

מבוא לתורת הקבוצות

משה קמנסקי

8 במאי 2024

1 מבוא

מטרת הקורס היא לתת מבוא לתורה של המבנים המתמטיים הכי בסיסיים, קבוצות. קבוצה A מאופיינת על-ידי אוסף האיברים ששייכים אליה: לכל עצם x , ניתן לשאול: האם x שייך ל- A ? אנחנו נסמן את הטענה ש- x שייך ל- A ב- $x \in A$. הנה כמה מהשאלות בהן נתמקד:

1.1 איזה מבנים מעניינים ניתן לתאר באמצעות קבוצות?

1. תכונות כתתי קבוצות

2. בניית קבוצות חדשות מקבוצות קיימות

3. יחסים ופעולות

1.2 איך אפשר לעבוד עם קבוצות אינסופיות?

1. קבוצות סופיות ואינסופיות

2. גדלים של קבוצות אינסופיות

3. על מה אפשר לעשות אינדוקציה?

1.3 מהן קבוצות?

1. הגישה האקסיומטית

2. הגדרה ותכונות של קבוצות מוכרות

1.4 כמה שאלות

1. האם לכל מרחב וקטורי יש בסיס?
2. האם קיים מספר ממשי שאינו אלגברי?
3. האם קיימת פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שהיא חיבורית אבל לא רציפה?
4. האם אפשר להגדיר באופן סביר את האורך של כל תת-קבוצה של קטע ממשי חסום?
5. האם כל פונקציה מהטבעיים לטבעיים ניתנת לחישוב על-ידי תכנית מחשב?
6. האם קיימת קבוצה של נקודות במישור שכל ישר פוגש בשתי נקודות בדיוק?
7. האם המישור הוא איחוד של מעגלים זרים? מה לגבי המרחב התלת-מימדי?

2 תורת קבוצות אלמנטרית (תזכורת)

2.1 פעולות בסיסיות

1. הכלה
2. חיתוך, איחוד, הפרש, הפרש סימטרי
3. קבוצת חזקה

2.2 גרפים

מכפלה קרטזית, יחסים, פונקציות, תחום, תמונה, הרכבה, יחס הפוך

הגדרה 2.2.1. גרף הוא זוג $\Gamma = \langle X, R \rangle$ כאשר X קבוצה ו- $R \subseteq X \times X$ יחס מעל X .

גרף

הגדרה 2.2.2. נניח ש- $\langle A, R \rangle$ ו- $\langle B, S \rangle$ שני גרפים ו- $f: A \rightarrow B$ פונקציה. אז נקראת העתקה (של גרפים) אם לכל $a, a' \in A$, אם aRa' אז $f(a)Sf(a')$. אם בנוסף גם הכיוון השני נכון (כלומר לכל $a, a' \in A$, אם $f(a)Sf(a')$ אז aRa'), אז נקראת שייכון. אם f העתקה שהפיכה כפונקציה, וההפכית היא גם העתקה של גרפים, אז נקראת איזומורפיזם.

העתקה

שיכון

איזומורפיזם

2.3 יחסי שקילות, מנות

הגדרה 2.3.1. יחס שקילות על קבוצה A הוא יחס סימטרי, טרנזיטיבי ורפלקסיבי מעל A .

יחס שקילות

דוגמה 2.3.2. A קבוצת המשולשים במישור שאינם שווים שוקיים. יחס החפיפה על A הוא יחס שקילות, וכך גם יחס הדמיון.



דוגמה 2.3.3. נניח ש- n מספר שלם, ו- $A = \mathbb{Z}$. נגדיר יחס E_n על \mathbb{Z} על-ידי: $mE_n k$ אם $n \mid m - k$, כאשר יחס החלוקה $p \mid q$ (כלומר " p מחלק את q ") מתקיים אם יש l שלם עבורו $q = pl$. אז לכל n שלם, E_n יחס שקילות (תרגיל) ■

אינטואיטיבית, יחס שקילות על A מבטא את הרעיון שאנחנו רוצים לזהות איברים שונים של A . דרך אחת שזה יכול לקרות היא שצרכי פונקציה מסוימת על האיברים הללו הם זהים.

הגדרה 2.3.4. אם $f: A \rightarrow B$ פונקציה, הגרעין של f הוא היחס הגרעין $\ker(f) = \{\langle a_1, a_2 \rangle \in A \times A \mid f(a_1) = f(a_2)\}$

תרגיל 2.3.5. הוכיחו שלכל $f: A \rightarrow B$, הגרעין של f הוא יחס שקילות.

דוגמה 2.3.6. נניח ש- $n > 0$ שלם, ונסמן $C_n = \{0, \dots, n-1\}$. נגדיר $r_n: \mathbb{Z} \rightarrow C_n$ על-ידי: $r_n(m)$ הוא השארית של m בחלוקה ב- n (כלומר, המספר היחיד $k \in C_n$ כך ש- $m - k$ מתחלק ב- n). אז $\ker(r_n) = E_n$ מדוגמה 2.3.3 (תרגיל). ■

נמשיך להשתמש בסימונים C_n, r_n ו- E_n מהדוגמה האחרונה גם בהמשך.

דוגמה 2.3.7. אם A קבוצת המשולשים במישור שאינם שווים שוקיים, נגדיר את $f: A \rightarrow B$ להיות הפונקציה שמתאימה לכל משולש את קבוצת אורכי הצלעות שלו (הבחירה במשולשים שאינם שווים שוקיים היא כדי להבטיח שהקבוצה הזו היא בת שלושה איברים בדיוק, ולכן ניתן לשחזר את אורכי כל הצלעות בצורה יחידה). לפי משפט החפיפה צלע-צלע-צלע, f היא העתקת מנה עבור יחס החפיפה. ■

תרגיל 2.3.8. מצאו פונקציה f על אותה קבוצת משולשים כך ש- $\ker(f)$ הוא יחס הדמיון

יחסי שקילות מהצורה $\ker(f)$ הם נוחים במיוחד: על מנת לקבוע האם a_1 ו- a_2 שקולים, מספיק לחשב את הערכים $f(a_i)$. לכן, מעניין לשאול אילו יחסי שקילות הם מהצורה הזו. מסתבר שהתשובה היא: כולם.

משפט 2.3.9. לכל יחס שקילות E על קבוצה A קיימת פונקציה $f: A \rightarrow B$ שהיא על, כך ש- $\ker(f) = E$. כל פונקציה כזו נקראת העתקת מנה עבור E .

העתקת מנה

על-מנת להוכיח את המשפט, נציג את המינוח הבא: אם E יחס שקילות על A , ו- $a \in A$, מחלקת השקילות של a היא הקבוצה $[a]_E = \{a' \in A \mid aEa'\}$.

מחלקת השקילות

הוכחה. נגדיר $B = \{[a]_E \mid a \in A\}$ ו- $f: A \rightarrow B$ על ידי $f(a) = [a]_E$. □

תרגיל 2.3.10. השלימו את ההוכחה (הנקודה העיקרית היא ש- $[a_1]_E = [a_2]_E$ אם ורק אם $a_1 E a_2$).

הערה 2.3.11. בניגוד למקובל במקומות אחרים, אנחנו לא נשתמש במפורש בבנייה שמופיעה בהוכחת המשפט (כלומר, בקבוצת מחלקות השקילות) אלא רק במשפט עצמו. הסיבה היא שהמידע הנוסף שהבנייה הזו מספקת אינו שימושי לרוב, ומאידך הגמישות שבבחירת העתקת מנה כלשהי היא לעתים שימושית ויותר אינטואיטיבית. למשל, ראינו את העתקת המנה r_n עבור היחס E_n , שהיא יותר טבעית מהבניה בהוכחה.

כאמור, ניתן לחשוב על יחס שקילות E על A כעל מושג מוחלש של שוויון בין איברי A . מנקודת המבט הזו, העתקת מנה $f: A \rightarrow B$ "שוכחת" את המידע הלא רלוונטי על איברי A , והופכת את השוויון המוחלש לשוויון ממש: aEa' אם ורק אם $f(a) = f(a')$. לכן, ניתן לחשוב על איבר $b \in B$ כמחזיק "המידע הרלוונטי" אודות $a \in A$ עבורו $f(a) = b$ (ההנחה ש- f מבטיחה שלכל $b \in B$ אכן קיים a כזה). לכן, מעניין להבין איזה מידע מעניין על A מושרה ל- B . נדגים זאת באמצעות השימוש הבא.

שלשה פיתגורית היא שלשה a, b, c של מספרים טבעיים כך ש- $a^2 + b^2 = c^2$ (לכן, הם אורכים של צלעות משולש ישר זווית). אנחנו רוצים להוכיח את הטענה הבאה:

טענה 2.3.12. לא קיימת שלשה פיתגורית בה אורכי הניצבים a, b הם אי-זוגיים.

על מנת להוכיח את הטענה הזו, נשתמש בטענה הבאה:

טענה 2.3.13. נניח ש- n טבעי חיובי, ו- $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow B$ העתקת מנה עבור E_n . אז קיימות פעולות יחידות \oplus ו- \odot על B המקיימות לכל $m, k \in \mathbb{Z}$ את השוויונות $\pi(m+n) = \pi(m) \oplus \pi(n)$ ו- $\pi(mn) = \pi(m) \odot \pi(n)$.

נוכיח את הטענה הזו בהמשך. בינתיים, נשים לב שהתנאים בטענה מאפשרים לחשב את הפעולות על כל זוג איברים: למשל, כדי לחשב את $b_1 \oplus b_2$, עלינו לבחור $a_i \in A$ כך ש- $\pi(a_i) = b_i$, ולחשב את $\pi(a_1 + a_2)$. הטענה מבטיחה שהתשובה אינה תלויה בבחירה של a_i . תכונות של הפעולות הללו גם ניתן להסיק מתוך הטענה. למשל:

תרגיל 2.3.14. הוכיחו שלכל $u, v, w \in B$ מתקיים $u \oplus v = v \oplus u$, $u \odot v = v \odot u$ ו- $u \odot (v \oplus w) = (u \odot v) \oplus (u \odot w)$ (במונחים של טענה 2.3.13).

עבור $n = 4$ ו- $\pi = r_4$, כמו בדוגמא 2.3.6, אפשר בקלות לחשב את טבלת ה"חיבור" וה"כפל" ב- C_4 , קבוצה בת ארבעה איברים. אנחנו בעיקר רוצים לשים לב שאם $u \in C_4$ זוגי (כלומר 0 או 2) אז $u \odot u = 1$ ואחרת $u \odot u = 0$. עכשיו אפשר להוכיח את טענה 2.3.12:

הוכחת טענה 2.3.12. נניח בשלילה שקיימים מספרים אי-זוגיים a, b ושלם c כך ש- $a^2 + b^2 = c^2$. נחשב את r_4 בשני הצדדים:

$$\begin{aligned} r_4(c) \odot r_4(c) &= r_4(c \cdot c) = r_4(a \cdot a + b \cdot b) = \\ &= (r_4(a) \odot r_4(a)) \oplus (r_4(b) \odot r_4(b)) = 1 \oplus 1 = 2 \in C_4 \end{aligned}$$

כאשר השוויון הלפני אחרון נובע מההנחה ש- a, b אי-זוגיים, ומהחישוב שעשינו לפני ההוכחה. אותו חישוב מראה שהגענו לסתירה, שכן צד שמאל חייב להיות 0 או 1. \square

על-מנת להשלים את ההוכחה, עלינו להוכיח את טענה 2.3.13. נשים לב ראשית שהטענה אינה טריוויאלית: ישנן פעולות על השלמים שלא מקיימות את התכונה המקבילה.

תרגיל 2.3.15. נסמן $m \star k = m^{|k|}$ עבור מספרים שלמים m, k . הוכיחו שלא קיימת פעולה \star על C_4 כך שלכל $m, k \in \mathbb{Z}$ מתקיים $r_4(m \star k) = r_4(m) \star r_4(k)$.

אנחנו נוכיח את טענה 2.3.13 כמסקנה מטענה כללית על יחסי שקילות. אנחנו מתעניינים בטענה מהצורה הבאה: נתון יחס שקילות E על קבוצה A , עם העתקת מנה $\pi : A \rightarrow B$. יש לנו "מבנה מעניין" על A , ואנחנו מעוניינים להבין באיזה תנאי הוא "משרה" מבנה דומה על B . בטענה 2.3.13 המבנה המעניין היה פעולות החיבור והכפל. באופן כללי, זה יכול להיות למשל פונקציה מ- A , תת-קבוצה של A , יחס על A וכו'.

אנחנו נתמקד ראשית במקרה הפשוט של פונקציה. נתונה לנו פונקציה $g : A \rightarrow C$ (כאשר C קבוצה כלשהי). מתי הפונקציה הזו "משרה" פונקציה על B ? אנחנו שואלים האם קיימת פונקציה $\bar{g} : B \rightarrow C$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $g(a) = \bar{g}(\pi(a))$ (כלומר, האם הגודל g שאנחנו מודדים על איברי A תלוי בעצם רק במידע שבאמת מעניין אותנו, כלומר בתמונה של האיבר ב- B). נשים לב שאם זה המצב, ו- a' שקול ל- a , אז $g(a') = g(a) = \bar{g}(\pi(a)) = \bar{g}(\pi(a'))$. לכן, מצאנו תנאי הכרחי. מסתבר שהוא גם תנאי מספיק:

משפט 2.3.16. נניח ש- E יחס שקילות על קבוצה A , עם העתקת מנה $\pi : A \rightarrow B$, ונניח ש- $g : A \rightarrow C$ פונקציה כלשהי. אז התנאים הבאים שקולים:

1. קיימת פונקציה $\bar{g} : B \rightarrow C$ כך ש- $g = \bar{g} \circ \pi$.
2. לכל $a, a' \in A$, אם aEa' אז $g(a) = g(a')$ (במילים אחרות, $E \subseteq \ker(g)$).

אם התנאים מתקיימים, אז \bar{g} יחידה.

סוף הרצאה 1, 1
במאי 2024

הוכחה. כיוון אחד ראינו בדיוק לפני הניסוח של המשפט. בכיוון השני, נגדיר

$$\bar{g} = \{\langle \pi(a), g(a) \rangle \mid a \in A\}$$

נוכיח ש- \bar{g} פונקציה: אם $\langle u, w \rangle$ ו- $\langle u, v \rangle$ שייכים ל- \bar{g} אז קיים $a \in A$ כך ש- $u = \pi(a)$ ו- $v = g(a)$ וקיים $a' \in A$ כך ש- $\pi(a') = u$ ו- $g(a') = w$. כיוון ש- $\pi(a) = u = \pi(a')$, מתקיים aEa' ולכן לפי ההנחה $g(a) = g(a')$, כלומר $w = v$. השוויון $g = \bar{g} \circ \pi$ נובע ישירות מהבניה. העובדה ש- \bar{g} מוגדרת על B ויחידה נובעת מכך ש- π על: הערך של \bar{g} על כל איבר $b \in B$ נקבע על-ידי התנאי $g = \bar{g} \circ \pi$. \square

למשפט יש מספר מסקנות והכללות שימושיות:

מסקנה 2.3.17. נניח ש- E יחס שקילות על X , עם העתקת מנה $\pi_X : X \rightarrow \bar{X}$, ו- F יחס שקילות על Y , עם העתקת מנה $\pi_Y : Y \rightarrow \bar{Y}$. נניח ש- $h : Y \rightarrow X$ פונקציה. אז שני התנאים הבאים שקולים:

1. קיימת פונקציה $\bar{h} : \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ כך שלכל $y \in Y$ מתקיים $\pi_X(h(y)) = \bar{h}(\pi_Y(y))$.
2. לכל $y, y' \in Y$, אם yFy' אז $h(y)Eh(y')$.

הוכחה. נגדיר $g : Y \rightarrow \bar{X}$ על-ידי $g = \pi_X \circ h$. אז לכל $y, y' \in Y$ מתקיים: $g(y) = g(y')$ אם ורק אם $h(y)Eh(y')$. לכן, לפי משפט 2.3.16, התנאי השני שקול לקיומה של פונקציה $\bar{h} : \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ כך ש- $\bar{h} \circ \pi_Y = g = \pi_X \circ h$. כנדרש. \square

דוגמה 2.3.18. נניח ש- $X = Y = \mathbb{Z}$, $E = E_2$ ו- $F = E_6$, עם העתקות מנה r_2 ו- r_6 , כמו בדוגמה 2.3.6, ונניח ש- $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ נתונה על-ידי $h(n) = 7n$. אם nFn' אז $n - n'$ מתחלק ב-6. לכן $h(n) - h(n') = 7(n - n')$ מתחלק ב-6 ולכן גם ב-2, כלומר $h(n)Eh(n')$. המסקנה מבטיחה שקיימת פונקציה (יחידה) $\bar{h} : C_6 \rightarrow C_2$ עם התכונה: $\bar{h}(r_6(n)) = r_2(7n)$ לכל $n \in \mathbb{Z}$. במלים אחרות, הזוגיות של $7n$ (שנמדדת על-ידי r_2) תלויה רק בשארית של n ביחס ל-6: אם השארית הזו ידועה, אנחנו יודעים האם $7n$ זוגי. לא קשה לחשב את \bar{h} : לכל $k \in C_6$ מתקיים $\bar{h}(k) = 1$ אם ורק אם k אי-זוגי (כמספר טבעי). אפשר גם לחשוב על אותה דוגמה כאשר מחליפים בין E ו- F . במקרה הזה, אין \bar{h} המקיימת $\bar{h}(r_2(n)) = r_6(7n)$: השארית של $7n$ ביחס ל-6 לא תלויה רק בזוגיות של n , איבדנו יותר מדי מידע. ■

מסקנה 2.3.19. נניח ש- E יחס שקילות על קבוצה X עם העתקת מנה $\bar{\pi} : X \rightarrow \bar{X}$, ו- $h : X \times X \rightarrow X$ פונקציה. אז התנאים הבאים שקולים:

1. קיימת פונקציה (יחידה) $\bar{h} : \bar{X} \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ כך שלכל $x_1, x_2 \in X$ מתקיים $\bar{h}(\pi(x_1), \pi(x_2)) = \pi(h(x_1, x_2))$.

2. לכל $x_1, x'_1, x_2, x'_2 \in X$, אם $x_1Ex'_1$ ו- $x_2Ex'_2$ אז $h(x_1, x_2)Eh(x'_1, x'_2)$.

לפני שנוכיח את המסקנה, נסיק ממנה את טענה 2.3.13.

הוכחת טענה 2.3.13. ניקח $X = \mathbb{Z}$ עם $E = E_n$ ו- $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ פונקציית החיבור $h(m, k) = m + k$. התנאי הראשון במסקנה 2.3.19 מבטיח פונקציה (יחידה) $\bar{h} : B \times B \rightarrow B$ כך שלכל $m, k \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\bar{h}(\pi(m), \pi(k)) = \pi(h(m, k))$. כלומר $\bar{h} \oplus = \bar{h}$. היא בדיוק הפונקציה שאנחנו מחפשים.

המסקנה אומרת שקיומה של הפונקציה הזו שקול לתנאי שאם mEm' וגם kEk' אז $m + kEm' + k'$. ההנחה במקרה שלנו היא ש- $m - m'$ מתחלק ב- n וגם $k - k'$ מתחלק ב- n . אם זה אכן המצב, אז גם הסכום שלהם $m - m' + k - k' = m + k - (m' + k')$ מתחלק ב- n , כנדרש.

□

ההוכחה עבור כפל דומה (תרגיל).

סוף הרצאה 2, 6
במאי, 2024

עכשיו נוכיח את המסקנה

הוכחת מסקנה 2.3.19. נסמן ב- F את היחס על $Y = X \times X$ הנתון על-ידי $\langle x_1, x_2 \rangle F \langle x'_1, x'_2 \rangle$ אם $x_1Ex'_1$ וגם $x_2Ex'_2$. אז F הוא הגרעין של הפונקציה $\pi_Y : X \times X \rightarrow \bar{X} \times \bar{X}$ הנתונה על-ידי $\pi_Y(x_1, x_2) = \langle \pi(x_1), \pi(x_2) \rangle$ (בפרט, הוא יחס שקילות), וכיוון ש- π_Y על, זוהי העתקת מנה עבור F . עכשיו הטענה נובעת מיידית ממסקנה 2.3.17. □

מסקנה 2.3.20. נניח ש- E יחס שקילות על קבוצה X עם מנה $\bar{\pi} : X \rightarrow \bar{X}$, ונניח ש- $S \subseteq X$ תת-קבוצה. אז התנאים הבאים שקולים:

1. קיימת תת-קבוצה $\bar{S} \subseteq \bar{X}$ כך שלכל $x \in X$ מתקיים: אם $x \in S$ אז ורק אם $\bar{\pi}(x) \in \bar{S}$.

2. לכל $x, x' \in X$, אם xEx' אז $x \in S$ אם ורק אם $x' \in S$.

הוכחה. נגדיר $C = \{0, 1\}$, ו- $g : X \rightarrow C$ הפונקציה המציינת של S , כלומר: $g(x) = 1$ אם ורק אם $x \in S$. אז התנאי השני שקול לתנאי השני עבור g במסקנה 2.3.17. לכן, לפי אותה מסקנה, הוא שקול לקיומה של פונקציה $\bar{g} : \bar{X} \rightarrow C$ כך ש- $\bar{g}(\pi(x)) = g(x)$ לכל $x \in X$. נגדיר $\bar{S} = \bar{g}^{-1}[\{1\}]$. אז התנאי האחרון שקול לתנאי הראשון במסקנה (תרגיל). \square

דוגמה 2.3.21. נניח שאני יודע מהי השארית של מספר שלם m ביחס ל-7. האם אני יכול לגלות אם m הוא זוגי? התשובה היא לא: ל-3 ול-10 זוגיות שונה, אבל אותה שארית ביחס ל-7. זהו המקרה של מסקנה 2.3.20 בו $S \subseteq X = \mathbb{Z}$ קבוצת הזוגיים. התשובה שונה אם מחליפים את 7 ב-6: לכל שני מספרים שהפרש ביניהם מתחלק ב-6 אותה זוגיות. הקבוצה $\bar{S} \subseteq C_6$ מהמסקנה היא, במקרה הזה, $\{0, 2, 4\}$. \blacksquare

הערה 2.3.22. נשים לב לעקרון הכללי שהשתמשנו בו בהוכחת מסקנה 2.3.20: יש התאמה טבעית בין תתי-קבוצות S של קבוצה X , ופונקציות $c : X \rightarrow \{0, 1\}$. ההתאמה נתונה על-ידי: לכל תת-קבוצה $S \subseteq X$ מתאימה הפונקציה $c_S : X \rightarrow \{0, 1\}$ המוגדרת כ- $c_S(x) = 1$ אם ורק אם $x \in S$. הפונקציה c_S נקראת הפונקציה המציינת של S . בכיוון ההפוך, אם $c : X \rightarrow \{0, 1\}$ פונקציה כלשהי, מתאימה לה קבוצה $S_c = \{x \in X \mid c(x) = 1\}$.

הפונקציה המציינת

תרגיל 2.3.23. הוכיחו (בסימונים של הערה 2.3.22) שלכל $S \subseteq X$ מתקיים $S = S_{c_S}$, ולכל $c : X \rightarrow \{0, 1\}$ מתקיים $c = c_{S_c}$ (כלומר, שתי ההתאמות הפוכות אחת לשנייה).

לסיום, נאמר מילה על יחידות המנה והעתקת המנה. כפי שכבר ראינו, בהינתן יחס שקילות E על X , ישנן לרוב הרבה העתקות מנה עבור E (וראינו שלעתים זה מועיל). למרות זאת, נסביר בתרגיל הבא שניתן לזהות כל שתיים מהן באופן יחיד.

תרגיל 2.3.24. נניח ש- E יחס שקילות על קבוצה X , עם העתקת מנה $\bar{X} : X \rightarrow \bar{X}$.

1. נניח ש- $h : \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ פונקציה המקיימת $h \circ \pi = \pi \circ h$. הוכיחו ש- h היא הזהות.

2. נניח ש- $\pi_1 : X \rightarrow \bar{X}_1$ העתקת מנה נוספת עבור E . הוכיחו שקיימת פונקציה יחידה $f : \bar{X} \rightarrow \bar{X}_1$ כך ש- $f \circ \pi = \pi_1$, ופונקציה יחידה $g : \bar{X}_1 \rightarrow \bar{X}$ כך ש- $g \circ \pi_1 = \pi$ (רמז: משפט 2.3.16).

3. הוכיחו ש- f ו- g הפוכות אחת לשנייה.

בגלל התרגיל הזה, לרוב מתייחסים אל העתקת מנה שונות (עבור יחס שקילות נתון) כאל אובייקט יחיד, וקוראים לו העתקת המנה.

2.3.25 מנות במרחבים וקטוריים

נניח ש- $T : U \rightarrow V$ העתקה ליניארית בין שני מרחבים וקטוריים מעל שדה k . כמו לכל פונקציה, ל- T יש גרעין $E = \ker(T) = \{\langle u_1, u_2 \rangle \mid u_1, u_2 \in U, T(u_1) = T(u_2)\}$. אבל המבנה הליניארי מאפשר לרשום את התנאי האחרון כ- $T(u_1 - u_2) = T(u_1) - T(u_2) = 0$, כלומר $u_1 - u_2 \in \ker(T)$ כאשר $u_1 - u_2 \in \ker(T)$ היא הקבוצה שנקראת

הגרעין של T באלגברה לינארית. זוהי בדיוק מחלקת השקילות של 0 ביחס ל- E . אז המידע של E ושל $\ker(T)$ שקול עבור העתקות לינאריות. איזה תתי-קבוצות W של U הן מהצורה $\ker(T)$ עבור העתקה לינארית T כלשהי? האבחנה הבסיסית היא שאם W היא גרעין של העתקה לינארית, אז W תת-מרחב וקטורי. מסתבר, שזו ההגבלה היחידה.

משפט 2.3.26. נניח ש- W תת-מרחב וקטורי של מרחב וקטורי U מעל שדה k . אז קיים מרחב וקטורי V והעתקה לינארית $T: U \rightarrow V$ כך ש- T על W ו- $\ker(T) = W$.

הוכחה. נגדיר יחס E על U על-ידי: $u_1 E u_2$ אם $u_1 - u_2 \in W$. זהו יחס שקילות (תרגיל). לפי משפט 2.3.9, קיימת ל- E העתקת מנה $T: U \rightarrow V$ (בפרט T על). עלינו להגדיר מבנה של מרחב וקטורי על V , עבורו T תהיה העתקה לינארית. ביתר פירוט, עלינו להראות:

1. קיימת פעולה $\oplus: V \times V \rightarrow V$ כך שלכל $u_1, u_2 \in U$ מתקיים $T(u_1 + u_2) = T(u_1) \oplus T(u_2)$

2. לכל $c \in k$, קיימת פונקציה $f_c: V \rightarrow V$ (הכפלה בסקלר c), המקיימת לכל $u \in U$ ש- $T(cu) = f_c(T(u))$.

3. ביחד עם הפעולות \oplus והכפל בסקלרים שנתון על-ידי $c \cdot_V v = f_c(v)$ לכל $c \in k$ ו- $v \in V$ מקיימים את ההגדרה של מרחב וקטורי מעל k .

על מנת להוכיח את (1), נשתמש במסקנה 2.3.19, עבור הנתונים $X = U$, יחס השקילות E שהגדרנו, $\bar{X} = V$ ו- $\pi = T$, כאשר $h: X \times X \rightarrow X$ פונקציית החיבור של U . התנאי הראשון באותה מסקנה מבטיח שקיימת פונקציה $\bar{h}: V \times V \rightarrow V$ כך שלכל $u_1, u_2 \in U$ מתקיים $\bar{h}(T(u_1), T(u_2)) = T(h(u_1, u_2)) = T(u_1 + u_2)$. כלומר בדיוק תנאי (1) שלנו. לכן, מספיק להוכיח את התנאי השקול באותה מסקנה, כלומר שלכל $u_1, u_2, u'_1, u'_2 \in U$ אם $u_1 E u'_1$ וגם $u_2 E u'_2$ אז $u_1 + u_2 E u'_1 + u'_2$. לפי הגדרת E , ההנחה פירושה ש- $u_1 - u'_1 \in W$ ו- $u_2 - u'_2 \in W$. כיוון ש- W תת-מרחב, הוא סגור לחיבור, ולכן גם $u_1 + u_2 - (u'_1 + u'_2) = (u_1 - u'_1) + (u_2 - u'_2) \in W$. (2.3.13). באופן דומה, כדי להוכיח את (2), נקבע $c \in k$, ונשתמש במסקנה 2.3.17 עבור $X = Y = U$, $\bar{X} = \bar{Y} = V$ ו- $\pi_X = \pi_Y = T$, כאשר h היא פונקציית הכפל בסקלר c ב- U , כלומר $h(u) = cu$. עלינו לבדוק שאם $u E u'$ אז $cu E cu'$, כלומר שאם $u - u' \in W$ אז גם $cu - cu' = c(u - u') \in W$. וזה נובע מהעובדה שתת-המרחב W סגור לכפל בסקלר c . תכונות המרחב הווקטורי נובעות בקלות ממה שכבר הוכחנו. למשל, על-מנת להוכיח ש- $v_1 \oplus v_2 = v_2 \oplus v_1$ לכל $v_1, v_2 \in V$, נבחר $u_1, u_2 \in U$ כך ש- $T(u_i) = v_i$ (זה אפשרי משום ש- T על). אז

$$\begin{aligned} v_1 \oplus v_2 &= T(u_1) \oplus T(u_2) = T(u_1 + u_2) = \\ &= T(u_2 + u_1) = T(u_2) \oplus T(u_1) = v_2 \oplus v_1 \end{aligned}$$

□

הוכחת יתר האקסיומות דומה.

תרגיל 2.3.27. השלימו את ההוכחה

מרחב V כמו במשפט נקרא מרחב מנה של U ב- W , ומסומן ב- U/W . ההעתקה T נקראת העתקת מנה. כמו במקרה של קבוצות, מרחב המנה והעתקת המנה אינם יחידים, אבל הם יחידים עד כדי העתקה לינארית יחידה:

תרגיל 2.3.28. נניח ש- $W \subseteq U$, ו- $T_1 : U \rightarrow V_1$ ו- $T_2 : U \rightarrow V_2$ שתי העתקות מנה עבור W . הוכיחו שקיימת העתקה לינארית הפיכה יחידה $S : V_1 \rightarrow V_2$ כך ש- $S \circ T_1 = T_2$.

סוף הרצאה 3, 8
במאי, 2024