שיטות הקירובים

Walter Gautschi

- אלגברה לינארית: פתרון למערכת משוואות, למצוא ערכים עצמיים, ...
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$

  $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
- אינטרפולציה: נתונות נקודות וערכים בנקודות האלה, למצוא פונקציה נתונה שולה הטבלה:
- קירוב פונקציות: קירוב פונקציה לפונקציה שקרובה אליה מסוג מסוים (לדוגמא פולינום).

- בהמשך בוחן
- משוואות דיפרנציאליות

חישובי שגיאות

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^*\subseteq\mathbb{R}$ סופית - מספרים שאפשר לייצג

$x\in\mathbb{R}$, יש לו קירוב $x^*\in\mathbb{R}^*$, $0\in\mathbb{R}^*$

$0^*=0$.

$\frac{|x-x^*|}{|x|}$ - דיוק יחסי.

נניח שרוצים לחשב את $f(x)$

איך אני מדייק את x מול לגשפ'ר

עם אוכלות הייש'וק?

x, x^* , $f(x)$, $f(x^*) = f(x')$

עבור x' קיים ש $\underline{\underline{|x'-x| \le |x^*-x|}}$

$$\left|\frac{f(x^*) - f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x') - f(x)}{f(x)}\right| =$$

$$\left|\frac{(f(x')-f(x))(x'-x)\cdot x}{(x'-x)\cdot x f(x)}\right| \le \frac{|x^*-x|}{|x|}.$$

$$\left|\frac{(f(x')-f(x))\cdot x}{(x'-x)\cdot f(x)}\right| \approx \underline{\underline{\left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right|}} \cdot \frac{|x^*-x|}{|x|}$$

הגדרה: מספר המצב של f

ב-x (condition number) הוא

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

(תחת הנחה ש- $x, f(x) \neq 0$)

דוגמא: $f(x) = ax+b$,

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot a}{ax+b} \right| = \left| 1 - \frac{b}{ax+b} \right|$$

דוגמא: חישוב אינטגרל לכל n

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt$$

כמה של הערך?

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{t+5} = \ln(t+5) \Big|_0^1 = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{\boxed{t^{n+1}}}{t+5}\,dt = \int_0^1 t^n \cdot \frac{t+5-5}{t+5}\,dt =$$

$$-5\underbrace{\int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt}_{I_n} + \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = -5I_n + \frac{1}{n+1}$$

$$I_n = f_n(I_0) \qquad \underline{f_n(x) = (-5)^n x + b_n}$$

עבור $b_n \in \mathbb{R}$ כלשהו

$$\mathrm{cond}(f_n)(I_0) = \left| \frac{I_0 \, f_n'(I_0)}{I_n} \right| =$$

$$5^n \cdot \left| \frac{I_0}{I_n} \right| \geq \underline{5^n}$$

$$I_n = \frac{I_{n+1} - \frac{1}{n+1}}{-5}$$

$k >> n$

$n-k < 0$

$$I_n = g_n(I_k)$$

$$g_n(x) = (-5)^{n-k} x + c_n$$

$$\operatorname{cond}(g_n)(I_k) = \left| \frac{I_k \cdot -5^{n-k}}{I_n} \right| =$$

$$5^{n-k} \left| \frac{I_k}{I_n} \right| \leq 5^{n-k}$$

≈ 1

שגיאות במימד גבוה.

$$(x_1,\dots,x_n) \longrightarrow (x_1^*,\dots,x_n^*)$$

הגדרה: יהא V מרחב ליניארי

מעל $\mathbb{R}$, נורמה על V היא

$=\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge 0\}$

פונקציה $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ ש-

1. אם $\|v\|=0$ אז $v=0$
2. לכל $a\in\mathbb{R}$, $v\in V$ $\|av\|=|a|\cdot\|v\|$
3. לכל $u,v\in V$ $\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$

מרחב ליניארי V ביחד עם נורמה:

נקרא **מרחב נורמי**!

דוגמאות: $V=\mathbb{R}^d$, $1 \le p \in \mathbb{R}$

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$$

(תרגיל: נורמה)

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_1 = \sum |x_i|$$

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$$

"$p=\infty$"

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_\infty = \sup\{|x_i|\}$$

בהינתן נורמה $\|\cdot\|$ על V,

מטריקה על V:

$$d(u,v)=\|u-v\|$$

אם $v_i \in V$ סדרה, (v_i) מתכנסת

ל-v אם $\|v_i - v\| \to 0$.

טענה: אם V מרחב וקטורי עם

שתי נורמות $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$

אז שני התנאים הבאים שקולים

1. לכל סדרה (v_i) ו-$v \in V$

$\|v_i - v\|_1 \to 0$ אם"ם $\|v_i - v\|_2 \to 0$

2. יש קבוע $C>0$ כך שלכל

$v \in V$, $\frac{1}{C}\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C\|v\|_1$

עובדה: כל הנורמות על $\mathbb{R}^d$

הן שקולות.

אפשר לקחת נורמה $\|\cdot\|$ על $\mathbb{R}^d$

ולהגדיר את הדיוק היחסי

ע"י $\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|}$

נניח ש $T: U \to V$ מעתיקה לינארית ובמרחב נורמות $\|\cdot\|_U$ על U ו- $\|\cdot\|_V$ על V.

רוצים לחשב את ההשפעה של הפעלת T על הדיוק היחסי:

$$\frac{\|Tx^* - Tx\|_V}{\|Tx\|_V} = \frac{\|T(x^* - x)\|_V}{\|T(x)\|_V} = \frac{\|T(x^* - x)\|_V \cdot \|x^* - x\|_U \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V \, \|x^* - x\|_U \, \|x\|_U} \le \frac{\|T\| \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V} \cdot \frac{\|x^* - x\|}{\|x\|}$$

תהא $T: V \to U$ העתקה לינארית

בין שני מרחבי נורמה, נגדיר

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_U}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V = 1} \|T(x)\|_U$$

העתקה הלינארית * $Hom(U,V)$

החסומות. $T \mapsto \|T\|$ נורמה

במרחב הזה

נגדיר מספר המצב של T

בנקודה x הינו

$$cond(T)(x) = \frac{\|x\| \cdot \|T\|}{\|T(x)\|}$$

אם T הפיכה, ונפסח לרשום $x = T^{-1}(y)$

$\mathrm{cond}(T) :=$

$$\underbrace{\sup_{x} \mathrm{cond}(T)(x) = \|T\| \cdot \|T^{-1}\|}$$ גבול

נניח שיש לפתור משוואה

$Tx = b$, מה הטעות היחסית

מסופלשת עקב הקירוב של b

על ידי b^*?

מטריצת הילברט!

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

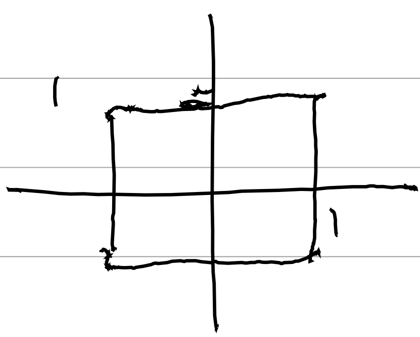
$$\mathrm{cond}_2 T_n = \underbrace{\frac{(\sqrt{2}+1)^{4n+4}}{2^{15/4} \cdot \sqrt{\pi n}}}$$

העתקה לינארית $T: U \to V$

$U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$ $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

אזי T מיוצגת על ידי

מטריצה: $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$.



$$\|T\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$X = 17$

$y = -17 + \varepsilon$

$2 \cdot 17 = 34$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{cond}(f)(x) = \frac{|x| \, |f'(x)|}{|f(x)|}$$

$T: U \to V \quad . \quad V, \|\cdot\|$

$$\|T\| = \sup_{|u|=1} \|Tu\|$$

$$\text{cond}(T)(u) = \frac{\|u\| \cdot \|T\|}{\|Tu\|} \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T\|$$

$$\|T^{-1}\| \cdot \|T\| = \text{cond}(T)$$

[1.1] $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ [illegible] 3:

$f(x,y) = x+y$

$$\text{cond}(f)(x,y) = \frac{\|\langle x,y\rangle\| \cdot \|f\|}{|x+y|} = \frac{\max(|x|,|y|) \cdot 2}{(x+y)}$$

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

2. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\underline{x}^* \in \mathbb{R}^{*n},\ x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\|f(x^*)-f(x)\|}{\|f(x)\|} =$$

$$\frac{\underline{\|f(x^*)-f(x)\|} \cdot \|x\| \cdot \|x^*-x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x\| \, \|x^*-x\|} = \varepsilon \approx$$

$$\frac{\|\underline{df(x)}(x^*-x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x^*-x\|} \cdot \varepsilon \leq \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|} \cdot \varepsilon$$

<u>הגדרה:</u>

$$cond(f)(x) = \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|}$$

עוד ניסוח: לתמונה של $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

כש m פ' $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

ונוכל לנוע הנגזרות החלקיות של

f_i לפי כל x_j, נקבל

מטריצה

$$\left(\text{cond}_{x_j}(f_i)\right)_{i,j}$$

<u>דוגמא 3:</u> $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$df=\begin{pmatrix}-\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2}\\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2}\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cond}(f)(x,y) = ? \; \frac{\max(|x|,|y|)\cdot \max(\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2})}{\max(|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}|, |\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|)}$$

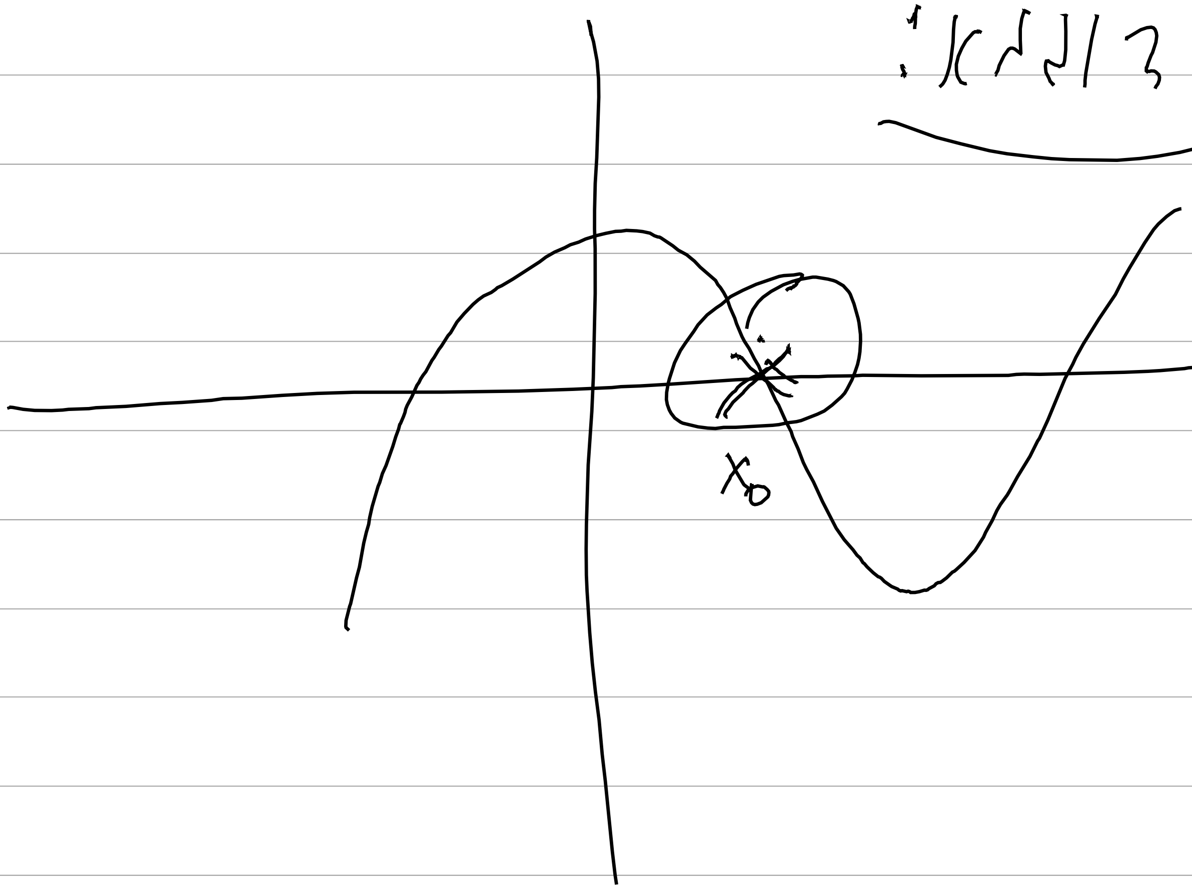
$$f_1(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

$$\operatorname{cond}_x(f_1) = \frac{|x|\cdot \frac{1}{x^2}}{|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}|} \qquad \frac{|y|\cdot\frac{1}{y^2}}{|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}|}$$

$$\frac{|y|}{|x+y|} \qquad \frac{|x|}{|x+y|}$$

$$\operatorname{cond}_x(f_2) = \frac{|x|\cdot\frac{1}{x^2}}{|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|} = \frac{|y|}{|x-y|} \qquad \frac{|y|\,\cancel{\frac{1}{y^2}}}{|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|} = \frac{|\cancel{x}|}{|x-y|}$$

דוגמא:



קוגצים דהלה n

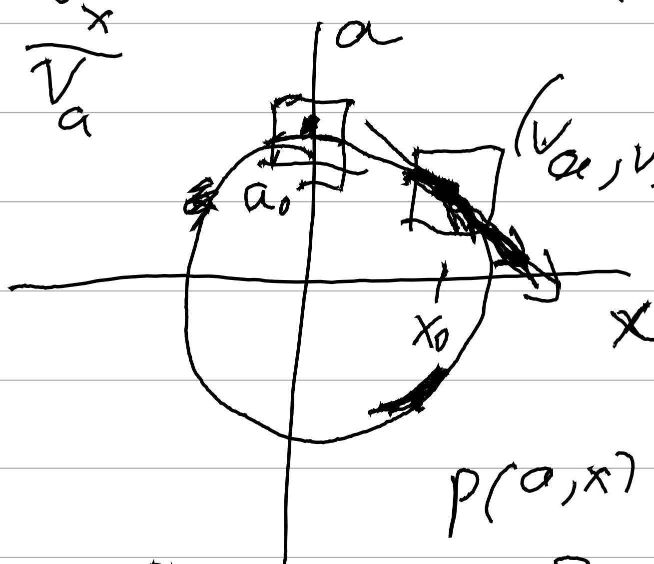
$$P_n(\overline{a}, X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

$P_n(\overline{a^0}, \underline{\underline{x_0}}) = 0$ $\qquad$ X_0 , $\overline{a^0}$

$\approx$

$\underline{F(x, y) = x^2 + y^2}$

$\dfrac{V_x}{V_a}$



$a_0 = 1$

$x = 0$

$p(a, x)$ $\qquad$ $\boxed{\dfrac{\partial p}{\partial x} = 2x}$

$a^2 + x^2 = 1$ $\qquad$ $\underline{\underline{a^2 + x^2 - 1 = 0}}$

$X = X(a)$ $\qquad$ $p(a, X(a)) = 0$

$X_0 = X(a_0)$ $\qquad$ $X = \sqrt{1 - a^2}$

$$F(a, x) = 0 \qquad F(a_0, x_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a_0, x_0) \neq 0 \Rightarrow x = x(a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \partial F/\partial a \Big/ \partial F/\partial x$$

$$df \cdot \begin{pmatrix} v_{a} \\ v_{x} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_x \end{pmatrix} = 0$$

$$v_a \frac{\partial f}{\partial a} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$x = x(\bar{a})$$

$$\operatorname{cond}_{a_i}(x) = \frac{|a_i| \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial a_i}\right|}{|x|} = \frac{|a_i| \cdot |x^i|}{|x| \cdot |p'(x)|}$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_i} = -\,{}^{\partial p}/_{\partial a_i} \Big/ {}^{\partial p}/_{\partial x} =$$

$$x^i \Big/ \underline{\sum j a_j x^{j-1}} = x^i \big/ p'(x)$$

הדוגמא של וילקינסון:

$$p(x) = (x-1) \cdots (x-n)$$

השגיאה היחסית:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f^*: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$

$f(x)$ $\qquad$ $f^*(x^*)$

הנחה: $f^*(x^*) = f(x')$ לו נסמן x'

$$\frac{|f^*(x^*) - f(x)|}{|f(x)|} = \frac{|f(x') - f(x^*) + f(x^*) - f(x)|}{|f(x)|} \le$$

$$\frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x)|} + \frac{|f(x^*) - f(x)|}{f(x)}$$

$$\frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x)|} \approx \frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x^*)|} \le$$

$$\underbrace{cond(f)(x^*)}_{cond(f)(x)} \cdot \boxed{\frac{|x'-x^*|}{|x^*|}}$$

מס' המצב של האלגוריתם f^*

להיות

$$cond(f^*)(x^*) := \inf_{f(x')=f^*(x^*)} \frac{|x'-x^*|}{|x^*|}$$

$$\underline{cond(f)(x)}\left(\frac{|x-x^*|}{|x|} + cond(f^*)(x^*)\right)$$

קירובים לפונקציות ואינטרפולציה

$f: X \to \mathbb{R}$ (או $\mathbb{C}$) פונקציה רציפה

רוצים לקרב אותה ע"י פונקציות פשוטות.

A מרחב וקטורי של פונקציות על מרחב "נחמד" X. למשל

- X תת-קבוצה סגורה וחסומה ב-$\mathbb{R}^n$
- X קבוצה סופית

$A = C(X)$ פונקציות רציפות מ-X ל-$\mathbb{R}$ או ל-$\mathbb{C}$.

$P \subseteq \mathcal{A}$ תת מרחב של הפונקציות

שבעזרתן מקרבים.

לדוגמא: P - פולינומים.

מה צריך לקרב? למדנו את

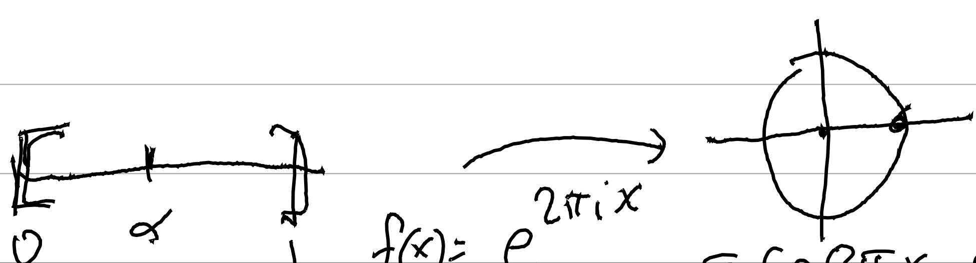
האיבר הקרוב ביותר ב-P

לפונקציה $f \in A$ ביחס לנורמה נתונה

וכו' של A.

יהי $X=$ המעגל, הקטע $[0,1]$

עם זיהוי של 1 ו-0.



$\subseteq \mathbb{C}$

$f(x)= e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$

י. מרחב מעל $\mathbb{C}$ נפרש ע"י

$\cos(2\pi n x)$ ו- $\sin(2\pi n x)$ הם אלגברה

$n\in\mathbb{Z}$

(סגור תחת כפל)

$\{e^{2\pi i n x}\}$

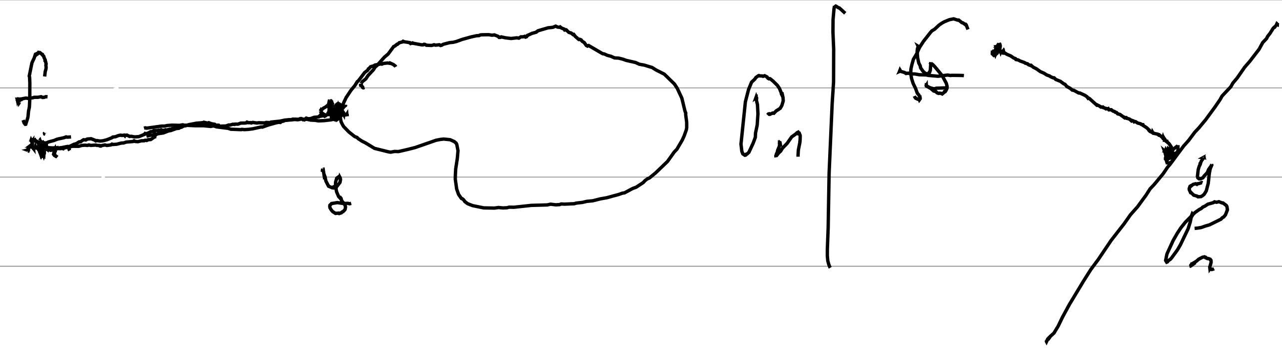
$P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \cdots$, $P=\bigcup P_i$

הגד' מרחבים ממצים Θ לפ' רציפ':

לכל $f\in A$ ולכל $\varepsilon>0$ יש n

כך ש- $d(f,P_n)<\varepsilon$

$$d(f,P_n)=\inf_{y\in P_n} d(f,y)=\inf_{y\in P_n}\|f-y\|$$



על $C(X)$ יש נורמה טבעית

נורמת הסופרימום:

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$$

<u>משפט סטון-ויירשטראס:</u> אם $P\subseteq C(X)$ תת-אלגברה (סגורה תחת כפל, מכילה את הפונקציות הקבועות) ולכל $x\neq y$ יש $p\in P$ כך ש- $p(x)\neq p(y)$ (P מפרידה נקודות) אז <u>P צפופה ב-$C(X)$</u>

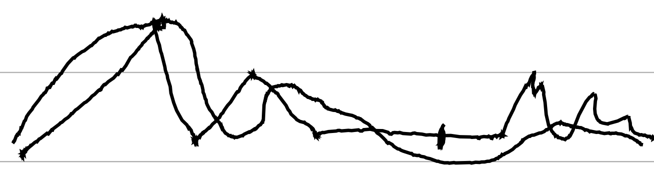
<u>דוגמא:</u> $X=[a,b]$ ו- P פולינומים במשתנה אחד. אז $P\subseteq C(X)$ תת-אלגברה שמפרידה נקודות ולכן צפופה.

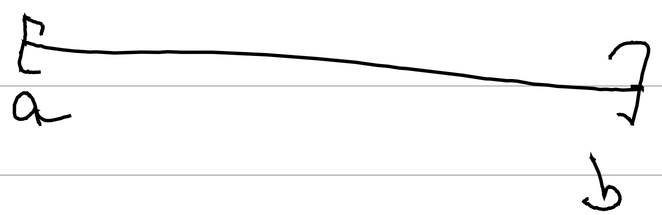
P צפופה ב-$C(X)$: לכל f ב-$C(X)$

ולכל $\varepsilon>0$ יש $p\in P$ כך ש-

$\|f-p\|<\varepsilon$

כלומר לכל $x\in X$ $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.





במקרה המרוכב, P צריכה להיות

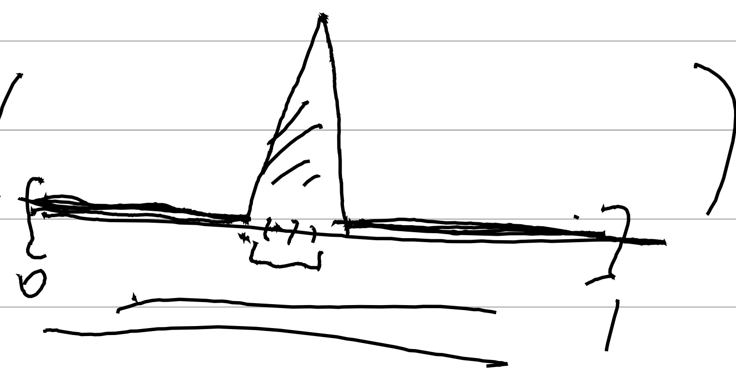
סגורה תחת הצמדה

דוגמא: כל פונקציה רציפה

$\mathbb{T}$ המעגל אפשר לקרב ע"י

פונקציות טריגונומטריות:

סתו

sup() = 1

$\mathbb{R}^n$ לכל $1 \le p \le \infty$ יש נורמה $\|\cdot\|_p$

$$\|\bar{x}\|_\infty = \max(|x_i|)$$

$$\|\bar{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p} \qquad 1 \le p < \infty$$

טענה X קבוצה סגורה בנורמה.
הפולינומים ביחס $\|\cdot\|_\infty$

נניח ש- X סגורה אז מתקבלה
קורדינטות של הקבוצה סגורה ב-$\mathbb{R}^n$.
(זהו מרחב של פונקציות מעל קטע)

נגדיר $\|\cdot\|_2 : C(X) \to \mathbb{R}$

על ידי (נורמת L_2).

$$\|f\|_2 = \sqrt[2]{\int_X |f|^2}$$

אם $X = \{1, \dots, n\}$ עם מניה.

זאת הנורמה L_2 הקודמת

בנוסף יותר מזה, אפשר לקבוע

פונקציה חיובית $w : X \to \mathbb{R}$ ולהגדיר

$$\|f\|_{w,2} = \sqrt[2]{\int_X |f|^2 \cdot w}$$

$$\|f\|_2^2 = \int_X |f|^2 \le \sup_X |f|^2 \cdot \boxed{\int_X 1} =$$

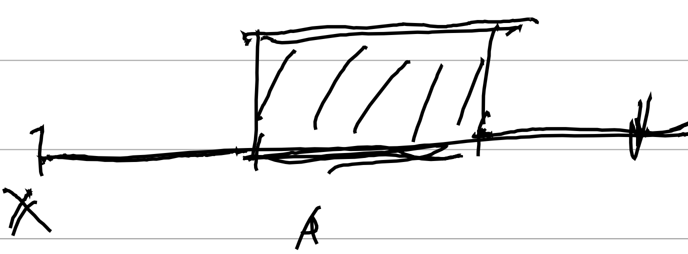
$$\|f\|_\infty^2$$

הג' ורציפות רציפות רב'

המוטיבציות.

$X \qquad f: X \to \mathbb{R}$

$A \subseteq X \qquad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$



$\int_X \mathbb{1}_A =$ המדה של A

בקבוצה סופית X ספירת נקודות

נתונה מידה (—)

$f:X\to\mathbb{R}$ $\qquad$ $\displaystyle\int_X f = \sum_{x\in X} f(x)$

ה-n: $f:X\to\mathbb{R}$ (=) $X=\{1,\dots,n\}$

$\|f\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |f(i)|^p}$

יהי V מרחב וקטורי מעל

$\mathbb{C}$ או $k=\mathbb{R}$, מכפלה פנימית על V

היא פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to k$

כך ש:

1. לכל $u\in V$, הפ' $v\mapsto\langle v,u\rangle$

היא לינארית

2. לכל $u,v\in V$, $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$

בפרט לכל $u\in V$, $\langle u,u\rangle\in\mathbb{R}$

3. אם $u\neq 0$ אז $\langle u,u\rangle>0$

ש"פ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מגדירה פונקציה של V

אז הפונקציה $v\mapsto\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$

היא נורמה של V.

במקרה הממשי, לכל $u,v\in V$

$$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=$$

$$\|u\|^2+\|v\|^2+\underline{2\langle u,v\rangle}$$

הנורמה מגיעה ממכפלה פנימית

אם ורק אם

$$(u,v) \mapsto \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}$$

היא מכפלה פנימית.

עבור $p=2$, נורמת $\|\cdot\|_2$

על $C(X)$ היא

$$(u,v) \mapsto \int_X u\cdot \bar{v}$$

באמצעות מכפלה פנימית ניתן

למשל לדבר על זוויות. בפרט, אורתוגונליות

u,v הם ניצבים אם $\langle u,v\rangle=0$.

אם $v_1,\ldots,v_n$ ניצבים בזוגות

אזי

$$\left\|\sum a_i v_i\right\|^2 = \sum a_i^2 \|v_i\|^2$$

(הכללה של הנוסחה שראינו).

נניח ש- A קבוצת הפונקציות

המדרגיות

הרציפות של X, ו- $P=\cup P_i$

תת-מרחב, ונתונה מכפלה פנימית

של A. נניח שבחרנו בסיס

$\{\pi_i\}$ ל- P_n [כרגיל מתאים]

ו- $f\in A$.

$T(c_1,\dots,c_m) =$

$$\|f - \sum c_i \pi_i\|^2 = \langle f - \sum c_i \pi_i , f - \sum c_i \pi_i \rangle =$$

$$\|f\|^2 - 2\sum c_i \langle f, \pi_i \rangle + \sum c_i c_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle$$

המינימום היחיד של T מתקבל

במקום שבו כל הנגזרות של

T לפי ה-c_i הן 0.

$$0 = \frac{\partial T}{\partial c_k} = -2\langle f, \pi_k \rangle + 2\sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle$$

$$\sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle = \langle f, \pi_k \rangle$$

מקבלים מערכת לינארית

$A\tilde{c} = b$

כאשר $b_i = \langle f, \pi_i \rangle$

ו- $A = \left(\langle \pi_i, \pi_j \rangle\right)_{i,j}$

A מטריצה סימטרית וחיובית:

$(x,y) \mapsto \underline{\underline{\langle x, Ay \rangle}}$ ← מכפלה פנימית הסטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$

היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$

כלומר, לכל $\bar{x} \neq 0$ אז

$$\underline{\underline{\bar{x} \cdot A\bar{x} > 0}}$$

כי

$$\bar{x} \cdot A\bar{x} = \sum_{i,j} x_i x_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle = \underline{\underline{\left\| \sum x_i \pi_i \right\|^2}}$$

$\{\pi_i\}$ בסיס ולכן $\sum x_i \pi_i \neq 0$ אם $\bar{x} \neq 0$.

בנוסף, A הפיכה ולכן י'
פתרון למערכת.

$$(\pi_i)_{i \geq 0}$$

$$A = \left(\langle \pi_i , \pi_j \rangle \right)_{0 \leq i,j \leq n}$$

$$A\bar{c} = \bar{b} \qquad \bar{b} = \langle f, \pi_i \rangle$$

כפולינומי $\pi_i = t^{i}$ על $[0,1]$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g \, dt$$

$$\langle \pi_{i+1}, \pi_{j+1} \rangle = \int_0^1 t^{i+j} \, dt = \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{i+j+1}$$

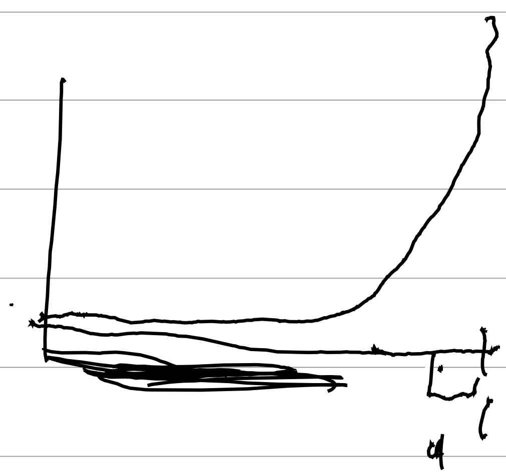
$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

<u>קריטי:</u> הבעיה <u>$H_n \bar{c} = \bar{b}$</u>

זו בעיה (טעות קטנה ב-$\bar{b}$

עלולה לגרום לטעות גדולה ב-$\bar{c}$).

<u>$[0,1]$</u> t^i



t^i

פתרון: למה? עם בסיס

אורתוגונלי (או אורתונורמלי):

$\langle \pi_i, \pi_j \rangle = 0$ $\quad i \neq j \quad (\langle \pi_i, \pi_i \rangle = 1)$

$f = \sum \underbrace{a_i} \pi_i$

$\langle f, \pi_i \rangle = a_i \langle \pi_i, \pi_i \rangle$

תהליך גרם-שמידט: יש

$\pi_1, \pi_2, \ldots$

שנמצא לך גם בסיס אורתוגונלי

נגדיר

$\hat{\pi}_1 = \pi_1$

$\hat{\pi}_{k+1} = \pi_{k+1} - \sum \frac{\langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2} \hat{\pi}_i$

$\langle \hat{\pi}_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle - \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = 0$

$$P = \bigcup P_i \qquad P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots$$

$P_i = \{$ פולינומים ממעלה $\le i$ $\}$

$$\dim(P_i) = i$$

$$\mathrm{span}(\langle \pi_i \rangle_{i \le n}) = \mathrm{span}(\langle \hat{\pi}_i \rangle_{i \le n})$$

$\hat{\pi}_i \in P_i$ | פולינום מתוקן ממעלה i.

$$\underline{\hat{\pi}_{i+1}} = t\hat{\pi}_i - \alpha_i \hat{\pi}_i + \sum_{j=0}^{i-1} b_j \hat{\pi}_j =$$

$$(t - \alpha_i)\hat{\pi}_i + \beta_i \cdot \hat{\pi}_{i-1} + \sum_{j=0}^{i-2} b_j \hat{\pi}_j$$

$$\langle \hat{\pi}_{i+1}, \hat{\pi}_i \rangle = \langle (t-\alpha_i)\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle \Rightarrow$$

$$\overset{!}{0} \qquad \alpha_i \cdot \|\hat{\pi}_i\|^2 = \langle t\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2}$$

$$0 = \langle (t-\gamma_i)\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle + \beta_i \|\hat{\pi}_{i-1}\|^2 \Rightarrow$$

$$\beta_i = - \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} =$$

$$- \frac{\langle \hat{\pi}_i , t\hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} = - \frac{\|\hat{\pi}_i\|^2}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2}$$

$$\hat{\pi}_{i+1} = (t-\gamma_i)\hat{\pi}_i + \beta_i \hat{\pi}_{i-1}$$

הערה: אם הקטע שאנחנו עליו

הוא מצורה $[-a, a]$

והמ'צה הינו סימטרית $W(t) = w(-t)$

$$\left[\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot \bar{g}(t) \, \underline{w(t)} \, dt \right]$$

אזי π_k פ' זוגיות עבור k

זוגי ופ' אי־זוגית ל-k אי זוגי.

לכן במקרה הזה $\alpha_i = 0$.

דוגמא: בקטע $[-1, 1]$ ולפ ee

לקחת (נשחת הורדיקו)

$$\pi_k(t) = \frac{k!}{(2k)!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k$$

כדי להראות ש- π_k אורתו׳

ל- π_i עבור $i<k$, מספיק להראות

$$0 = \langle \pi_k , t^i \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{d^k}{dt^k} (t^2-1)^k \cdot t^i \, dt =$$

$$\dots = 0$$

$$\pi_0 = 1 \quad , \quad \pi_1 = \frac{1}{2}(t^2-1)' = t$$

$$\pi_2 = \left((t^2-1)^2\right)'' \cdot \frac{2}{4!} = \frac{1}{12} \cdot \left((t^2-1)^2\right)''$$

$$\pi_k = t^k + \mu_k t^{k-2} + \dots$$

$$\pi_{k+1} = t \cdot \pi_k + \beta_k \cdot \pi_{k-1} \Rightarrow \boxed{\beta_k} = \frac{\pi_{k+1} - t\pi_k}{\pi_{k-1}}$$

$$\beta_k = \mu_k - \mu_{k+1}$$

$$\mu_k = \frac{k(k-1)}{2(2k-1)} \Rightarrow$$

$$\beta_k = \frac{1}{4 - k^{-2}}$$

<u>[illegible]:</u> פולינומים טריגונומטריים

פ' מחזוריות עם מחזור 1

$\underline{\underline{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}}$ $\qquad f(t+1) = f(t)$ לכל t.

$\Updownarrow$

$f : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad f(0) = f(1)$

$$i \sin(2\pi t) + \cos(2\pi t) = \underline{e^{2\pi i t}}$$

$(=)$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)$$

$$\underline{\underline{g : S^1 \to \mathbb{C}}}$$

$$S^1 = \{ z\in\mathbb{C} \mid |z|=1 \}$$

$$E : [0,1] \to S^1$$

$$E(t) = e^{2\pi i t}$$

$g : S^1 \to \mathbb{C} \rightsquigarrow g\circ E$ פ' מחזורית

$$\int_{S^1} g := \int_0^1 g\circ E \, dt$$

אם $z,w\in S^1$ אז $z\cdot w \in S^1$

נקבע $a\in S^1$ ונגדיר את

$$g_a(z) = g(a\cdot z)$$

אז $\int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g$

תרגיל: נניח ש- $g : S^1 \to \mathbb{C}^*$

מקיימת: $g(z\cdot w)=g(z)\cdot g(w)$

אזי א. כאשר $g(z)=1$ לכל z

אזי $\int_{S^1} g = 1$

ב. אחרת $\int_{S^1} g = 0$

הוכחה: א' קל, ב'

ב. יהי $a \in S^1$ כך ש- $g(a) \neq 1$

$g_a(x)=g(ax)=g(a)\,g(x)$

אזי

$$\int_{S^1} g = \int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g(a)\cdot g = \underbrace{g(a)}_{\neq 1} \int_{S^1} g$$

אזי $\int_{S^1} g = 0$.

לכל $n\in\mathbb{Z}$ הפ' $g_n(x)=x^n$

תרגיל: את התכונות של הפ'

1) $g_n\cdot g_m=g_{n+m}$ $\overline{g_n(x)}=g_{-n}(x)$ 2)

כזכור יש להגדיר מכפלה פנימית

על $C(S^1)$ ע"י

$$\langle f,g\rangle=\int_{S^1} f\cdot\overline{g}$$

כבר הוכחנו שה־ g_n מערכת

אורתונורמלית.

מקדם של המחבר שנפרד צ'ד

ה־ $\hat{g}$ סטור רזות כפל (במחב הנ"ל).

הקבוצה הזו נקראות פולינומים טריגונומטריים.

נשים לב ש-

$$\int_{S^1} x^n = \int_0^1 e^{2\pi i n t}\, dt = \int \cos 2\pi i n t + i \sin 2\pi n t = 0$$

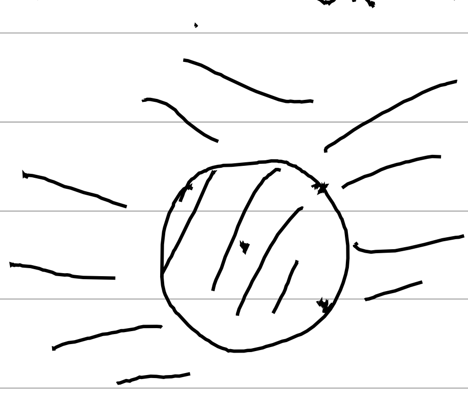
תרגיל:

$\mathbb{C}^* = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \}$

$x \sim y$ אם $x = y$ או $x = \frac{1}{y}$

$X = \mathbb{C}^*/\sim$

$g_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} \sim x^n = g_n(x)$



$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^* \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C}^* \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\bar{g}_n"] & X
\end{tikzcd}$$

$$\pi(x) = \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \in \mathbb{C}$$

לכל $z \in S^1$ לכן

$$\pi(z) = \mathrm{Re}(z)$$

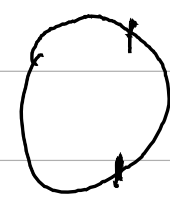
לכן $\pi(S^1) = [-1,1] = X_0$

$$\pi(x) = \pi\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

$$\overline{g_n}\Big(\overbrace{\frac{x+\frac{1}{x}}{2}}^{\pi(x)}\Big) = \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2} = \pi(g_n(x))$$

לכל h ב פ X נגדיר

$$* = \int_{X_0} h = \int_{S^1} h\circ\pi = \int_{S^1} h\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)$$



$$\int_0^1 h\left(\mathrm{Re}\left(e^{2\pi i t}\right)\right)dt = \int_0^1 h\cos(2\pi t)dt$$

$y = \cos(2\pi t)$ $\quad dy = -2\pi \sin(2\pi t)dt =$

$$dy = -2\pi\sqrt{1-y^2}\,dt$$

$$x = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} h(y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$ s/c

~~אז~~ ה־ $\bar{g}_n$ נקראים פולינומי'

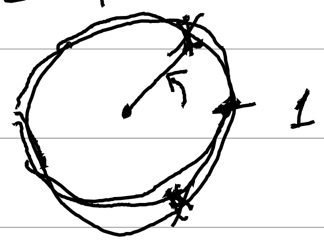
צ'ב'שב. הוכחנו שהם מערכת

אורתונורמלית עבור

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f\cdot g\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

$$\bar{g}_n(\cos 2\pi t) = \cos 2\pi n t$$

$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$



$\sin 2\pi t = \sqrt{1-y^2}$

$0 \le t \le \frac{1}{2}$

$$S^1 \xrightarrow{p} [\ \ \longleftrightarrow\ \ ] = [-1,1] \subseteq \mathbb{R}$$

X

$p(z) = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} \quad \left(= \frac{z+\bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(z)\right.$ for S^1

$f : X \to \mathbb{C}$

$y = \cos 2\pi t$

$dy = -2\pi \sin 2\pi t \, dt$

$$\int_X f := \int_{S^1} f \circ p = \int_0^1 f \circ p \circ e^{2\pi i t} \, dt =$$

$$\int_0^1 f(\cos 2\pi t) \, dt = 2 \int_0^{1/2} f(\cos 2\pi t) \, dt =$$

$$2\int_{1}^{-1} f(y)\cdot\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(y)\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "\varphi_n", "x\mapsto x^n"'] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, bend right] & S^1 \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "T_n"'] & X
\end{tikzcd}$$

$$\varphi_n(x) = x^n$$

$$T_n\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) = \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2}$$

$$\int_X T_n = \int_{S^1} T_n \circ p = \int_{S^1} \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2} =$$

$$\begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{S^1} \varphi_n \bar{\varphi}_m =$$

$$\int \varphi_n \varphi_{-m} = \int \varphi_{n-m}$$

$$\left(T_n \cdot T_m\right)\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = \left(\frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{2}\right)\left(\frac{z^m + \frac{1}{z^m}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z^{m+n} + \frac{1}{z^{m+n}} + z^{n-m} + z^{m-n}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(T_{n+m}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) + T_{n-m}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\right)$$

$$\int T_n \cdot T_m = \frac{1}{2}\left(\int T_{n+m} + \int T_{n-m}\right) =$$

$$\int \begin{cases} 1/2 & n = \pm m \neq 0 \\ 1 & n = m = 0 \\ 0 & |n| \neq |m| \end{cases}$$

$$T_n = T_{-n}$$

$$T_0 = 1 \qquad T_0\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = 1$$

$$T_1\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} \qquad T_1(z) = z$$

$$T_n \cdot T_1 = \frac{1}{2}\left(T_{n+1} + T_{n-1}\right) \Rightarrow$$

$$T_{n+1}(z) = 2z\,T_n(z) - T_{n-1}(z)$$

$$T_2(z) = 2z^2 - 1$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$$

$$\cos(nt) = T_n(\cos t)$$

1. T_n ממעלה n, המקדם של z^n הוא 2^n

אינטרפולציה

נתונים ערכי פונקציה f

במספר סופי של נקודות

$c_0,\dots,c_n \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

רוצים לקרב את f על ידי

פולינום ממעלה n.

המרחב של פ׳ ממשית על $c_0,\dots,c_n$

ממימד $n+1$, עם בסיס

$$\delta_i(c_j) = \begin{cases} 1 & j=i \\ 0 & j\neq i \end{cases}$$

כולו ממעלה n

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x-c_j)}{\prod_{j\neq i}(c_i-c_j)} \in P_n$$

$f(c_i) = f_i \Rightarrow$

$$f \sim \sum f_i l_i = \Pi_{\bar{c}}(f)$$

$$\Pi_{\bar{c}} : C[a,b] \to C[a,b]$$

$$\sup_{\|f\|=1} \|\Pi_{\bar{c}}(f)\| = \sup_{\|f\|=1} \left|\sum f_i l_i\right| =$$

$$= \sum_{i=0} \|l_i\|$$

$$\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|$$

$\hat{p}_n$ - הקירוב הכי טוב ל-f

ב- $\mathbb{P}_n$

$$\|f-\Pi_c(f)\| = \|f-\hat{p}_n-\Pi_c(f-\hat{p}_n)\|$$

$$\le \|f-\hat{p}_n\| + \|\Pi_c\|\,\|f-\hat{p}_n\| =$$

$$\boxed{(1+\|\Pi_c\|)\,\|f-\hat{p}_n\|}$$

הערכת הטעות בצורת הנגזרת:

f פ׳ ~~רציפה~~ ב- $C^{n+1}[a,b]$

(גזירה ברציפות n+1 פעמים)

$$(f-\Pi_c(f))(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)$$

(תלוי ב-x)

למה: יש ξ שעבורו זה נכון ($f\in C^{n+1}[a,b]$)

הוכחה: נקבע $c_i \neq x$

$$G(t) = f(t) - \pi_c(f)(t) - \frac{f(x)-\pi_c(f)(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)}\prod_{i=0}^{n}(t-c_i) \qquad (*)$$

השורשים של G הם לפחות

c_i $i=0,\dots,n$ ו-x.

משפט רול: ל-$G^{(n+1)}$

יש שורש ξ.

נגזור את (*) $n+1$ פעמים:

$$G^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)! \cdot \frac{f(x) - P_c(f)}{\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)}$$

נציב $t=\xi$.

$\xi \in [a,b]$

(כיפלם להניח ש $[a,b]$

מכיל וקמור $\square$ x, c_i)

הערות: לכסות לנצוו/

0 $\exists$ בחירה $\bar{c}^{(n)} \in [a,b]$ של נקודות

c כך ש הפלבני שיין ולפיאלימליות:

$\Pi_{\bar{c}^{(n)}}(f) \to f$

עבור פונקציות f מספיק חלקות.

$$\|f - \Pi_{\bar{c}^{(n)}}(f)\| \le \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \prod_i \cancel{(x - c_i^{(n)})}$$

$$\le \frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1}$$

$M_{n+1}(f)$ חוסם את הנגזרת ה-$n+1$ של f ב-$[a,b]$.

אזי רוצים ש-

$$\underline{\underline{\frac{M_n(f)\cdot(b-a)^n}{n!}}} \to 0$$

$\bar{c}$ נקודות אינטרפולציה $c_i\in[a,b]$

$$\|f-\pi_{\bar{c}}(f)\| \le \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot\prod_i (x-c_i)\right|$$

$$\le \frac{M_{n+1}\cdot(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

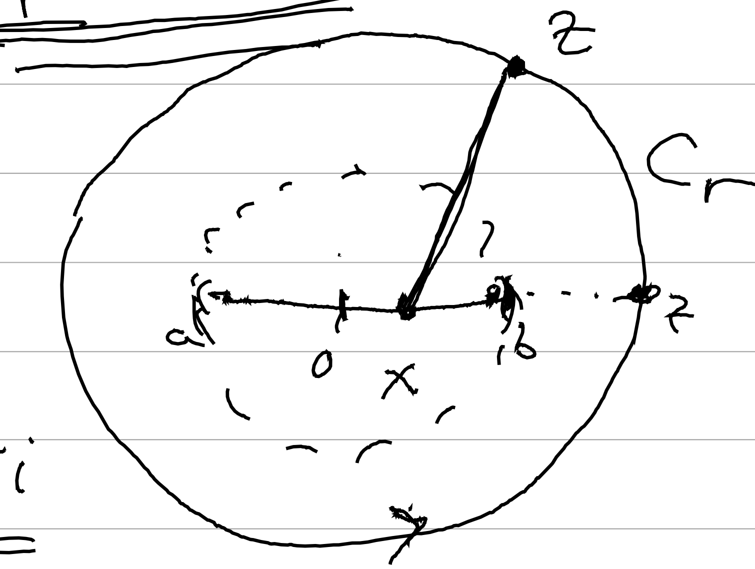
$$M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$$

f פ' מרוכבת אנליטית

טענת לין: אם f אנליטית

צ/ל

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(z)}{(z-x)^{k+1}}\,dz$$



$a = -b$

$$\int_{C_r} \frac{1}{z} = 2\pi i$$

$\gamma(t) = re^{2\pi i t}$

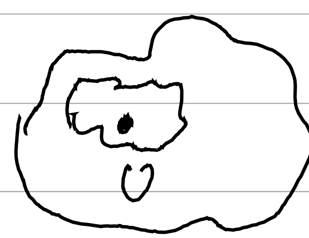
$\|z - x\| \geq r - b$ $\Rightarrow$

$$\|f^{(k)}(x)\| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{\cancel{M_0}\, N}{(r-b)^{k+1}} \cdot 2\pi r \Rightarrow$$

$$\frac{u_n \cdot (2b)^n}{n!} \le \frac{\frac{n! \cdot \overset{M}{\cancel{u_0}}}{(r-b)^{n+1}} \cdot r \cdot (2b)^n}{n!} =$$

$$\frac{M \cdot r}{r-b} \cdot \left(\frac{2b}{r-b}\right)^n \longrightarrow 0$$

$$\frac{2b}{r-b} < 1$$



[illegible]

$$r > 3b$$

$$\frac{1}{z}$$

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(f \circ \gamma)'$

$\gamma: (a, b) \longrightarrow \mathbb{C}$

מהו הפולינום המתוקן ממעלה

n שנורמו $\|\cdot\|_\infty$ (על $[-1,1]$)

מינימלית?

אם p פולינום מתוקן ממעלה

n כך ש- $\|p\|_\infty = |p(a_i)|$ עבור

$p(a_i) = -p(a_{i+1})$

n+1 נקודות a_i אז p

הוא הפולינום עם $\|p\|_\infty$ מינימלית

הוכחה, נניח ש- $\|q\| < \|p\|$

אז $p-q$ ב-n נקודות.

טענה: פולינומי צ'בישף המתוקנים

מקיימים את הזהות:

$$T_n(\operatorname{Re} z) = \operatorname{Re}(z^n)$$

$K = 0, \dots, n-1$

$x = \operatorname{Re} z$

$T_n(x) = 0 \Leftarrow$

$\operatorname{Re} z^n$

$\Rightarrow$

$x = \cos\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)$

$z^n = \pm i$

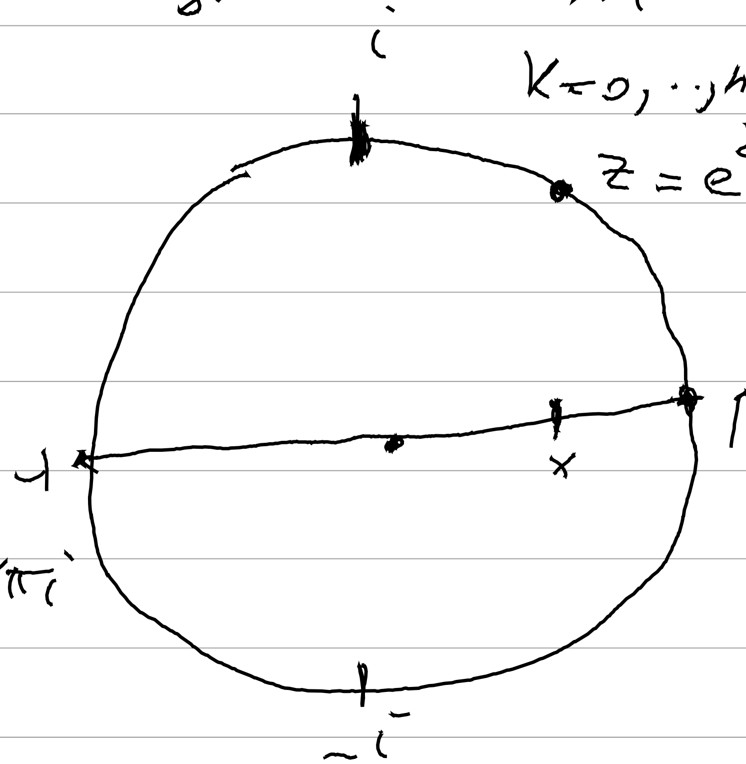
$y = \cos\left(\pi \frac{k}{n}\right)$

$K = 0, \dots, n$

$z = e^{2\pi i t}$

$z^n = i \iff$

$e^{2\pi i n t} = i$



$2\pi i n t = \frac{\pi i}{2} + \cancel{2}k\pi i$

$\Rightarrow t = \frac{2k+1}{4n}$

המסקנות: המקדם המוביל של

T_n הוא 2^{n-1}

לכן $\mathring{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n$ פול' מתוקן

ממעלה n , $\|\mathring{T}_n\| = \frac{1}{2^{n-1}}$ שמקבל

בנקודות $a_i = \cos(\frac{\pi i}{n})$

$0 \le i \le n$. עם סימנים מתחלפים

$\mathring{T}_n$ עם נורמה מינימלית

מינימלית בין הפו' המתוקנים

ממעלה n - לכן אם $\bar{c}^{(n)}$ ספרת

c_i כשורשי של T_n אז

$$\|f - \Pi_{\tilde{c}(n)}(f)\| \le \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \cdot \|\tilde{T}_n\|_\infty =$$

$$\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

$c_0, c_1, \ldots$ סדרת אינסופית

$p_0, p_1, \ldots$ $\deg(p_i) \le i$

δ_i

p_i

$$p_{i+1}(x) = p_i(x) + a_{i+1} \cdot (x - c_0) \cdot \ldots (x - c_i)$$

$$a_{i+1}(c_{i+1}-c_0)\cdots(c_{i+1}-c_i)=f_{i+1}-P_i(f_{i+1})$$

$$\underline{\underline{a_{i+1}}}=\frac{f_{i+1}-P_i(f_{i+1})}{(c_{i+1}-c_0)\cdots(c_{i+1}-c_i)}=$$

$$\underline{[c_0,\dots,c_{i+1}]f}$$

$$\underline{\underline{[c_0,\dots,c_{i+1}]f}}=\frac{[c_0,\dots,c_i]f-[c_1,\dots,c_{i+1}]f}{c_{i+1}-c_0}$$

$$\underline{c}=c_0,\dots,c_{i+1}\ ,\qquad \hat{c}_j=c_0,\dots,\cancel{c_j},\dots,c_{i+1}$$

sync

$$\underline{P_{\underline{c}}}(x)\overset{?}{=}P_{\hat{c}_{i+1}}-\frac{(x-c_0)}{c_{i+1}-c_0}\left(P_{\hat{c}_{i+1}}-P_{\hat{c}_0}\right)=:q(x)$$

$s_i \quad 0 < j < i+1 \quad \text{dc} \quad \text{'N'} \quad 33$

$$q(c_j) = f_j = P_{\hat{c}}(c_j)$$

$$q(c_0) = P_{\hat{c}_{i+1}}(c_0) = f_0 = P_{\hat{c}}(c_0)$$

$$q(c_{i+1}) = P_{\hat{c}_{i+1}}(c_{i+1}) - (P_{\hat{c}_{i+1}}(c_{i+1}) -$$

$$P_{\hat{c}_0}(c_{i+1})) = P_{\hat{c}_0}(c_{i+1}) = f_{i+1} = P_{\hat{c}}(c_{i+1})$$

$c \quad f$

$c_0 \quad f_0$

$c_1 \quad f_1 \qquad [c_0, c_1]f$

$c_2 \quad f_2 \qquad [c_1, c_2]f \qquad [c_0, c_1, c_2]f$

$c_3 \quad f_3 \qquad [c_2, c_3]f \qquad [c_1, c_2, c_3]f \qquad [c]f$

$c_4 \quad f_4$

$$\boxed{[c_1, c_2, c_3]f} = \frac{[c_2, c_3]f - [c_1, c_2]f}{c_3 - c_1}$$

$\bar{c} = c_0, \ldots, c_i$

$$P_{\bar{c}}(x) = \underline{\underline{P_{\hat{c}_i}(x)}} + [\bar{c}] f \cdot \prod_{j<i} (x - c_j)$$

$$\underline{\underline{\| P_{\bar{c}}(x)}} - P_{\hat{c}_i}(x) \| = \| \boxed{[\bar{c}] f} \prod (x - c_j) \|$$

$$\leq \boxed{\frac{P_{\bar{c}}^{(i+1)}(\xi)}{(i+1)!}} \cdot \prod (x - c_i) \|$$

$$\underline{\underline{f}} \qquad \left.\begin{matrix} c_0, c_1, \ldots, c_n \\ f_0, f_1, \ldots, f_n \end{matrix}\right]$$

$$P_{\bar{c}}(x) = [\bar{c}]f\, x^n + \ldots =$$

$$[\bar{c}]f\,(x - c_0)\ldots(x - c_n) + P_{\hat{c}_n}$$

$$\hat{c}_i = \{c_0, \ldots, c_n\} \setminus \{c_i\}$$

$$[\bar{c}]f = \frac{[\hat{c}_0]f - [\hat{c}_n]f}{c_n - c_0}$$

$c_0, \dots, c_n$

$f_0, \dots, f_n$

$$\underline{\underline{\bar{c}}} = 3\cdot\{1\} + \{3\} + 2\cdot\{5\}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 & 5 & c_i \\ \hline 2 & 4 & 0 & 1 & 6 & 7 & \end{array}$$

$p(1) = 2, \quad p'(1) = 4, \quad p''(1) = 0$

$p(3) = 1, \quad p(5) = 6, \quad p'(5) = 7$

$$p_{\bar{c}}(x) = ([\bar{c}]f) \cdot x^{4+1} + \dots$$

$\hat{c}_i = \bar{c} - \{c_i\}$ [illegible] c [illegible] $\{c_i\}$

$\bar{c} = \sum n_i \{c_i\} \qquad \deg(\bar{c}) = \sum n_i = n$

הגדרה: אם $c_i \neq c_j$ אז

$$[\bar{c}]f = \frac{[\hat{c}_i]f - [\hat{c}_j]f}{c_j - c_i}$$

הערה:

$$\bar{c} = \sum_{k=1}^{m} n_k [c_k]$$

$$n = \deg(\bar{c}) = \sum n_i$$

אינדוקציה על $N(\bar{c}) = n - m$

אם $n - m > 0$ אז יש $n_k > 1$

$$d = d_\varepsilon = \bar{c} - [c_k] + [c_k + \varepsilon]$$

אם $\varepsilon > 0$ מספיק קטן אז

$$N(d) < N(\bar{c})$$

כשיש קבוצה

$$\underline{[\bar{d}]f} = \frac{[\bar{d}_i]f - [\bar{d}_j]f}{d_j - d_i}$$

$[\bar{c}]f$ רציפה בכל ומוגדרת

c_i: [illegible] [illegible] [illegible]

מספיק להראות ש-

$$[(n-1)[c_0] + [c_0+\varepsilon]]f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} [n \cdot [c_0]]f$$

$$[c_0, c_0+\varepsilon]f = \frac{f(c_0+\varepsilon) - f(c_0)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f'(c_0)$$

$$P_{n[c_0]} = \sum \frac{f^{(k)}}{k!}(x - c_0)^k$$

$c_0 = c_1 = c_2$ $\qquad$ $c_5 = c_6$

$c_0 \quad f_0$

$c_1 \quad f_0 = f'' \quad [c_0, c_1]f = f_1$

$c_2 \quad f_0 \quad f_1 \quad f_2$

$c_3 \quad f_3 \quad [c_2, c_3]f = \dfrac{f_3 - f_0}{c_3 - c_0} \quad [c_1, c_2, c_3]f = \dfrac{[c_2, c_3]f - f_1}{c_3 - c_0}$

$c_4 \quad f_4$

$c_5 \quad f_5$

$c_6 \quad f_5 \quad f_6$

$c_7 \quad f_0 \quad [c_6, c_7]f = \dfrac{f_0 - f_5}{c_7 - c_6}$

c_6''

$$\underline{[c_5, c_3, c_1]f}$$

ספליינים

$a<b\in\mathbb{R}$ קבועים

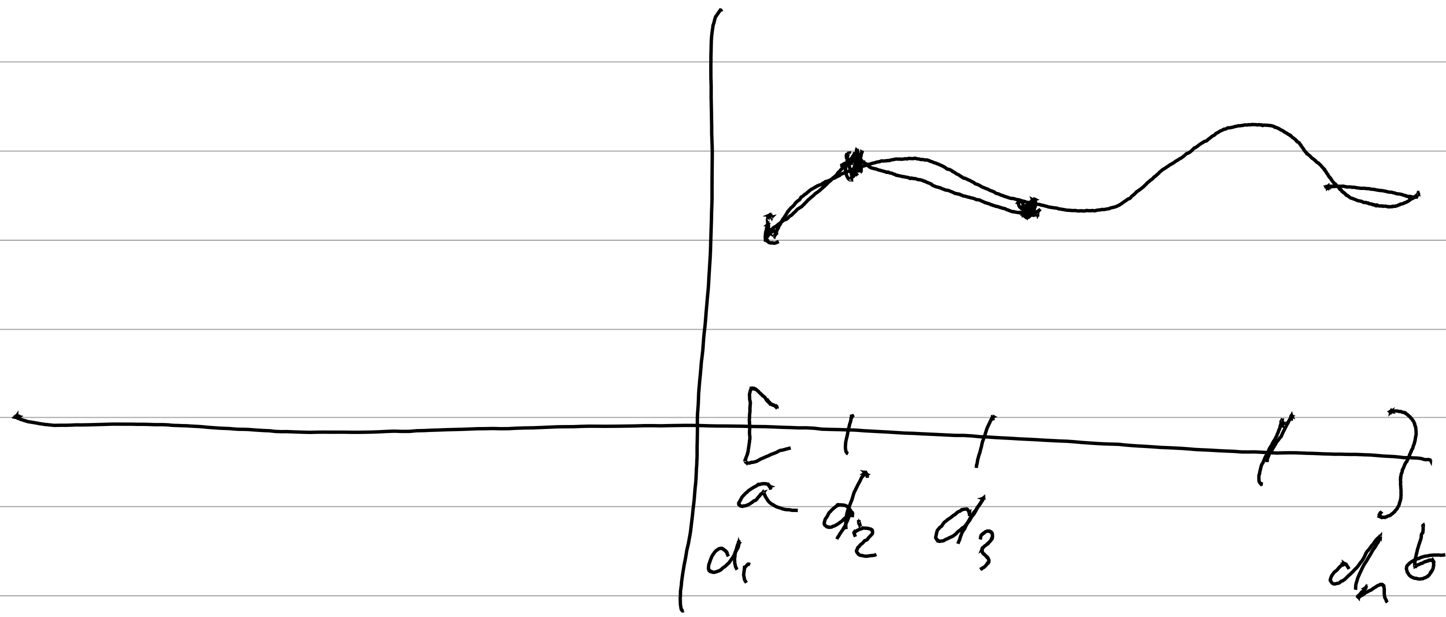
חלוקה

$$a=\underbrace{d_0<d_1<\dots<d_n=b}_{\Delta}$$

$$S_m^k(\Delta)=\left\{ s\in C^k[a,b] \;\middle|\; s|_{[d_{i-1},d_i]} \text{ פולינום ממעלה } \le m \text{ לכל } i \right\}$$

$k<m$.

$S_1^0(\Delta)$ — פ' לינאריות למקוטעין
רציפות.



אם f גזי' פ' ברציפות

נזכיר, ראינו המרחק בין f
לקירוב הלינארי s חסום ע"י

$$|f(x)-s(x)| \le \frac{M}{2}\cdot\left|(x-d_i)(x-d_{i+1})\right| \le$$

$$\frac{M}{8}\cdot(d_{i+1}-d_i)^2 \qquad M=\max_{x\in[d_i,d_{i+1}]} f''(x)$$

אז השגיאה המינימלית היא

$\frac{\mu}{q} \cdot |\Delta|^2$

אורך הקטע המירבי. - $|\Delta|$

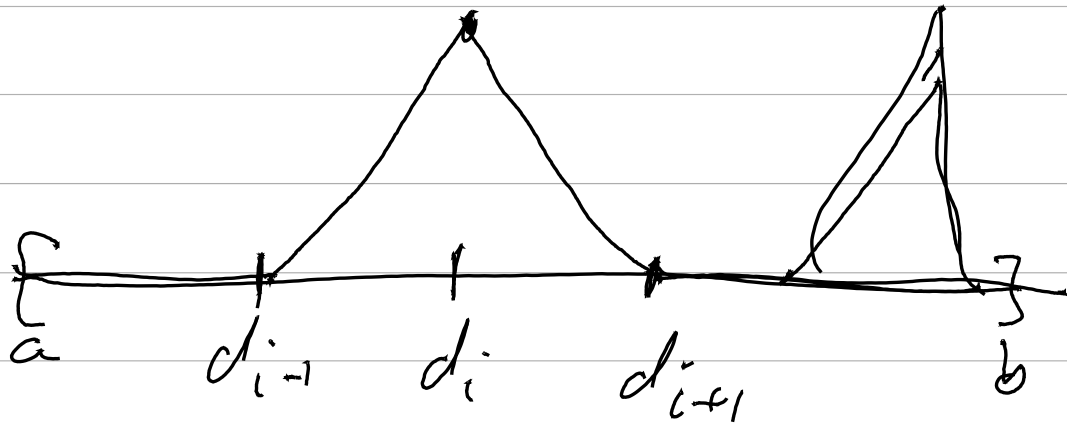
עובדה:

$\|f - s_1\| \le c\,\|f - s_1^0(\Delta)\|$

$V = s_1^0(\Delta)$ - ממימד n. מה הפ' ב-V

שמתאימות לבסיס הסטנדרטי

$\mathbb{R}^{\{d_1, \dots, d_n\}}$



B_i

$\langle B_i, B_j \rangle \neq 0$

רק אם $|i-j| \leq 1$

כלומר: אם

$\hat{s} = \sum c_i B_i$

ההיטל של f למרחב V ע"י

$\bar{c}$ פתרון של מע' המשוואות של

$T\bar{c} = d$

$T = \left(\langle B_i, B_j \rangle\right)_{i,j}$ כאשר

$d_i = \langle f, B_i \rangle$

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

״כמעט״ אלכסונית.

$$\|f - \hat{s}\|_\infty \le 4 \cdot \overbrace{d(f, S_1^0(\Delta))}^{\text{סופג הי׳}}$$

ספליינים ממעלה 3:

קירוב של f עם ידי' נגזרות

ב $S_3^1(\Delta)$. מקרבים את

f עם ידי' פ' s כך ש-

לכל i $s(d_i)=f(d_i)$

פולי' ממעלה ≤ 3 $s|_{[d_{i-1},d_i]}$

$s'(d_i)=m_i$

א. $m_i=f'(d_i)$

ב. לבחור את m_i כך ש- $s\in S_3^2(\Delta)$

מבנ'ות בפתרון למשוואות

$\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ למשל f פולינום.

f גזירה ברציפות על $[a,b]$ (אולי יש חלקה).

המטרה: למצוא פתרונות

משוואה $f(x)=0$.

או: משוואות דיפרנציאליות ממימד

סופי (בהמשך)

ד. $F(t,x,x',x'')=0$

$x(0)=x_0$, $x(1)=x_1$

טענה: קיים c ש $f(a)\cdot f(b) \le 0$

המבחן קיים.. הוכחה נתונה

אלגוריתם: נקודת האמצע

$c=\frac{a+b}{2}$ מקיים $f(c)\cdot f(b)\le 0$

אם $f(a)\cdot f(c)\le 0$, ממשיכים

על הקטע $[c,b]$ או $[a,c]$

התכנסות.

$f(c)\ge 0$

≤ 0

הגדרה: לתהליך יש התכנסות
ליניארית אם $|x_n - a| < \varepsilon_n$
כך ש $\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} C$ עבור איזשהו קבוע c.

במקרה שלנו

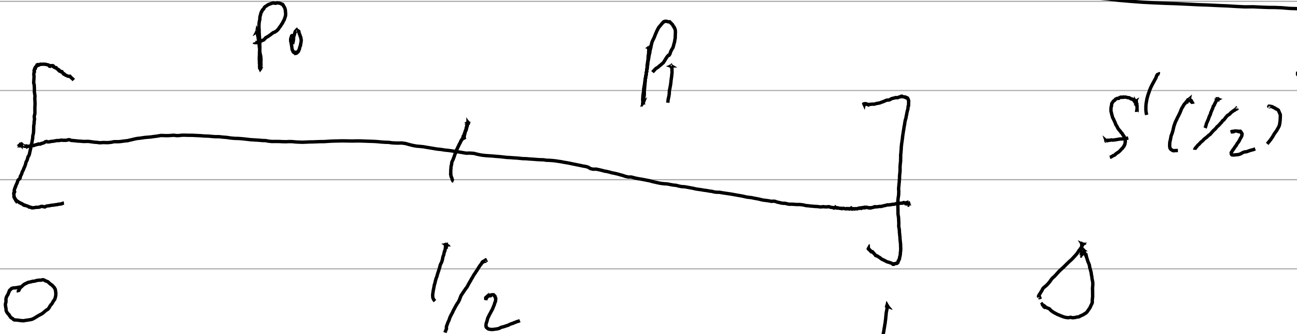
$$|x_n - a| \le \frac{(b-a)}{2^n} = \varepsilon_n$$

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{1}{2}$$

<u>התכנסות מסדר p</u> אם

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} \to c > 0$$

(עבור $p \ge 1$).



f $\quad s \in S_3^1(\Delta) \quad p_0'(1/2) = p_1'(\tfrac{1}{2})$

$p_0(0) = f(0)$, $p_0(1/2) = f(1/2)$, $p_1(1/2) = f(1/2)$, $p_1(1) = f(1)$

$\cdot\ f(x)=0 \qquad [a,b]$

$x_i \to 0 \qquad f(c)=0$

$$\left|\frac{x_{i+1}}{x_i}\right| < \varepsilon_i \qquad \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} \to c < 1$$

התכנסות לינארית

$p \geq 1$

$$\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i^{\,p}} \to c > 0$$

קצב מסדר p.

הגדרה: סדרת פונקציות
רציפות $f_0,\dots,f_n$

על $[a,b]$ כך שלכל אחת מהן

יש מס' סופי של שורשים ב־$[a,b]$

נסמן $f_{-1}\equiv 0$, $f_{n+1}=-f_n'$

לשאר הפונקציות עם f_n צריך

ולכל $0\le i\le n$ ולכל $r\in[a,b]$

אם $f_i(r)=0$ אז $f_{i+1}(r)\cdot f_{i-1}(r)<0$

ולכל x נגדיר $\sigma(x)$ את מס'

הפעמים שהסדרה $f_0(x),\dots,f_n(x)$ מחליפה סימן

משפט: מס' השורשים של f_n הוא $\sigma(a)-\sigma(b)$

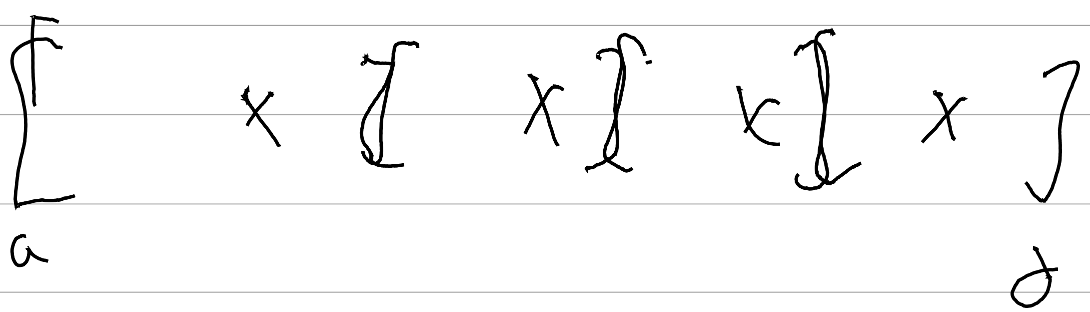
הערה: אם היא נכונה לכל

[a,c] ו- [c,b] () נקודה

כלומר: אז היא נכונה ל-[a,b]

אז מספיק להוכיח לסביבה

יש רק נקודה אחת בעייתית.



בערך: עבור $i=0$ הוכחה

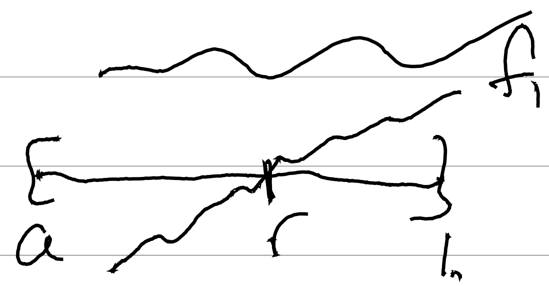
הינו - ש $f_0(r)\neq 0$ לכל $r\in[a,b]$

הוכחת המשפט: באינדוקציה על n

$n=0$ ✓

$n=1$: נסמן ב- r את הנקודה

היחידה



$r(a)=0$ $\quad$ $r(b)=1$

$f_1(r)=0 \Rightarrow f_0(r)\cdot f_2(r)<0$

$f_2(r)=-f_1'(r)$

$f_0(r)<0,\ f_1'(r)<0$

נניח שהטענה נכונה ל-n

שני מקרים:

1. $f_1(r)\neq 0$. אם נוריד את f_0

הסדרה $f_1,\dots,f_{n+1}$ מקיימת

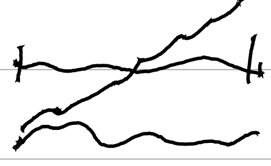
את ההנחות, כי היא קיימת

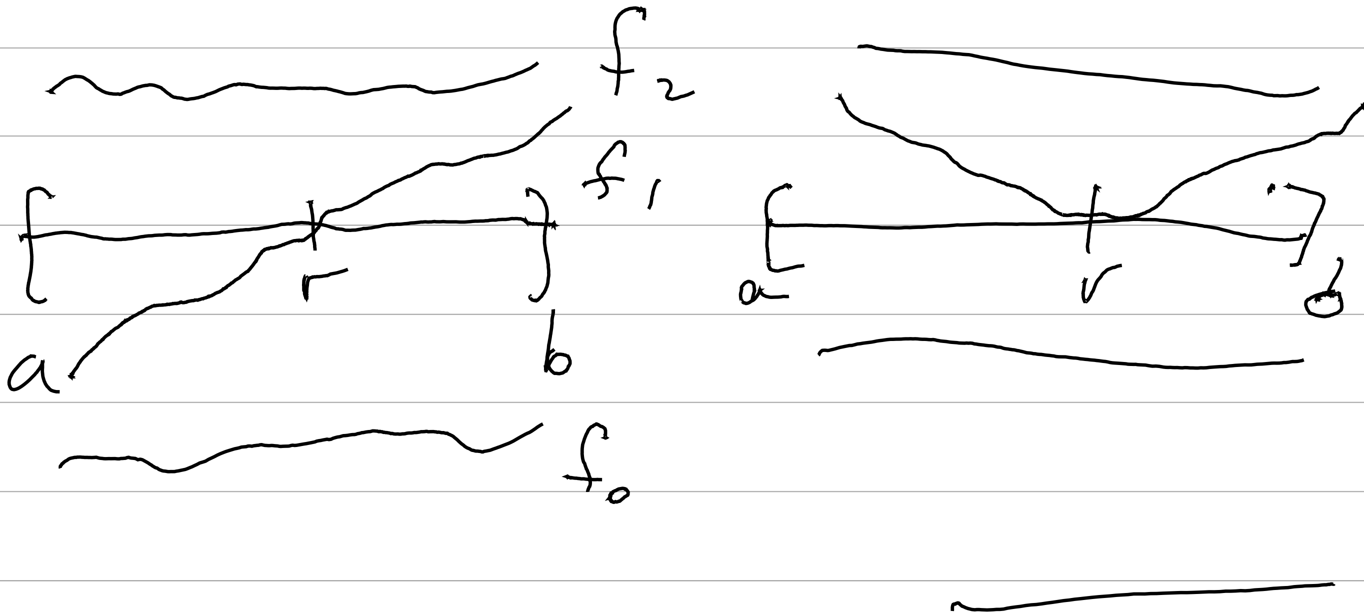
וכן ב-1 ושאר ההנחה.

2. $f_1(r)=0$. נוריד את f_0,f_1

לפי ההנחה $f_0(r)\cdot f_2(r)<0$

אז $f_2(r)\neq 0$.





דוגמא 1. נניח ש- p פולינום

עם שורשים פשוטים.

נגדיר $f_n = p$, $f_{n-1} = p'$

ו-

$f_{k+1} = q_k \cdot f_k - f_{k-1}$

כאשר $\deg(f_{k+1}) < \deg(f_k)$ עבור $k \le n-1$

אז f_i מקיימים את התנאים:

כיוון שה שורשים פשוטים, ל- p,p' אין

שורש משותף. בפרט, הדוגמה

מקיימת עבור $n=i$:

$$f_{n+1}\cdot f_{n-1} = -(f')^2 \le 0$$

2. סדרה $\{f_i\}$ נס'ס

$\deg(f_i)=i$

של פולינומים אורתוגונליים, מתקיים

כלומר יש נוסחת נסיגה

$$f_{i+1} = (t-a_i)\cdot f_i - b_i f_{i-1}$$

ו- $b_i>0$.

אם $b\gg 0$, $f_i(b)>0$ לכל i.

אז $\sigma(b)=0$

וכל $a<c_0$ יש $\sigma(a)=n$

כש-f_i של i ארוכים ממש שונים.

לכן נישם לקבל אינפה

נמצא השורש ה-k לפי

החישוב של $\sigma(c)$

כמו שלב, מחשבים

$$x_{k+1}=\frac{x_k+x_{k-1}}{2}$$

ומחשבים את $\sigma(x_{k+1})$

ולפי הסימן של $\sigma(x_{k+1})\sigma(a)$

וכו' $\sigma(x_{k+1})\sigma(k)$ יורדים אפסולה

הנדרש לדיוק.

מטרה לפתור $f(x)=0$

בקטע $[a,b]$, f רציפה

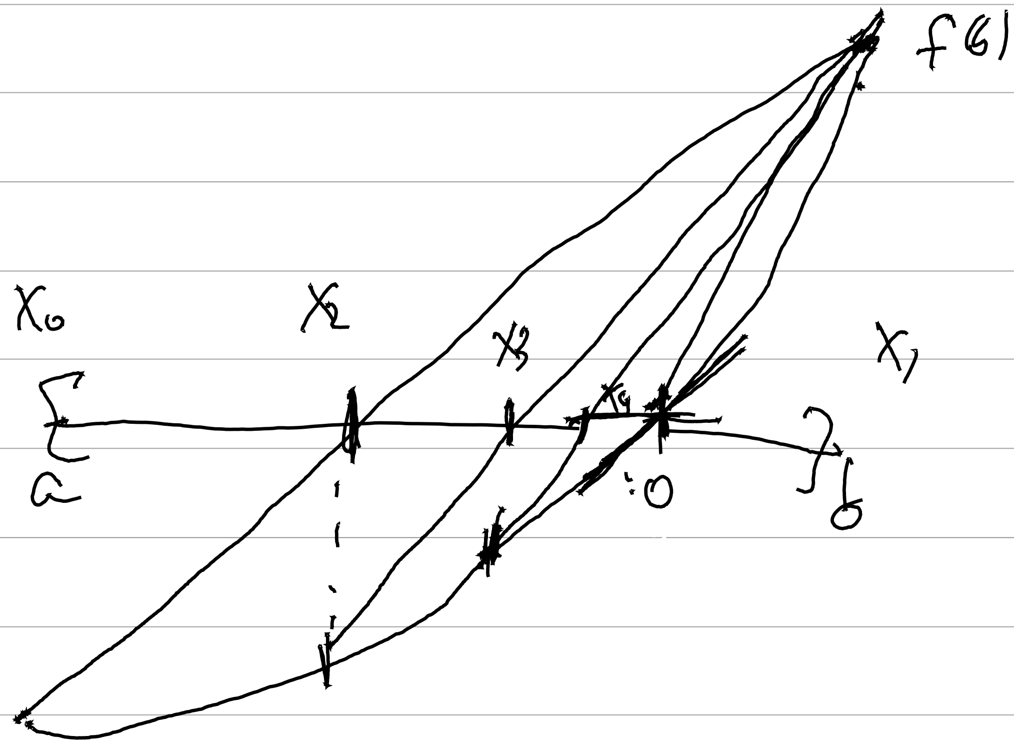
$f(a)\cdot f(b)<0$

$$\frac{f(b)}{b-a}(x-a)+\frac{f(a)}{a-b}(x-b)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f(b)(x-a)-f(a)(x-b)=0$$

$$x=\frac{f(b)a-f(a)b}{f(b)-f(a)}$$



$$X_{n+1} = \frac{f(x_n)\cdot x_{n-1} - f(x_{n-1})\, x_n}{f(x_n)-f(x_{n-1})} =$$

$$\frac{(f(x_n)-f(x_{n-1}))\cdot x_n + f(x_n)\cdot(x_{n-1}-x_n)}{f(x_n)-f(x_{n-1})} =$$

$$x_n - f(x_n)\cdot\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{f(x_n)}{x_n} \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$1 - \underbrace{\frac{f(x_n)}{x_n}} \cdot \underbrace{\frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)}} \to$$

$$1 - f'(0) \cdot \frac{b}{f(b)} =: c$$

מה ? - $n+1$, נחכה

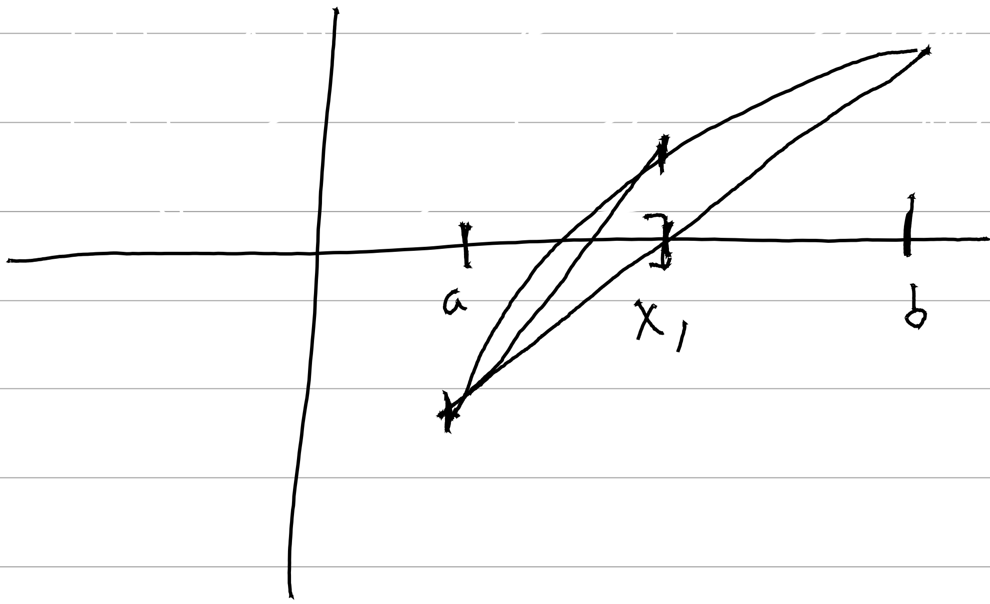
$$d = \frac{f(x_n)\,x_{n-1} - f(x_{n-1})\,x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

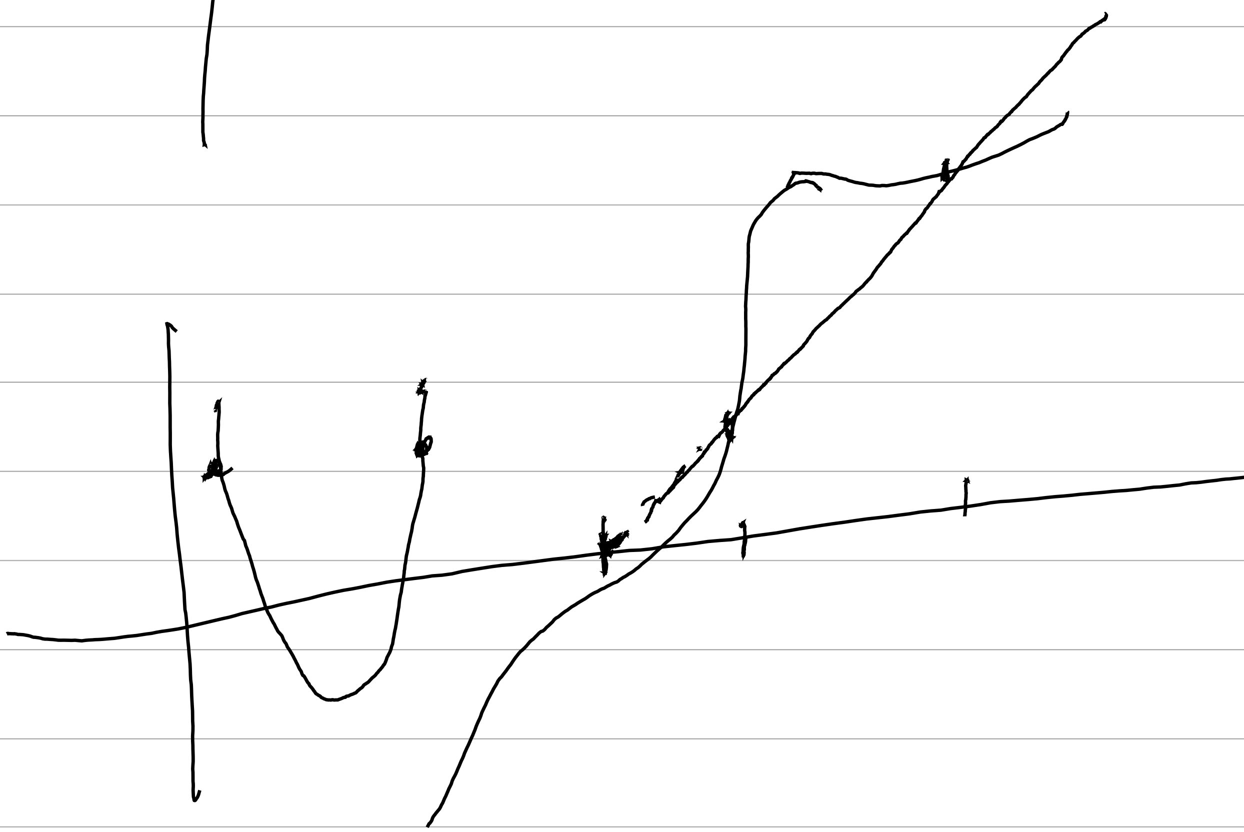
אם $f(d) \cdot f(x_n) \leq 0$ אזי $x_{n+1} = d$

אחרת אזי $x_{n+1} = x_n$, $x_n = d$

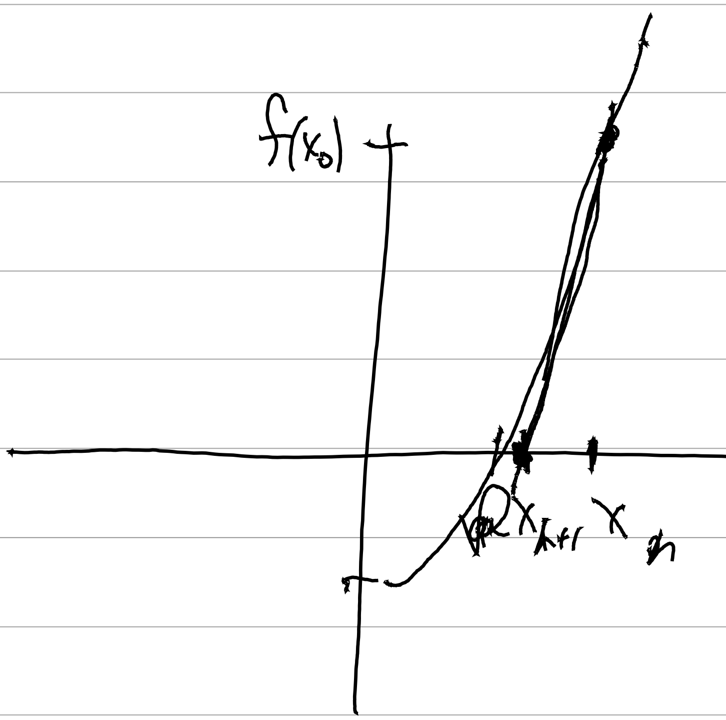
1. שיטת ה-secant

2. שיטת ניוטון





שיטת ניוטון:



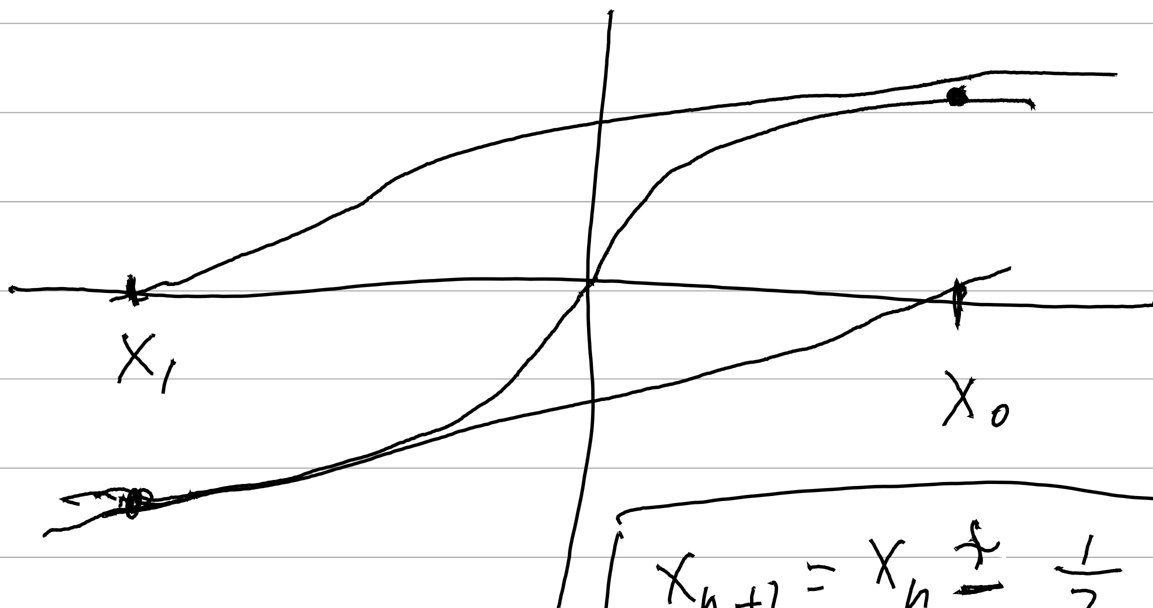
$$\frac{x_{n+1} - x_n}{0 - f(x_n)} = \frac{1}{f'(x_n)} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

דוגמה 3: כדי לחשב את $\sqrt{a}$

$a>0 \Rightarrow x^2 - a = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$



$$\boxed{x_{n+1} = x_n \pm \frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & x \geq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & x \leq 0 \end{cases}$$

$x_0 = \frac{1}{4}$

$x_1 = -\frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{1}{4} = x_0$

נגדיר

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

התהליך הוא $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

השורש של f הוא נקודת שבת של

φ: נקודה α כך ש- $\alpha = \varphi(\alpha)$.

משפט ההעתקה המכווצת:

יהי (M,d) מרחב מטרי

שלם ו- $\varphi: M \to M$ העתקה

מכווצת: יש $c<1$ כך ש

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \le c \cdot d(x,y)$$

לכל $x,y \in M$ אז ל- φ יש

נקודת שבת יחידה שמתקבלת ע"י

הגבול של הסדרה, $x_{n+1}=\varphi(x_n)$.

x_0 כלשהו.

הוכחה: לכל $i\le j$,

$$d(x_i,x_j)\le c^i\cdot \underline{d(x_0,x_{j-i})}$$

$$d(x_0,x_k)\le d(x_0,x_1)+\dots+d(x_{k-1},x_k)\le$$

$$d(x_0,x_1)(1+c+c^2+\dots+c^{k-1})=\frac{1-c^k}{1-c}d(x_0,x_1)$$

$$\Rightarrow d(x_i,x_j)\le \frac{c^i}{1-c}\,d(x_0,x_1)\longrightarrow 0$$

$\Leftarrow (x_i)_{i\ge 0}$ סדרת קושי $\Leftarrow$ יש

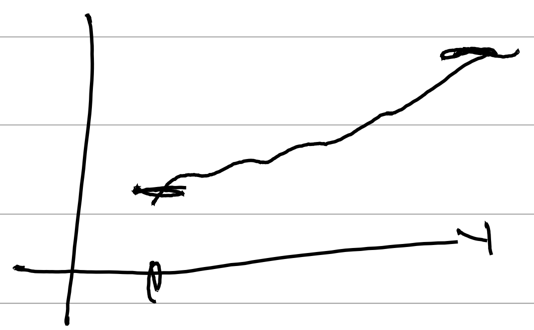
לה גבול α $\Leftarrow$ (φ רציפה)

$$\varphi(\alpha)=\varphi(\lim x_i)=\lim\varphi(x_i)=\lim x_i=\alpha$$

(סגורה)
נניח ש- $M\subseteq\mathbb{R}$ ונניח ש-

φ גזירה ברציפות, ו-

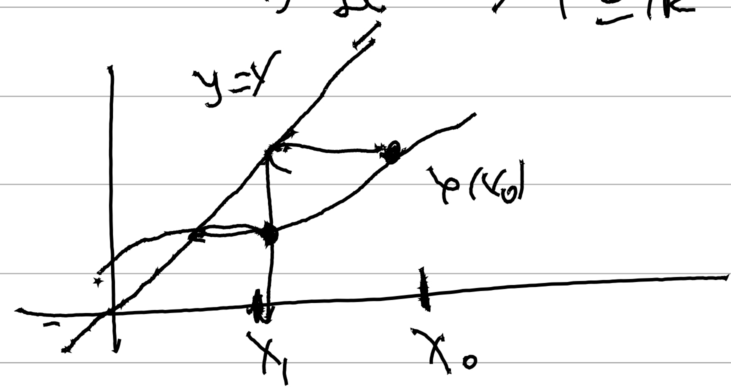
ו-$|\varphi'|\le c<1$ לכל $x\in M$. אז φ מכווצת.



[אומרת שזה עובדת לבד]

$\varphi: M \to M$

[כוונה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה]



משפט: אם α נקודת שבת

1- $\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\dots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0$

2- $\varphi^{(p)}(\alpha)\neq 0$. $\quad(\varphi\in C^{p}(M))$

אז סדר ההתכנסות הוא p:

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}\longrightarrow\frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

הוכחה:

$$\varphi(x)=\alpha+\varphi'(\alpha)(x-\alpha)+\dots+\frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x-\alpha)^{p-1}+\frac{\varphi^{(p)}(u)}{p!}(x-\alpha)^{p}$$

$$=\alpha+\frac{\varphi^{(p)}(u)}{p!}(x-\alpha)^{p} \qquad u\in[\alpha,x]$$

$$\Rightarrow\quad x_{n+1}-\alpha=\frac{\varphi^{(p)}(u)}{p!}\cdot(x_n-\alpha)^{p}$$

במקרה שלנו:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\underline{\underline{\varphi'(x)}} = 1 - \frac{f'^2 - f\cdot f''}{f'^2} = \underline{\underline{\frac{f\cdot f''}{[f']^2}}}$$

$$\varphi'(\alpha) = 0 \qquad \boxed{\varphi(x) = x - \underline{\underline{d\, f^{-1}}}(x)\cdot f(x)}$$

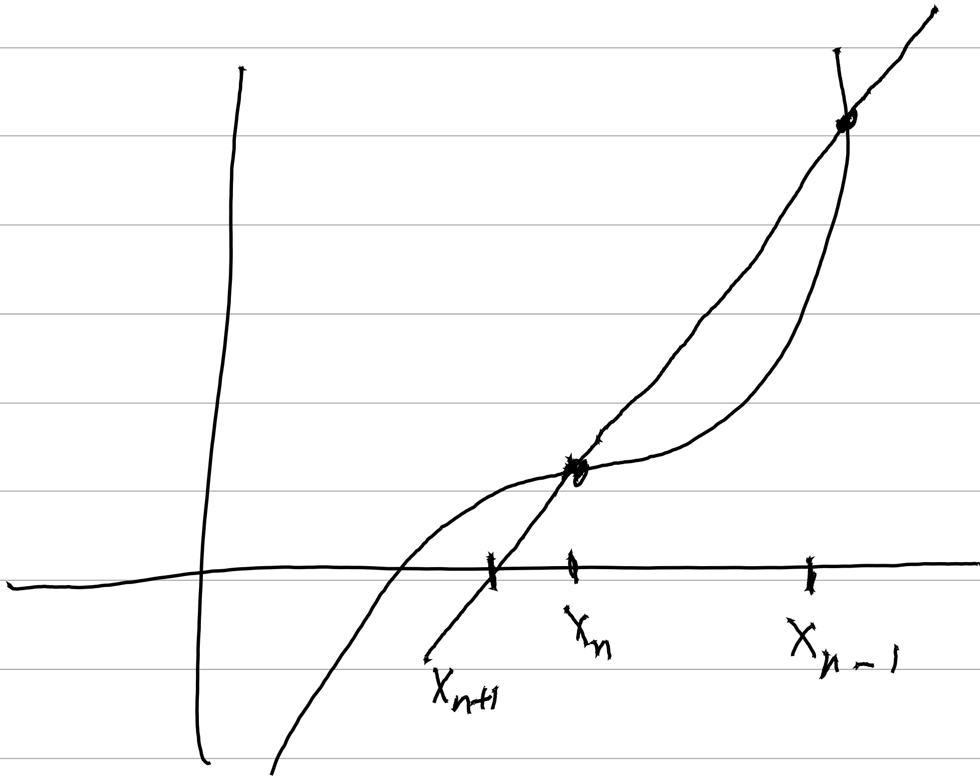
לכ סדר ההתכנסות הינו <u>לפחות</u>

ריבועי.

$f'(\alpha)\neq 0 \Leftarrow |\varphi'(u)|<1$ לכל u

באיזושהי סביבה של α.

Secant [illegible]



$$\frac{x_{n+1}-x_n}{-f(x_n)} = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}\cdot f(x_n)$$

נניח כי α שורש פשוט.

$$\underline{x_{n+1}-\alpha} = \underline{x_n-\alpha} - \frac{x_n - x_{n-1}}{\boxed{f(x_n)-f(x_{n-1})}} f(x_n) =$$

$$(x_n-\alpha)\left(1-\frac{f(x_n)}{(x_n-\alpha)[x_n,x_{n-1}]f}\right) =$$

$$(x_n-\alpha)\left(1-\frac{[x_n,\alpha]f}{[x_n,x_{n-1}]f}\right) =$$

$$(x_n-\alpha)\left(\frac{[x_n,x_{n-1}]f-[x_n,\alpha]f}{[x_n,x_{n-1}]f}\right) =$$

$$\underline{(x_n-\alpha)}\,\underline{(x_{n-1}-\alpha)}\cdot\boxed{\left(\frac{[x_n,x_{n-1},\alpha]f}{[x_n,x_{n-1}]f}\right)} \Leftarrow$$

$$(X_n-\alpha)(X_{n-1}-\alpha)\cdot M$$

כאשר $M=\max\limits_{t,s\in U_\alpha}\left|\frac{f''(s)}{2f'(t)}\right|$

(סופי כי $f'(\alpha)\neq 0$ ולכן המקסימום ק"מ בקרבת סביבה מספיק קטנה סביב α).

כעת אם $U_\alpha=\{x \mid |x-\alpha|\le\varepsilon\}$

$X_n, X_{n-1}\in U_\alpha$ ו- $\varepsilon\cdot M\le 1$ אז

$$|X_{n+1}-\alpha|\le\varepsilon^2 M\le\varepsilon\cdot 1=\varepsilon$$

ובאינדוקציה נקבל $X_n\to\alpha$.

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq |x_n - \alpha| \cdot |x_{n-1} - \alpha| \cdot M \leq$$

$$\varepsilon \cdot |x_{n-1} - \alpha| M \leq \varepsilon^2 |x_{n-2} - \alpha| M^2 \ldots$$

$$\underbrace{(\varepsilon \cdot M)}_{<1}^n \cdot |x_1 - \alpha|$$

$$E_n = \underbrace{|x_n - \alpha|} \cdot M$$

$$\frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \frac{E_{n+1}/M}{(E_n/M)^p} \leq \varphi$$

$$M^{p-1}$$

$$E_{n+1} \leq E_n \cdot E_{n-1}$$

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{p^2 = p+1}$$

$$E_n \leq E^{p^n} \qquad E = \max(E_0, E_1^{1/p})$$

$$E_{n+1} \leq E_n \cdot E_{n-1} \leq E^{p^n} \cdot E^{p^{n-1}} = E^{p^{n-1}(p+1)} = E^{p^{n+1}}$$

$$[x_0, x_1]f = f'(u)$$

$$u \in [x_0, x_1]$$

$$[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(u)}{k!}$$

$$u \in [a,b]$$

שיטת ניוטון לפולינומים:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad x^n + a$$

$$b_n = c_n = 1$$
$$b_k = t\,b_{k+1} + a_k$$
$$c_k = t\,c_{k+1} + b_k$$

$$(x-t)(x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \dots + b_1) + b_0 = p(x)$$

$b_n = 1$ $\qquad$ $b_k = t\,b_{k+1} + a_k$

גזירה ואינטגרציה ?

$f'(c_0)$

$c_0, \dots, c_n \qquad f \rightsquigarrow p_{\bar{c},f}$

$$\underline{p_{\bar{c},f}}(x) = [\bar{c}]f \cdot \underline{(x-c_0) \cdots (x-c_{n-1})} \dots$$

$$p'(c_0) = [\bar{c}]f \cdot (c_0 - c_1) \cdots (c_0 - c_{n-1}) +$$

$$[c_0, \dots, c_{n-1}]f \; (c_0 - c_1) \cdots (c_0 - c_{n-1}) + \dots$$

$$\underline{f(x) = p_{\bar{c},f}(x)} + \underline{\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \cdot (x-c_0) \cdots (x-c_n)}$$

$$f'(c_0) \overset{?}{=} p'_{\bar{c},f}(c_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(c_0))}{(n+1)!} (c_0 - c_1) \cdots (c_0 - c_n)$$

אם $h = \max\{|c_0 - c_i|\}$, [illegible]

<u>השגיאה</u> כמו h^n.

<u>דוגמאות:</u> 1. c_0, $c_1 = c_0 + h$

$$f'(c_0) = \underbrace{\frac{f(c_0+h) - f(c_0)}{h}} + h\frac{f''(\xi)}{2}$$

$$\underline{P_{\bar{c},f}(x) = f(c_0) + \underbrace{([c_0, c_1]f)}_{\frac{f(c_1) - f(c_0)}{h}} \cdot (x - c_0)}$$

$h = c_1 - c_0$

$c_{-1} = c_0 - h, \quad c_1 = c_0 + h$ -2

$$P_{\bar{c},f}(x) = f(c_0) + [c_0, c_1]f \cdot (x - c_0) +$$

$$\underline{[c_0, c_1, c_{-1}]f \underbrace{(x - c_0)}(x - c_1)}$$

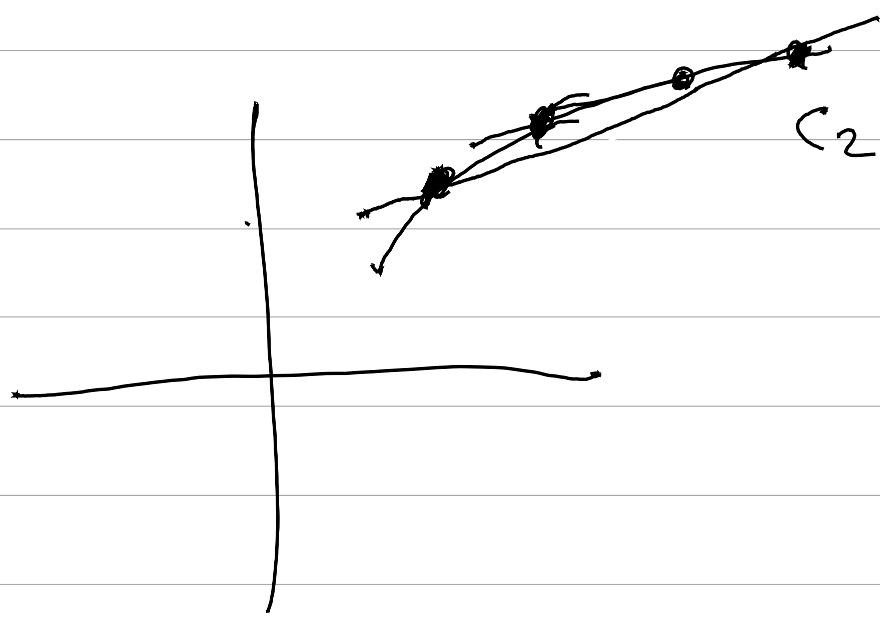
$$[c_0, c_1]f = \frac{f(c_1) - f(c_0)}{h}$$

$$[c_0, c_1, c_{-1}]f = \frac{[c_0, c_1]f - [c_0, c_{-1}]f}{2h} =$$

$$\frac{f(c_1) - f(c_0) + (f(c_{-1}) - f(c_0))}{2h^2} =$$

$$\boxed{\frac{f(c_1) - 2f(c_0) + f(c_{-1})}{2h^2}} \quad P' = \frac{f(c_1) - f(c_0)}{h} - \frac{f(c_1) - 2f(c_0) + f(c_{-1})}{2h} \; ?$$

$$\frac{f(c_1) - f(c_{-1})}{2h}$$



$$e = \frac{f'''(\xi)}{6} \cdot h^2$$

$f_1 = f(c_1) + \varepsilon$ שגיאת עיגול!

$f_{-1} = f(c_{-1}) + \varepsilon$

$$f'(c_0) = \frac{\underbrace{f(c_1)} - \underbrace{f(c_{-1})}}{2h} + e_2 =$$

$$= \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{\varepsilon}{h} + e_2 =$$

השגיאה הכוללת היא

$$E(h) = \underbrace{M \cdot h^2} - \underbrace{\frac{\varepsilon}{h}}$$

$$h_0 = \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^{1/3} \qquad E(h_0) = \frac{3}{2}(2M)^{1/3} \cdot \varepsilon^{2/3}$$

אם f אנליטית אז נוסחת קו'

$$f'(x_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}dx$$

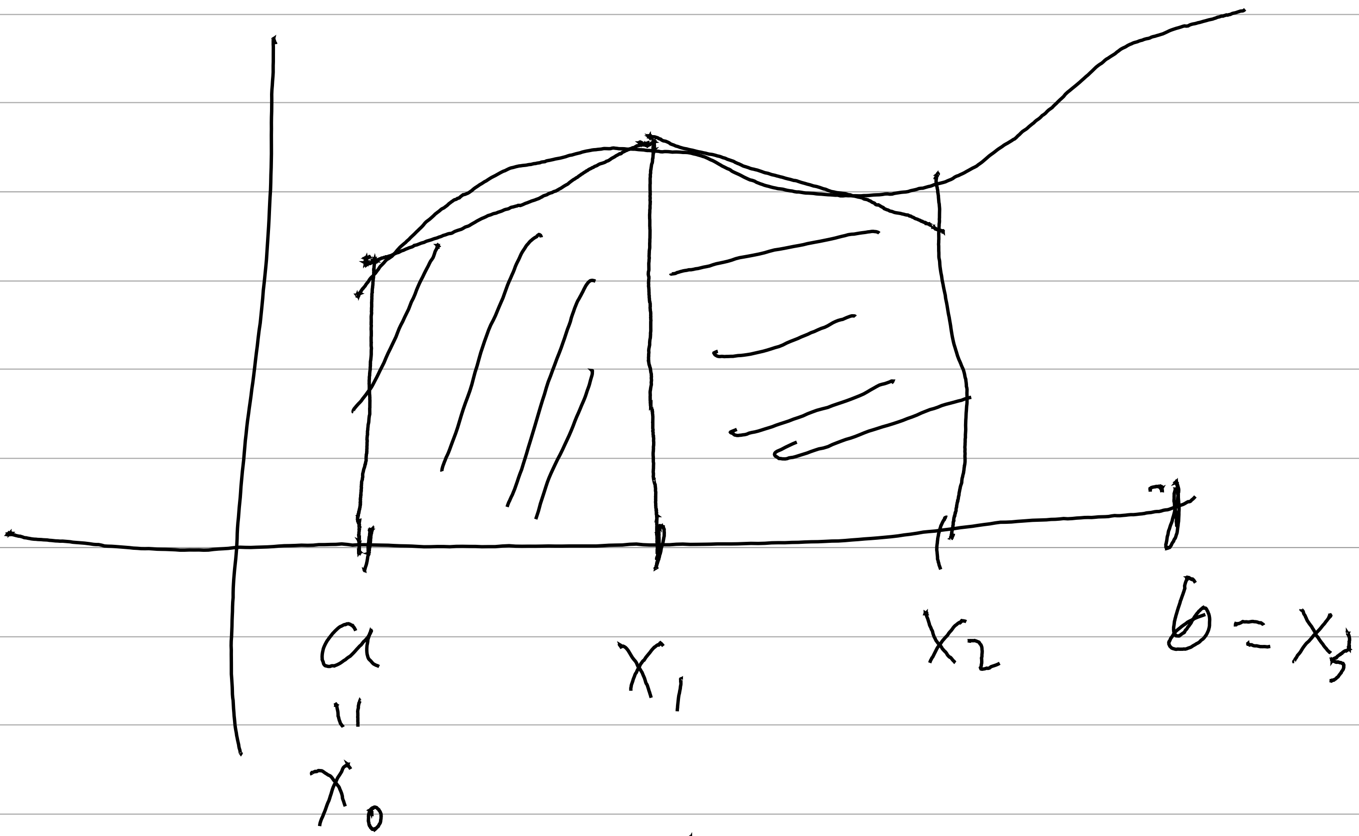
אינטגרציה

רוצים לחשב את

$$\int_a^b f$$

מחלקים את $[a,b]$ לקטעים

הנ'מ $\underline{x_0} < x_1 \dots < x_n = b$, $a = x_0$



$$x_{i+1} - x_i = h$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f = \frac{[f(x_{i+1}) + f(x_i)](x_{i+1} - x_i)}{2}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{(x - x_i)(x - x_{i+1}) \cdot \frac{f''(\xi(x))}{2}}_{R_1(x)}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} R_1(x) = \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x-x_{i+1})\,dx}\cdot \underbrace{\frac{f''(c_i)}{2}} = -\frac{h^3}{12}\cdot f''(c_i)$$

$$\int_a^b f\,dx = \underline{h\cdot\left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + \frac{1}{2} f_n\right) +}$$

$$\underbrace{-\frac{h^3}{12}\cdot \sum f''(c_i)}_{\|}$$

$$E_n^T(f) = -\frac{h^2}{12}\cdot \frac{(b-a)}{h}\sum f''(c_i) = -\frac{h^2}{12}(b-a)\cdot \text{[illegible]}$$

שיטת סימפסון לקרב את

f ב 3 נק' קטע עוקבים ע
י"ג' פולינום ריבועי

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_k + 4f_{k+1} + f_{k+2}\right) - \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(c_k)$$

$$\int_a^b f = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots f_n\right) + E_n^S(f)$$

$$E_n^S(f) = -\frac{1}{180}\cdot(b-a)h^4\cdot f^{(4)}(c)$$

עבור פ׳ מחזורית

$[a,b]=[0,2\pi]$ $\quad e_k$

$$E_n^T\left(e^{2\pi i k x}\right)=\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx-$$

$$\left(\frac{1}{2}e_k(0)+\sum_{i=1}^{n-1} e_k\left(2\pi i/n\right)+\frac{1}{2}e_k(2\pi)\right]\cdot\frac{2\pi}{n}$$

$=0 \qquad k<n$

אם f פ׳ מחזורית

$$f(x)=\sum_i a_i\cos(ix)+b_i\sin(ix)$$

$$E_n(f)=\sum a_{in}$$

עובדה: יש $f \in C^r(\mathbb{R})$

אז $a_i(f)$ הולכים ל-0 לפחות

כמו i^{-r}

באופן כללי, מהי המטרה

להגיד של קירוב לאינטגרל

מהצורה

$$\int_a^b f(t)\underline{\underline{w(t)}}\,dt = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot f(t_k) + E_n(f)$$

9

A - פולינומים ב-x $\quad$ A_1, A_{-1}

$T: A \to A$ $\quad$ $T(f) = f \circ \tau$ $\quad$ A_τ

$\lambda^m = 1$

$\tau^2 = Id$ $\quad$ $\underline{T^2 = Id}$

T הפונקציה לינארית

$A_i =$ המרחב העצמי של i

$\boxed{\tau^m = Id \quad G \text{ חבורה סופית}}$

$x + \frac{1}{x}$ $\quad$ $\tau(x) = \frac{1}{x}$

$$A^m = \{ t \in \mathbb{C}[x, \tfrac{1}{x}] \mid t(x) = \sum_{i=-m}^{m} a_i x^i \}$$

$\dim A^m = 2m+1$

$\underline{(x + \frac{1}{x})^k} \in A_1^m = A^m \cap A_1$ $\quad$ $0 \le k \le m$ $\quad$ $k < m$ $\quad$ $\underline{(x - \frac{1}{x}) \cdot (x + \frac{1}{x})^k}$

אינטגרציה של ג׳ נוסחה מהצורה

$$\int_a^b f(t)\,w(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i) + E_n(f)$$

$w(t)$ – "פונקציית משקל" (אי שלילית, רציפה, $\int_a^b f(t)w(t)dt$ קיים לכל פולינום f).

המטרה היא למצוא נקודות אופטימליות t_i, ואופטימליות:

$E_n(f)=0$ לפולינומים מדרגה $\le m$ עבור m מירבי.

V - מרחב של פונקציות f עבורן

$$\Psi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, w(t)\, dt$$

קיים. אז V מרחב לינארי

שכולל את הפולינומים

$$\Psi : V \to \mathbb{R}$$

פו' הערכה לינארית. $S_t(f) = (f(t_1), \dots, f(t_n))$

$$S_{\bar{t}} : V \to \mathbb{R}^n \qquad \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\varphi_{\bar{t}} \ \Big| \ \dim P_k = k$$

לכל k, מרחב הפולינומים ממעלה $< k$ P_k

$$\underbrace{\Psi \Big|_{P_k}} = \underbrace{\varphi \circ S_{\bar{t}} \Big|_{P_k}} \qquad . \ \underline{P_k} \subseteq V$$

הצמצום

$S_{\bar t}|_{P_n} : P_n \longrightarrow \underline{\mathbb{R}^n}$

הוא ח"ע ועל (לפי אינטרפולציה)

אז עבור $\varphi = \psi \circ S_{\bar t}^{-1}$

פתרנו את הבעיה (באופן יחיד).

כי בחרנו $\bar t$ כך ש-

$\psi|_{P_{n+1}} = \varphi \circ \underline{S_{\bar t}}$

בפרט, עבור $f \in \ker S_{\bar t}$, $\psi(f) = 0$

באותו אופן עבור חצא, כל ג.ה.ו:

$S_{\bar t}(f) = 0 \Rightarrow \psi(f) = 0$

$\delta_{\bar t}(f)=0 \Rightarrow \psi(f)=0$ $\quad f\in P_k$

$f(t_i)=0\ \forall i \iff f=\Pi_n\cdot g \quad g\in P_{k-n}$

כאשר $\Pi_n(t)=(t-t_1)\cdots(t-t_n)$

כלומר ~ מתאפסים נקודות $\bar t$

כך $\psi(\Pi_n\cdot g)=0$

לפולינומים $g\in P_\ell$ עד ℓ

כמה שיותר גדול.

נבחר פה $\ell<n$ ובאופן מקסימלי כך.

$\ell=n-1$. אז Π_n הפולינום

ממשיך: n סקלרית באופן לינארי:

בפנימית $(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle=\psi(u\cdot v)$

3 דוגמאות:

1. $w(t)=1$, $a=-1$, $b=1$

t_i האפסים של פולינומי לג'נדר

2. $a=-1$, $b=1$, $w(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

t_i האפסים של Π_n

$$w_i=\int \underbrace{\frac{\Pi_n(t)}{(t-t_i)\cdot \Pi_n'(t_i)}}_{\overset{?}{=}\, w(t_i)} w(t)\,dt$$

1. כל השורשים של Π_n הם ממשיים ושונים.

2. כל ה-$w_i > 0$.

l_i - הפולינום המתאים לאינדקס ה-i בבסיס הסטנדרטי

$$w_i = \sum w_j l_i^2(t_j) = \int l_i^2 \omega \, dt > 0$$

3. לכל f, $E_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

יש סדרה $p_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$,

p_i פולינום ממעלה i.

$$|E_n(f)| = |E_n(f - p_{2n-1})| =$$

$$\left|\int_a^b (f - p_{2n-1})\, w(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} w_i \,(f(t_i) - p(t_i))\right| \le$$

$$\left|\int_a^b \underline{\underline{(f-p)}}\, w(t)\,dt\right| + \sum_{i=1}^{n} w_i \,|f(t_i) - p(t_i)| \le$$

$$\|f - p\|_\infty \cdot \left(\underline{\underline{\int 1\, w(t)\,dt}} + \boxed{\sum w_i}\right) =$$

$$\underline{\underline{\|f - p\|_\infty}} \cdot \underline{\underline{2 \cdot \mu_0}}$$

הערה: את סדרת תתי

המרחבים P_k אפשר להחליף

בסדרה יותר כללית $V_k \subseteq V_{k+1}$

V - מרחב פונקציות

$\psi : V \to \mathbb{R}$

$\theta = \varphi \circ S_{\tilde{t}} : V \to \mathbb{R}$

$E = \psi - \theta$

$Ep = 0$ לכל $p \in P_k$

אם $f \in C^{k+1}([a,b])$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i + \frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt$$

$$E(f) = \frac{1}{k!} E \int_0^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt =$$

$$\frac{1}{k!} E \int_0^b (x-t)_+^k f^{(k+1)}(t)\,dt \overset{?}{=}$$

$$\frac{1}{k!}\int_0^b \underbrace{E\left((x-t)_+^k\right)}_{k!\,K_k(t)} f^{(k+1)}(t)\,dt$$

$$(x-t)_+ = \begin{cases} x-t & t \le x \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$E(f) = \int_a^b \underline{\underline{K_k(t)}}\, f^{(k+1)}(t)\, dt \cdot$$

$$K_k(t) \geq 0 \qquad \text{o/c}$$

$$= f^{(k+1)}(\tau) \cdot \int_a^b K_k(t)\, dt$$