שיטות הקירובים

Walter Gautschi

— אלגברה לינארית: פתרון מערכות משוואות, למצוא ערכים עצמיים, ..

— $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

— אינטרפולציה: נתונות נקודות וערכים בנקודות האלה, למצוא פונקציה נחמדה שאלה הטבעית:

— קירוב פונקציות: קירוב פונקציה למצוא פונקציה שקרובה אליה מסוג מסוים (למשל פולינום).

- בהמשך בוחן

- משוואות דיפרנציאליות

חישובי נומריות

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^* \subseteq \mathbb{R}$ סופיים - מספרים שאפשר לייצג

$x\in\mathbb{R}$, יש לו ייצוג $x^*\in\mathbb{R}^*$, $0\in\mathbb{R}^*$

$0^*=0$.

$\frac{|x-x^*|}{|x|}$ - דיוק יחסי.

נניח מעוניינים לחשב את $f(x)$

כ'ין אי הדיוק פג x מול לגשפ'ר

מה אובדת הדיוק?

x, x^* , $f(x)$, $f^*(x^*) = f(x')$

עבור x' קיים"מ $\underline{\underline{|x'-x| \le |x^*-x|}}$

$$\left|\frac{f^*(x^*) - f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x') - f(x)}{f(x)}\right| =$$

$$\left|\frac{(f(x') - f(x))(x'-x)\cdot x}{(x'-x)\cdot x\, f(x)}\right| \le \frac{|x^*-x|}{|x|}\cdot$$

$$\left|\frac{(f(x') - f(x))\cdot x}{(x'-x)\cdot f(x)}\right| \approx \underbrace{\left|\frac{x\, f'(x)}{f(x)}\right|}_{k}\cdot\frac{|x^*-x|}{|x|}$$

הגדרה: מספר המצב של f

ב- x (condition number) הוא

$$\operatorname{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

(תחת ההנחה ש- $x, f(x) \neq 0$)

דוגמא: $f(x) = ax+b$,

$$\operatorname{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot a}{ax+b} \right| = \left| 1 - \frac{b}{ax+b} \right|$$

דוגמא: חישוב אינטגרל לכל n

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt$$

נחשב את הערך?

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{t+5} = \ln(t+5)\Big|_0^1 = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{\boxed{t^{n+1}}}{t+5}\,dt = \int_0^1 t^n \cdot \frac{t+5-5}{t+5}\,dt =$$

$$\underbrace{-5\int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt}_{I_n} + \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = -5 I_n + \frac{1}{n+1}$$

$$I_n = f_n(I_0) \qquad \underline{f_n(x) = (-5)^n x + b_n}$$

עבור כלשהו $b_n \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{cond}(f_n)(I_0) = \left| \frac{I_0 \, f_n'(I_0)}{I_n} \right| =$$

$$5^n \cdot \left| \frac{I_0}{I_n} \right| \geq \underline{5^n}$$

$$I_n = \frac{I_{n+1} - \frac{1}{n+1}}{-5}$$

$k >> n$

$n - k < 0$

$$I_n = g_n(I_k)$$

$$g_n(x) = (-5)^{n-k} x + c_n$$

$$\mathrm{cond}(g_n)(I_k) = \left| \frac{I_k \cdot (-5)^{n-k}}{I_n} \right| =$$

$$5^{n-k} \left| \frac{I_k}{I_n} \right| \leq 5^{n-k}$$

a_1

שגיאות במימד למה גבוה.

$(x_1^*,\dots,x_n^*) \leftarrow (x_1,\dots,x_n)$

הגדרה: יהא V מרחב ליניארי

מעל $\mathbb{R}$, נורמה על V היא

$= \{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0\}$

פונקציה $\|\cdot\|: V\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ כך ש-

1. אם $\|v\|=0$ אז $v=0$
2. לכל $a\in\mathbb{R}$, $v\in V$ $\|av\|=|a|\cdot\|v\|$
3. לכל $u,v\in V$ $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$

מרחב ליניארי V ביחד עם נורמה:

נקרא **מרחב נורמי**!

דוגמאות: $V=\mathbb{R}^d$, $p \geq 1$ ממשי

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$$

(תרגיל: נורמה)

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_1 = \sum |x_i|$$

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$$

"$p=\infty$"

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_\infty = \sup\{|x_i|\}$$

בהינתן נורמה $\|\cdot\|$ על V,
יש מטריקה על V:

$$d(u,v)=\|u-v\|$$

אם $v_i \in V$ סדרה, (v_i) מתכנסת
ל-v אם $\|v_i - v\| \to 0$.

משפט: יהא V מרחב וקטורי עם

שתי נורמות $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$

אז שני התנאים הבאים שקולים

1. לכל סדרה (v_i) ו- $v \in V$

$\|v_i - v\|_1 \to 0$ אמ"מ $\|v_i - v\|_2 \to 0$

2. יש קבוע $c > 0$ כך שלכל

$v \in V$, $\frac{1}{c}\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le c\|v\|_1$

עובדה: כל הנורמות על $\mathbb{R}^d$

הן שקולות.

אוכיח למה נורמה $\|\cdot\|$ על $\mathbb{R}^d$

ולהגדיר את הדיוק היחסי

ע"י $\frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$

נניח ש $T: U \to V$ העתקה

לינארית ובמרחב נורמות $\|\cdot\|_U$

על U ו- $\|\cdot\|_V$ על V.

רוצים לחשב את ההשפעה של

הפעלת T על הדיוק היחסי:

$$\frac{\|Tx^*-Tx\|_V}{\|Tx\|_V} = \frac{\|T(x^*-x)\|_V}{\|T(x)\|_V} =$$

$$\frac{\|T(x^*-x)\|_V \cdot \|x^*-x\|_U \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V \, \|x^*-x\|_U \, \|x\|_U} \le \frac{\|T\| \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V} \cdot \frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$$

תהא $T: U \to V$ העתקה לינארית

בין שני מרחבי נורמה, נגדיר

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_V}{\|x\|_U} = \sup_{\|x\|_U = 1} \|T(x)\|_V$$

ההעתקות הלינאריות * $\underline{Hom(U,V)}$

החסומות. $T \mapsto \|T\|$ נורמה

במרחב הזה

נגדיר מספר המצב של T

בנקודה x הוא

$$\underline{\underline{cond(T)(x)}} = \frac{\|x\| \cdot \|T\|}{\|T(x)\|}$$

אם T הפיכה, ונפתור לקבל $x = T^{-1}(y)$

$\mathrm{cond}(T) :=$

$$\left.\sup_x \mathrm{cond}(T)(x) = \|T\|\cdot\|T^{-1}\|\right\}$$ זכור

נניח ויש לפתור משוואה

$Tx=b$, מה הטעות היחסית

שנובעת רק הקירוב של b

של יכי b^* ?

<u>מטריצת הילברט!</u>

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

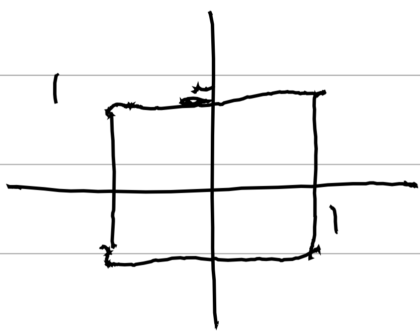
$$\mathrm{cond}_2 T_n = \underbrace{\frac{(\sqrt{2}+1)^{4n+4}}{2^{15/4}\cdot\sqrt{\pi n}}}$$

$T: U \to V$ העתקה לינארית

$U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

אז T מיוצגת ע"י

מטריצה $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$.



$$\|T\| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \frac{|x|\,|f'(x)|}{|f(x)|}$$

$x = 17$

$y = -17 + \varepsilon$

$2 \cdot 17 = 34$

$T : U \to V \quad . \quad V, \|\cdot\|$

$$\|T\| = \sup_{|u|=1} \|Tu\|$$

$$\mathrm{cond}(T)(u) = \frac{\|u\| \cdot \|T\|}{\|Tu\|} \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T\|$$

$$\|$$

$$\mathrm{cond}(T)$$

[1.1] $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ דוגמא:

$f(x,y) = x + y$

$$\mathrm{cond}(f)(x,y) = \frac{\|\langle x,y\rangle\| \cdot \|f\|}{|x+y|} = \frac{\max(|x|,|y|) \cdot 2}{|x+y|}$$

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

2. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\underline{x}^* \in \mathbb{R}^{*n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\|f(x^*)-f(x)\|}{\|f(x)\|} =$$

$$\frac{\underline{\|f(x^*)-f(x)\|} \cdot \|x\| \cdot \|x^*-x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x\| \, \|x^*-x\|} \approx$$

$$= \varepsilon$$

$$\frac{\|\underline{\underline{df(x)}}(x^*-x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x^*-x\|} \cdot \varepsilon \leq \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|} \cdot \varepsilon$$

<u>הגדרה:</u>

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|}$$

עוד ניסוח: לפונ׳ של $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

יש m פ׳ $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

ולכן יש הנגזרות החלקיות של

f_i לפי של x_j, נקבל מס׳

מספרים

$$\left(cond_{x_j}(f_i)\right)_{i,j}$$

<u>דוגמא 3:</u> $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$df=\begin{pmatrix}-\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2}\\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2}\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cond}(f)(x,y) = ? \quad \frac{\max(|x|,|y|)\cdot \max\left(\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2}\right)}{\max\left(\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|, \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\right)}$$

$$f_1(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

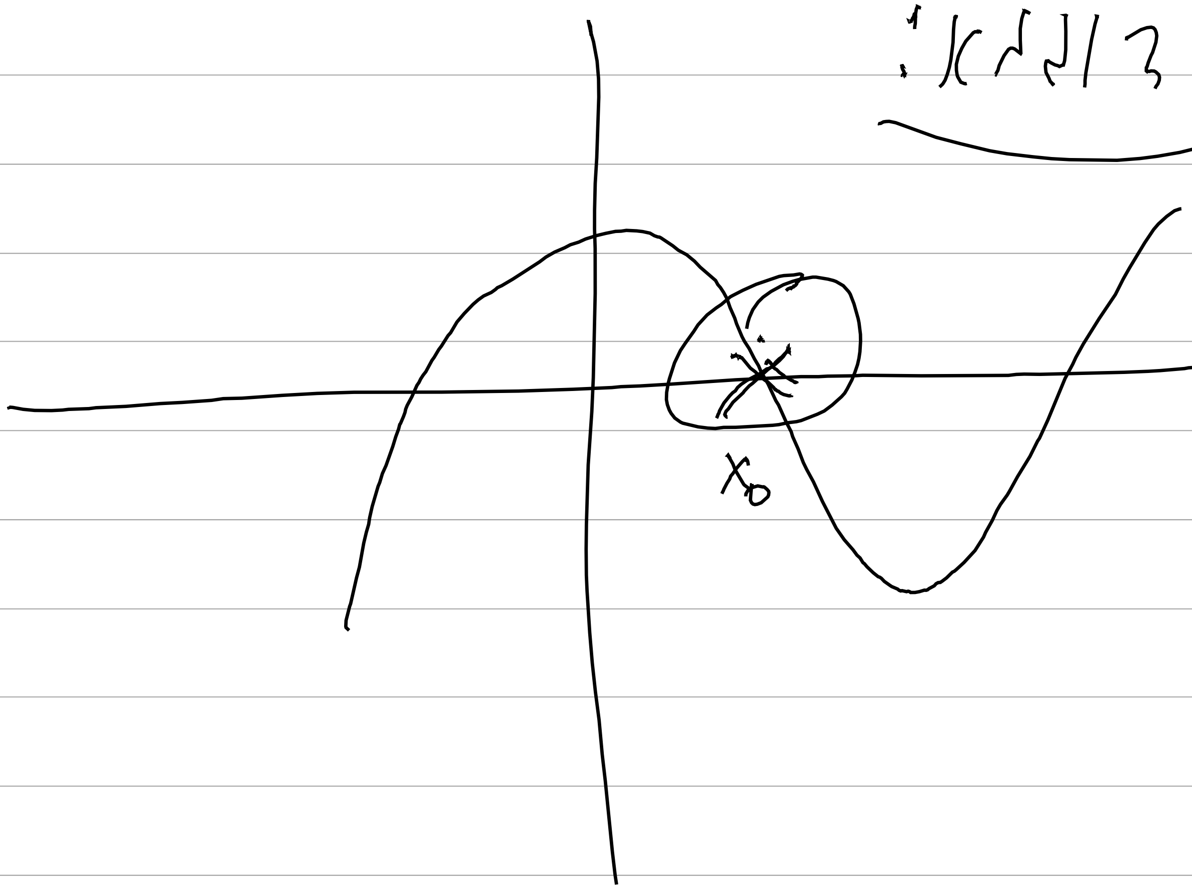
$$\operatorname{cond}_x(f_1) = \frac{|x|\cdot \frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|} \qquad \frac{|y|\cdot\frac{1}{y^2}}{\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|}$$

$$\parallel$$

$$\frac{|y|}{|x+y|} \qquad \frac{|x|}{|x+y|}$$

$$\operatorname{cond}_x(f_2) = \frac{|x|\cdot\frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|} = \frac{|y|}{|x-y|} \qquad \frac{|y|\ \frac{1}{y^2}}{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|} = \frac{|x|}{|x-y|}$$

דוגמא:



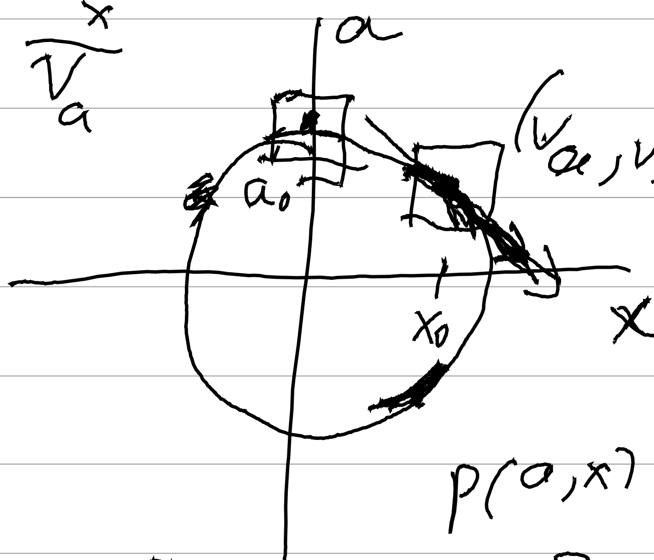
קולקריים דהלגה n

$$P_n(\overline{a}, X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

$P_n(\overline{a^0}, \underline{x_0}) = 0$ $\qquad$ X_0 , $\overline{a^0}$

$\underline{F(x,y) = x^2 + y^2}$

$\frac{V_x}{V_a}$



$a_0 = 1$

$x = 0$

$p(a,x)$ $\qquad$ $\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = 2x}$

$a^2 + x^2 = 1$ $\qquad$ $\underline{a^2 + x^2 - 1 = 0}$

$X = X(a)$ $\qquad$ $p(a, X(a)) = 0$

$X_0 = X(a_0)$ $\qquad$ $X = \sqrt{1 - a^2}$

$$F(a, x) = 0 \qquad F(a_0, x_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a_0, x_0) \neq 0 \Rightarrow x = x(a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial a} \Big/ \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$df \cdot \begin{pmatrix} v_a \\ v_x \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_x \end{pmatrix} = 0$$

$$v_a \frac{\partial f}{\partial a} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$x = x(\bar{a})$$

$$\operatorname{cond}_{a_i}(x) = \frac{|a_i| \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial a_i}\right|}{|x|} = \frac{|a_i| \cdot |x^i|}{|x| \cdot |p'(x)|}$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_i} = -\,{}^{\partial P}\!/_{\partial a_i} \Big/ {}^{\partial P}\!/_{\partial x} =$$

$$x^i \Big/ \underline{\sum j a_j x^{j-1}} = x^i \big/ p'(x)$$

הדוגמא של וילקינסון

$$p(x) = (x-1) \ldots (x-n)$$

השגיאה היחסית:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$

$f(x)$ $\qquad$ $f^*(x^*)$

הנחה: $f^*(x^*) = f(x')$ לאיזשהו x'

$$\frac{|f^*(x^*) - f(x)|}{|f(x)|} = \frac{|f(x') - f(x^*) + f(x^*) - f(x)|}{|f(x)|} \le$$

$$\underbrace{\frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x)|}} + \underbrace{\frac{|f(x^*) - f(x)|}{f(x)}}$$

$$\frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x)|} \approx \frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x^*)|} \Leftarrow$$

$$\underbrace{\mathrm{cond}(f)(x^*)}_{\mathrm{cond}(f)(x)} \cdot \boxed{\frac{|x'-x^*|}{|x^*|}}$$

מס' המצב של האלגוריתם f^*

הוא

$$\mathrm{cond}(f^*)(x^*) = \inf_{f(x')=f^*(x^*)} \frac{|x'-x^*|}{|x^*|}$$

$$\underline{\mathrm{cond}(f)(x)}\left(\frac{|x-x^*|}{|x|} + \mathrm{cond}(f^*)(x^*)\right)$$

קירובים לפונקציות ואינטרפולציה

$f: X \to \mathbb{R}$ (או $\mathbb{C}$) פונקציה רציפה

רוצים לקרב אותה ע"י פונקציות פשוטות,

A מרחב וקטורי של פונקציות על מרחב "מטרי" X. למשל

X - תת-קבוצה סגורה וחסומה של $\mathbb{R}^n$

X - קבוצה סופית

$A = C(X)$ פונקציות רציפות מ-X ל-$\mathbb{R}$ או ל-$\mathbb{C}$.

$P \subseteq A$ תת מרחב של הפונקציות

שבעזרתן מקרבים.

למשל: P - פולינומים.

מה זה לקרב? למדנו את

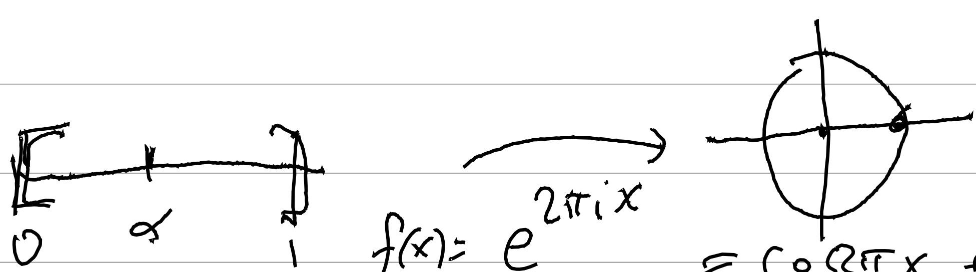
המושג הקרוב ביותר ב-P

לפונקציה $f \in A$ ביחס לנורמה נתונה

$\| \ \|$ על A.

יהי $X =$ המעגל = הקטע $[0,1]$

שבו זיהינו את 1 ו-0.



$f(x) = e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$, $\subseteq \mathbb{C}$

י. מרחב מעל $\mathbb{C}$ בערכים של 'ד'

$\cos(2\pi nx)$ ו- $\sin(2\pi nx)$ הוא אלגברה

$n\in\mathbb{Z}$

(סגור תחת כפל)

$$\{e^{2\pi inx}\}$$

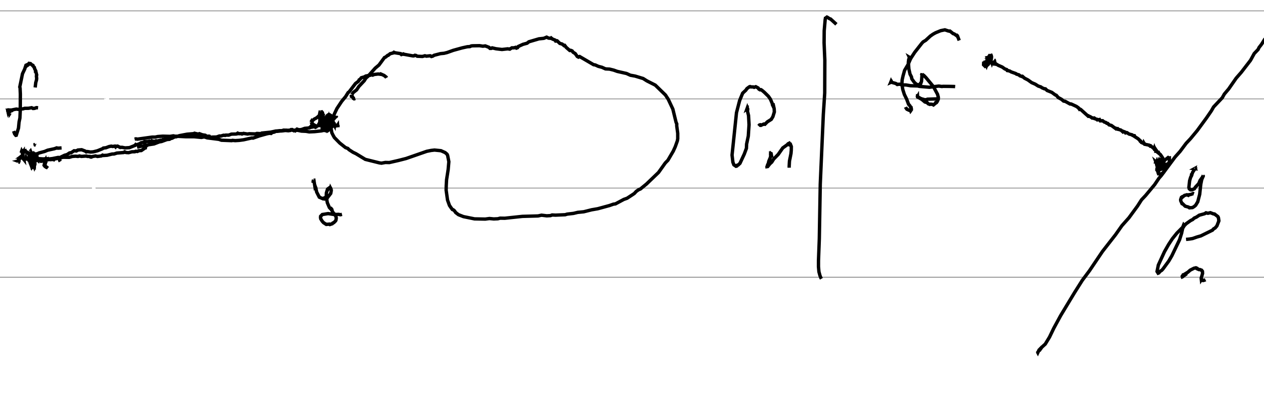
$$P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \cdots \quad , \quad P = \bigcup P_i$$

הג' מרחבים ממ' מס' 0 לפ'. רזיפ:

צריך לכל $f\in A$ ולכל $\varepsilon>0$ יש n

כך ש- $d(f,P_n)<\varepsilon$

$$d(f,P_n) = \inf_{y\in P_n} d(f,y) = \inf_{y\in P_n} \|f-y\|$$



על $C(X)$ יש נורמה טבעית

נורמת הסופרימום:

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$$

משפט סטון-ויירשטראס: אם $P \subseteq C(X)$ תת-אלגברה (סגורה תחת כפל, מכילה את הפונקציות הקבועות) ולכל $x \neq y$ יש $p \in P$ כך ש- $p(x) \neq p(y)$ (P מפרידה נקודות) אז P צפופה ב-$C(X)$

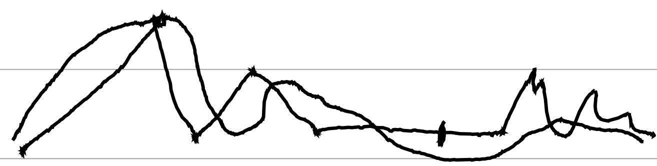
דוגמה: $X=[a,b]$ ו-P פולינומים במשתנה אחד. אז $P \subseteq C(X)$ תת-אלגברה מפרידה נקודות ולכן צפופה

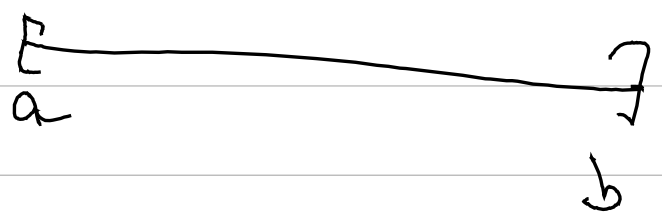
P צפופה ב-$C(X)$: לכל f ב-$C(X)$

ולכל $\varepsilon>0$ יש $p\in P$ כך ש-

$\|f-p\|<\varepsilon$

כלומר לכל $x\in X$ $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.





במקרה המרוכב, P צריכה להיות

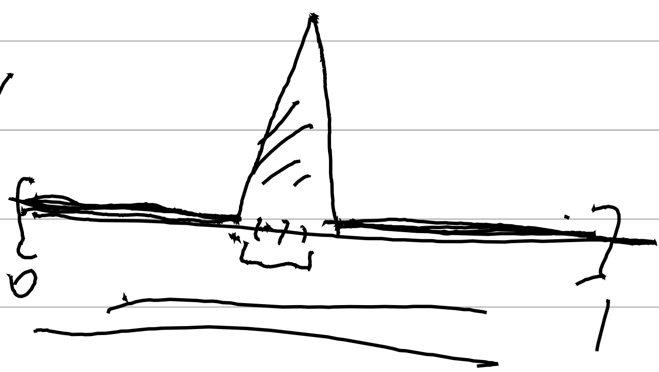
סגורה תחת הצמדה

דוגמא: כל פונקציה רציפה

ב-$[a,b]$ אפשר לקרב ע"י

פונקציות טריגונומטריות

סוף

$\sup\Big($  $\Big) = 1$

ב-$\mathbb{R}^n$ לכל $1 \le p \le \infty$ יש נורמה $\|\cdot\|_p$

$\|\bar{x}\|_\infty = \max(|x_i|)$

$\|\bar{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$ $\qquad 1 \le p < \infty$

טענה X קבוצה סגורה נורמת.
הסופרימום בין $\|\cdot\|_\infty$

נניח ש- X סגורה אז מכפלה
קרטזית של הן עם סגורים ב-$\mathbb{R}^n$.
(זה מרחב סגור הופכי מידת קורל)

נגדיר $\|\cdot\|_2 : C(X) \to \mathbb{R}$

על ידי (נורמת L_2).

$$\|f\|_2 = \sqrt[2]{\int_X |f|^2}$$

אם $X=\{1,\dots,n\}$ עם מניה.

זאת הנורמה L_2 הקודמת

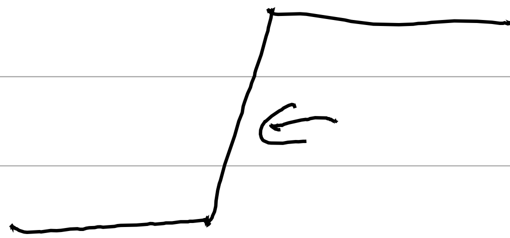
בנוסף יתר מזה, אפשר לקבוע

פונקציה חיובית $w: X\to\mathbb{R}$ ולהגדיר

$$\|f\|_{w,2} = \sqrt[2]{\int_X |f|^2 \cdot w}$$

$$\|f\|_2^2 = \int_X |f|^2 \le \sup_X |f|^2 \cdot \boxed{\int_X 1} =$$

$$\|f\|_\infty^2$$

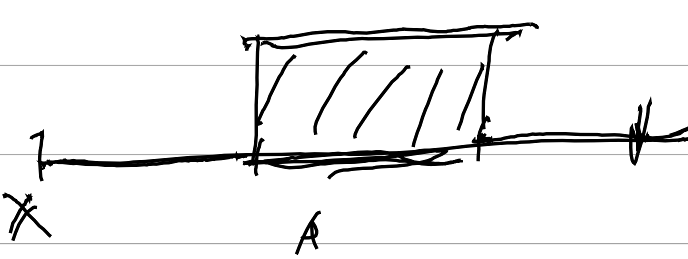


~~א~~ הג' ורציפות צפיפות קג'

האינטגרביליות.

$X \qquad f: X \to \mathbb{R}$

$A \subseteq X \qquad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$



$\int_X 1_A =$ השטח של A

קבוצה סופית X ספירת נקודות

נותנת מידה ~

$f: X \to \mathbb{R}$ $\int_X f = \sum_{x\in X} f(x)$

ת"ה $f: X \to \mathbb{R}$ $X = \{1, \dots, n\}$

$\|f\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |f(i)|^p}$

תהי V מרחב וקטורי מעל

$\mathbb{C}$ או $k = \mathbb{R}$, מכפלה פנימית על V

היא פונקציה $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to k$

כך ש:

1. לכל $u\in V$, הפ' $v\mapsto\langle v,u\rangle$

היא לינארית

2. לכל $u,v\in V$, $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$

בפרט לכל $u\in V$, $\langle u,u\rangle\in\mathbb{R}$

3. אם $u\neq 0$ אז $\langle u,u\rangle>0$

ש"נ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על V

נ"ל הפונקציה $v\mapsto\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$

היא נורמה של V.

במקרה הממשי, לכל $u,v\in V$

$$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=$$

$$\|u\|^2+\|v\|^2+2\langle u,v\rangle$$

הנורמה מגיעה ממכפלה פנימית

אם ורק אם

$$(u,v) \mapsto \frac{\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2}{2}$$

היא מכפלה פנימית.

עבור $p=2$, הנורמה $\|\cdot\|_2$

על $C(X)$ היא

$$(u,v) \mapsto \int_X u\cdot\bar{v}$$

באמצעות מכפלה פנימית נוכל

למדוד זוויות. בפרט, אורתוגונלי

u,v הם ניצבים אם $\langle u,v\rangle=0$.

אם $v_1, \dots, v_n$ ניצבים בזוגות

אזי

$$\left\| \sum a_i v_i \right\|^2 = \sum a_i^2 \|v_i\|^2$$

(הוכחה של המסקנה השמטנו).

נניח ש- A קבוצת הפונקציות הממשיות הרציפות על X, ו- $P = \bigcup P_i$ תת-מרחב, ונתונה מכפלה פנימית על A. נניח שבחרנו בסיס $\{\pi_i\}$ ל- P_n [בתהליך המתאים] ו- $f \in A$.

$T(c_1,\dots,c_m) =$

$$\|f - \sum c_i \pi_i\|^2 = \langle f - \sum c_i \pi_i, f - \sum c_i \pi_i \rangle =$$

$$\|f\|^2 - 2\sum c_i \langle f, \pi_i \rangle + \sum c_i c_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle$$

המינימום היחיד של T מתקבל

במקום שבו כל הנגזרות של

T לפי ה-c_i הן 0.

$$0 = \frac{\partial T}{\partial c_k} = -2\langle f, \pi_k \rangle + 2\sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle$$

$$\sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle = \langle f, \pi_k \rangle$$

מקבלים מערכת משוואות

$A\tilde{c} = b$

כאשר $b_i = \langle f, \pi_i \rangle$

ו- $A = (\langle \pi_i, \pi_j \rangle)_{i,j}$

A מטריצה סימטרית וחיובית:

$(x,y) \mapsto \underline{\underline{\langle x, Ay \rangle}} \leftarrow$ מכפלה פנימית המוגדרת על $\mathbb{R}^n$

היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$

כלומר, לכל $\bar{x} \neq 0$ אז

$$\underline{\underline{\bar{x} \cdot A\bar{x} > 0}}$$

כי

$$\bar{x} \cdot A\bar{x} = \sum_{i,j} x_i x_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle = \underline{\underline{\left\| \sum x_i \pi_i \right\|^2}}$$

$\{\pi_i\}$ בסיס ולכן $\sum x_i \pi_i \neq 0$ אם $\bar{x} \neq 0$.

במקרה, A הפיכה ולכן י'
פתרון למערכת.

$$(\pi_i)_{i \geq 0}$$

$$A = \left(\langle \pi_i , \pi_j \rangle \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

$$A\bar{c} = \bar{b} \qquad \bar{b} = \langle f, \pi_i \rangle$$

כלומר $\pi_i = t^{i}$ ב $[0,1]$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g \, dt$$

$$\langle \pi_{i+1}, \pi_{j+1} \rangle = \int_0^1 t^{i+j} \, dt = \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{i+j+1}$$

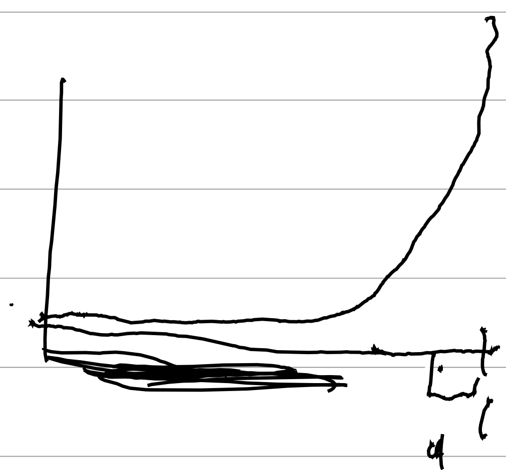
$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

[illegible]: הבעיה $H_n \bar{c} = b$

כל שגיאה (טעות) קטנה ב-b

עלולה לגרום לטעות גדולה ב-$\bar{c}$.

$[0,1]$ $\quad t^i$



t^i

פתרון: לעבוד עם בסיס

אורתוגונלי (או אורתונורמלי):

$\langle \pi_i, \pi_j \rangle = 0 \quad i \neq j \quad (\langle \pi_i, \pi_i \rangle = 1)$

$f = \sum \underbrace{a_i} \pi_i$

$\langle f, \pi_i \rangle = a_i \langle \pi_i, \pi_i \rangle$

הבעיה רק - מאיפה?: יש

$\pi_1, \pi_2, \ldots$

אפשר להפוך כל בסיס לאורתוגונלי

יהי

$\hat{\pi}_1 = \pi_1$

$\hat{\pi}_{k+1} = \pi_{k+1} - \sum \frac{\langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2} \hat{\pi}_i$

$\langle \hat{\pi}_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle - \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = 0$

$P = \bigcup P_i \qquad P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots$

$P_i = \{$ פולינומים ממעלה $\leq i \}$

$\dim(P_i) = i$

$span(\langle \pi_i \rangle_{i \leq n}) = span(\langle \hat{\pi}_i \rangle_{i \leq n})$

$\hat{\pi}_i \in P_i$ | פולינום מתוקן ממעלה i.

$$\hat{\pi}_{i+1} = t\hat{\pi}_i - \alpha_i \hat{\pi}_i + \sum_{j=0}^{i-1} b_j \hat{\pi}_j =$$

$$(t - \alpha_i)\hat{\pi}_i + \beta_i \cdot \hat{\pi}_{i-1} + \sum_{j=0}^{i-2} b_j \hat{\pi}_j$$

$$\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\langle \hat{\pi}_{i+1}, \hat{\pi}_i \rangle}} = \langle (t - \alpha_i)\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle \Rightarrow$$

$$\alpha_i \cdot \|\hat{\pi}_i\|^2 = \langle t\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2}$$

$$\underline{0 = \langle (t-\gamma_i)\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle +}$$

$$\underline{\beta_i \, \|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} \quad \Rightarrow$$

$$\beta_i = - \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} =$$

$$- \frac{\langle \hat{\pi}_i , \underline{t}\,\hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} = - \frac{\|\hat{\pi}_i\|^2}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2}$$

$$\hat{\pi}_{i+1} = (t-\gamma_i)\hat{\pi}_i \underline{+ \beta_i} \hat{\pi}_{i-1}$$

הערה: אם הקטע שאנחנו עליו

הוא מהצורה $[-a, a]$

והמשקולה היא סימטרית $W(t)=w(-t)$

$$\boxed{\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\cdot \overline{g(t)}\, \underline{w(t)}\,dt}$$

אז π_k פ' זוגית עבור k

זוגי ופ' אי-זוגית ל-k אי זוגי.

לכן במקרה הזה $\alpha_i = 0$.

דוגמא: בקטע $[-1,1]$ ופ' [illegible]

לז'נדר (נוסחת רודריגס)

$$\pi_k(t) = \frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k$$

כדי להראות ש- π_k אורתו'

ל- π_i עבור $i<k$, מספיק להראות

$$0 = \langle \pi_k, t^i \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k \cdot t^i \, dt =$$

$$\dots = 0$$

$$\pi_0 = 1 \quad , \quad \pi_1 = \frac{1}{2}(t^2-1)' = t$$

$$\pi_2 = \left((t^2-1)^2\right)'' \cdot \frac{2}{4!} = \frac{1}{12}\cdot\left((t^2-1)^2\right)''$$

$$\pi_k = \underline{t^k + \mu_k t^{k-2}} + \dots$$

$$\pi_{k+1} = t \cdot \pi_k + \beta_k \cdot \pi_{k-1} \Rightarrow \boxed{\beta_k} = \frac{\pi_{k+1} - t\pi_k}{\pi_{k-1}}$$

$$\beta_k = \mu_k - \mu_{k+1}$$

$$\mu_k = \frac{k(k-1)}{2(2k-1)} \Rightarrow$$

$$\beta_k = \frac{1}{4 - k^{-2}}$$

<u>תרגול:</u> פולינומים טריגונומטריים

נ' פונקציות עם מחזור 1

$\underline{\underline{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}}$ $\quad f(t+1)=f(t)$

לכל t.

$$\Updownarrow$$

$$f:[0,1]\to\mathbb{R} \qquad f(0)=f(1)$$

$$i\sin(2\pi t)+\cos(2\pi t)=\underline{\underline{e^{2\pi i t}}}$$

(=)

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)$$

$$g : S^1 \to \mathbb{C}$$

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

$$E : [0,1] \to S^1$$

$$E(t) = e^{2\pi i t}$$

$g : S^1 \to \mathbb{C} \rightsquigarrow g \circ E$ פ' מחזורית

$$\int_{S^1} g := \int_0^1 g \circ E \, dt$$

אם $z, w \in S^1$ אז $z \cdot w \in S^1$

נקבע $a \in S^1$ ונגדיר

$$g_a(z) = g(a \cdot z)$$

אז $\int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g$

טענה: נניח ש- $g: S^1 \to \mathbb{C}^*$

מקיימת $g(z\cdot w)=g(z)\cdot g(w)$

אז א. אם $g(z)=1$ לכל z

אז $\int_{S^1} g = 1$

ב. אחרת $\int_{S^1} g = 0$

הוכחה לב'. קח יר

ב. יש $a \in S^1$ כך ש- $g(a) \neq 1$

$g_a(x)=g(ax)=g(a)\,g(x)$

אז
$$\int_{S^1} g = \int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g(a)\cdot g = \underbrace{g(a)}_{\neq 1} \int_{S^1} g$$

אז $\int_{S^1} g = 0$.

לכל $n \in \mathbb{Z}$ הפ' $g_n(x) = x^n$

מקיימת את התנאים של הלמה

כי $g_n \cdot g_m = g_{n+m}$, $\overline{g_n(x)} = g_{-n}(x)$.

כעת יש להגדיר מכפלה פנימית

על $C(S^1)$ ע"י

$$\langle f,g\rangle = \int_{S^1} f\cdot\overline{g}$$

כעת הוכחנו שה- g_n מהווה

מערכת אורתונורמלית.

מצד שני המרחב שנפרש ע"י

ה- g_n סגור תחת כפל (למרות הצמוד).

הקבוצה הזו נקראות פולינומים טריגונומטריים.

נשים לב ש-

$$0 = \oint_{S^1} x^n = \int_0^1 e^{2\pi i n t}\,dt = \int \cos 2\pi i n t + i \sin 2\pi i n t = 0$$

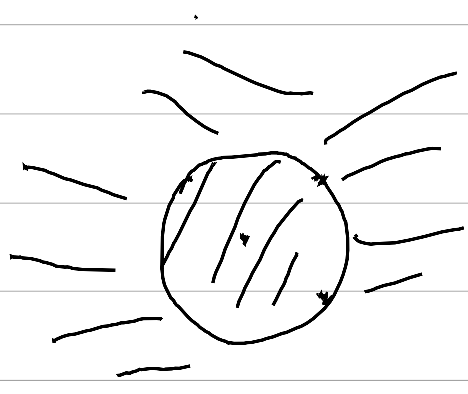
תרגיל:

$$\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$$

$x \sim y$ אם $x = y$ או $x = \frac{1}{y}$

$X = \mathbb{C}^*/\sim$

$g_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} \sim x^n = g_n(x)$



$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^* \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C}^* \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\bar{g}_n"] & X \end{tikzcd}$$

$\pi(x) = \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \in \mathbb{C}$

$\pi(x) = \pi\left(\frac{1}{x}\right)$

אם $z \in S^1$ אז

$\pi(z) = Re(z)$

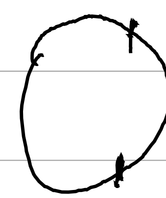
אז

$\pi(S^1) = [-1,1] = X_0$

$$g_n\left(\overbrace{\frac{x+\frac{1}{x}}{2}}^{\pi(x)}\right) = \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2} = \pi(g_n(x))$$

אם h פ' על X נגדיר

$$* = \int_{X_0} h = \int_{S^1} h \circ \pi = \int_{S^1} h\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)$$



$$\int_0^1 h(Re(e^{2\pi i t}))\,dt = \int_0^1 h(\cos(2\pi t))\,dt$$

$y = \cos(2\pi t) \qquad dy = -2\pi \sin(2\pi t)\,dt =$

$$dy = -2\pi\sqrt{1-y^2}\,dt$$

$$x = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} h(y)\,\underline{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}\,dy$$ s/c

~~אם~~ ה- $\bar{g}_n$ נקראים פולינומי

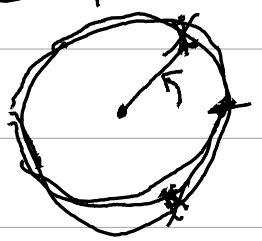
צ'ב'ישב. הפתרון שהם מערכת

אורתוגונלית עבור

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f\cdot g\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

$$\bar{g}_n(\cos 2\pi t) = \underline{\cos 2\pi n t}$$

$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$



$$\sin 2\pi t = \sqrt{1 - y^2}$$
$$0 \le t \le \tfrac{1}{2}$$

$\downarrow p$

X $[\quad \leftrightarrow \quad] = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$

$$p(z) = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \quad \left(= \frac{z + \bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(z) \right) \quad \text{for } S^1$$

$f : X \to \mathbb{C}$

$$y = \cos 2\pi t$$
$$dy = -2\pi \sin 2\pi t \, dt$$

$$\int_X f := \int_{S^1} f \circ p = \int_0^1 f \circ p \circ e^{2\pi i t} \, dt =$$

$$\int_0^1 f(\cos 2\pi t) \, dt = 2 \int_0^{1/2} f(\cos 2\pi t) \, dt =$$

$$2\int_{1}^{-1} f(y)\cdot\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(y)\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "\varphi_n"', "x \mapsto x^n"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, bend left] & S^1 \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "T_n"'] & X
\end{tikzcd}$$

$$\varphi_n(x) = x^n$$

$$T_n\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) = \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2}$$

$$\underline{\int_X T_n} = \int_{S^1} T_n \circ p = \underline{\int_{S^1} \frac{x^n + \frac{1}{x^n}}{2}} =$$

$$\begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{S^1} \varphi_n \bar{\varphi}_m =$$

$$\int \varphi_n \varphi_{-m} = \int \varphi_{n-m}$$

$$\left(T_n \cdot T_m\right)\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = \left(\frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{2}\right)\left(\frac{z^m + \frac{1}{z^m}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z^{m+n} + \frac{1}{z^{m+n}} + z^{n-m} + z^{m-n}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(T_{n+m}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) + T_{n-m}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\right)$$

$$\int T_n \cdot T_m = \frac{1}{2}\left(\int T_{n+m} + \int T_{n-m}\right) =$$

$$\int \begin{cases} 1/2 & n = \pm m \neq 0 \\ 1 & n = m = 0 \\ 0 & |n| \neq |m| \end{cases} \qquad T_n = T_{-n}$$

$$T_0 = 1 \qquad T_0\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = 1$$

$$T_1\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} \qquad T_1(z) = z$$

$$T_n \cdot T_1 = \frac{1}{2}\left(T_{n+1} + T_{n-1}\right) \Rightarrow$$

$$T_{n+1}(z) = 2z\,T_n(z) - T_{n-1}(z)$$

$$T_2(z) = 2z^2 - 1$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$$

$$\cos(nt) = T_n(\cos t)$$

1. T_n ממעלה n, המקדם של

z^n הוא 2^n

<u>אינטרפולציה</u>

נתונים ערכי פונקציה f

במספר סופי של נקודות

$c_0, \dots, c_n \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

רוצים לקרב את f על ידי

פולינום ממעלה n.

המרחב של פ' מוגדרות על $c_0,\dots,c_n$

ממימד $n+1$, עם בסיס

$$\delta_i(c_j) = \begin{cases} 1 & j=i \\ 0 & j\neq i \end{cases}$$

כולם ממעלה n

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x-c_j)}{\prod_{j\neq i}(c_i-c_j)} \in P_n =$$

$f(c_i) = f_i \Rightarrow$

$$f \sim \underline{\underline{\underline{\sum f_i \, l_i}}} = \Pi_{\bar{c}}(f)$$

$$\Pi_{\bar{c}} : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$$

$$\sup_{\|f\|=1} \|\Pi_{\bar{c}}(f)\| = \sup_{\|f\|=1} \left| \sum f_i \, l_i \right| =$$

$$= \sum_{i=0} \|l_i\|$$

$$\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|$$

$\hat{p}_n$ – הקירוב הכי טוב ל-f

ב-$\mathbb{P}_n$

$$\|\underline{\underline{f - \Pi_{\bar{c}}(f)}}\| = \|f - \hat{p}_n - \Pi_{\bar{c}}(f - \hat{p}_n)\|$$

$$\le \|f - \hat{p}_n\| + \|\Pi_{\bar{c}}\| \, \|f - \hat{p}_n\| =$$

$$\boxed{\underline{\underline{(1 + \|\Pi_{\bar{c}}\|)}} \, \|f - \hat{p}_n\|}$$

<u>הערכת הטעות קיצרת הנלמדת:</u>

f פ' ~~רציפה~~ ב $C^{n+1}[a,b]$

(גזירה ברציפות n+1 פעמים)

$$(f - \Pi_{\bar{c}}(f))(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\underline{\underline{(n+1)!}}} \underline{\underline{\prod_{i=0}^{n}(x - c_i)}}$$

(תלוי ב-x)

הוכחה: יש ξ שעבורו ש

נכון $(f\in C^{n+1}[a,b])$

ויהי נקבע $c_i \neq x$

$$G(t) = f(t) - \Pi_c(f)(t) - \frac{f(x)-\Pi_c(f)(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)}\prod_{i=0}^{n}(t-c_i) \qquad (*)$$

השורשים של G הם לפחות

c_i $i=0,\dots,n$ ו-x.

משפט רול: ל-$G^{(n+1)}$

יש שורש ξ.

נגזור את (*) $n+1$ פעמים:

$$G^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)! \cdot \frac{f(x) - \Pi_c(f)}{\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)}$$

נציב $t=\xi$.

$\xi \in [a,b]$

(כי כולם בפנים של $[a,b]$

[illegible] x, c_i)

המטרה: לנסות למזער!

○ כך לבחור $c^{(n)} \in [a,b]$ של נקודות

c_i'ים בצורה שהן אופטימליות:

$\Pi_{c^{(n)}}(f) \to f$

עבור פונקציות f מספיק חלקות.

$$\|f - \Pi_{c^{(n)}}(f)\| \le \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \prod_i (x - c_i^{(n)})$$

$$\le \frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1}$$

$M_{n+1}(f)$ חסם על הנגזרת ה-$(n+1)$-ית של f ב-$[a,b]$

אם רוצים ש-

$$\frac{M_n(f)\cdot(b-a)^n}{n!} \to 0$$

$\bar{c}$ נקודות אינטרפולציה $c_i \in [a,b]$

$$\|f - \pi_{\bar{c}}(f)\| \le \left\|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot\prod_i (x-c_i)\right\|$$

$$\le \frac{M_{n+1}\cdot(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$$

f פ' מרוכבת אנליטית

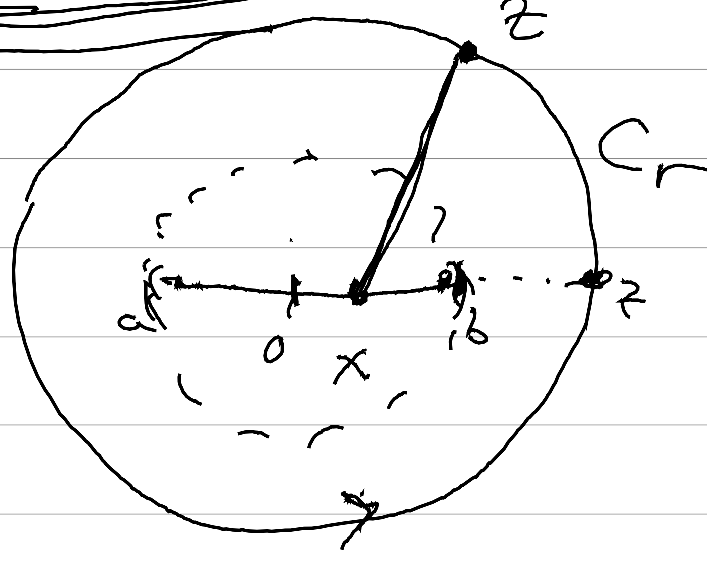
טענת קושי: אם f אנליטית

צ"ל

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-x)^{k+1}}\,dz$$

C_r

$a = -b$



$$\int_{C_r} \frac{1}{z} = 2\pi i$$

$$\gamma(t) = re^{2\pi i t}$$

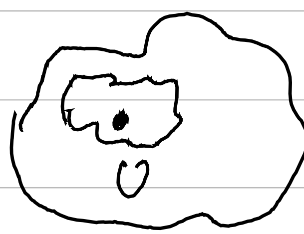
$$\|z - x\| \geq r - b$$

$$\|f^{(k)}(x)\| \leq \frac{k!}{2\pi}\,\frac{\cancel{M}\,N}{(r-b)^{k+1}} \cdot 2\pi r \Rightarrow$$

$$\frac{u_n \cdot (2b)^n}{n!} \le \frac{\frac{n! \cdot \cancel{u_0} M}{(r-b)^{n+1}} \cdot r \cdot (2b)^n}{n!} =$$

$$\frac{\cancel{u_0} M \cdot r}{r-b} \cdot \left(\frac{2b}{r-b}\right)^n \longrightarrow 0$$

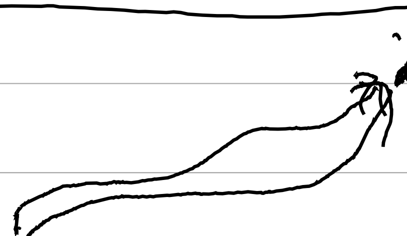
$$\frac{2b}{r-b} < 1$$



$\neq \mathbb{C}$

$$r > 3b$$

$$\frac{1}{z}$$



$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(f \circ \gamma)'$

$\gamma: (a, b) \longrightarrow \mathbb{C}$

מהו הפולינום המתוקן ממעלה

n שנורמת $\|\cdot\|_\infty$ (על $[-1,1]$)

מינימלית?

אם p פולינום מתוקן ממעלה:

n כך ש- $\|p\|_\infty = |p(a_i)|$ עבור

$p(a_i) = -p(a_{i+1})$

n+1 נקודות a_i של p

הוא הפולינום עם $\|p\|_\infty$ מינימלית

הוכחה, נניח ש- $\|q\| < \|p\|$

אז $p-q$ ב-n נקודות.

שורשי פולינומי צ'בישף הראשונים:

מציאת שורשים:

$$T_n(\operatorname{Re} z) = \operatorname{Re}(z^n)$$

$k = 0, \dots, n-1$

$x = \operatorname{Re} z$

$\Rightarrow T_n(x) = 0$

$\operatorname{Re} z^n$

$\Rightarrow$

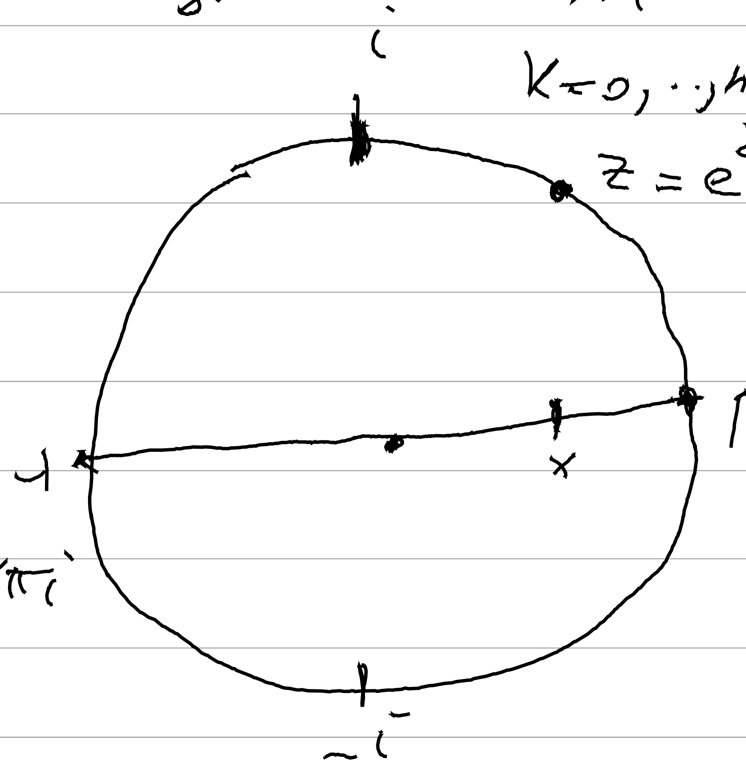
$x = \cos\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)$

$z^n = \pm i$

$y = \cos\left(\pi \frac{k}{n}\right)$

$k = 0, \dots, n$

$z = e^{2\pi i t}$



$z^n = i \iff$

$e^{2\pi i n t} = i$

$2\pi i n t = \frac{\pi i}{2} + \cancel{2}k\pi i$

$\Rightarrow t = \frac{2k+1}{4n}$

המסקנה: המקדם המוביל של

T_n הוא 2^{n-1}

לכן $\tilde{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n$ פולי' מתוקן

ממעלה n, $\|\tilde{T}_n\| = \frac{1}{2^{n-1}}$ שמתקבל

בנקודות $a_i = \cos\left(\frac{\pi i}{n}\right)$

$0 \le i \le n$. עם סימנים מתחלפים

$\tilde{T}_n$ עם נורמה מינימלית

מינימלית בין הפולי' המתוקנים של

ממעלה n - לכן אם c_i $\tilde{c}^{(n)}$ הפרשים

ניקח c_i שורשי T_n אז

$$\|f - \Pi_{\tilde{C}(n)}(f)\| \le \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \cdot \|\tilde{T}_n\|_\infty =$$

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

סדרה אינסופית $c_0, c_1, \ldots$

$p_0, p_1, \ldots \qquad \deg(p_i) \le i$

δ_i

P_i

$$p_{i+1}(x) = p_i(x) + a_{i+1} \cdot (x - c_0) \cdot \ldots (x - c_i)$$

$$a_{i+1}(c_{i+1}-c_0)\cdots(c_{i+1}-c_i)=f_{i+1}-P_i(f_{i+1})$$

$$\underline{\underline{a_{i+1}}}=\frac{f_{i+1}-P_i(f_{i+1})}{(c_{i+1}-c_0)\cdots(c_{i+1}-c_i)}=$$

$$\underline{[c_0,\dots,c_{i+1}]f}$$

$$\underline{\underline{[c_0,\dots,c_{i+1}]f}}=\frac{[c_0,\dots,c_i]f-[c_1,\dots,c_{i+1}]f}{c_{i+1}-c_0}$$

$\underline{c}=c_0,\dots,c_{i+1}\quad,\quad \hat{c}_j=c_0,\dots,\cancel{c_j},\dots,c_{i+1}$

some

$$\underline{P_{\underline{c}}}(x)\overset{?}{=}P_{\hat{c}_{i+1}}-\frac{(x-c_0)}{c_{i+1}-c_0}\left(P_{\hat{c}_{i+1}}-P_{\hat{c}_0}\right)=:q(x)$$

$s.t.\ 0 < j < i+1 \quad \hat{c} \quad |'N' \quad 3 3$

$$q(c_j) = f_j = P_{\hat{c}}(c_j)$$

$$q(c_0) = P_{\hat{c}_{i+1}}(c_0) = f_0 = P_{\hat{c}}(c_0)$$

$$q(c_{i+1}) = P_{\hat{c}_{i+1}}(c_{i+1}) - (P_{\hat{c}_{i+1}}(c_{i+1}) -$$

$$P_{\hat{c}_0}(c_{i+1})) = P_{\hat{c}_0}(c_{i+1}) = f_{i+1} = P_{\hat{c}}(c_{i+1})$$

$c \quad f$

$c_0 \quad f_0$

$c_1 \quad f_1 \quad [c_0, c_1]f$

$c_2 \quad f_2 \quad [c_1, c_2]f \quad [c_0, c_1, c_2]f$

$c_3 \quad f_3 \quad [c_2, c_3]f \quad [c_1, c_2, c_3]f \quad [c]f$

$c_4 \quad f_4$

$$\boxed{[c_1, c_2, c_3]f} = \frac{[c_2, c_3]f - [c_1, c_2]f}{c_3 - c_1}$$

$\bar{c} = c_0, \ldots, c_i$

$$P_{\bar{c}}(x) = \underbrace{P_{\hat{c}_i}(x)}_{i} + [\bar{c}]f \cdot \prod_{j<i}(x - c_j)$$

$$\|P_{\bar{c}}(x) - P_{\hat{c}_i}(x)\| = \|\boxed{[\bar{c}]f} \prod (x - c_j)\|$$

$$\leq \boxed{\frac{P_{\bar{c}}^{(i+1)}(\xi)}{(i+1)!}} \cdot \prod (x - c_i) \|$$

$$\underline{\underline{f}} \qquad \left.\begin{matrix} c_0, c_1, \dots, c_n \\ f_0, f_1, \dots, f_n \end{matrix}\right]$$

$$P_{\bar{c}}(x) = [\bar{c}]f\ x^n + \dots =$$

$$[\bar{c}]f\,(x - c_0)\dots(x - c_n) + P_{\hat{c}_n}$$

$$\hat{c}_i = \{c_0, \dots, c_n\} \setminus \{c_i\}$$

$$[\bar{c}]f = \frac{[\hat{c}_0]f - [\hat{c}_n]f}{c_n - c_0}$$

$c_0, \ldots, c_n$

$f_0, \ldots, f_n$

$$\underline{\underline{\bar{C}}} = 3\cdot\{1\} + \{3\} + 2\{5\}$$

1	1	1	3	5	5	c_i
2	4	0	1	6	7	

$p(1) = 2, \quad p'(1) = 4, \quad p''(1) = 0$

$p(3) = 1, \quad p(5) = 6, \quad p'(5) = 7$

$$P_{\bar{C}}(x) = ([\bar{c}]f) \cdot x^{4+1} + \ldots$$

$\hat{C}_i = \bar{C} - \{c_i\}$ [illegible] C

[illegible] $[c_i]$

$\bar{C} = \sum n_i [c_i] \quad \deg(\bar{C}) = \sum n_i = n$

הגדרה: אם $c_i \neq c_j$ אז

$$\underline{[\bar{c}]f} = \frac{[\hat{c_i}]f - [\hat{c_j}]f}{c_j - c_i}$$

תזכורת:

$$\bar{c} = \sum_{k=1}^{m} n_k [c_k]$$

$$n = \deg(\bar{c}) = \sum n_i$$

אינדוקציה על $N(\bar{c}) = n - m$

אם $n - m > 0$ אז יש $n_k > 1$

$$\bar{d} = \bar{d}_\varepsilon = \bar{c} - [c_k] + [c_k + \varepsilon]$$

אם $\varepsilon > 0$ מספיק קטן אז

$$N(\bar{d}) < N(\bar{c})$$

מו'שוקלה

$$[d]f = \frac{[\hat{d}_i]f - [\hat{d}_j]f}{d_j - d_i}$$

$[\bar{c}]f$ רציפה בכל אחת מהקורדינטות

c_i: בוינרולק צ'י בעצרה הנשאה

מספיק להראות ש-

$$[(n-1)[c_0]+[c_0+\varepsilon]]f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} [n\cdot[c_0]]f$$

$$[c_0, c_0+\varepsilon]f = \frac{f(c_0+\varepsilon) - f(c_0)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f'(c_0)$$

$$P_{n[c_0]} = \sum \frac{f^{(k)}}{k!}(x-c_0)^k$$

$c_0 = c_1 = c_2$ $\qquad$ $c_5 = c_6$

c_0 $\quad f_0$

c_1 $\quad \cancel{f_0} = f'' \; [c_0, c_1]f = f_1$

c_2 $\quad \cancel{f_0}$ $\qquad f_1$ $\qquad f_2$

c_3 $\quad f_3$ $\quad [c_2, c_3]f = \dfrac{f_3 - f_0}{c_3 - c_0}$ $\quad [c_1, c_2, c_3]f = \dfrac{[c_2, c_3]f - f_1}{c_3 - c_0}$

c_4 $\quad f_4$

c_5 $\quad f_5$

c_6 $\quad f_5$ $\qquad f_6$

c_7 $\quad f_0$ $\quad [c_6, c_7]f = \dfrac{f_0 - f_5}{c_7 - c_6}$

c_6''

$[c_5, c_3, c_1]f$

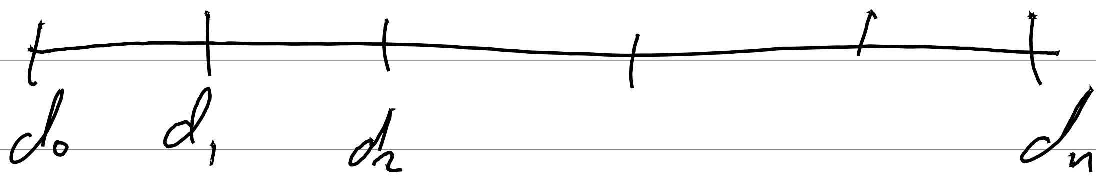
ספליינים

$a<b \in \mathbb{R}$

[illegible] חלוקה

$$a = d_0 < d_1 < \dots < d_n = b$$

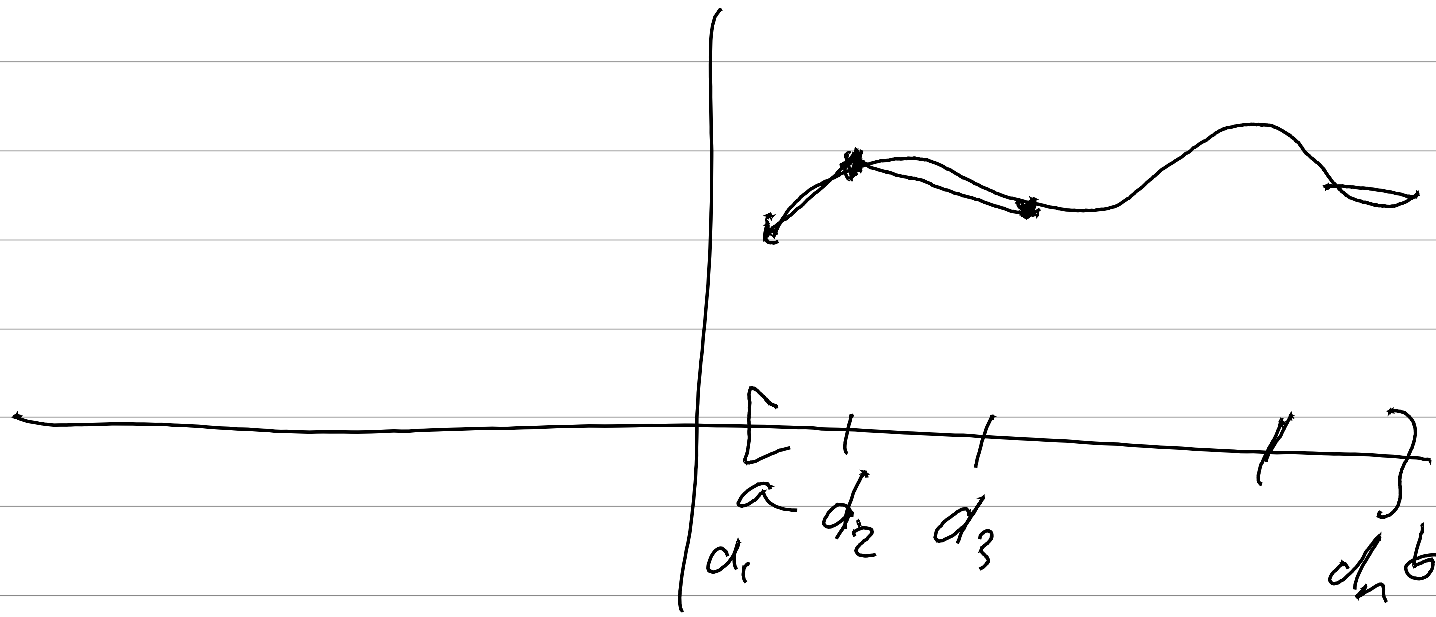
$$\underbrace{a = d_0 < d_1 < \dots < d_n = b}_{\Delta}$$



$$S_m^k(\Delta) = \left\{ s \in C^k[a,b] \;\middle|\; \text{לכל } i\text{, } s|_{[d_{i-1},d_i]} \text{ פולינום ממעלה } \le m \right\}$$

$k<m$.

$S_1^0(\Delta)$ – פ' לינאריות למקוטעין רציפות.



אם f גזי' פ' ברציפות

פעמיים, הרי המרחק בין f לקירוב הלינארי S חסום ע"י

$$|f(x)-S(x)| \le \frac{M}{2}\cdot\left|(x-d_i)(x-d_{i+1})\right| \le$$

$$\frac{M}{8}\cdot(d_{i+1}-d_i)^2 \qquad M=\max_{x\in[d_i,d_{i+1}]} f''(x)$$

אז השגיאה המינימלית היא

$\frac{M}{8}\cdot|\Delta|^2$

אורך הקטע המירבי - $|\Delta|$

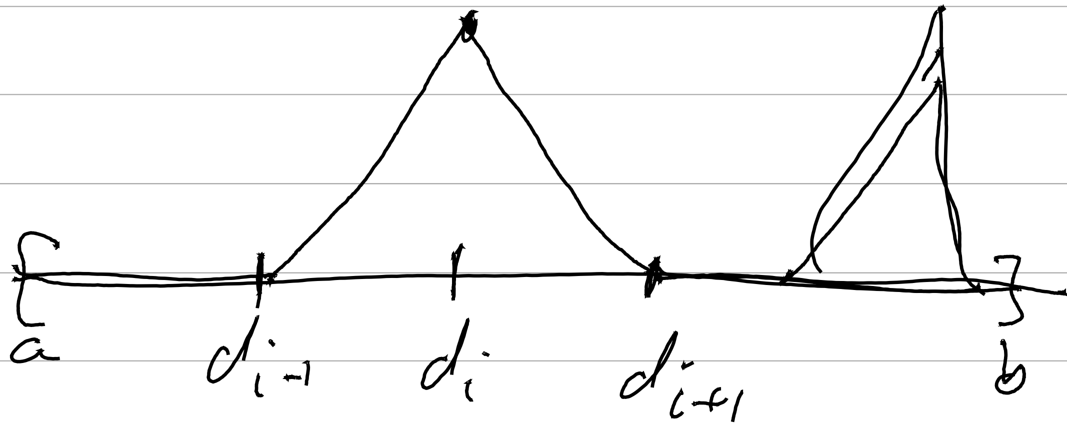
עובדה:

$$\|f - s_1\| \le c\,\|f - s_1^0(\Delta)\|$$

$V = S_1^0(\Delta)$ - ממימד n. מה הפ' ב-V

שימושיות לבסיס הסטנדרטי

$\mathbb{R}^{\{d_1,\dots,d_n\}}$ Fw



B_i

$\langle B_i, B_j \rangle \neq 0$

רק אם $|i-j| \le 1$

כרגיל: אם

$\hat{S} = \sum c_i B_i$

וההטלה של f למרחב V על

$\bar{c}$ פתרון של מע׳ המשוואות של

$T\bar{c} = d$

$T = (\langle B_i, B_j \rangle)_{i,j}$ כאשר

$d_i = \langle f, B_i \rangle$

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

״כמעט״ אלכסונית.

עושג ה׳:

$$\|f - \hat{s}\|_\infty \le 4 \cdot d(f, S_1^0(\Delta))$$

ספליינים ממעלה 3:

קירוב של f על ידי [illegible]

ב $S_3^1(\Delta)$. מקרים את

f על ידי פ' s כך ש-

לכל i $s(d_i)=f(d_i)$

פולי' ממעלה ≤ 3 $s|_{[d_{i-1},d_i]}$

$s'(d_i)=m_i$

א. $m_i=f'(d_i)$

ב. לבחור את m_i כך ש- $s\in S_3^2(\Delta)$

מבז'ית בסיסית למשוואות

$\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ (למשל f פולינום).

f גזירה ברציפות על $[a,b]$ (אולי "יש חלקה").

המטרה: למצוא פתרונות

למשוואה $f(x)=0$.

או, משוואות דיפרנציאליות ממימד

סופי (בהמשך)

כ. $F(t,x,x',x'')=0$

$x(0)=x_0,\quad x(1)=x_1$

טענה: c ש- $f(a)\cdot f(b)\le 0$

כי עבדין קיים.. הוכחה נתונה

אלגוריתם: נקודת האמצע

$c=\frac{a+b}{2}$ מקיים $f(c)\cdot f(b)\le 0$

אם $f(a)\cdot f(c)\le 0$, ממשיכים

עם הקטע $[c,b]$ או $[a,c]$

התכנסות:

$f(c)\ge 0$

≤ 0

הגדרה: לתהליך יש התכנסות לינארית אם $|x_n-a|<\varepsilon_n$
כך ש- $\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\xrightarrow[n\to\infty]{} C$ עבור איזשהו קבוע c.

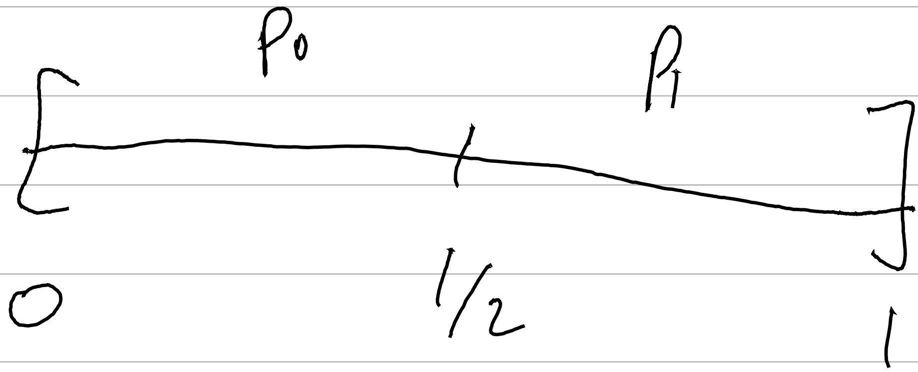
במקרה זה

$$|x_n - a| \le \frac{(b-a)}{2^n} = \varepsilon_n$$

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{1}{2}$$

<u>התכנסות מסדר p</u> אם

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} \to c > 0$$ (עבור $p \ge 1$).



$f'(1/2)$

Δ

f

$s \in S_3^1(\Delta)$ $P_0'(1/2) = P_1'(1/2)$

$P_0(0) = f(0)$, $P_0(1/2) = f(1/2)$, $P_1(1/2) = f(1/2)$, $P_1(1) = f(1)$

$f(x)=0$ $\qquad [a,b]$

$x_i \to 0 \qquad f(c)=0$

$$\left|\frac{x_{i+1}}{x_i}\right| < \varepsilon_i \qquad \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} \to c < 1$$

התכנסות ליניארית

$p \geq 1$

$$\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i^{p}} \to c > 0$$

קצב מלא מסדר p.

נניח: סדרת פונקציות
רציפות $f_0,\dots,f_n$

על $[a,b]$ עם שלושה תנאים כך
יש מספר סופי של שורשים ב $[a,b]$

נסמן $f_{-1}\equiv 0$, $f_{n+1}=-f_n'$

לשאר הפונקציות שאין ל f_n שורשים

ולכל $0\le i\le n$ ולכל $r\in[a,b]$

אם $f_i(r)=0$ אז $-f_{i+1}(r)\cdot f_{i-1}(r)<0$

נגדיר $\sigma(x)$ את מס'
החלפות הסימן בסדרה $f_0(x),\dots,f_n(x)$

משפט שטורם: מספר השורשים של f_n הוא $\sigma(b)-\sigma(a)$

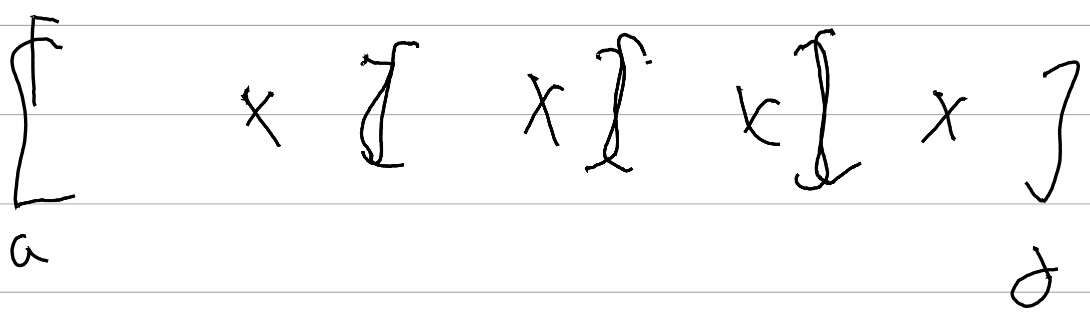
הערה: גם הטענה נכונה לקטע

$[a,c]$ ו- $[c,b]$ נקודה c

כלומר אם היא נכונה ל-$[a,b]$

אז מספיק להוכיח לסדרה

יש רק נקודה אחת בכל רגע.



בערוף: מקרה $i=0$ הוכחה

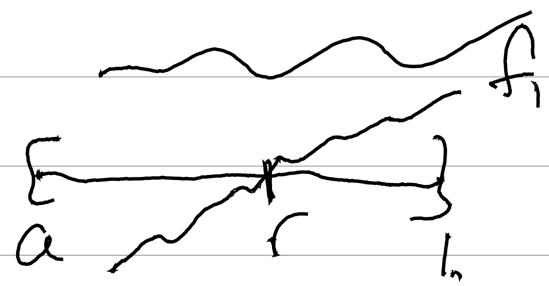
היינו ש- $f_0(r)\neq 0$ לכל $r\in[a,b]$

הוכחת המשפט: באינדוקציה על n

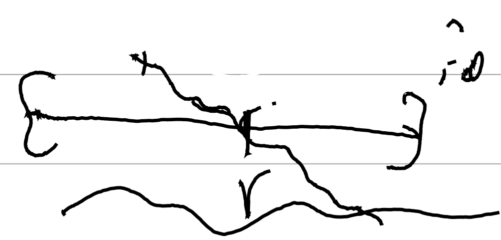
$n=0$ ✓

$n=1$: נסמן ב-r את הנקודה

המיוחדת



$r(a)=0$ $\qquad$ $r(b)=1$



$$f_1(r)=0 \Rightarrow f_0(r)\cdot f_2(r)<0$$

$$f_2 = -f_1'(r)$$

$$f_0(r)<0, \quad f_1'(r)<0$$

נניח שהטענה נכונה ל-n-ים

שני מקרים:

א. $f_1(r)\neq 0$. אז נוריד את f_0

והסדרה $f_1, \dots, f_{n+1}$ מקיימת

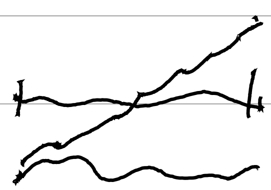
את ההנחות, כי הנ״ל קיא׳ד

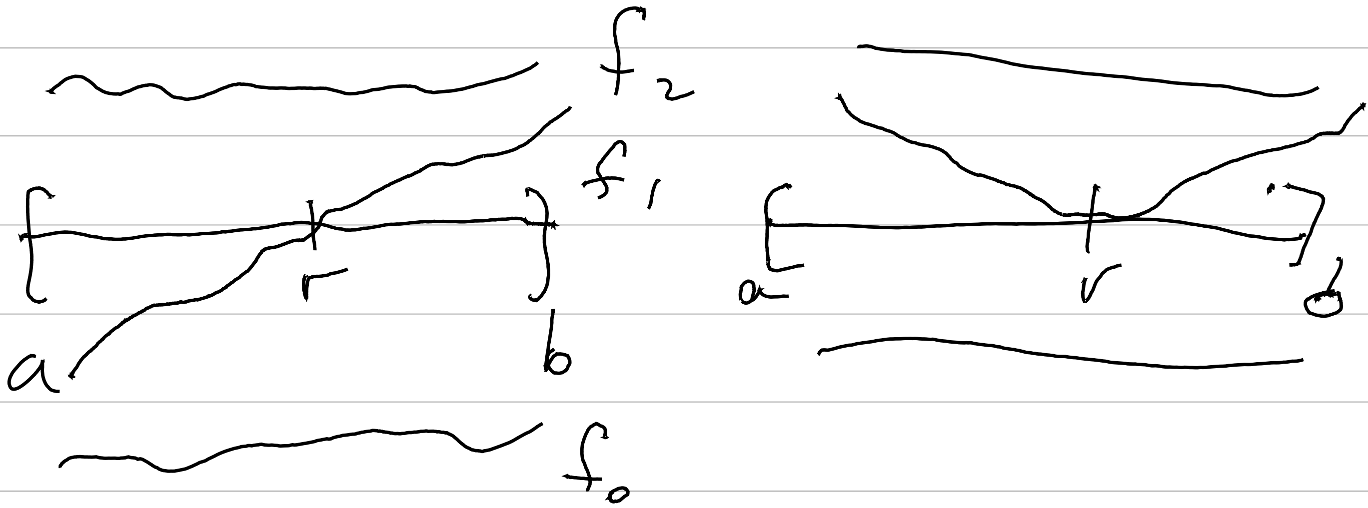
קצרה ב-1 ומכאן הטענה.

ב. $f_1(r)=0$. נוריד את f_0, f_1

לפי ההנחה $f_0(r)\cdot f_2(r)<0$

אז $f_2(r)\neq 0$.





דוגמא 1. נניח ש- p פולינום

עם שורשים פשוטים.

נגדיר $f_n = p$, $f_{n-1} = p'$

ו-

$f_{k+1} = q_k \cdot f_k - f_{k-1}$

כאשר $\deg(f_{k+1}) < \deg(f_k)$ עבור $k \le n-1$

אז f_i מקיימים את התנאים:

כיוון שה שורשים פשוטים, ל- p, p' אין

שורש משותף. בפרט, הדוגמה

מקיימת עבור $n=i$:

$$f_{n+1}\cdot f_{n-1} = -(f')^2 \le 0$$

2. אם $\{f_i\}$ ס"ס $\deg(f_i)=i$

של פולינומים אורתוגונליים, מוניקים

כלומר יש נוסחת נסיגה

$$f_{i+1} = (t-a_i)\cdot f_i - b_i f_{i-1}$$

ו- $b_i>0$.

אם $b\gg 0$, $f_i(b)>0$ לכל i.

אז $\sigma(b)\le 0$

וכמו $a<c<0$ עד $\sigma(a)=n$

כי f_i יש i אורך משמש

שונים.

לכן ניתן לקבל אינטרוול

נמצא השורש ה-k לפי

הסימן של $\sigma(c)$

בכל שלב, מחלקים

$$x_{k+1}=\frac{x_k+x_{k-1}}{2}$$

ומחשבים את $\sigma(x_{k+1})$

ולפי הסימן של $\sigma(x_{k+1})$

או $\sigma(x_{k+1})$ $\sigma(k)$ יורדים אבולה

הצד להמשיך.

מטרה לפתור $f(x)=0$

נתון $[a,b]$, f רציפה

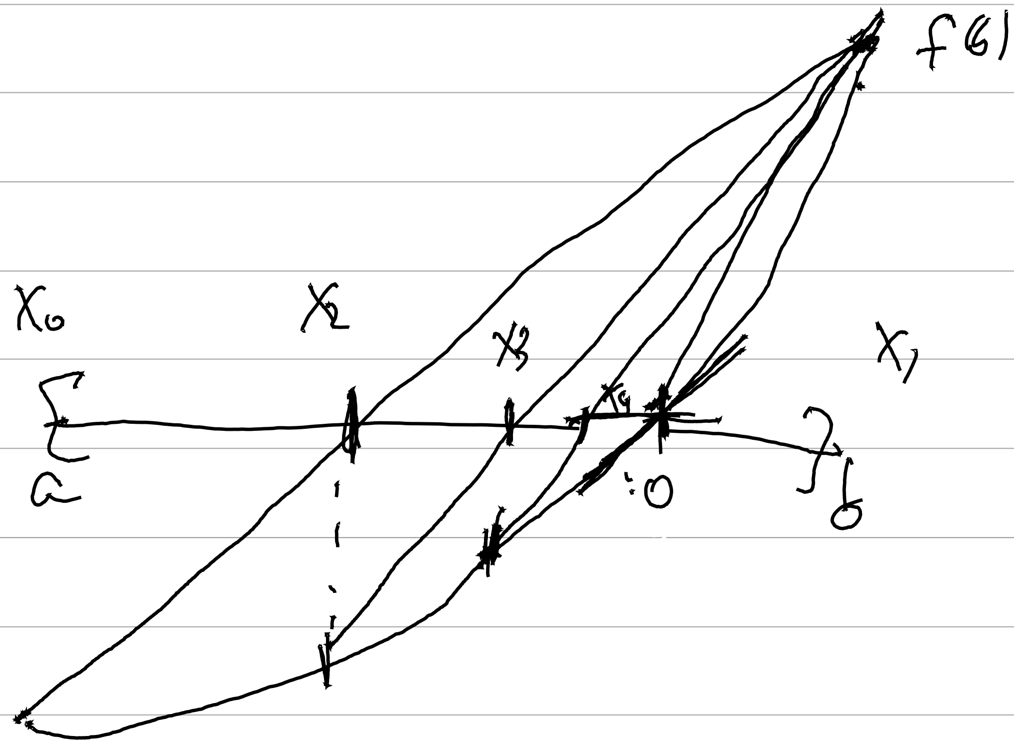
$f(a)\cdot f(b)<0$,

$$\frac{f(b)}{b-a}(x-a)+\frac{f(a)}{a-b}(x-b)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f(b)(x-a)-f(a)(x-b)=0$$

$$X=\frac{f(b)a-f(a)b}{f(b)-f(a)}$$



$$X_{n+1} = \frac{f(x_n)\cdot x_{n-1} - f(x_{n-1})\, x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$\frac{\left(f(x_n) - f(x_{n-1})\right)\cdot x_n + f(x_n)\cdot(x_{n-1} - x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$x_n - f(x_n)\cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{f(x_n)}{x_n} \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$1 - \frac{f(x_n)}{x_n} \cdot \frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)} \longrightarrow$$

$$1 - f'(0) \cdot \frac{b}{f(b)} =: c$$

[illegible] , $n+1$ - ? [illegible]

$$d = \frac{f(x_n)\,x_{n-1} - f(x_{n-1})\,x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$x_{n+1} = d$ [illegible] $f(d) \cdot f(x_n) \leq 0$ [illegible]

$x_{n+1} = x_n$, $x_n = d$ [illegible]