $B\triangle C$ סופית.

יחסי סדר הם טבעיים ונפוצים מאוד במתמטיקה, האם יש לנו אפשרות להבין, באיזשהו אופן, מהם כל יחסי הסדר? בשלב ראשון, עלינו להבין איך להשוות בין שני יחסי סדר שונים, ובפרט להבין מתי הם אותו דבר, עד כדי "שינוי שמות". כיוון שקס"ח היא מקרה פרטי של גרף, המושגים *העתקה*, *שיכון* ו*איזומורפיזם* תקפים גם עבורן. בהקשר הזה, העתקה של גרפים נקראת גם *העתקה שומרת סדר*. העתקה שומרת סדר

*דוגמה* 2.4.8. הקס"ח $X=\langle\mathcal{P}(\{2,3,5\}),\subseteq\rangle$ איזומורפית לקס"ח $Y=\langle\{1,2,3,5,6,10,15,30\},|\rangle$. איזומורפיזם $f:X\to Y$ נתון על-ידי $f(A)=\Pi A$, מכפלת האיברים ב-$A$, עם הופכית $g:Y\to X$ המוגדרת על-ידי: $g(n)$ קבוצת הגורמים הראשוניים של $n$. (תרגיל) $\diamondsuit$

*דוגמה* 2.4.9. הקס"ח $X=\langle\mathbb{Z},\leqslant\rangle$ איזומורפית לקס"ח $Y=\langle\mathbb{Z},\geqslant\rangle$, איזומורפיזם נתון על-ידי $f(n)=-n$. כיוון ש-$f\circ f=\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$, זוהי העתקה הפיכה, וההפוכה היא העתקה. $\diamondsuit$

*דוגמה* 2.4.10. נניח ש-$A$ קבוצה. אז $X=\langle\mathcal{P}(A),\subseteq\rangle$ איזומורפית ל-$\langle\mathcal{P}(A),\supseteq\rangle$: העתקה $f:X\to X$ נתונה על-ידי $f(B)=A\backslash B$, וזה איזומורפיזם, שוב משום ש-$f\circ f=\mathrm{Id}_X$. $\diamondsuit$

האם כל קס"ח איזומורפית לקס"ח ההפוך? נראה ש-$\langle\mathbb{N},\leqslant\rangle$ אינה איזומורפית ל-$\langle\mathbb{N},\geqslant\rangle$, אבל איך ניתן להוכיח זאת? ב-$\langle\mathbb{N},\leqslant\rangle$ *יש מינימום:* איבר $a=0\in\mathbb{N}$ כך ש-$a\leqslant b$ לכל $b\in\mathbb{N}$. אם $f$ איזומורפיזם של הקס"ח לקס"ח כלשהו $\langle Y,S\rangle$, אז $f(0)$ יהיה מינימום ב-$Y$. לכן, אם ב-$Y$ אין מינימום, אז $Y$ לא יכולה להיות איזומורפית ל-$\langle\mathbb{N},\leqslant\rangle$. בפרט, זה המצב ב-$\langle\mathbb{N},\geqslant\rangle$: מינימום בקס"ח זו הוא *מקסימום* ב-$\langle\mathbb{N},\leqslant\rangle$, וזה לא קיים.

את העקרון הזה ניתן להכליל: כיוון שקס"ח איזומורפיות הן "אותו קסח בשינוי שמות האיברים", כל תכונה של יחסי סדר שמוגדרת רק במונחי היחס נשמרת תחת איזומורפיזם, ולכן אם התכונה מופיעה רק באחת הקס"ח, אז הן אינן איזומורפיות.

*דוגמה* 2.4.11. האם $X=\langle\mathbb{N},|\rangle$ איזומורפית לקסח ההפוך $Y=\langle\mathbb{N},|^{-1}\rangle$? בשתיהן יש מינימום ומקסימום, אז הגישה הקודמת לא תעזור. למינימום $1$ ב-$X$ יש התכונה הבאה: קיים איבר $b\neq 1$ (ולכן בהכרח גדול ממנו), כך שאין אף איבר שנמצא ממש בין $1$ ל-$b$: למשל $b=5$ (או באופן כללי, כל ראשוני שונה מ-0). איבר $b$ כזה נקרא *עוקב מיידי* של $1$. אם קיים איזומורפיזם $f$ מ-$X$ ל-$Y$, אז $f(1)=0$ (כי $f$ שומר על המינימום), ואם $b\in X$ עוקב מיידי של $1$, אז $f(b)$ צריך להיות עוקב מיידי של $0$ ב-$Y$, אבל ל-0 אין עוקבים מידיים ב-$Y$ (תרגיל). $\diamondsuit$

ננסח את ההגדרה שהופיעה בדוגמא.

**הגדרה 2.4.12.** נניח ש-$\langle X,\preceq\rangle$ קס"ח.

1. איבר $a\in X$ נקרא *איבר מינימלי (מזערי)* אם לא קיים $b\neq a$ ב-$X$ כך ש-$b\preceq a$. איבר מינימלי (מזערי)

2. אם $a\in X$ איבר כלשהו, *עוקב של* $a$ הוא איבר $b\in X$ המקיים $a\preceq b$ ו-$b\neq a$. *עוקב מיידי* של $a$ הוא איבר מינימלי בקבוצת העוקבים של $a$. עוקב
עוקב מיידי

איבר מקסימלי (מירבי)
קודם
קודם מיידי

3. המושגים *איבר מקסימלי (מירבי)*, *קודם* ו*קודם מיידי* מוגדרים כמושגים המקבילים עבור הסדר ההפוך $\preceq^{-1}$.

*תרגיל* 2.4.13. הוכיחו ש-$b$ עוקב מיידי של $a$ אם $a \le b$, $b \ne a$ ולכל $c \in X$, אם $c \le b$ ו-$a \le c$ אז $a = c$ או $c = b$.

כאמור, כל תכונה של סדר (או, באופן כללי, של גרפים) נשמרת על-ידי איזומורפיזמים. אין לנו (כרגע) אפשרות לנסח במדויק מה זה "תכונה של סדר", ולכן נסתפק בדוגמאות. הטענה הבאה מנוסחת עבור המושגים שהזכרנו עד כה, אבל נכונה גם ליתר התכונות שמופיעות בהמשך.

**טענה** 2.4.14. *נניח ש-$\langle X, R\rangle$ ו-$ppY, S$ שני גרפים, ו-$f : X \to Y$ איזומורפיזם.*

1. *$X$ רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי, או טרנזיטיבי אם ורק אם $Y$ כזה. בפרט, $X$ קס"ח אם ורק אם $Y$ קס"ח.*

2. *$a \in X$ מינימום, מקסימום, מינימלי או מקסימלי אם ורק אם $f(a) \in Y$ הוא כזה. בפרט, ב-$X$ יש מינימום אם ורק אם ב-$Y$ הוא ישנו, ובדומה עבור התכונות האחרות.*

3. *$b \in X$ עוקב מיידי של $a \in X$ אם ורק אם $f(b)$ עוקב מיידי של $f(a)$ (ובדומה עבור קודם מיידי).*

*הערה* 2.4.15. ההגדרות של מינימום, מינימלי וכו' נוסחו עבור קבוצות סדורות, אבל הן תקפות לגרפים כלשהם.

*הוכחה.* נוכיח עבור עוקבים מידיים. נשתמש בניסוח בתרגיל 2.4.13. נניח ש-$a, b \in X$ ו-$b$ עוקב מיידי של $a$. עלינו להוכיח ש-$f(a)Sf(b)$, ש-$f(a) \ne f(b)$, ושלכל $d \in Y$, אם $f(a)Sd$ ו-$dSf(b)$, אז $d = f(a)$ או $d = f(b)$. התנאי הראשון נובע ישירות מכך ש-$f$ העתקה, והשני מכך ש-$f$ חח"ע. נסמן ב-$g$ את ההפכית של $f$, ונשתמש ב-$f$ וב-$g$ על-מנת לתרגם את הבעיה מ-$Y$ ל-$X$.

נסמן $c = g(d)$. כיוון ש-$f(a)Sd$ ו-$g$ העתקה, $g(f(a))Rg(d) = c$. כיוון ש-$g$ הפוכה ל-$f$, מתקיים $g(f(a)) = a$. לכן $aRc$. באופן דומה, $c = g(d)Rg(f(b)) = b$. כיוון ש-$b$ עוקב מיידי של $a$, נובע מזה ש-$c = a$ או $c = b$. לכן, $f(a) = f(c) = f(g(d))$ או $f(g(d)) = f(c) = f(b)$. שוב כיוון ש-$f$ ו-$g$ הפוכות, $d = f(b)$ או $d = f(a)$ כנדרש. ☐

*תרגיל* 2.4.16. הוכיחו את הסעיפים האחרים

*הערה* 2.4.17. במונחים של הסעיף הקודם, אפשר לנסח את הטענה כך: היחס "$X$ איזומורפי ל-$Y$" הוא יחס שקילות על האוסף $\mathcal{G}$ של כל הגרפים (או על אוסף כל הקס"חים). אם $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{B}$ העתקת מנה עבורו, התכונות מהטענה (כמו קיום מינימום) מוגדרות על $\mathcal{B}$.

סוף הרצאה 4, 15 במאי 2024