יש להגיש את הפתרונות עד יום רביעי בשעה 23:59 בשבוע שאחרי זה בו המטלה ניתנה.

שאלות להגשה

1. תהי Σ התתימה הדו-סוגית עבור מרחב וקטורי מעל שדה (כלומר, יש סוג עבור השדה וסוג עבור המרחב הוקטורי). הוכיחו שלכל מספר טבעי n ולכל p ראשוני או 0 קיימת תורה $T_{n,p}$ בחתימה הזו שהמודלים שלה הם בדיוק מרחבים וקטוריים ממימד n מעל שדה סגור אלגברית ממציין p. הוכיחו שכל תורה $T_{n,p}$ כזו היא שלמה.

2. נסמן ב-B את קבוצת הסדרות הממשיות החסומות (סדרה $x = (x_i)$ של ממשיים היא חסומה אם קיים ממשי b כך ש-$|x_i| < b$ לכל i). יהי $\mathcal{F}$ על-מסנן על הטבעיים. עבור סדרה ממשית $x = (x_i)$ ומספר L, נגדיר ש-$\lim_{\mathcal{F}} x = L$ אם לכל $\epsilon > 0$, הקבוצה $\{i \mid |x_i - L| < \epsilon\}$ נמצאת ב-$\mathcal{F}$. הוכח:
   (א) לכל סדרה $x = (x_i)$ ב-B קיים L יחיד כך ש-$\lim_{\mathcal{F}} x = L$
   (ב) אם $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$ הוא המסנן הראשי שמכיל את $\{i\}$, אז $\lim_{\mathcal{F}} x = x_i$.
   (ג) אם $\mathcal{F}$ אינו ראשי, אז $\lim_{\mathcal{F}} x$ היא נקודת הצטברות של x (כלומר, נקודה a כך שלכל $\epsilon > 0$ מתקיים $|x_i - a| < \epsilon$ עבור אינסוף איברים בסדרה). בפרט, אם ל-x יש גבול L, אז $\lim_{\mathcal{F}} x = L$.
   (ד) ההעתקה $x \mapsto \lim_{\mathcal{F}} x$ היא העתקה של חוגים מ-B ל-$\mathbb{R}$ (כאשר ב-B מחברים ומכפילים איבר-איבר)
   (*ה) נניח ש-$s : B \to \mathbb{R}$ היא העתקה של חוגים, כך שלכל $x \in B$, $s(x)$ היא נקודת הצטברות של x. אז קיים על-מסנן (בהכרח לא ראשי) כך ש-$s(x) = \lim_{\mathcal{F}} x$ לכל $x \in B$.

3. תהי $^*\mathbb{R}$ הרחבה לא סטנדרטית של $\mathbb{R}$
   (א) אם $P \subseteq \mathbb{R}^n$, הוכיחו ש-$^*P = P$ אם ורק אם P סופית (רמזים: השתמשו באינדוקציה על n. עבור $n = 1$, נזכיר את העובדה הבאה: אם $X \subseteq [a, b]$ היא אינסופית, אז יש ב-$[a, b]$ נקודת הצטברות של X, כלומר, נקודה $c \in [a, b]$ כך שכל קטע פתוח סביב c מכיל נקודה ב-X)
   (ב) הוכיחו שסדרה (a_i) ב-$\mathbb{R}$ מתכנסת ל-$a \in \mathbb{R}$ אם ורק אם לכל n לא סטנדרטי, $a_n \sim a$
   (ג) מיצאו הגדרה לא סטנדרטית לנגזרת של פונקציה. הוכיחו את כלל לייבניץ עבור הנגזרת של מכפלה.