שיטות הקירובים

Walter Gautschi

- אלגברה לינארית: פתרון למערכת משוואות, למצוא ערכים עצמיים, ...

- אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$

  אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

- אינטרפולציה: נתונות נקודות וערכים בנקודות האלה, למצוא פונקציה נחמדה שזהה בנקודות:

- קירוב פונקציות: קירוב פונקציה לפונקציה שקרובה אליה מסוג מסוים (למשל פולינום).

- בהמשך בוחן

- משוואות דיפרנציאליות

חישובי שגיאות

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^* \subseteq \mathbb{R}$ סופיים - מספרים שאפשר לייצג

$x \in \mathbb{R}$, יש לו קירוב $x^* \in \mathbb{R}^*$, $0 \in \mathbb{R}^*$

$0^* = 0$.

$\frac{|x - x^*|}{|x|}$ - דיוק יחסי.

נניח שרוצים לחשב את $f(x)$

איך אני הדיוק פה x מול לינאריזציה

עם אובדות הדיוק?

x, x^* , $f(x)$, $f(x^*) = f(x')$

עבור x' המקיים $\underline{\underline{|x'-x| \le |x^*-x|}}$

$$\left| \frac{f(x^*) - f(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{f(x') - f(x)}{f(x)} \right| =$$

$$\left| \frac{(f(x') - f(x))(x'-x) \cdot x}{(x'-x) \cdot x f(x)} \right| \le \frac{|x^* - x|}{|x|} \cdot$$

$$\left| \frac{(f(x') - f(x)) \cdot x}{(x'-x) \cdot f(x)} \right| \approx \underline{\underline{\left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right|}} \cdot \frac{|x^* - x|}{|x|}$$

הגדרה: מספר המצב של f

ב- x (condition number) הוא

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

(תחת ההנחה ש- $x, f(x) \neq 0$)

דוגמא: $f(x) = ax+b$,

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot a}{ax+b} \right| = \left| 1 - \frac{b}{ax+b} \right|$$

דוגמא: חישוב מדויק לכל n

נחשב את הערך

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\, dt$$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{t+5} = \ln(t+5) \Big|_0^1 = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{\boxed{t^{n+1}}}{t+5}\,dt = \int_0^1 t^n \cdot \frac{t+5-5}{t+5}\,dt =$$

$$\underbrace{-5\int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt}_{I_n} + \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = -5I_n + \frac{1}{n+1}$$

$$I_n = f_n(I_0) \qquad f_n(x) = (-5)^n x + b_n$$

עבור $b_n \in \mathbb{R}$ כלשהו

$$\mathrm{cond}(f_n)(I_0) = \left| \frac{I_0 \, f_n'(I_0)}{I_n} \right| =$$

$$5^n \cdot \left| \frac{I_0}{I_n} \right| \geq 5^n$$

$$I_n = \frac{I_{n+1} - \frac{1}{n+1}}{-5}$$

$k >> n$

$n-k < 0$

$$I_n = g_n(I_k)$$

$$g_n(x) = (-5)^{n-k} x + c_n$$

$$\operatorname{cond}(g_n)(I_k) = \left| \frac{I_k \cdot -5^{n-k}}{I_n} \right| =$$

$$5^{n-k} \left| \frac{I_k}{I_n} \right| \leq 5^{n-k}$$

≤ 1

שגיאות במימד גבוה.

$$(x_1,\dots,x_n) \longleftrightarrow (x_1^*,\dots,x_n^*)$$

הגדרה: יהי V מרחב ליניארי

מעל $\mathbb{R}$, נורמה על V היא

$=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0\}$

פונקציה $\|\cdot\|: V\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ כך ש-

1. אם $\|v\|=0$ אז $v=0$
2. לכל $a\in\mathbb{R}, v\in V$ $\|av\|=|a|\cdot\|v\|$
3. לכל $u,v\in V$
$\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$

מרחב ליניארי V ביחד עם נורמה

נקרא **מרחב נורמי!**

דוגמאות: $V=\mathbb{R}^d$, $1 \le p$ קבוע

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$$

(הוכ׳: צ. נורמה)

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_1 = \sum |x_i|$$

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$$

"$p=\infty$"

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_\infty = \sup\{|x_i|\}$$

בהינתן נורמה $\|\cdot\|$ על V,

מטריקה על V:

$$d(u,v) = \|u-v\|$$

אם $v_i \in V$ סדרה, (v_i) **מתכנסת**

ל-v אם $\|v_i - v\| \to 0$.

טענה: יהא V מרחב וקטורי עם

שתי נורמות $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$

אז שני התנאים הבאים שקולים

1. לכל סדרה (v_i) ו- $v\in V$

$\|v_i - v\|_1 \to 0$ אמ"מ $\|v_i - v\|_2 \to 0$

2. יש קבוע $C>0$ כך שלכל

$v\in V$, $\frac{1}{C}\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C\|v\|_1$

עובדה: כל הנורמות על $\mathbb{R}^d$

הן שקולות.

אפשר לתאם נורמה $\|\cdot\|$ על $\mathbb{R}^d$

ולהגדיר את הדיוק היחסי

ע"י $\frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$

נניח ש $T: U \to V$ העתקה

לינארית ובמרחב נורמות $\|\cdot\|_U$

של U ו- $\|\cdot\|_V$ של V.

רוצים לחשב את ההשפעה של

הפעלת T על הדיוק היחסי:

$$\frac{\|Tx^*-Tx\|_V}{\|Tx\|_V} = \frac{\|T(x^*-x)\|_V}{\|T(x)\|_V} =$$

$$\frac{\|T(x^*-x)\|_V \cdot \|x^*-x\|_U \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V \cdot \|x^*-x\|_U \cdot \|x\|_U} \le \frac{\|T\| \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V} \cdot \frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$$

נורמה של T: העתקה לינארית

בין שני מרחבים נורמים, נגדיר

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_V}{\|x\|_U} = \sup_{\|x\|_U=1} \|T(x)\|_V$$

העתקות הלינאריות * $Hom(U,V)$

החסומות. $\|T\| \leftarrow T$ נורמה

במרחב הזה

נגדיר מספר המצב של T

בנקודה x הוא

$$cond(T)(x) = \frac{\|x\|\cdot\|T\|}{\|T(x)\|}$$

אם T הפיכה, ואפשר לרשום $x = T^{-1}(y)$

$cond(T) :=$

$$\sup_{x} cond(T)(x) = \|T\| \cdot \|T^{-1}\|$$ נכון

נניח ויש לפתור משוואה

$Tx = b$, מה הטעות היחסית

[illegible] רק הקירוב של b

של [illegible] b^* ?

מטריצת הילברט!

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

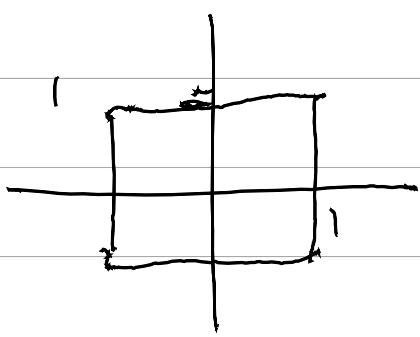
$$cond_2 T_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^{4n+4}}{2^{15/4} \cdot \sqrt{\pi n}}$$

$T: U \to V$ העתקה לינארית

$U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$ $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

אז T מיוצגת ע"י

מטריצה $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$.



$$\boxed{\|T\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{cond}(f)(x) = \frac{|x| \cdot |f'(x)|}{|f(x)|}$$

$x = 17$

$y = -17 + \varepsilon$

$2 \cdot 17 = 34$

$T : U \to V$. $V, \|\cdot\|$

$$\|T\| = \sup_{|u|=1} \|Tu\|$$

$$\operatorname{cond}(T)(u) = \frac{\|u\| \cdot \|T\|}{\|Tu\|} \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T\|$$

$\|$

$\operatorname{cond}(T)$

[1.1] $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ [illegible] 3

$f(x,y) = x + y$

$$\operatorname{cond}(f)(x,y) = \frac{\|\langle x,y\rangle\| \cdot \|f\|}{|x+y|} = \frac{\max(|x|,|y|) \cdot 2}{(x+y)}$$

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

2. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\underline{x}^* \in \mathbb{R}^{*n}, \; x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\|f(x^*) - f(x)\|}{\|f(x)\|} =$$

$$= \varepsilon$$

$$\frac{\|\underline{f(x^*) - f(x)}\| \cdot \|x\| \cdot \|x^* - x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x\| \, \|x^* - x\|} \approx$$

$$\frac{\|\underline{df(x)}(x^* - x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x^* - x\|} \cdot \varepsilon \leq \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|} \cdot \varepsilon$$

<u>הגדרה:</u>

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|}$$

דרך נוספת: לפונקציה של $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

כ-m פ׳ $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

ונחשב את השגיאה היחסית של

f_i לפי x_j, נקבל

מטריצה

$$\left(cond_{x_j}(f_i)\right)_{i,j}$$

<u>דוגמה 3:</u>

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$df=\begin{pmatrix}-\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2}\\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2}\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cond}(f)(x,y) = \frac{\max(|x|,|y|)\cdot\max\left(\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2}\right)}{\max\left(\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|,\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\right)}$$

$$f_1(x,y) = \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x}-\frac{1}{y}$$

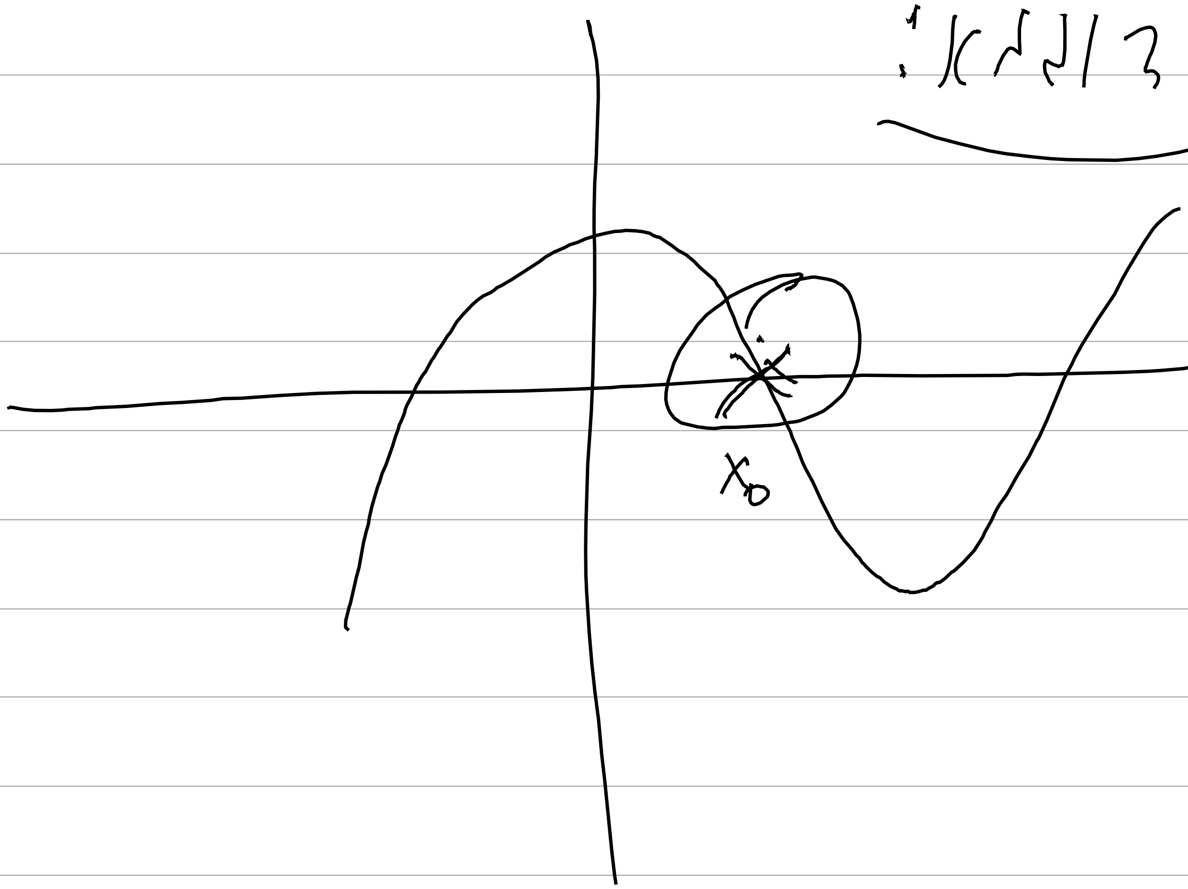
$$\operatorname{cond}_x(f_1) = \frac{|x|\cdot\frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|} \qquad \frac{|y|\cdot\frac{1}{y^2}}{\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|}$$

$$\parallel$$

$$\frac{|y|}{|x+y|} \qquad \frac{|x|}{|x+y|}$$

$$\operatorname{cond}_x(f_2) = \frac{|x|\cdot\frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|} = \frac{|y|}{|x-y|} \qquad \frac{|y|\;\frac{1}{y^2}}{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|} = \frac{|x|}{|x-y|}$$

דוגמא:



קוקצים דרגה n

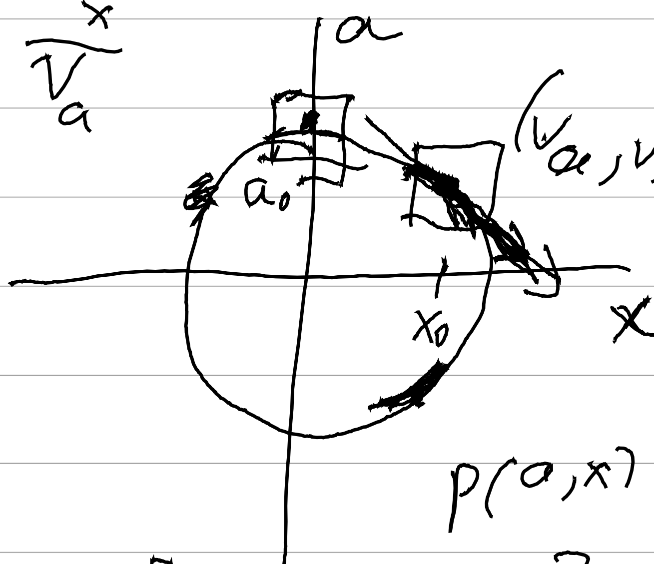
$$P_n(\overline{a}, X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

$P_n(\overline{a^0}, \underline{\underline{x_0}}) = 0$ $\qquad$ X_0 , $\overline{a^0}$

$\approx$

$\underline{F(x,y) = x^2 + y^2}$

$\frac{V_x}{V_a}$



$a_0 = 1$

$x = 0$

$p(a,x)$ $\qquad$ $\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = 2x}$

$a^2 + x^2 = 1$ $\qquad$ $\underline{\underline{a^2 + x^2 - 1 = 0}}$

$X = X(a)$ $\qquad$ $p(a, X(a)) = 0$

$X_0 = X(a_0)$ $\qquad$ $X = \sqrt{1 - a^2}$

$$F(a, x) = 0 \qquad F(a_0, x_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial X}(a_0, x_0) \neq 0 \Rightarrow X = X(a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial a} \Big/ \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$df \cdot \begin{pmatrix} V_a \\ V_x \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ V_x \end{pmatrix} = 0$$

$$V_a \frac{\partial f}{\partial a} + V_x \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$x = x(\bar{a})$$

$$\mathrm{cond}_{a_i}(x) = \frac{|a_i| \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial a_i}\right|}{|x|} = \frac{|a_i| \cdot |x^i|}{|x| \cdot |p'(x)|}$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_i} = -\,{}^{\partial p}/_{\partial a_i} \Big/ {}^{\partial p}/_{\partial x} =$$

$$x^i \Big/ \underline{\sum j a_j x^{j-1}} = x^i \Big/ p'(x)$$

הפולינום של וילקינסון

$$p(x) = (x-1)\cdots(x-n)$$

השגיאה הכללית:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad$ $f^*:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$

$f(x)$ $\qquad$ $f^*(x^*)$

הנאה: $f^*(x^*)=f(x')$ לאיזשהו x'

$$\frac{|f^*(x^*)-f(x)|}{|f(x)|}=\frac{|f(x')-f(x^*)+f(x^*)-f(x)|}{|f(x)|}\le$$

$$\frac{|f(x')-f(x^*)|}{|f(x)|}+\frac{|f(x^*)-f(x)|}{f(x)}$$

$$\frac{|f(x')-f(x^*)|}{|f(x)|}\approx\frac{|f(x')-f(x^*)|}{|f(x^*)|}\le$$

$$\underbrace{\mathrm{cond}(f)(x^*)}_{\mathrm{cond}(f)(x)} \cdot \boxed{\frac{|x'-x^*|}{|x^*|}}$$

מס' המצב של האלגוריתם f^*

[illegible]

$$\mathrm{cond}(f^*)(x^*) = \inf_{f(x') = f^*(x^*)} \frac{|x'-x^*|}{|x^*|}$$

$$\underline{\mathrm{cond}(f)(x)} \left(\frac{|x-x^*|}{|x|} + \mathrm{cond}(f^*)(x^*) \right)$$

קירובים לפונקציות ואינטרפולציה

$f: X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה
$\qquad\quad\;\; \mathbb{C}$

רוצים לקרב אותה ע"י פונקציות פשוטות,

A מרחב וקטורי של פונקציות על מרחב "גאומטרי" X. למשל

- X - תת-קבוצה סגורה וחסומה ב-$\mathbb{R}^n$
- X - קבוצה סופית

$A = C(X)$ פונקציות רציפות מ-X ל-$\mathbb{R}$ או ל-$\mathbb{C}$.

$\mathcal{A} \subseteq P$ תת מרחב של הפונקציות

שבעצמתן מקרבים.

למשל: P - פולינומים.

מה צריך לקרב? למדוד את

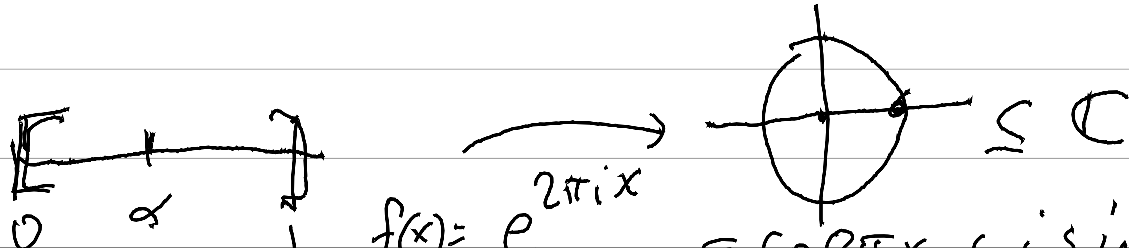
האיבר הקרוב ביותר ב-P

לפונקציה $f \in A$ ביחס לנורמה נתונה

$\|\cdot\|$ על A.

יהי $X=$ המעגל, הקטע $[0,1]$

שבו זיהינו את 1 ו-0.



$f(x) = e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$

י. מרחב מעל $\mathbb{C}$ ב מספרים של 'ד'

$\cos(2\pi nx)$ ו- $\sin(2\pi nx)$ הם אלגברה

$n\in\mathbb{Z}$

(סגור תחת כפל)

$$\{e^{2\pi i n x}\}$$

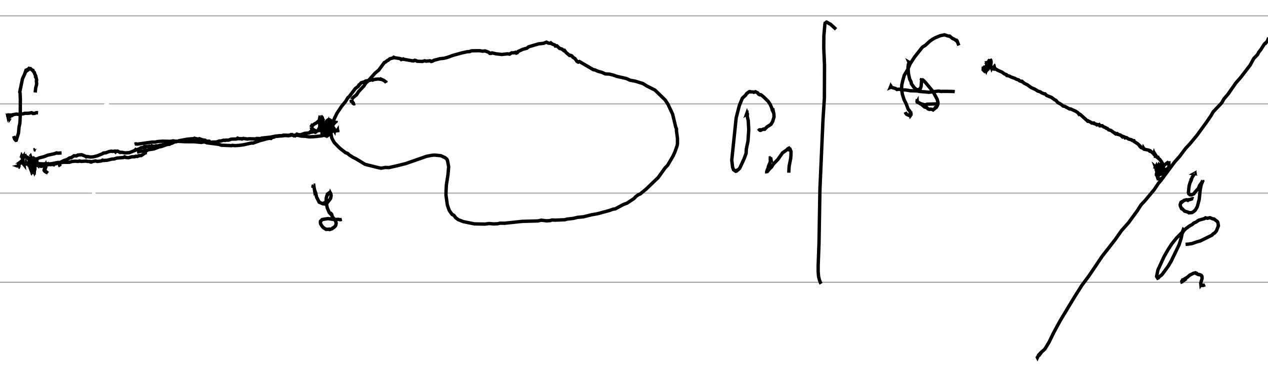
$$P=\bigcup P_i \qquad P_0\subseteq P_1\subseteq P_2 \dots$$

תתי מרחבים ממימד סופי. רציפ':

לכל $f\in A$ ולכל $\varepsilon>0$ יש n

כך ש- $d(f,P_n)<\varepsilon$

$$d(f,P_n)=\inf_{y\in P_n} d(f,y)=\inf_{y\in P_n}\|f-y\|$$



על $C(X)$ יש נורמה טבעית

נורמת הסופרימום:

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$$

<u>משפט סטון-ווירשטראס:</u> אם $P \subseteq C(X)$ תת-אלגברה (סגורה תחת כפל, מכילה את הפונקציות הקבועות) ולכל $x \neq y$ יש $p \in P$ כך ש- $\underline{p(x) \neq p(y)}$. ($P$ מפרידה נקודות) אז <u>P צפופה ב-$C(X)$</u>

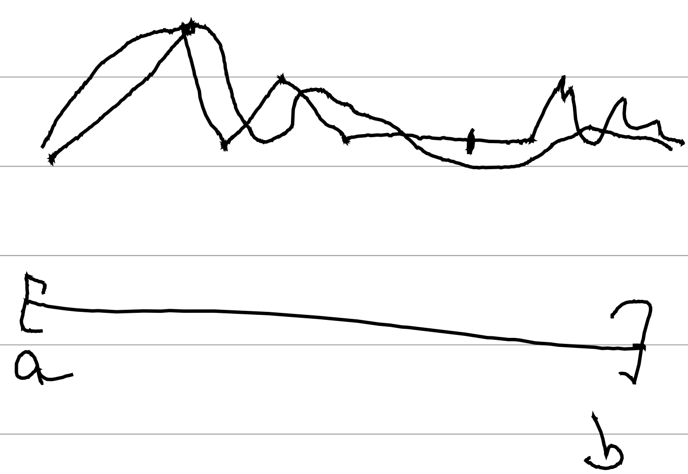
<u>דוגמה:</u> $X=[a,b]$ ו- P פולינומים במשתנה אחד. אז $P \subseteq C(X)$ תת-אלגברה מפרידה נקודות ולכן צפופה.

P צפופה ב-$C(X)$: לכל $f \in C(X)$

ולכל $\varepsilon>0$ יש $p\in P$ כך ש-

$\|f-p\|<\varepsilon$

כלומר לכל $x\in X$ $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.



במקרה המרוכב, P צריכה להיות

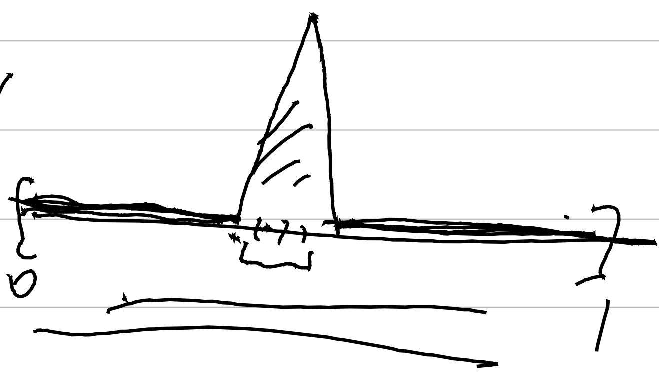
סגורה תחת הצמדה

דוגמא: כל פונקציה רציפה

על המעגל ואפשר לקרב ע"י

פונקציות טריגונומטריות:

מש

$\sup\Big($  $\Big) = 1$

$\mathbb{R}^n$ לכל $1\le p\le\infty$ יש נורמה $\|\cdot\|_p$

$\|\bar{x}\|_\infty = \max(|x_i|)$

$\|\bar{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$ $\quad 1\le p<\infty$

שלב X קבוצה סגורה נורמה.
הפופולרית בין $\|\cdot\|_\infty$

נניח ש־ X סגורה או מקבלה
קורדינטות של ה־ עם סגירות ב־$\mathbb{R}^n$.
(זו מרחב שלם קומפקטי מקדם גודל)

נגדיר $\|\cdot\|_2 : C(X) \to \mathbb{R}$

על ידי (הנורמה L_2).

$$\|f\|_2 = \sqrt[2]{\int_X |f|^2}$$

אם $X=\{1,\dots,n\}$ מקבלים:

את הנורמה L_2 הקודמת

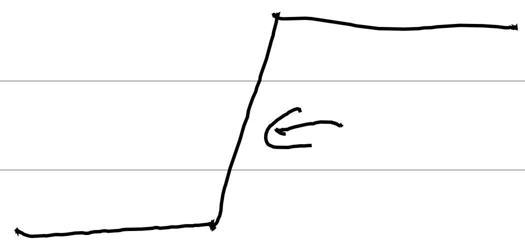
בנוסף יתר [illegible], אפשר לקבוע

פונקצית חיובית $w: X\to\mathbb{R}$ ולהגדיר

$$\|f\|_{w,2} = \sqrt[2]{\int_X |f|^2 \cdot w}$$

$$\|f\|_2^2 = \int_X |f|^2 \le \sup_X |f|^2 \cdot \boxed{\int_X 1} =$$

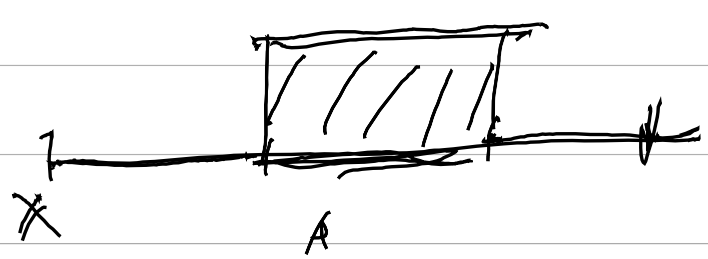
$$\|f\|_\infty^2$$



הג' ורציפות צפיפות קב'
האינטגרלים.

X $\qquad f: X \to \mathbb{R}$

$A \subseteq X$ $\qquad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$



$\int_X 1_A =$ הנפח של A

דוגמה: מידת ספירה על קבוצה X

נותנת מידה ~

$f:X\to\mathbb{R}$ $\qquad$ $\int_X f = \sum_{x\in X} f(x)$

ת״ה $f:X\to\mathbb{R}$ (=) $X=\{1,\dots,n\}$

$\|f\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |f(i)|^p}$

יהי V מרחב וקטורי מעל

$k=\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, מכפלה פנימית על V

היא פונק׳ $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to k$

כך ש:

1. לכל $u\in V$, הפ' $v\mapsto\langle v,\underline{u}\rangle$

היא לינארית

2. לכל $u,v\in V$, $\underline{\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}}$

ולכן לכל $u\in V$, $\langle u,u\rangle\in\mathbb{R}$

3. אם $u\neq 0$ אז $\langle u,u\rangle>0$

ש"נ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על V

אז הפונקציה $v\mapsto\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$

היא נורמה של V.

במקרה הממשי, לכל $u,v\in V$

$$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=$$

$$\|u\|^2+\|v\|^2+\underline{2\langle u,v\rangle}$$

הנורמה מגיעה ממכפלה פנימית

אם ורק אם

$$(u,v) \mapsto \frac{\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2}{2}$$

היא מכפלה פנימית.

עבור $p=2$, הנורמה $\|\cdot\|_2$

על $C(X)$ היא

$$(u,v) \mapsto \int_X u\cdot \bar{v}$$

באמצעות מכפלה פנימית נוכל

לדבר על זוויות. בפרט, אורתוגונליים

u,v הם ניצבים אם $\langle u,v\rangle=0$.

אם $v_1,\dots,v_n$ ניצבים בזוגות

אזי

$$\left\|\sum a_i v_i\right\|^2 = \sum a_i^2 \|v_i\|^2$$

(הכללה של הנוסחה שראינו).

נניח ש- A קבוצת הפונקציות

הממשיות

הרציפות של X, ו- $P = \cup P_i$

תת-מרחב, ונתונה מכפלה פנימית

של A. נניח שבחרנו בסיס

$\{\pi_i\}$ ל- P_n [בסדר המתאים]

ו- $f \in A$.

$T(c_1, \dots, c_m) =$

$$\|f - \sum c_i \pi_i\|^2 = \langle f - \sum c_i \pi_i, f - \sum c_i \pi_i \rangle =$$

$$\|f\|^2 - 2 \sum c_i \langle f, \pi_i \rangle + \sum c_i c_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle$$

המינימום היחיד של T מתקבל

במקרה שבו כל הנגזרות של

T לפי ה-c_i הן 0.

$$0 = \frac{\partial T}{\partial c_k} = -2 \langle f, \pi_k \rangle + 2 \sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle$$

$$\sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle = \langle f, \pi_k \rangle$$

מקבלים מערכת משוואות

$A\tilde{c} = \tilde{b}$

כאשר $b_i = \langle f, \pi_i \rangle$

ו- $A = (\langle \pi_i, \pi_j \rangle)_{i,j}$

A מטריצה סימטרית וחיובית:

$(x,y) \mapsto \underline{\underline{\langle x, Ay \rangle}}$ מכפלה פנימית המוגדרת ב- $\mathbb{R}^n$

היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$

כלומר, אם $\bar{x} \neq 0$ אז

$$\underline{\underline{\bar{x} \cdot A \bar{x} > 0}}$$

כי

$$\bar{x} \cdot A \bar{x} = \sum_{i,j} x_i x_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle = \underline{\underline{\left\| \sum x_i \pi_i \right\|^2}}$$

$\{\pi_i\}$ בסיס ולכן $\sum x_i \pi_i \neq 0$ אם $\bar{x} \neq 0$.

בנוסף, A הפיכה ולכן יש
פתרון למערכת.