שיטות הקירובים

Walter Gautschi

- אלגברה לינארית: פתרון מערכת משוואות, למצוא ערכים עצמיים, ...
- או $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$

  או $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
- אינטרפולציה: נתונות נקודות וערכים בנקודות האלה, למצוא פונקציה נחמדה שעוברת דרכן:
- קירוב פונקציות: קירוב פונקציה לפונקציה שקרובה אליה מסוג מסוים (למשל פולינום).

- בהשמעת בוחן

- מטלות (יפעלנדיוליים)

חישובי שגיאות

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^* \subseteq \mathbb{R}$ סופיים - מספרים שאפשר לייצג

$x \in \mathbb{R}$, יש לו קירוב $x^* \in \mathbb{R}^*$, $0 \in \mathbb{R}^*$

$0^* = 0$.

$\frac{|x - x^*|}{|x|}$ - דיוק יחסי.

נניח שרוצים לחשב את $f(x)$

איך את הדיוק של x מול לוגפ.ר

עם אובונות היישוק?

x, x^* , $f(x)$, $f^*(x^*) = f(x')$

עבור x' המקיים $\underline{\underline{|x'-x| \le |x^*-x|}}$

$$\left|\frac{f^*(x^*) - f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x') - f(x)}{f(x)}\right| =$$

$$\left|\frac{(f(x') - f(x))(x'-x) \cdot x}{(x'-x) \cdot x f(x)}\right| \le \frac{|x^* - x|}{|x|} \cdot$$

$$\left|\frac{(f(x') - f(x)) \cdot x}{(x'-x) \cdot f(x)}\right| \approx \underbrace{\left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right|}_{\text{נ}} \cdot \frac{|x^* - x|}{|x|}$$

הגדרה: מספר המצב של f

ב- x (condition number) הוא

$$\operatorname{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

(תחת ההנחה ש- $x, f(x) \neq 0$)

דוגמא: $f(x) = ax+b$,

$$\operatorname{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot a}{ax+b} \right| = \left| 1 - \frac{b}{ax+b} \right|$$

דוגמא: רוצים לחשב לכל n

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt$$

כמה שווה הערך?

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{t+5} = \ln(t+5)\Big|_0^1 = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{\boxed{t^{n+1}}}{t+5}\,dt = \int_0^1 t^n \cdot \frac{t+5-5}{t+5}\,dt =$$

$$-5\underbrace{\int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt}_{I_n} + \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \underline{\underline{-5 I_n + \frac{1}{n+1}}}$$

$$I_n = f_n(I_0) \qquad \underline{f_n(x) = (-5)^n x + b_n}$$

עבור $b_n \in \mathbb{R}$ כלשהו

$$\operatorname{cond}(f_n)(I_0) = \left| \frac{I_0 \, f_n'(I_0)}{I_n} \right| =$$

$$5^n \cdot \left| \frac{I_0}{I_n} \right| \geq \underline{\underline{5^n}}$$

$$I_n = \frac{I_{n+1} - \frac{1}{n+1}}{-5}$$

$k >> n$

$n-k < 0$

$$I_n = g_n(I_k)$$

$$g_n(x) = (-5)^{n-k} x + c_n$$

$$\operatorname{cond}(g_n)(I_k) = \left| \frac{I_k \cdot -5^{n-k}}{I_n} \right| =$$

$$5^{n-k} \left| \frac{I_k}{I_n} \right| \leq 5^{n-k}$$

≤ 1

שגיאות במימד [illegible] גבוה.

$(x_1^*, \dots, x_n^*) \leftarrow (x_1, \dots, x_n)$

הגדרה: יהי V מרחב לינארי

מעל $\mathbb{R}$, נורמה על V היא

פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ כך ש- $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

1. אם $\|v\| = 0$ אז $v = 0$
2. לכל $a \in \mathbb{R}, v \in V$: $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$
3. לכל $u, v \in V$: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

מרחב לינארי V ביחד עם נורמה:

נקרא **מרחב נורמי!**

דוגמאות: $V=\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R} \ni p \geq 1$

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$$

(תרגיל: נורמה)

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_1 = \sum |x_i|$$

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$$

"$p=\infty$"

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_\infty = \sup\{|x_i|\}$$

בהינתן נורמה $\|\cdot\|$ על V,
מטריקה על V:

$$d(u,v)=\|u-v\|$$

אם $v_i \in V$ סדרה, (v_i) **מתכנסת**
ל-v אם $\|v_i - v\| \to 0$.

טענה: יהי V מרחב וקטורי עם

שתי נורמות $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$

אז שני התנאים הבאים שקולים

1. לכל סדרה (v_i) ו- $v\in V$

$\|v_i - v\|_1 \to 0$ אמ"מ $\|v_i - v\|_2 \to 0$

2. יש קבוע $c>0$ כך שלכל

$v \in V$, $\frac{1}{c}\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le c\|v\|_1$

עובדה: כל הנורמות על $\mathbb{R}^d$

הן שקולות.

אפשר לקחת נורמה $\|\cdot\|$ על $\mathbb{R}^d$

ולהגדיר ואת הדיוק היחסי

ע״י $\frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$

נניח ש $T: U \to V$ חסומה

לינארית ונגדיר נורמות $\|\cdot\|_U$

על U ו- $\|\cdot\|_V$ על V.

רוצים לחשב את ההשפעה של

הפעלת T על הדיוק היחסי:

$$\frac{\|Tx^* - Tx\|_V}{\|Tx\|_V} = \frac{\|T(x^*-x)\|_V}{\|T(x)\|_V} = \frac{\|T(x^*-x)\|_V \cdot \|x^*-x\|_U \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V \, \|x^*-x\|_U \, \|x\|_U} \le \frac{\|T\| \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V} \cdot \frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$$

תהא $T: U \to V$ העתקה לינארית

בין שני מרחבים נורמים, נגדיר

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_V}{\|x\|_U} = \sup_{\|x\|_U = 1} \|T(x)\|_V$$

ההעתקות הלינאריות * $\underline{\underline{Hom(U,V)}}$

החסומות. $\|T\| \leftrightarrow T$ נורמה

במרחב הזה

נגדיר מספר המצב של T

בנקודה x הוא

$$\underline{\underline{cond(T)(x)}} = \frac{\|x\| \cdot \|T\|}{\|T(x)\|}$$

אם T הפיכה, ואפשר לרשום $x = T^{-1}(y)$

$\text{cond}(T) :=$

$$\sup_x \text{cond}(T)(x) = \|T\| \cdot \|T^{-1}\|$$ לכן

נניח ורוצים לפתור משוואה

$Tx=b$, מה המטרה האמיתית

שספלשם עקב הקירוב של b

של יהי b^*?

מטריצת הילברט!

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

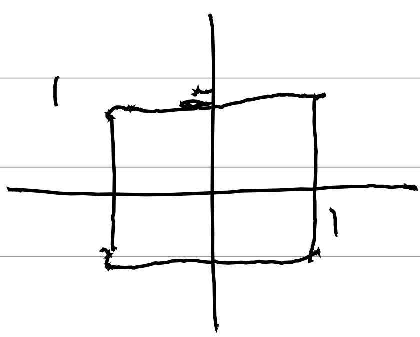
$$\text{cond}_2 T_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^{4n+4}}{2^{15/4} \cdot \sqrt{\pi n}}$$

$T: U \to V$ העתקה לינארית

$U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

אם T מיוצגת ע"י

מטריצה $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$.



$$\|T\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$x = 17$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y = -17 + \varepsilon$

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \frac{|x| \cdot |f'(x)|}{|f(x)|}$$

$2 \cdot 17 = 34$

$T : U \to V \quad . \quad V, \|\cdot\|$

$$\|T\| = \sup_{|u|=1} \|Tu\|$$

$$\mathrm{cond}(T)(u) = \frac{\|u\| \cdot \|T\|}{\|Tu\|} \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T\|$$

$$\|$$

$$\mathrm{cond}(T)$$

[1.1] $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ תרגיל 3

$f(x,y) = x + y$

$$\mathrm{cond}(f)(x,y) = \frac{\|\langle x,y \rangle\| \cdot \|f\|}{|x+y|} = \frac{\max(|x|,|y|) \cdot 2}{(x+y)}$$

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

2. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x^* \in \mathbb{R}^{*n}$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\|f(x^*)-f(x)\|}{\|f(x)\|} =$$

$$= \varepsilon$$

$$\frac{\|f(x^*)-f(x)\|\cdot\|x\|\cdot\|x^*-x\|}{\|f(x)\|\cdot\|x\|\,\|x^*-x\|} \approx$$

$$\frac{\|df(x)(x^*-x)\|\cdot\|x\|}{\|f(x)\|\cdot\|x^*-x\|}\cdot\varepsilon \le \frac{\|df(x)\|\cdot\|x\|}{\|f(x)\|}\cdot\varepsilon$$

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \frac{\|df(x)\|\cdot\|x\|}{\|f(x)\|}$$

הגדרה

הערה נוספת: לתאר כל $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

כמו m פ' $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

ונגדיר את השגיאה היחסית של

f_i לפי של x_j, נקבל

מטריצה

$$\left(\mathrm{cond}_{x_j}(f_i)\right)_{i,j}$$

דוגמה:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$df=\begin{pmatrix}-\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2}\\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2}\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cond}(f)(x,y) = ? \ \frac{\max(|x|,|y|)\cdot\max\left(\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2}\right)}{\max\left(\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|,\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\right)}$$

$$f_1(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

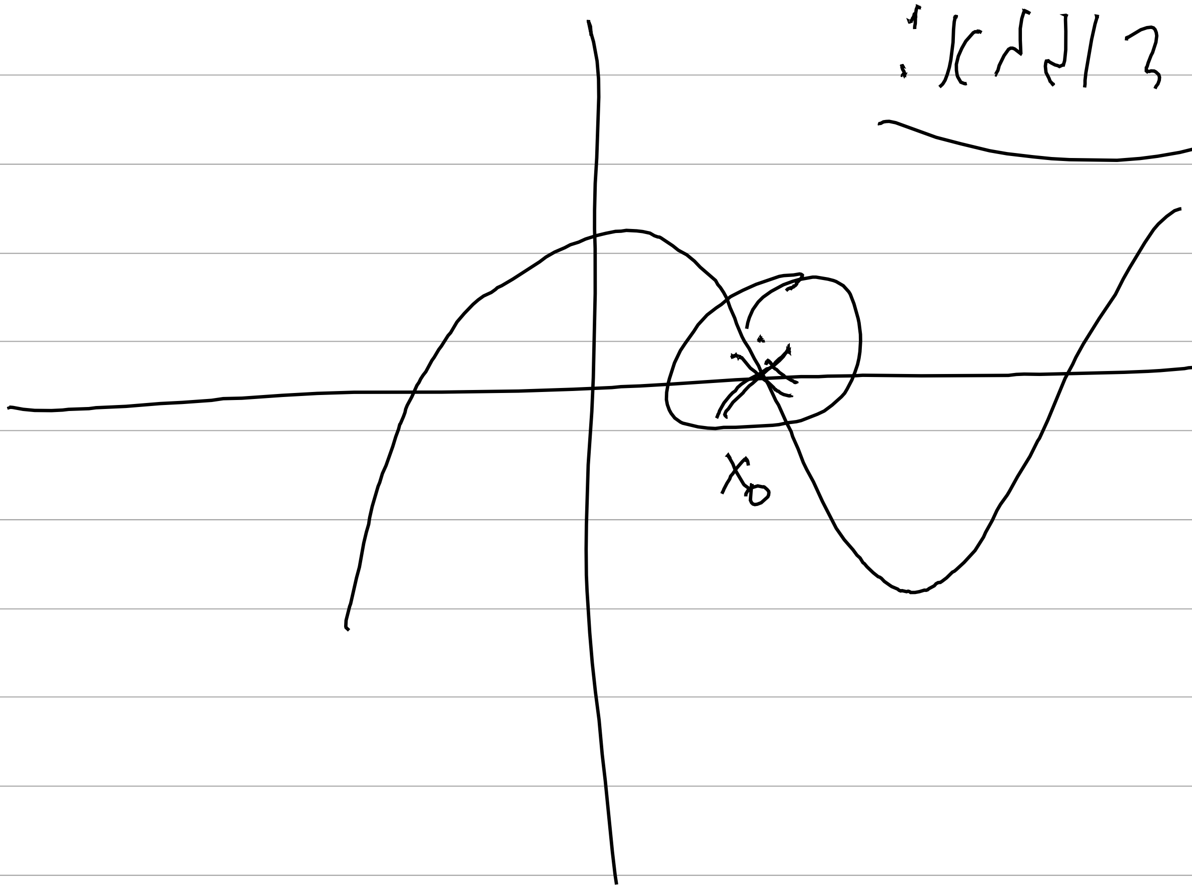
$$\operatorname{cond}_x(f_1) = \frac{|x|\cdot\frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|} \qquad \frac{|y|\cdot\frac{1}{y^2}}{\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|}$$

$$\parallel$$

$$\frac{|y|}{|x+y|} \qquad \frac{|x|}{|x+y|}$$

$$\operatorname{cond}_x(f_2) = \frac{|x|\cdot\frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|} = \frac{|y|}{|x-y|} \qquad \frac{|y|\ \frac{1}{y^2}}{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|} = \frac{|x|}{|x-y|}$$

זוגגא:



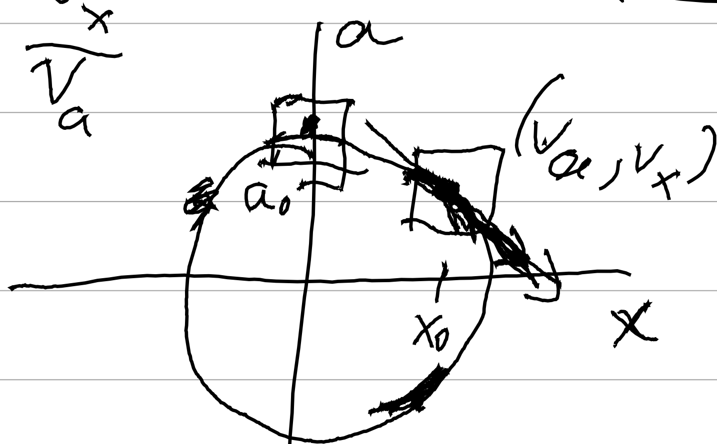
קופצים דרגה n

$$P_n(\overline{a}, X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

$$P_n(\overline{a^0}, \underline{x_0}) = 0 \qquad X_0, \overline{a^0}$$

$$F(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{V_x}{V_a}$$



$a_0 = 1$

$x = 0$

$p(a,x)$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = 2x}$$

$$a^2 + x^2 = 1 \qquad \underline{a^2 + x^2 - 1 = 0}$$

$x = x(a)$

$x_0 = x(a_0)$

$$P(a, x(a)) = 0$$

$$x = \sqrt{1 - a^2}$$

$$\underline{\underline{F(a, x) = 0}} \qquad \underline{\underline{F(a_0, x_1) = 0}}$$

$$\underline{\frac{\partial F}{\partial X}(a_0, x_0) \neq 0 \Rightarrow X = X(a)}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial F/\partial a}{\partial F/\partial x}}}$$

$$df \cdot \begin{pmatrix} V_{\cancel{x}a} \\ V_{\cancel{a}x} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ V_x \end{pmatrix} = 0$$

$$V_a \frac{\partial f}{\partial a} + V_x \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$x = x(\bar{a})$$

$$\operatorname{cond}_{a_i}(x) = \frac{|a_i| \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial a_i}\right|}{|x|} = \frac{|a_i| \cdot |x^i|}{|x| \cdot |p'(x)|}$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_i} = -\, {}^{\partial p}\!/_{\partial a_i} \Big/ {}^{\partial p}\!/_{\partial x} =$$

$$x^i \Big/ \underline{\sum j a_j x^{j-1}} = x^i \big/ p'(x)$$

הפולינום ווילקינסון:

$$p(x) = (x-1) \dots (x-n)$$

השגיאה היחסית:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f^*: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$$

$$f(x) \qquad f^*(x^*)$$

הנחה: $f^*(x^*) = f(x')$ לכלשהו x'

$$\frac{|f^*(x^*) - f(x)|}{|f(x)|} = \frac{|f(x') - f(x^*) + f(x^*) - f(x)|}{|f(x)|} \leq$$

$$\frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x)|} + \frac{|f(x^*) - f(x)|}{f(x)}$$

$$\frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x)|} \approx \frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x^*)|} \leq$$

$$\underbrace{cond(f)(x^*)}_{cond(f)(x)} \cdot \boxed{\frac{|x'-x^*|}{|x^*|}}$$

לפי הגדרת של הפונקציה f^*

היא

$$cond(f^*)(x^*) = \inf_{f(x')=f^*(x^*)} \frac{|x'-x^*|}{|x^*|}$$

$$\underline{cond(f)(x)} \left(\frac{|x-x^*|}{|x|} + cond(f^*)(x^*) \right)$$

קירובים לפונקציות ווירשטראס

$f: X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה
$ \mathbb{C}$

רוצים לקרב אותה ע"י פונקציות פשוטות,

A מרחב וקטורי של פונקציות על מרחב "נחמד" X. למשל

- X תת-קבוצה סגורה וחסומה ב-$\mathbb{R}^n$
- X קבוצה סופית

$A = C(X)$ פונקציות רציפות מ-X ל-$\mathbb{R}$ או ל-$\mathbb{C}$.

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ תת מרחב של הפונקציות

שבעזרתן מקרבים.

למשל: $\mathcal{P}$ - פולינומים.

מה זה לקרב? למדנו את

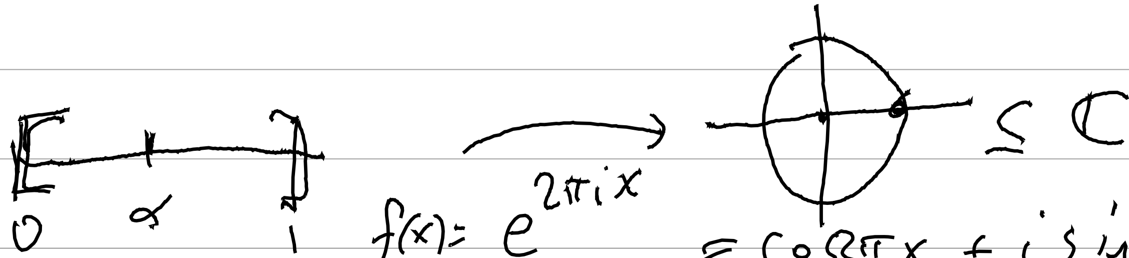
האיבר הקרוב ביותר ב-$\mathcal{P}$

לפונקציה $f \in A$ ביחס לנורמה נתונה

$\|\cdot\|$ על A.

יהי $X =$ המעגל = הקטע $[0,1]$

שבו זיהינו את 1 ו-0.



$f(x) = e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$

י. מרחב מעל $\mathbb{C}$ נפרש ע"י

$\cos(2\pi nx)$ ו- $\sin(2\pi nx)$ הם אלגברה

$n\in\mathbb{Z}$

(סגור תחת כפל)

$\{e^{2\pi i n x}\}$

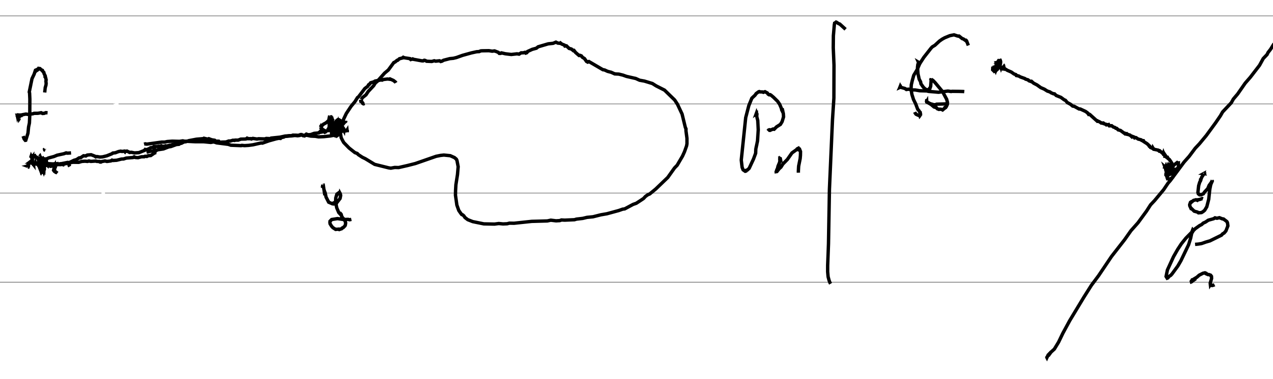
$P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \ldots$, $P = \bigcup P_i$

הגד' מרחבים ממ' מנ' ס לפ' רציפ':

צריך לכל $f \in A$ ולכל $\varepsilon > 0$ יש n

כך ש- $d(f, P_n) < \varepsilon$

$$d(f, P_n) = \inf_{y \in P_n} d(f, y) = \inf_{y \in P_n} \|f - y\|$$



על $C(X)$ יש נורמה טבעית

נורמת הסופרימום:

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$$

<u>משפט סטון-ויירשטראס:</u> אם

$P \subseteq C(X)$ תת-אלגברה (סגורה תחת

כפל, מכילה את הפונקציות הקבועות)

ולכל $x \neq y \in X$ יש $p \in P$

כך ש- $p(x) \neq p(y)$ ("מפרידה

נקודות") אז P צפופה ב-$C(X)$

<u>דוגמא:</u> $X=[a,b]$ ו-P פולינומים

במשתנה אחד. אז $P \subseteq C(X)$ תת-

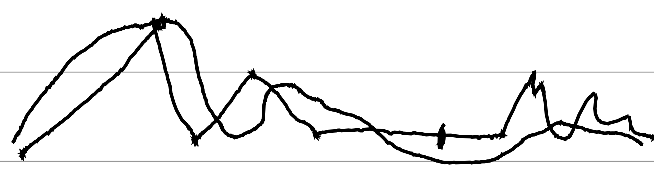
אלגברה מפרידה נקודות לכן צפופה

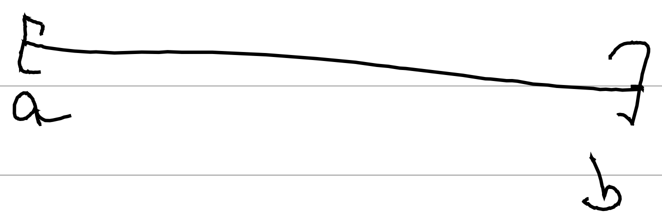
P צפופה ב-$C(X)$: לכל f ב-$C(X)$

ולכל $\varepsilon>0$ יש $p\in P$ כך ש-

$$\|f-p\|<\varepsilon$$

כלומר לכל $x\in X$ $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.





במקרה המרוכב, P צריכה להיות

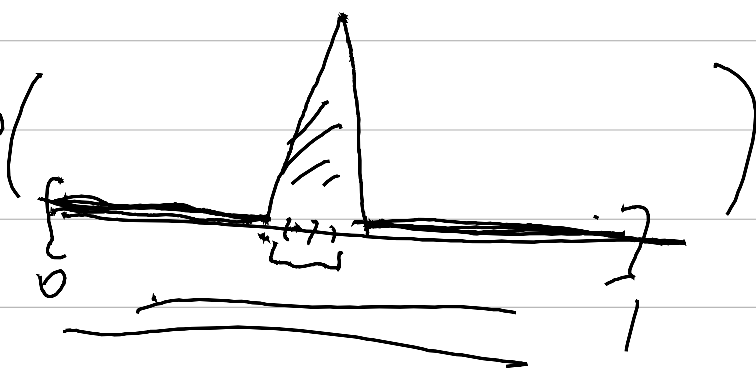
סגורה תחת הצמדה

דוגמא: כל פונקציה רציפה

ב הממשי אפשר לקרב ע"י

פונקציות רגונומריות:

סרו

$\sup($  $) = 1$

$\mathbb{R}^n$ לכל $1 \le p \le \infty$ יש נורמה $\|\cdot\|_p$

$\|\bar{x}\|_\infty = \max(|x_i|)$

$\|\bar{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$ $\quad 1 \le p < \infty$

טענה X קבוצה סגורה נורמת
הפונקציונל ביחס $\|\cdot\|_\infty$

נניח ש- X סגורה אז מתפלגה
קורלציה של הן זים סגורים ב-$\mathbb{R}^n$.
(זו מרחב ~~של~~ קומפקט מידע מוגדר)

נגדיר $\|\cdot\|_2 : C(X) \to \mathbb{R}$

על ידי (נורמת L_2).

$$\|f\|_2 = \sqrt[2]{\int_X |f|^2}$$

אם $X = \{1, \dots, n\}$ עם מנייה.

זאת הנורמה L_2 הקודמת

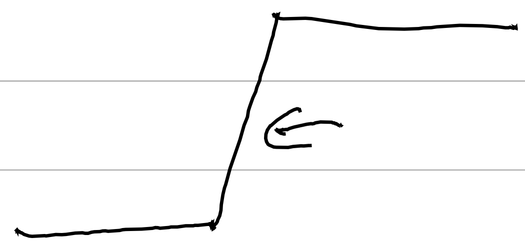
בנוסף למה שלפני, אפשר לקבוע

פונקציה חיובית $w : X \to \mathbb{R}$ ולהגדיר

$$\|f\|_{w,2} = \sqrt[2]{\int_X |f|^2 \cdot w}$$

$$\|f\|_2^2 = \int_X |f|^2 \le \sup_X |f|^2 \cdot \boxed{\int_X 1} =$$

$$\|f\|_\infty^2$$

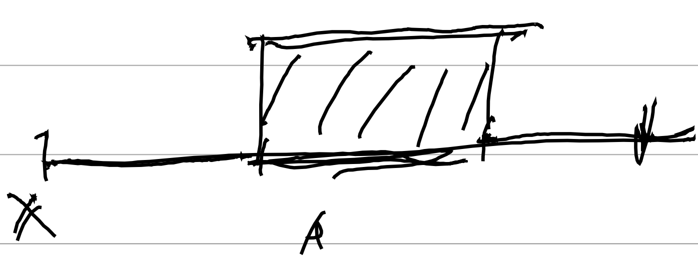


הנ׳ ו. רציפות דפיפות גב׳

הנדלרגילית.

X $\quad f : X \to \mathbb{R}$

$A \subseteq X$ $\quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$



$\int_X \mathbb{1}_A =$ המדה של A

בקבוצה סופית X סופרת נקודות

נותנת מידה

$f: X \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $\int_X f = \sum_{x\in X} f(x)$

ת״ה $f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X=\{1,\dots,n\}$

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |f(i)|^p}$$

יהי V מרחב וקטורי מעל

ℂ או $k=\mathbb{R}$, מכפלה פנימית על V

היא פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to k$

כך ש:

1. לכל $u\in V$, הפ' $v\mapsto\langle v,\underline{u}\rangle$

היא לינארית

2. לכל $u,v\in V$, $\underline{\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}}$

בפרט לכל $u\in V$, $\langle u,u\rangle\in\mathbb{R}$

3. אם $u\neq 0$ אז $\langle u,u\rangle>0$

ש״נ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על V

אז הפונקציה $v\mapsto\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$

היא נורמה של V.

במקרה הממשי, לכל $u,v\in V$

$$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=$$

$$\|u\|^2+\|v\|^2+\underline{2\langle u,v\rangle}$$

הנורמה מגיעה ממכפלה פנימית

אם ורק אם

$$(u,v) \mapsto \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}$$

היא מכפלה פנימית.

עבור $p=2$, נורמת $\|\cdot\|_2$

על $C(X)$ היא

$$(u,v) \mapsto \int_X u \cdot \bar{v}$$

באמצעות מכפלה פנימית נוכל

למדוד זוויות. בפרט, אורתוגונליות

u,v הם ניצבים אם $\langle u,v \rangle = 0$.

אזי $v_1,\dots,v_n$ ניצבים בזוגות

אזי

$$\left\|\sum a_i v_i\right\|^2=\sum a_i^2\|v_i\|^2$$

(הוכחה של הטענה שהזכרנו).

נניח ש- A קבוצת הפונקציות המקיימות

הרציפות על X, ו- $P=\bigcup P_i$

תת-מרחב, ונתונה מכפלה פנימית

של A. נניח שבחרנו בסיס

$\{\pi_i\}$ ל-P_n [ניצבים בזוגות]

ו- $f\in A$.

$T(c_1,\dots,c_m) =$

$$\|f - \sum c_i \pi_i\|^2 = \langle f - \sum c_i \pi_i , f - \sum c_i \pi_i \rangle =$$

$$\|f\|^2 - 2\sum c_i \langle f, \pi_i \rangle + \sum c_i c_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle$$

המינימום היחיד של T מתקבל

במקום שבו כל הנגזרות של

T לפי ה-c_i הן 0.

$$0 = \frac{\partial T}{\partial c_k} = -2\langle f, \pi_k \rangle + 2\sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle$$

$$\sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle = \langle f, \pi_k \rangle$$

מקבלים מערכת ליניארית

$A\tilde{c} = b$

כאשר $b_i = \langle f, \pi_i \rangle$

ו-

$$A = \left(\langle \pi_i, \pi_k \rangle \right)_{i,j}$$

A מטריצה סימטרית וחיובית:

$$(x, y) \mapsto \underline{\underline{\langle x, Ay \rangle}}$$

← מכפלה פנימית המוגדרת על $\mathbb{R}^n$

היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$

כלומר, לכל $\bar{x} \neq 0$ אז

$$\underline{\underline{\bar{x} \cdot A\bar{x} > 0}}$$

כי

$$\bar{x} \cdot A\bar{x} = \sum_{i,j} x_i x_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle = \underline{\underline{\left\| \sum x_i \pi_i \right\|^2}}$$

$\{\pi_i\}$ בסיס ולכן $\sum x_i \pi_i \neq 0$ אם $\bar{x} \neq 0$.

במקרה, A הפיכה ולכן יש

פתרון למערכת.

$$(\pi_i)_{i \geq 0}$$

$$A = \left(\langle \pi_i , \pi_j \rangle \right)_{0 \leq i,j \leq n}$$

$$A\bar{c} = \bar{b} \qquad \bar{b} = \langle f, \pi_i \rangle$$

דוגמא: $\pi_i = t^i$ על $[0,1]$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g \, dt$$

$$\langle \pi_{i+1}, \pi_{j+1} \rangle = \int_0^1 t^{i+j} \, dt = \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{i+j+1}$$

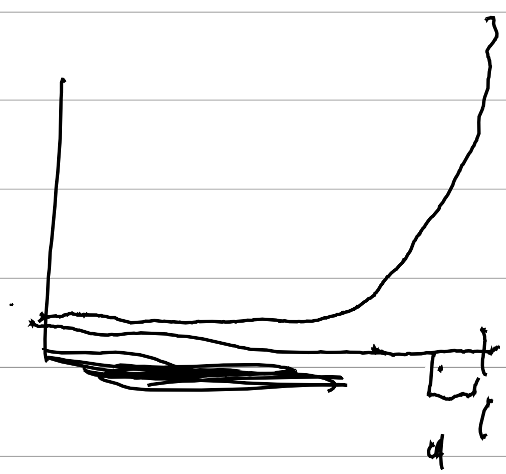
$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

קווינלי: הבעיה $H_n \bar{c} = b$

זו׳ צ׳מה (לשנות קטנה ב-b

עלולה לגרום לשנות גדולה ב-$\bar{c}$).

$[0,1]$ $\quad t^i$



t^i

פתרון: לעבוד עם בסיס

אורתונורמלי (או אורתוגונלי):

$\langle \pi_i, \pi_j \rangle = 0 \quad i \neq j \quad (\langle \pi_i, \pi_i \rangle = 1)$

$f = \sum \underbrace{a_i} \pi_i$

$\langle f, \pi_i \rangle = a_i \langle \pi_i, \pi_i \rangle$

מה אם רק - בת"ל: אז

$\pi_1, \pi_2, \ldots$

נמצא לכל בסיס אורתוגונלי

יהי

$\hat{\pi}_1 = \pi_1$

$\hat{\pi}_{k+1} = \pi_{k+1} - \sum \frac{\langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2} \hat{\pi}_i$

$\langle \hat{\pi}_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle - \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = 0$

$P = \bigcup P_i \qquad P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots$

$P_i = \{\, i \ge$ פולינומים ממעלה $\,\}$

$\dim(P_i) = i$

$\mathrm{span}(\langle \pi_i \rangle_{i \le n}) = \mathrm{span}(\langle \hat{\pi}_i \rangle_{i \le n})$

$\hat{\pi}_i \in P_i$ | פולינום מתוקן ממעלה i.

$$\underline{\underline{\hat{\pi}_{i+1}}} = t\hat{\pi}_i - \alpha_i \hat{\pi}_i + \sum_{j=0}^{i-1} b_j \hat{\pi}_j =$$

$$(t-\alpha_i)\hat{\pi}_i + \beta_i \cdot \underline{\underline{\hat{\pi}_{i-1}}} + \sum_{j=0}^{i-2} b_j \hat{\pi}_j$$

$$\langle \hat{\pi}_{i+1}, \hat{\pi}_i \rangle = \langle (t-\alpha_i)\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle \Rightarrow$$

$$\overset{\shortparallel}{0} \qquad \alpha_i \cdot \|\hat{\pi}_i\|^2 = \langle t\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2}$$

$$0 = \underline{\langle (t-\gamma_i)\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle} + \underline{\beta_i \, \|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} \Rightarrow$$

$$\beta_i = - \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} =$$

$$- \frac{\langle \hat{\pi}_i , t\hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} = - \frac{\|\hat{\pi}_i\|^2}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2}$$

$$\hat{\pi}_{i+1} = (t-\gamma_i)\hat{\pi}_i \underline{+} \beta_i \hat{\pi}_{i-1}$$

<u>הערה:</u> אם הקטע שאנחנו עליו

הוא מוגדר $[-a, a]$

והמשקל היא סימטרית $W(t)=w(-t)$

$$\left[\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\cdot \overline{g(t)}\,\underline{w(t)}\,dt\right]$$

אזי π_k פ' זוגית עבור k

זוגי ופ' אי-זוגית ל-n אי זוגי.

לכן במקרה הזה $\alpha_i=0$.

<u>דוגמא:</u> בקטע $[-1,1]$ ופ' משקל

1, תמ׳ (שיטת רודריגס)

$$\pi_k(t)=\frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k$$

כדי להראות ש- π_k אורתו'

ל- π_i עבור $i<k$, מספיק להראות

$$0 = \langle \pi_k, t^i \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k \cdot t^i \, dt =$$

$$\dots = 0$$

$$\pi_0 = 1 \quad , \quad \pi_1 = \frac{1}{2}(t^2-1)' = t$$

$$\pi_2 = \left((t^2-1)^2\right)'' \cdot \frac{2}{4!} = \frac{1}{12} \cdot \left((t^2-1)^2\right)''$$

$$\pi_k = t^k + \mu_k t^{k-2} + \dots$$

$$\pi_{k+1} = t \cdot \pi_k + \beta_k \cdot \pi_{k-1} \Rightarrow \boxed{\beta_k} = \frac{\pi_{k+1} - t\pi_k}{\pi_{k-1}}$$

$$\beta_k = \mu_k - \mu_{k+1}$$

$$\mu_k = \frac{k(k-1)}{2(2k-1)} \Rightarrow$$

$$\beta_k = \frac{1}{4-k^{-2}}$$

<u>תזכורת:</u> פולינומים טריגונומטריים

פ' מחזוריות עם מחזור 1

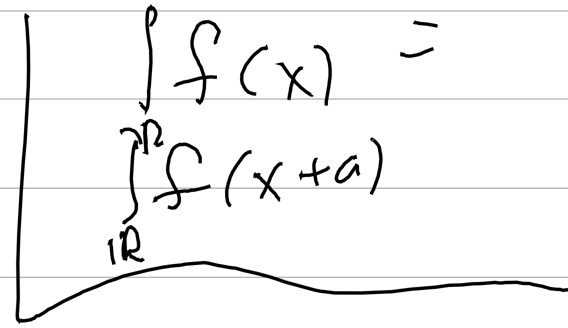
<u>$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$</u> $\quad f(t+1) = f(t)$ לכל t.

$$\Updownarrow$$

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $\quad f(0)=f(1)$

$$i\sin(2\pi t) + \cos(2\pi t) = \underline{e^{2\pi i t}}$$

(=)



$$\int_{\mathbb{R}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)$$

$$\underline{\underline{g : S^1 \to \mathbb{C}}}$$

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

$$E : [0,1] \to S^1$$

$$E(t) = e^{2\pi i t}$$

$g : S^1 \to \mathbb{C} \rightsquigarrow g \circ E$ פ' מחזורית.

$$\int_{S^1} g := \int_0^1 g \circ E \, dt$$

אם $z, w \in S^1$ אז $z \cdot w \in S^1$

נקבע $a \in S^1$ ונגדיר

$$g_a(z) = g(a \cdot z)$$

אז $\int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g$

תרגיל: נניח ש- $g: S^1 \to \mathbb{C}^*$

מקיימת $\boxed{g(z\cdot w) = g(z)\cdot g(w)}$

צ"ל א. אם $g(z)=1$ לכל z

צ"ל $\int_{S^1} g = 1$

ב. אחרת $\int_{S^1} g = 0$

הוכחה: א' קל

ב. יש $a\in S^1$ כך ש- $g(a)\neq 1$

$g_a(x)=g(ax)=g(a)\,g(x)$

צ"ל

$$\int_{S^1} g = \int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g(a)\cdot g = \underbrace{g(a)}_{\neq 1} \int_{S^1} g$$

צ"ל $\int_{S^1} g = 0$.

לכל $n \in \mathbb{Z}$ הפ' $g_n(x) = x^n$

מקיימות את התנאים של הגדרה

כי $g_n \cdot g_m = g_{n+m}$ ו- $\overline{g_n(x)} = g_{-n}(x)$

איך אפשר להגדיר מכפלה פנימית

על $\mathbb{C}(S^1)$ ע"י

$$\langle f, g \rangle = \int_{S^1} f \cdot \overline{g}$$

כמו הוכחנו ב-$\mathbb{R}$: g_n מהווה

אורתונורמלית.

מגדר של המרחב שנפרש ע"י

ה-g_n סגור תחת כפל (הוכחה בהמשך).

הקבוצה הזו נקראות פולינומים טריגונומטריים.

נשים לב ש-

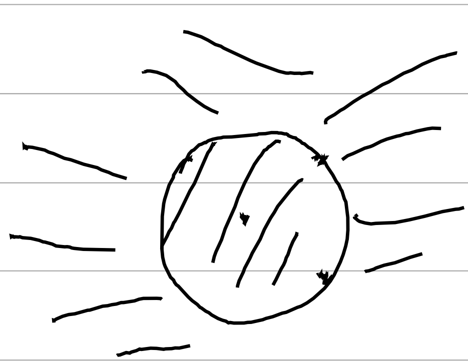
$$\oint_{S^1} x^n = \int_0^1 e^{2\pi i n t}\, dt = \int \cos 2\pi i n t + i \sin 2\pi n t = 0$$

תרגיל:

$$\mathbb{C}^* = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \}$$

$x \sim y$ אם $x = y$ או $x = \frac{1}{y}$

$$X = \mathbb{C}^* / \sim \qquad g_n\left(\tfrac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} \sim x^n = g_n(x)$$



$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^* \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C}^* \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\bar{g}_n"] & X \end{tikzcd}$$

$$\pi(x) = x + \frac{1}{x} \in \mathbb{C}$$

[illegible] $z\in S^1$ [illegible]

$$\pi(z) = \mathrm{Re}(z)$$

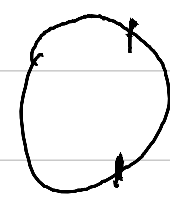
$$\pi(S^1) = [-1,1] = X_0$$ [illegible]

$$\pi(x) = \pi\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

$$g_n\Big(\overbrace{\frac{x+\frac{1}{x}}{2}}^{\pi(x)}\Big) = \frac{x^n + \frac{1}{x^n}}{2} = \pi(g_n(x))$$

נגדיר X [illegible] h [illegible]

$$* = \int_{X_0} h = \int_{S^1} h\circ\pi = \int_{S^1} h\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)$$



$$\int_0^1 h(\mathrm{Re}(e^{2\pi i t}))\,dt = \int_0^1 h\cos(2\pi t)\,dt$$

$y = \cos(2\pi t)$ $\quad dy = -2\pi\sin(2\pi t)\,dt =$

$$dy = -2\pi\sqrt{1-y^2}\,dt$$

$$x = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} h(y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$ s/c

ה־ $\bar{g}_n$ נקראים פולינומי

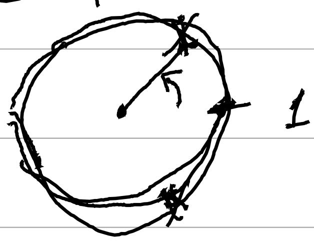
צ׳בישב. הפולינומים הם מערכת

אורתוגונלית עבור

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f\cdot g\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

$$\bar{g}_n(\cos 2\pi t) = \cos 2\pi n t$$

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$



$$\sin 2\pi t = \sqrt{1 - y^2}$$
$$0 \le t \le \tfrac{1}{2}$$

$$\downarrow p$$

$$X \quad [\quad] = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$$

$$p(z) = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \quad \left(= \frac{z + \bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(z) \quad S^1 \right)$$

$$y = \cos 2\pi t$$
$$dy = -2\pi \sin 2\pi t \, dt$$

$$f : X \to \mathbb{C}$$

$$\int_X f := \int_{S^1} f \circ p = \int_0^1 f \circ p \circ e^{2\pi i t} \, dt =$$

$$\int_0^1 f(\cos 2\pi t) \, dt = 2 \int_0^{1/2} f(\cos 2\pi t) \, dt =$$

$$2\int_{1}^{-1} f(y)\cdot\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(y)\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "\varphi_n"', "x \mapsto x^n"] \arrow[d, "p"] & S^1 \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "T_n"'] & X
\end{tikzcd}$$

$$\varphi_n(x) = x^n$$

$$T_n\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) = \frac{x^n + \frac{1}{x^n}}{2}$$

$$\underline{\underline{\int_X T_n}} = \int_{S^1} T_n \circ p = \underline{\underline{\int_{S^1} \frac{x^n + \frac{1}{x^n}}{2}}} =$$

$$\begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{S^1} \varphi_n \bar{\varphi}_m =$$

$$\int \varphi_n \varphi_{-m} = \int \varphi_{n-m}$$

$$\left(T_n \cdot T_m\right)\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = \left(\frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{2}\right)\left(\frac{z^m + \frac{1}{z^m}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z^{m+n} + \frac{1}{z^{m+n}} + z^{n-m} + z^{m-n}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(T_{n+m}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) + T_{n-m}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\right)$$

$$\int T_n \cdot T_m = \frac{1}{2}\left(\int T_{n+m} + \int T_{n-m}\right) =$$

$$\int \begin{cases} 1/2 & n = \pm m \neq 0 \\ 1 & n = m = 0 \\ 0 & |n| \neq |m| \end{cases} \qquad \left[\; T_n = T_{-n} \right.$$

$$T_0 = 1 \qquad T_0\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = 1$$

$$T_1\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} \qquad T_1(z) = z$$

$$T_n \cdot T_1 = \frac{1}{2}\left(T_{n+1} + T_{n-1}\right) \Rightarrow$$

$$T_{n+1}(z) = 2z\, T_n(z) - T_{n-1}(z)$$

$$T_2(z) = 2z^2 - 1$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$$

$$\cos(nt) = T_n(\cos t)$$

1. T_n ממעלה n, מקדם של z^n הוא 2^n

אינטרפולציה

נתונים ערכי פונקציה f

במספר סופי של נקודות

$c_0, \dots, c_n \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

רוצים לקרב את f על ידי

פולינום ממעלה n.

המרחב של פ' ממשיות על $c_0, \dots, c_n$

ממימד $n+1$, עם בסיס

$$\delta_i(c_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

כול' ממעלה $\leq n$

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - c_j)}{\prod_{j \neq i} (c_i - c_j)} \in P_n$$

$f(c_i) = f_i \Rightarrow$

$f \sim \sum f_i \ell_i = \Pi_{\bar{c}}(f)$

$\Pi_{\bar{c}} : C[a,b] \to C[a,b]$

$\sup_{\|f\|=1} \|\Pi_{\bar{c}}(f)\| = \sup_{\|f\|=1} |\sum f_i \ell_i| =$

$= \sum_{i=0} \|\ell_i\|$

$\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)|$

$\hat{p}_n$ – הקירוב הכי טוב ל-f

ב-$\mathbb{P}_n$

$$\|f - \Pi_c(f)\| = \|f - \hat{p}_n - \Pi_c(f - \hat{p}_n)\|$$

$$\le \|f - \hat{p}_n\| + \|\Pi_c\|\,\|f - \hat{p}_n\| =$$

$$\boxed{(1 + \|\Pi_c\|)\,\|f - \hat{p}_n\|}$$

הערכת הטעות בצורת הנגזרת:

f פ' ~~רציפה~~ ב-$C^{n+1}[a,b]$

(גזירה ברציפות $n+1$ פעמים)

$$\big(f - \Pi_c(f)\big)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - c_i)$$

(תלוי ב-x)

כמו: יש ξ עבורו ש

נכון $(f \in C^{n+1}[a,b])$

הוכחה: נקבע $c_i \neq x$

$$G(t) = f(t) - \pi_c(f)(t) - \frac{f(x) - \pi_c(f)(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)} \prod_{i=0}^{n}(t-c_i) \qquad (*)$$

השורשים של G הם לפחות

c_i, $i=0,\dots,n$ ו-x.

משפט רול: ל-$G^{(n+1)}$

יש שורש ξ.

נגזור את (*) n+1 פעמים:

$$G^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)! \cdot \frac{f(x) - \pi_c(f)}{\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)}$$

נציב $t = \xi$.

$\xi \in [a,b]$

(כיפסם לגבית בי $[a,b]$

רסלור וקמור $\blacksquare$ x, c_i

הערות: לנסות למזון/

∃ רשת $\vec{c}^{(n)} \in [a,b]^{n}$ של נקודות

c כך שאינטרפולציה בין הפולינומים:

$\Pi_{\vec{c}^{(n)}}(f) \to f$

עבור פונקציות f מספיק חלקות.

$$\|f - \Pi_{\vec{c}^{(n)}}(f)\| \le \underbrace{\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \prod_{i} (x - c_i^{(n)})}$$

$$\le \frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1}$$

$M_{n+1}(f)$ חסם על הנגזרת ה-$n+1$ של f ב-$[a,b]$.

אז רוצים ש-

$$\frac{M_n(f)\cdot(b-a)^n}{n!} \to 0$$

–