שיטות הקירובים

Walter Gautschi

- אלגברה לינארית: פתרון מערכות משוואות, למצוא ערכים עצמיים, ...

- אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=$

  או $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

- אינטרפולציה: נתונות נקודות וערכים בנקודות האלה, למצוא פונקציה נחמדה שעוברת בנקודות:

- קירוב פונקציות: קירוב פונקציה לפונקציה שקרובה אליה מסוג מסוים (לדוגמא פולינום).

- בהמשך בוחן

- משוואות דיפרנציאליות

חישובי נגזרות

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^* \subseteq \mathbb{R}$ סופיים - מספרים שאפשר לייצג

$x \in \mathbb{R}$, יש לו ייצוג $x^* \in \mathbb{R}^*$, $0 \in \mathbb{R}^*$

$0^* = 0$.

$\frac{|x - x^*|}{|x|}$ - דיוק יחסי.

נניח שרוצים לחשב את $f(x)$

איך אוי הדיוק של x מול לגרפ.יר

אם אוכלות הדיוק?

$f^{*}(x^{*}) = f(x')$, $f(x)$, x, x^*

עבור x' , המקיים $|x'-x| \leq |x^*-x|$

$$\left|\frac{f^{*}(x^{*}) - f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x') - f(x)}{f(x)}\right| =$$

$$\left|\frac{(f(x')-f(x))(x'-x)\cdot x}{(x'-x)\cdot x f(x)}\right| \leq \frac{|x^{*}-x|}{|x|}\cdot$$

$$\left|\frac{(f(x')-f(x))\cdot x}{(x'-x)\cdot f(x)}\right| \approx \underbrace{\left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right|}\cdot\frac{|x^{*}-x|}{|x|}$$

הגדרה: מספר המצב של f

ב- x (condition number) הוא

$$\text{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

(תחת ההנחה ש- $x, f(x) \neq 0$)

דוגמא: $f(x) = ax+b$,

$$\text{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot a}{ax+b} \right| = \left| 1 - \frac{b}{ax+b} \right|$$

דוגמא: רוצים לחשב לכל n

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt$$ נחשב את הערך

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{t+5} = \ln(t+5) \Big|_0^1 = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{\boxed{t^{n+1}}}{t+5}\,dt = \int_0^1 t^n \cdot \frac{t+5-5}{t+5}\,dt =$$

$$-5\underbrace{\int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt}_{I_n} + \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = -5I_n + \frac{1}{n+1}$$

$$I_n = f_n(I_0) \qquad f_n(x) = (-5)^n x + b_n$$

כאשר קבוע $b_n \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{cond}(f_n)(I_0) = \left| \frac{I_0 \, f_n'(I_0)}{I_n} \right| =$$

$$5^n \cdot \left| \frac{I_0}{I_n} \right| \geq 5^n$$

$$I_n = \frac{I_{n+1} - \frac{1}{n+1}}{-5}$$

$k >> n$

$n - k < 0$

$$I_n = g_n(I_k)$$

$$g_n(x) = (-5)^{n-k} x + c_n$$

$$\mathrm{cond}(g_n)(I_k) = \left| \frac{I_k \cdot -5^{n-k}}{I_n} \right| =$$

$$5^{n-k} \left| \frac{I_k}{I_n} \right| \leq 5^{n-k}$$

≤ 1

שגיאות במימד נמוך גבוה.

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_1^*,\dots,x_n^*)$$

הגדרה: יהי V מרחב ליניארי

מעל $\mathbb{R}$, נורמה על V היא

פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\ge 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\}$ כך ש-

1. אם $\|v\| = 0$ אז $v = 0$
2. לכל $a \in \mathbb{R}$, $v \in V$ $\|a v\| = |a| \cdot \|v\|$
3. לכל $u, v \in V$ $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$

מרחב ליניארי V ביחד עם נורמה:

נקרא **מרחב נורמי!**

דוגמאות: $V=\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R} \ni p \geq 1$

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_p=\sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$$

(תרגיל: נורמה)

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_1=\sum |x_i|$$

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_2=\sqrt{\sum x_i^2}$$

"$p=\infty$"

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_\infty=\sup\{|x_i|\}$$

בהינתן נורמה $\|\cdot\|$ על V,
מטריקה על V:

$$d(u,v)=\|u-v\|$$

אם $v_i\in V$ סדרה, (v_i) מתכנסת
ל-v אם $\|v_i-v\|\to 0$.

טענה: יהי V מרחב וקטורי עם
שתי נורמות $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$
אז שני התנאים הבאים שקולים
1. לכל סדרה (v_i) ו-$v \in V$
$\|v_i - v\|_1 \to 0$ אמ"מ $\|v_i - v\|_2 \to 0$
2. יש קבוע $C>0$ כך שלכל
$v \in V$, $\frac{1}{C}\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C\|v\|_1$

עובדה: כל הנורמות על $\mathbb{R}^d$
הן שקולות.
אפשר לחשוב נורמה $\|\cdot\|$ על $\mathbb{R}^d$

ולהגדיר את הדיוק היחסי

על ידי $\dfrac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$

נניח ש $T: U \to V$ העתקה

לינארית ובנוסף נורמות $\|\cdot\|_U$

על U ו- $\|\cdot\|_V$ על V.

נרצה לחשב את ההשפעה של

הפעלת T על הדיוק היחסי:

$$\frac{\|Tx^*-Tx\|_V}{\|Tx\|_V} = \frac{\|T(x^*-x)\|_V}{\|T(x)\|_V} =$$

$$= \frac{\|T(x^*-x)\|_V \cdot \|x^*-x\|_U \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V \, \|x^*-x\|_U \, \|x\|_U} \leq \frac{\|T\| \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V} \cdot \frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$$

תהי $T: U \to V$ העתקה לינארית

בין שני מרחבים נורמים, נגדיר

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_V}{\|x\|_U} = \sup_{\|x\|_U = 1} \|T(x)\|_V$$

$\underline{\underline{Hom(U,V)}}$ - העתקות הלינאריות

החסומות. $T \mapsto \|T\|$ נורמה

במרחב הזה

נגדיר מספר המצב של T

בנקודה x הוא

$$\underline{\underline{cond(T)(x)}} = \frac{\|x\| \cdot \|T\|}{\|T(x)\|}$$

אם T הפיכה, ונסמן לרגע $x = T^{-1}(y)$

$\mathrm{cond}(T) :=$

$$\sup_x \mathrm{cond}(T)(x) = \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \quad \text{סכל}$$

שית דרישה לפתרא מוולה

$Tx=b$, מה המטרה היתוית

שסלפעש עקב הקירוב של b

על ידי b^* ?

<u>מטריצת הילברט!</u>

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

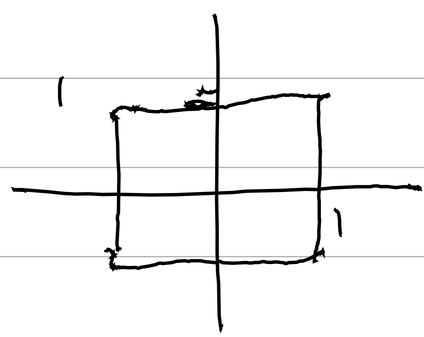
$$\mathrm{cond}_2 T_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^{4n+4}}{\underbrace{2^{15/4} \cdot \sqrt{\pi n}}}$$

$T: U \to V$ העתקה לינארית

$U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$ $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

אם T מיוצגת ע"י

מטריצה $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$.



$$\|T\| = \max_{j} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\operatorname{cond}(f)(x) = \frac{|x| \cdot |f'(x)|}{|f(x)|}$$

$x = 17$

$y = -17 + \varepsilon$

$2 \cdot 17 = 34$

$$T : U \to V \qquad . \quad V, \|\cdot\|$$

$$\|T\| = \sup_{|u|=1} \|Tu\|$$

$$\operatorname{cond}(T)(u) = \frac{\|u\| \cdot \|T\|}{\|Tu\|} \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T\|$$

$$\|$$

$$\operatorname{cond}(T)$$

[1.1] $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad$ דוגמא:

$f(x,y) = x + y$

$$\operatorname{cond}(f)(x,y) = \frac{\|\langle x,y\rangle\| \cdot \|f\|}{|x+y|} = \frac{\max(|x|,|y|) \cdot 2}{|x+y|}$$

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

2. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\underline{x}^* \in \mathbb{R}^{*n},\ x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\|f(x^*)-f(x)\|}{\|f(x)\|} =$$

$$\frac{\underline{\|f(x^*)-f(x)\|} \cdot \|x\| \cdot \|x^*-x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x\| \ \|x^*-x\|} \approx \qquad = \varepsilon$$

$$\frac{\|\underline{\underline{df(x)}}(x^*-x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x^*-x\|} \cdot \varepsilon \leq \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|} \cdot \varepsilon$$

<u>הגדרה:</u>

$$\operatorname{cond}(f)(x) = \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|}$$

דבר נוסף. לחשוב על $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

כעל m פ' $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

ונדבר על השגיאה היחסית של

f_i כפי של x_j, נקבל

מטריצה

$$\left(\mathrm{cond}_{x_j}(f_i)\right)_{i,j}$$

דוגמא 3: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$df=\begin{pmatrix}-\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2}\\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2}\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cond}(f)(x,y) = ? \quad \frac{\max(|x|,|y|)\cdot \max\left(\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2}\right)}{\max\left(\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|, \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\right)}$$

$$f_1(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

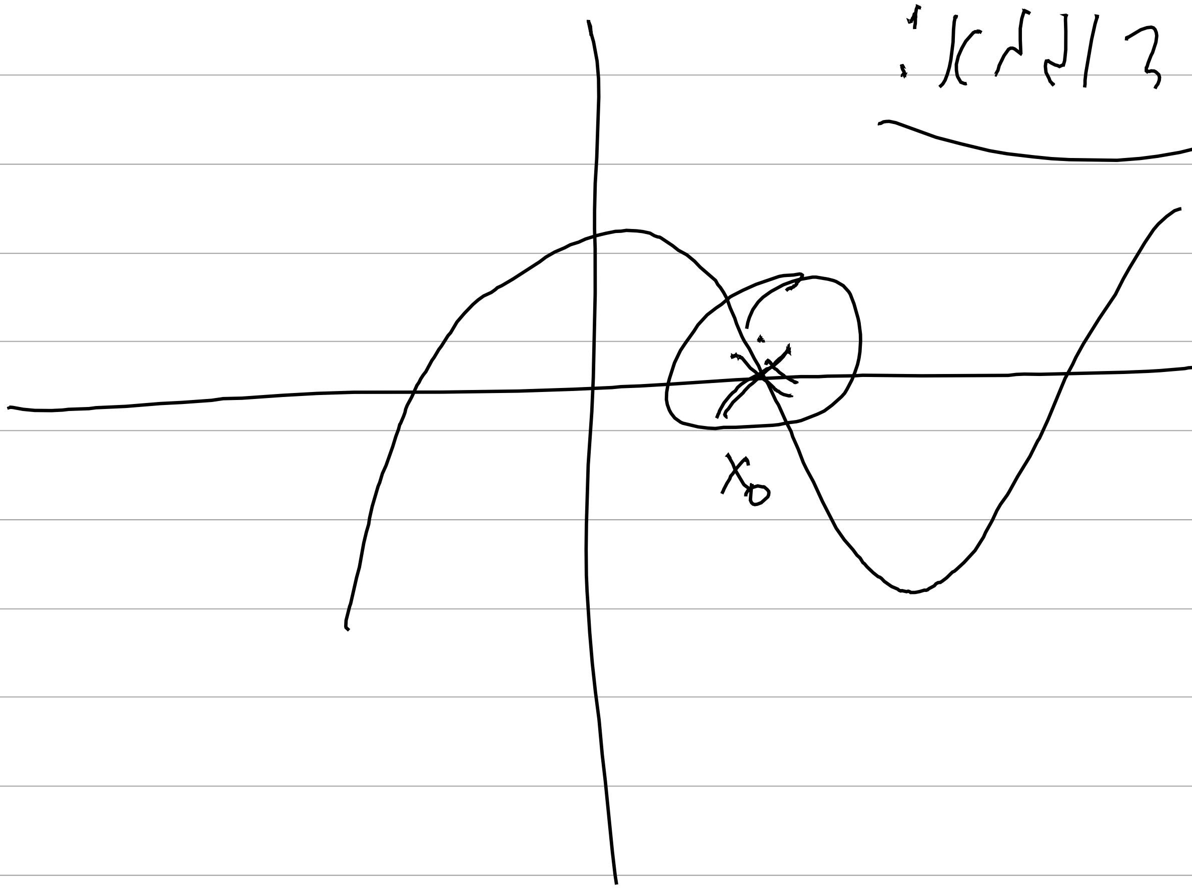
$$\operatorname{cond}_x(f_1) = \frac{|x|\cdot\frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|} \qquad \frac{|y|\cdot\frac{1}{y^2}}{\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|}$$

$$\parallel$$

$$\frac{|y|}{|x+y|} \qquad \frac{|x|}{|x+y|}$$

$$\operatorname{cond}_x(f_2) = \frac{|x|\cdot\frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|} = \frac{|y|}{|x-y|} \qquad \frac{|y|\ \frac{1}{y^2}}{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|} = \frac{|x|}{|x-y|}$$

דוגמא:



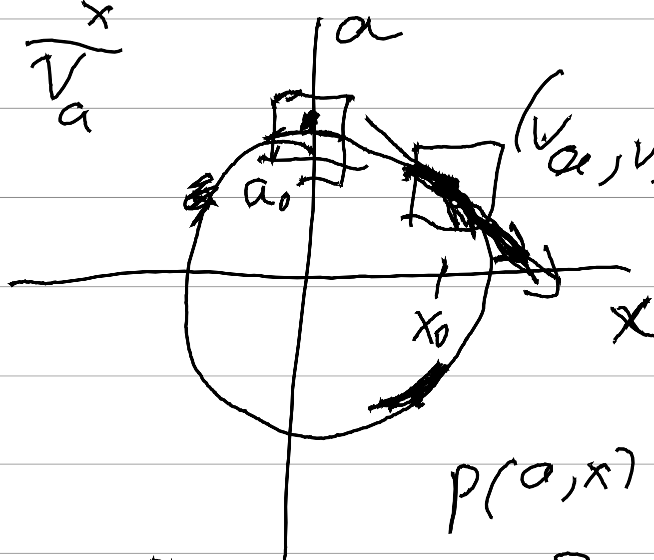
קוקצים דרגה n

$$P_n(\bar{a}, X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

$$P_n(\bar{a^0}, \underline{x_0}) = 0 \qquad x_0, \; \bar{a^0}$$

$$F(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{V_x}{V_a}$$



$a_0 = 1$

$x = 0$

$p(a,x)$ $\quad \boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = 2x}$

$$a^2 + x^2 = 1 \qquad \underline{a^2 + x^2 - 1 = 0}$$

$$x = x(a) \qquad P(a, x(a)) = 0$$

$$x_0 = x(a_0) \qquad x = \sqrt{1 - a^2}$$

$$F(a, x) = 0 \qquad F(a_0, x_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial X}(a_0, x_0) \neq 0 \Rightarrow X = X(a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = -\frac{\partial F}{\partial a} \Big/ \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$df \cdot \begin{pmatrix} v_a \\ v_x \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_x \end{pmatrix} = 0$$

$$v_a \frac{\partial f}{\partial a} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$x = x(\bar{a})$$

$$\mathrm{cond}_{a_i}(x) = \frac{|a_i| \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial a_i}\right|}{|x|} = \frac{|a_i| \cdot |x^i|}{|x| \cdot |p'(x)|}$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_i} = -\frac{\partial p/\partial a_i}{\partial p/\partial x} =$$

$$\frac{x^i}{\sum j a_j x^{j-1}} = \frac{x^i}{p'(x)}$$

הדוגמא של ווילקינסון:

$$p(x) = (x-1) \cdots (x-n)$$

השגיאה הכללית:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f^*:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$$

$$f(x) \qquad f^*(x^*)$$

הנחה: $f^*(x^*)=f(x')$ לו יצגו x'

$$\frac{|f^*(x^*)-f(x)|}{|f(x)|}=\frac{|f(x')-f(x^*)+f(x^*)-f(x)|}{|f(x)|}\le$$

$$\frac{|f(x')-f(x^*)|}{|f(x)|}+\frac{|f(x^*)-f(x)|}{f(x)}$$

$$\frac{|f(x')-f(x^*)|}{|f(x)|}\approx\frac{|f(x')-f(x^*)|}{|f(x^*)|}\le$$

$$\underbrace{\mathrm{cond}(f)(x^*)}_{\mathrm{cond}(f)(x)} \cdot \boxed{\frac{|x' - x^*|}{|x^*|}}$$

מס' המצב של האלגוריתם f^*

הינו

$$\mathrm{cond}(f^*)(x^*) = \inf_{f(x') = f^*(x^*)} \frac{|x' - x^*|}{|x^*|}$$

$$\underline{\mathrm{cond}(f)(x)} \left(\frac{|x - x^*|}{|x|} + \mathrm{cond}(f^*)(x^*) \right)$$

קירובים לפונקציות ואינטרפולציה

$f: X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה
$\phantom{f: X \to{}} \mathbb{C}$

רוצים לקרב אותה ע"י
פונקציות פשוטות,

A מרחב וקטורי של פונקציות על
מרחב "קומפקטי" X. למשל

- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ תת-קבוצה סגורה וחסומה
- X קבוצה סופית

$A = C(X)$ פונקציות רציפות מ-X
ל-$\mathbb{R}$ או ל-$\mathbb{C}$.

$\mathcal{A} \subseteq P$ תת מרחב של הפונקציות

שבעזרתן מקרבים.

למשל: P - פולינומים.

מה צריך לקרב? למדנו את

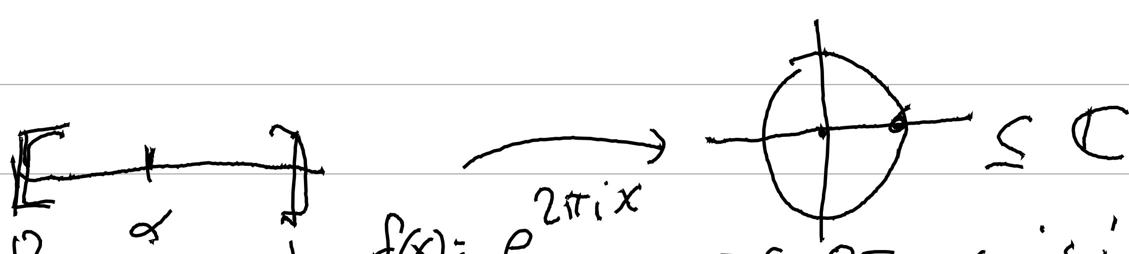
האיבר הקרוב ביותר ב-P

לפונקציה $f \notin \mathcal{A}$ ביחס לנורמה נתונה.

וזה של $\mathcal{A}$.

יהי $X =$ המעגל, הקטע $[0,1]$

שבו זיהינו את 1 ו-0.



$f(x) = e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$

י. מרחב מעל $\mathbb{C}$ ב ספרבי של ד'

$\cos(2\pi n x)$ ו- $\sin(2\pi n x)$ הן אלגברה

$n\in\mathbb{Z}$

(סגור יחסי כפל)

$\{e^{2\pi i n x}\}$

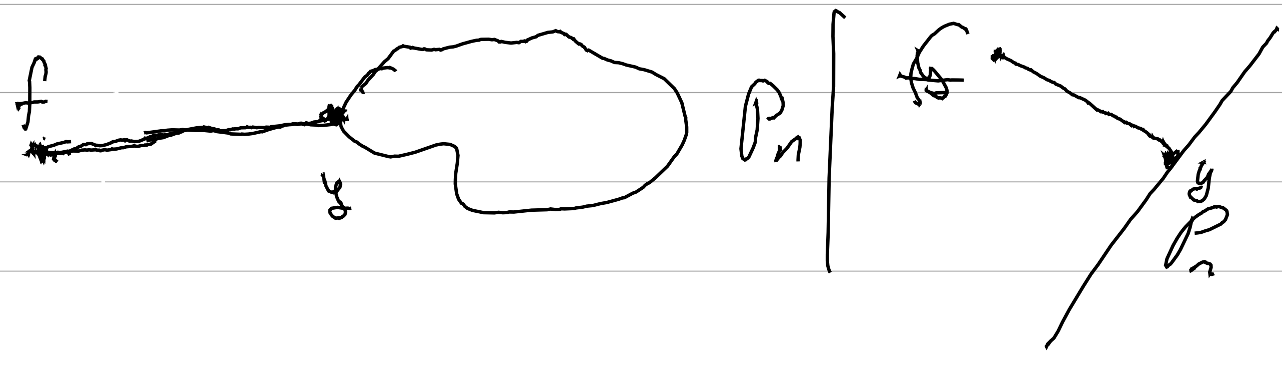
$P_0\subseteq P_1\subseteq P_2 \dots$, $P=\bigcup P_i$

הגד' מרחב ממ' O לפ'. רציפ':

לכל $f\in A$ ולכל $\varepsilon>0$ יש n

כך ש- $d(f,P_n)<\varepsilon$

$$d(f,P_n)=\inf_{y\in P_n} d(f,y)=\inf_{y\in P_n}\|f-y\|$$



על $C(x)$ יש נורמה טבעית

נורמת הסופרימום:

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$$

<u>משפט סטון-ווירשטראס:</u> אם

$P \subseteq C(x)$ תת-אלגברה (סגורה תחת

כפל, מכילה את הפונקציות הקבועות)

ולכל $x \neq y$ יש $p \in P$

כך ש- $p(x) \neq p(y)$ (P "מפרידה

נקודות") אז P <u>צפופה ב-$C(x)$</u>

<u>דוגמא:</u> $X=[a,b]$ ו- P פולינומים

במשתנה אחד. אז $P \subseteq C(x)$ תת-

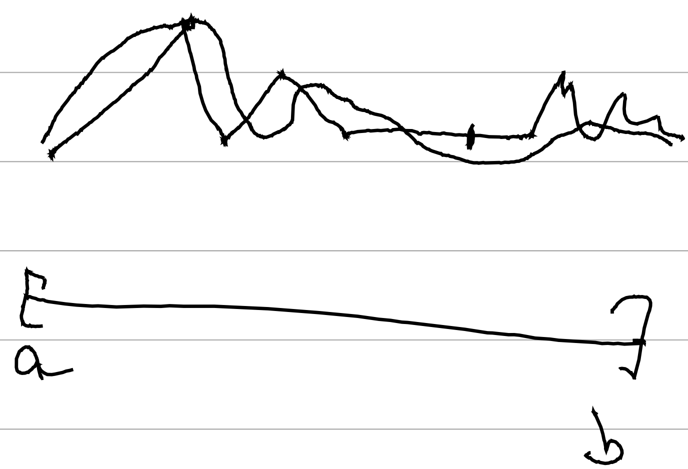
אלגברה שמפרידה נקודות ולכן צפופה

P צפופה ב-$C(X)$: לכל f ב-$C(X)$

ולכל $\varepsilon>0$ יש $p\in P$ כך ש-

$\|f-p\|<\varepsilon$

כלומר לכל $x\in X$ $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.



במקרה המרוכב, P צריכה להיות

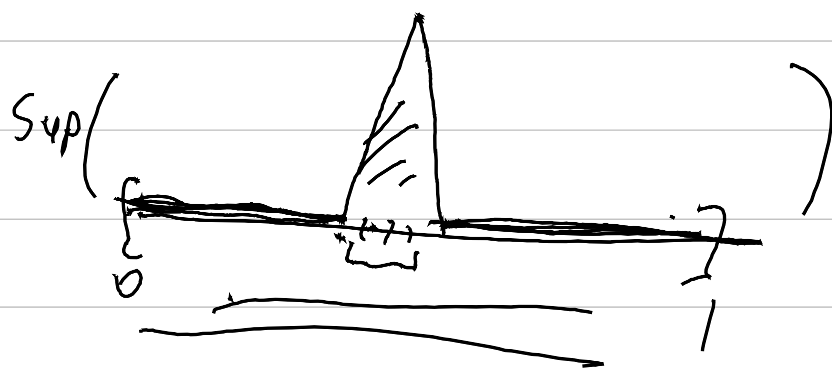
סגורה תחת הצמדה

דוגמא: כל פונקציה רציפה

ב ניתנת לקירוב ע"י

פונקציות טריגונומטריות:

[illegible]



$= 1$

$\mathbb{R}^n$ לכל $1 \le p \le \infty$ יש נורמה $\|\cdot\|_p$

$\|\bar{x}\|_\infty = \max(|x_i|)$

$\|\bar{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$ $\qquad 1 \le p < \infty$

טענה X קבוצה סגורה נורמת
הפונקציות ביחס $\|\cdot\|_\infty$

נניח ש־ X סגורה אז מתפלה
קרבצים של הכל עם סגירה ב־$\mathbb{R}^n$.
(זה מרחב ~~שלם~~ קומפקטי מידת קורל)

נגדיר $\|\cdot\|_2 : C(X) \to \mathbb{R}$

על ידי (הנורמה L_2).

$$\|f\|_2 = \sqrt[2]{\int_X |f|^2}$$

אם $X=\{1,\dots,n\}$ עם מנייה.

זאת הנורמה L_2 הקודמת

באופן יותר כללי, אפשר לקבוע

פונקציה חיובית $w: X \to \mathbb{R}$ ולהגדיר

$$\|f\|_{w,2} = \sqrt[2]{\int_X |f|^2 \cdot w}$$

$$\|f\|_2^2 = \int_X |f|^2 \le \sup_X |f|^2 \cdot \boxed{\int_X 1} =$$

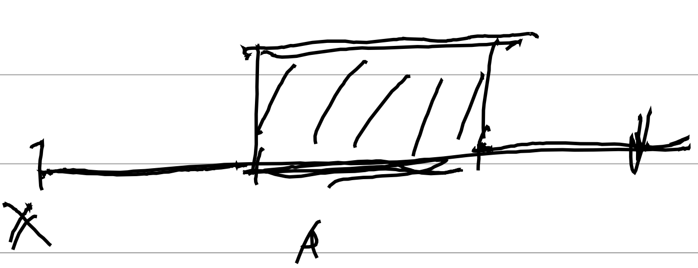
$$\|f\|_\infty^2$$

הג' ורציפות דפיפות קב'

הגזלרגילות.

$X \qquad f: X \to \mathbb{R}$

$A \subseteq X \qquad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$



$\int_X 1_A =$ הנפח של A

בקבוצה סופית X ספירת נקודות

נותנת מידה (=

$f: X \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $\int_X f = \sum_{x \in X} f(x)$

ת״ה $f: X \to \mathbb{R}$ (= $\qquad X = \{1, \dots, n\}$

$\|f\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |f(i)|^p}$

יהי V מרחב וקטורי מעל

ℂ או $k = \mathbb{R}$, <u>מכפלה פנימית</u> על V

היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to k$

כך ש:

1. לכל $u\in V$, הפ' $v\mapsto\langle v,\underline{u}\rangle$

היא לינארית

2. לכל $u,v\in V$, $\underline{\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}}$

בפרט לכל $u\in V$, $\langle u,u\rangle\in\mathbb{R}$

3. אם $u\neq 0$ אז $\langle u,u\rangle>0$

ש"נ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על V

אז הפונקציה $v\mapsto\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$

היא נורמה של V.

במקרה הממשי, לכל $u,v\in V$

$$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=$$

$$\|u\|^2+\|v\|^2+\underline{2\langle u,v\rangle}$$

הנורמה מגיעה ממכפלה פנימית

אם ורק אם

$$(u,v) \mapsto \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}$$

היא מכפלה פנימית.

עבור $p=2$, נורמת $\|\cdot\|_2$

על $C(X)$ היא

$$(u,v) \mapsto \int_X u\cdot\bar{v}$$

באמצעות מכפלה פנימית ניתן

למדוד זוויות. בפרט, נאמר

u,v הם ניצבים אם $\langle u,v\rangle=0$.

אם $v_1,\dots,v_n$ ניצבים בזוגות

אזי

$$\|\sum a_i v_i\|^2 = \sum a_i^2 \|v_i\|^2$$

(הכללה של המשפט שהכרנו).

נניח ש- A קבוצת הפונקציות הממשיות

הרציפות של X, ו- $P=\cup P_i$

תת-מרחב, ונתונה מכפלה פנימית

של A. נניח שבחרנו בסיס

$\{\pi_i\}$ ל- P_n [כרגיל המתאים]

ו- $f\in A$.

$T(c_1,\dots,c_m) =$

$$\|f - \sum c_i \pi_i\|^2 = \langle f - \sum c_i \pi_i , f - \sum c_i \pi_i \rangle =$$

$$\|f\|^2 - 2 \sum c_i \langle f, \pi_i \rangle + \sum c_i c_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle$$

המינימום היחיד של T מתקבל

במקום שבו כל הנגזרות של

T לפי ה-c_i הן 0.

$$0 = \frac{\partial T}{\partial c_k} = -2 \langle f, \pi_k \rangle + 2 \sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle$$

$$\sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle = \langle f, \pi_k \rangle$$

מקבלים מערכת משוואות

$A\tilde{c} = b$

כאשר $b_i = \langle f, \pi_i \rangle$

ו-

$$A = \left(\langle \pi_i, \pi_j \rangle \right)_{i,j}$$

A מטריצה סימטרית וחיובית

$$(x, y) \mapsto \underline{\underline{\langle x, Ay \rangle}}$$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$

היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$

כלומר, אם $\bar{x} \neq 0$ אז

$$\underline{\underline{\bar{x} \cdot A\bar{x} > 0}}$$

כי

$$\bar{x} \cdot A\bar{x} = \sum_{i,j} x_i x_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle = \underline{\underline{\left\| \sum x_i \pi_i \right\|^2}}$$

$\{\pi_i\}$ בסיס ולכן $\sum x_i \pi_i \neq 0$ אם $\bar{x} \neq 0$.

בעבר, A הפיכה ולכן יש

פתרון למערכת.

$(\pi_i)_{i \geq 0}$

$$A = \left(\langle \pi_i , \pi_j \rangle \right)_{0 \leq i,j \leq n}$$

$$A \bar{c} = \bar{b} \qquad \bar{b} = \langle f , \pi_i \rangle$$

דוגמא: $\pi_i = t^{i}$ על $[0,1]$

$$\langle f , g \rangle = \int_0^1 f \cdot g \, dt$$

$$\langle \pi_{i+1} , \pi_{j+1} \rangle = \int_0^1 t^{i+j} \, dt = \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{i+j+1}$$

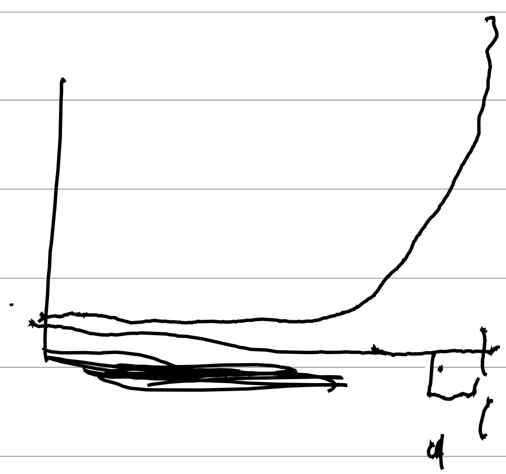
$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

קווינלי: הבעיה $H_n \bar{c} = b$

זו' בעיה (סטיה קטנה ב-b

עלולה לגרום לסטיה גדולה ב-$\bar{c}$).

$[0,1]$ t^i



t^i

פתרון: לעבוד עם בסיס

אורתוגונלי (או אורתונורמלי):

$\langle \pi_i, \pi_j \rangle = 0 \qquad i \neq j \qquad (\langle \pi_i, \pi_i \rangle = 1)$

$$f = \sum \underbrace{a_i} \pi_i$$

$$\langle f, \pi_i \rangle = a_i \langle \pi_i, \pi_i \rangle$$

מה לך רק - כמה? : גם

$\pi_1, \pi_2, \ldots$

נמצא לך גם בסיס אורתוגונלי

שלבי:

$$\hat{\pi}_1 = \pi_1$$

$$\hat{\pi}_{k+1} = \pi_{k+1} - \sum \frac{\langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2} \hat{\pi}_i$$

$$\langle \hat{\pi}_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle - \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = 0$$

$$P = \bigcup P_i \qquad P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots$$

$P_i = \{$ פולינומים מדרגה $\leq i \}$

$$\dim(P_i) = i$$

$$\text{span}(\langle \pi_i \rangle_{i \leq n}) = \text{span}(\langle \hat{\pi}_i \rangle_{i \leq n})$$

$\hat{\pi}_i \in P_i$ | פולינום מתוקן מדרגה i.

$$\underline{\underline{\hat{\pi}_{i+1}}} = t\hat{\pi}_i - \alpha_i \hat{\pi}_i + \sum_{j=0}^{i-1} b_j \hat{\pi}_j =$$

$$(t-\alpha_i)\hat{\pi}_i + \beta_i \cdot \underline{\underline{\hat{\pi}_{i-1}}} + \sum_{j=0}^{i-2} b_j \hat{\pi}_j$$

$$\langle \hat{\pi}_{i+1}, \hat{\pi}_i \rangle = \langle (t-\alpha_i)\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle \Rightarrow$$

$$\overset{!}{=} 0 \qquad \alpha_i \cdot \|\hat{\pi}_i\|^2 = \langle t\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2}$$

$$0 = \underbrace{\langle (t-\gamma_i)\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle} + \underline{\beta_i \, \|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} \Rightarrow$$

$$\beta_i = - \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} =$$

$$- \frac{\langle \hat{\pi}_i , t\hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} = - \frac{\|\hat{\pi}_i\|^2}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2}$$

$$\hat{\pi}_{i+1} = (t-\gamma_i)\hat{\pi}_i + \underline{\ }\beta_i \hat{\pi}_{i-1}$$

הערה: אם הקטע שמגדירים עליו

הוא מהצורה $[-a,a]$

והמשקל הינו סימטרית $W(t)=w(-t)$

$$\left[\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\cdot \overline{g(t)}\,\underline{w(t)}\,dt\right]$$

אז Π_k פ' זוגית עבור k

זוגי ופ' אי-זוגית ל-k אי זוגי.

לכן במקרה הזה $\alpha_i=0$.

דוגמאות: בקטע $[-1,1]$ ולפי ee

נקבל (נוסחת רודריגס)

$$\Pi_k(t)=\frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k$$

כדי להראות ש- π_k אורתו׳

ל- π_i עבור $i<k$, מספיק להראות

$$0 = \langle \pi_k, t^i \rangle = \int_{-1} \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k \cdot t^i \, dt =$$

$$\dots = 0$$

$$\pi_0 = 1 \quad , \quad \pi_1 = \frac{1}{2}(t^2-1)' = t$$

$$\pi_2 = \left((t^2-1)^2\right)'' \cdot \frac{2}{4!} = \frac{1}{12}\cdot\left((t^2-1)^2\right)''$$

$$\pi_k = t^k + \mu_k t^{k-2} + \dots$$

$$\pi_{k+1} = t \cdot \pi_k + \beta_k \cdot \pi_{k-1} \Rightarrow \boxed{\beta_k} = \frac{\pi_{k+1} - t\pi_k}{\pi_{k-1}}$$

$$B_k = \mu_k - \mu_{k+1}$$

$$\mu_k = \frac{k(k-1)}{2(2k-1)} \implies$$

$$B_k = \frac{1}{4 - k^{-2}}$$

<u>[illegible]:</u> פולינומים טריגונומטריים

פ׳ מחזוריות עם מחזור 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(t+1) = f(t)$ לכל t.

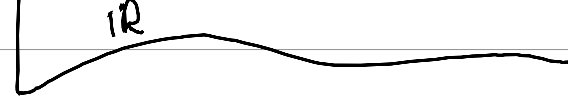
$$\Updownarrow$$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(0) = f(1)$

$$i\sin(2\pi t) + \cos(2\pi t) = e^{2\pi i t}$$

(=)

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)$$



$\underline{\underline{g : S^1 \to \mathbb{C}}}$

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

$$E : [0,1] \to S^1$$

$$E(t) = e^{2\pi i t}$$

$g : S^1 \to \mathbb{C} \rightsquigarrow g \circ E$ פ' מחזורית

$$\int_{S^1} g := \int_0^1 g \circ E \, dt$$

אם $z, w \in S^1$ אז $z \cdot w \in S^1$

נקבע $a \in S^1$ ונגדיר

$$g_a(z) = g(a \cdot z)$$

$\int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g$ א/ז

__תרגיל:__ נניח ש- $g: S^1 \to \mathbb{C}^*$

מקיימת: $g(z\cdot w)=g(z)\cdot g(w)$

צ"ל א. אם $g(z)=1$ לכל z

צ"ל $\int_{S^1} g = 1$

ב. אחרת $\int_{S^1} g = 0$

__הפתרון:__ א' קל די

ב. יש $a\in S^1$ כך ש- $g(a)\neq 1$

$g_a(x)=g(ax)=g(a)\,g(x)$

צ"ל

$$\int_{S^1} g = \int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g(a)\cdot g = \underset{\neq 1}{g(a)} \int_{S^1} g$$

צ"ל $\int_{S^1} g = 0$.

לכל $n \in \mathbb{Z}$ הפ' $g_n(x) = x^n$

מקיימות את התנאים של הלמה

כי $g_n \cdot g_m = g_{n+m}$ $\overline{g_n(x)} = g_{-n}(x)$

כל מה שיש להגדיר מכפלה פנימית

על $\mathbb{C}(S^1)$ ע"י

$$\langle f, g \rangle = \int_{S^1} f \cdot \overline{g}$$

כבר הוכחנו בה"ב g_i מערכת

אורתונורמלית.

מצד שני המרחב שנפרש ע"י

ה-g_i סגור תחת כפל (ותחת הצמוד).

הקבוצה הזו נקראות פולינומים
טריגונומטריים.

נשים לב ש-

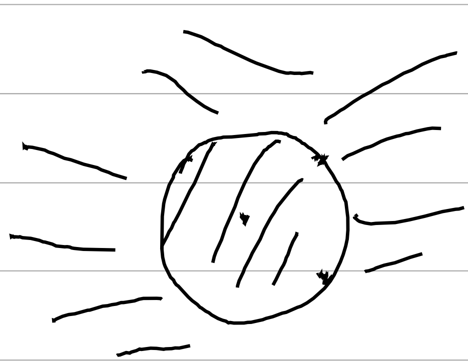
$$0 = \oint_{S^1} x^n = \int_0^1 e^{2\pi i n t}\, dt = \int \underline{\cos 2\pi i n t} + i \underline{\sin 2\pi n t} = 0$$

תרגיל:

$$\mathbb{C}^* = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \}$$

$x \sim y$ אם $x = y$ או

$$X = \mathbb{C}^* / \sim \qquad g_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} \sim x^n = g_n(x) \qquad x = \frac{1}{y}$$



$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^* \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C}^* \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\bar{g}_n"] & X \end{tikzcd}$$

$\pi(x) = \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \in \mathbb{C}$

$\pi(x) = \pi\left(\frac{1}{x}\right)$

לכל $z \in S^1$

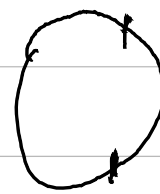
$\pi(z) = Re(z)$

$\pi(S^1) = [-1,1] = X_0$

$$g_n\left(\overbrace{\frac{x+\frac{1}{x}}{2}}^{\pi(x)}\right) = \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2} = \pi(g_n(x))$$

נגדיר X ... h ...

$$* = \int_{X_0} h = \int_{S^1} h\circ\pi = \int_{S^1} h\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)$$



$$\int_0^1 h(Re(e^{2\pi i t}))\,dt = \int_0^1 h(\cos(2\pi t))\,dt$$

$y = \cos(2\pi t)$ $\quad dy = -2\pi \sin(2\pi t)\,dt =$

$$dy = -2\pi \sqrt{1-y^2}\, dt$$

$$x = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} h(y)\, \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \qquad \text{ס/כ}$$

~~אז~~ ה- $\bar{g}_n$ נקראים פולינומי צ'בישב. הוכחנו שהם מערכת אורתונורמלית עבור

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f\cdot g\, \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$

$$\bar{g}_n(\cos 2\pi t) = \cos 2\pi n t$$