לוגיקה מתמטית

משה קמנסקי

7 בנובמבר 2024

1 מבוא

לוגיקה מתמטית הוא התחום במתמטיקה שחוקר בצורה מדויקת מושגים כמו "טענה" ו-"הוכחה". על מנת לספק מוטיבציה, נתבונן בשתי דוגמאות היסטוריות.

1.1 גאומטריית המישור

אוקלידס רצה לדעת את כל הדברים שנכונים עבור נקודות, קווים ומעגלים במישור[1]. על-מנת להבין זאת, אוקלידס ניסה לנסח רשימה קצרה של הנחות יסוד שנכונותן "אינה מוטלת בספק", ולהוכיח מהן את כל יתר הטענות הנכונות. ארבעת הנחות היסוד הראשונות אכן פשוטות מאד: הראשונה, לדוגמא, אומרת שבין כל שתי נקודות קיים קו ישר אחד (את עבודתו של אוקלידס, "האלמנטים", ניתן לקרוא עד היום, גם באינטרנט: [2]). אוקלידס הצליח להוכיח את עשרים ושמונה הטענות הראשונות שלו בעזרת ארבע הנחות בסיס אלה[2]. על מנת להוכיח טענות נוספות, הוא נזקק להנחת יסוד נוספת, שקולה ל*אקסיומת המקבילים*: דרך נקודה הנמצאת מחוץ לישר נתון, עובר בדיוק ישר אחד מקביל לישר הנתון. הנחת יסוד זו פחות פשוטה ומובנת מאליה, ואוקלידס ניסה, אך לא הצליח, להוכיח אותה מארבע הנחות היסוד הראשונות.

השאלה איך להוכיח את אקסיומת המקבילים נותרה פתוחה מאות שנים, עד שהוכח שהאקסיומה *בלתי תלויה*: לא ניתן להוכיח (או להפריך) אותה מיתר הנחות היסוד. נשים לב, שטענה זו אינה טענה גאומטרית: היא אינה עוסקת בנקודות או קווים, אלא בטענות מתמטיות (מבחינה גאומטרית, אנחנו יודעים שאקסיומת המקבילים תקפה במישור). הטענה שייכת לתחום של *לוגיקה מתמטית*, בו הטענה שאקסיומת המקבילים בלתי תלויה באקסיומות האחרות, היא עצמה טענה מתמטית.

איך הוכחה הטענה? גאוס, לובאצ'בסקי ובוליאי (ובעקבותיהם מתמטיקאים אחרים) בנו *מודל* של ארבע האקסיומות הראשונות של אוקלידס, כלומר מבנה עם "קווים" ו-"נקודות", בו הקווים

[1] ניתן לקרוא את הסיפור הזה יותר בהרחבה ב-[4]

[2] למעשה, כפי שנראה, הוא השתמש בהנחות נוספות

והנקודות מתנהגים כמו שמוכתב על ידי האקסיומות הראשונות, אולם בו אקסיומת המקבילים אינה מתקיימת. מודל זה בהכרח שונה מהמישור הרגיל, בו אקסיומת המקבילים תקפה, אבל הוא "שווה זכויות" לו: כל טענה שניתן להוכיח מארבע האקסיומות הראשונות, תקפה גם בו. *למעשה*, כל הוכחה מתוך אקסיומות אלה נותן טענה תקפה *בכל המבנים המקיימים אותן*.

מה לגבי הכיוון ההפוך? נניח שיש לנו טענה בגאומטריה שנכונה בכל המודלים שסופקו על-ידי גאוס וחבריו, וגם בכל מודל אחר של ארבע האקסיומות הראשונות. האם ניתן אז להוכיח טענה זו מתוך אותן אקסיומות? לכאורה, אפשר לדמיין שהטענה נכונה "במקרה" בכל המבנים הללו, בלי שניתן להוכיח אותה. אנחנו נראה שזה לא כך:

משפט א׳ (משפט השלמות, ??). כל טענה שנכונה בכל מבנה המקיים את האקסיומות של אוקלידס, ניתן להוכחה מאקסיומות אלה

בניסוח המשפט (שאינו מנוסח בצורה מדויקת בשלב זה) לא הקפדנו לציין על איזו קבוצת אקסיומות מדובר. למעשה, זה לא משנה: המשפט תקף לכל קבוצת אקסיומות, ולא רק לגאומטריה.

כאמור, משפט השלמות אינו משפט בגאומטריה. מהם האובייקטים המתמטיים המופיעים במשפט הזה? על-מנת שנוכל אפילו לנסח את המשפט, עלינו לענות לפחות על השאלות הבאות:

שאלה 1.1.1. איך אפשר לראות טענות כאובייקטים מתמטיים?

שאלה 1.1.2. מהי הוכחה של טענה אחת מטענות אחרות?

שאלה 1.1.3. מהי משמעות האמירה שטענה מסוימת נכונה בגאומטריית המישור? באופן יותר כללי, מתי נאמר שטענה היא נכונה? מה הקשר בין זה לבין הוכחות של הטענה?

שאלה 1.1.4. איך ניתן להוכיח שטענה מסוימת לא תלויה באחרות?

בהינתן שהאקסיומה בלתי תלויה, התוספת שלה כהנחת יסוד מוצדקת. אבל האם יש טענות נוספות שאינן תלויות במערכת האקסיומות החדשה? האם אפשר לרשום רשימת אקסיומות המאפינות את המישור לחלוטין? תשובה אפשרית אחת לשאלה האחרונה נתונה במשפט הבא:

משפט ב׳ (משפט לוונהיים-סקולם, ??). לכל קבוצה אינסופית A קיים מבנה המקיים את כל הטענות המתקיימות בגאומטריית המישור, שבו קבוצת הנקודות היא A.

שוב, גם משפט זה נכון למבנים כלליים, ולא רק לגאומטריה.

1.2 אריתמטיקה

ראינו לעיל שלא ניתן לאפיין לגמרי את גאומטריית המישור על ידי רשימה של אקסיומות. עדיין, אפשר לשאול האם לפחות אפשר להוכיח את כל מה שנכון בגאומטריית המישור מתוך כל חמש האקסיומות של אוקלידס. מסתבר שלא, ולמעשה אפילו המשפט הראשון בספרו של אוקלידס דורש אקסיומות נוספות. אולם טארסקי, בתחילת המאה ה-20 (בעקבות עבודה של קליין, הילברט, ומתמטיקאים נוספים) הצליח להשלים את הרשימה: הוא נתן רשימה מפורשת של אקסיומות, והוכיח שמהן ניתן להוכיח את כל הטענות הגאומטריות הנכונות במישור.

תחום נוסף שבו עסקו היוונים הוא תורת המספרים. גם שם הניסיון הוא לגלות את כל הטענות הנכונות עבור המספרים הטבעיים. בניגוד לגאומטריה, הם לא ניסו לעבוד בשיטה האקסיומטית.

שאלה 1.2.1. האם ניתן לראות גם טענות על מספרים כאובייקטים מתמטיים?

מערכת אקסיומות עבור המספרים הטבעיים הוצעה על-ידי פיאנו. כמו בגאומטריה, גם כאן ניתן לשאול:

שאלה 1.2.2. האם אקסיומות פיאנו מוכיחות את כל הטענות הנכונות על מספרים טבעיים? אם לא, האם קיימת מערכת אחרת שעושה זאת?

אנחנו נראה:

משפט ג' (משפט אי השלמות, ??). ישנן טענות בתורת המספרים שנכונות בטבעיים, אך אינן ניתנות להוכחה מאקסיומות פיאנו

למעשה, המשפט אינו יחודי לאקסיומות פיאנו, ותקף לכל מערכת אקסיומות שניתנת לתיאור מפורש (במובן שנראה מאוחר יותר).

1.3 מבנים אחרים

שתי הדוגמאות האחרונות דנות בשני נושאים מרכזיים במתמטיקה: גאומטריה ותורת המספרים. אלה תחומים חשובים, אך אינם היחידים.

שאלה 1.3.1. באילו מבנים ותורות מתמטיות ניתן לעסוק בשיטות הנ"ל? אילו כלים קיימים על מנת לענות על שאלות מהסוג לעיל לתורות אחרות?

אנחנו נראה מספר שימושים מפתיעים של טענות בלוגיקה לתחומים אחרים במתמטיקה, ביניהם:

משפט ד' (טענה ??). אם G גרף שכל תת-גרף (מלא) סופי שלו הוא k-צביע, אז G עצמו k-צביע

משפט ה' (דוגמא ??). אם $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ העתקה פולינומית חד-חד-ערכית, אז היא על

המשפט הבא הוא משפט קלאסי על פונקציות ממשיות, אולם אנחנו נראה הוכחה פשוטה שלו, בשפה קרובה (אך מדויקת לגמרי!) לניסוחים המקוריים של ניוטון ולייבניץ

משפט ו' (משפט ערך הביניים, ??). אם $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה ומקיימת $f(0)\le 0\le f(1)$, אז קיים $c\in[0,1]$ עבורו $f(c)=0$.

הרשימות מבוססות בין היתר על הספרים [1, 5, 6]. הספר [3] מומלץ אף הוא.

2 תחשיב הפסוקים

בסעיף זה נעסוק בסוג פשוט במיוחד של לוגיקה: תחשיב הפסוקים. לוגיקה זו לא מניחה דבר על המבנה של טענות בסיסיות, ובמקום זה עונה על שאלות הנוגעות לבניה של טענה מורכבת מתוך טענות יותר פשוטות על-ידי פעולות לוגיות. בהתאם לשאלות שהותוו במבוא, נראה את התשובות המדויקות שלוגיקה זו נותנת לשאלות:

1. מהי טענה?
2. מהי המשמעות של האמירה "טענה זו נכונה"?
3. מהי הוכחה?

לאחר שנגדיר את כל המושגים, נראה שניתן לענות על כל השאלות מהמבוא עבור לוגיקה זו, ונראה גם כמה שימושים.

2.1 אלגברות בוליאניות

כאמור, בשלב זה אנו מתייחסים אל כל טענה כאל קופסה שחורה. אם a ו-b טענות כלשהן, אינטואיטיבית ניתן ליצור מהן את הטענות החדשות "a וגם b", "a או b" ו-"לא a". אנחנו מעוניינים למצוא מבנה פורמלי בו האינטואיציה הזו באה לידי ביטוי. במילים אחרות, על קבוצת הטענות B בהן אנו מתעניינים מוגדרות פעולות $\wedge : B \times B \to B$ ("וגם"), $\vee : B \times B \to B$ ("או") ו-$\neg : B \to B$ ("שלילה"). הואיל ובשלב זה אנו מתעניינים *בתוכן* של הטענה, ולא בצורת כתיבתה, למשל, הטענות "a וגם b" ו-"b וגם a" הן מבחינתינו *אותה טענה*. באופן דומה, ניתן להצדיק את התנאים האחרים בהגדרה הבאה:

הגדרה 2.1.1 *אלגברה בוליאנית* מורכבת מקבוצה B, איברים $0,1 \in B$ ופעולות $\wedge : B \times B \to B$ ("וגם"), $\vee : B \times B \to B$ ו-$\neg : B \to B$, המקיימים את התנאים הבאים לכל $a,b,c \in B$: אלגברה בוליאנית

1. (חילופיות) $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$
2. (קיבוציות) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
3. (פילוג) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
4. $a \vee 0 = a$, $a \wedge 1 = a$
5. $a \wedge \neg a = 0$, $a \vee \neg a = 1$

נסמן ב-$\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ את המבנה כולו

הערה 2.1.2. כתוצאה מחוקי הקיבוץ, אין צורך לרשום סוגריים כאשר מפעילים אותה פעולה ברצף, ואנחנו נרשום למשל $a \wedge b \wedge c$ במקום $(a \wedge b) \wedge c$. כמו-כן, נפעל לפי מוסכמה ש-"וגם" קודם, מבחינת סדר הפעולות, ל-"או", וכך נשמיט סוגריים נוספים (כלומר, נרשום $a \wedge b \vee c$ במקום $(a \wedge b) \vee c$). בנוסף נשתמש לרוב בחילופיות בלי להזכיר זאת.

דוגמא 2.1.3. אם B קבוצה בת איבר אחד, יש עליה מבנה יחיד של אלגברה בוליאנית (שימו לב שלא דרשנו ש-$0 \neq 1$! תרגיל: הוכיחו שאם ב-B יותר מאיבר אחד, אז $0 \neq 1$).

דוגמא 2.1.4. ישנה אלגברה בוליאנית יחידה בת שני איברים, $B=\{0,1\}$. מבחינה אינטואיטיבית, זוהי האלגברה של ערכי האמת, כאשר 1 מסמל אמת, ו-0 שקר. נסמן אותה לרוב ב-2.

דוגמא 2.1.5. אם X קבוצה כלשהי, המבנה $\mathcal{B}=\langle\mathcal{P}(X),\cap,\cup,\cdot^c,\emptyset,X\rangle$, כאשר $\mathcal{P}(X)=\{A\mid A\subseteq X\}$ היא קבוצת החזקה, ו-$A^c=X\setminus A$, הוא אלגברה בוליאנית. אנחנו נקרא לאלגברות כאלה *אלגברות חזקה*. אלגברות חזקה

ניתן לזהות את שתי הדוגמאות הקודמות כמקרים פרטיים של הדוגמא הזו, כאשר X קבוצה ריקה או קבוצה בת איבר אחד.

דרך אחת לחשוב על הדוגמא האחרונה היא לחשוב על איברי B כעל טענות על איברי X: נזהה כל טענה עם איברי X המקיימים את הטענה. תחת הפירוש הזה, הפעולות של $\mathcal{B}$ מזוהות עם האינטואיציה של "וגם", "או" ושלילה (כלומר, אם $C\subseteq X$ קבוצת האיברים ב-X המקיימים טענה c, ו-D קבוצת האיברים המקיימים טענה d, אז $C\cap D$ היא קבוצת האיברים המקיימים את הטענה "c וגם d")

דוגמא 2.1.6. אם X קבוצה כלשהי, *תת-קבוצה קוסופית* של X היא תת-קבוצה *שהמשלימה שלה* (ביחס ל-X) סופית. הקבוצה B המורכבת מתתי הקבוצות של X שהן סופיות או קו-סופיות היא אלגברה בוליאנית (עם פעולות כמו קודם). תת-קבוצה קוסופית

דוגמא 2.1.7. אם $X=[0,1]$, קבוצת הממשיים בין 0 ל-1, אז קבוצת תתי-הקבוצות של X שהן איחוד סופי של קטעים היא אלגברה בוליאנית (שוב, עם פעולות החיתוך והאיחוד). אנחנו נראה עוד דוגמאות רבות מהסוג הזה בהמשך.

דוגמא 2.1.8. אם $\mathcal{B}=\langle B,\wedge,\vee,\neg,0,1\rangle$ אלגברה בוליאנית כלשהי, אז המבנה $\mathcal{B}^*=\langle B,\vee,\wedge,\neg,1,0\rangle$ גם הוא אלגברה בוליאנית, שנקראת *האלגברה הדואלית*. האלגברה הדואלית

התרגיל הבא כולל כמה עובדות שימושיות על אלגברות בוליאניות:

תרגיל 2.1.9. לכל אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, ולכל $a,b\in\mathcal{B}$ מתקיים:

1. $a\wedge 0=0$, $a\vee 1=1$
2. $a\wedge a=a$
3. אם $a\wedge b=a\vee b$ אז $a=b$
4. אם $a\wedge b=0$ ו-$a\vee b=1$ אז $b=\neg a$
5. $\neg(\neg a)=a$
6. $\neg(a\vee b)=\neg a\wedge\neg b$
7. $a\wedge(a\vee b)=a$

הערה 2.1.10. בהנתן שוויון כלשהו בין שני ביטויים בוליאניים כמו בתרגיל, *השוויון הדואלי* הוא השוויון המתקבל מהמקורי על-ידי החלפת התפקידים של $\wedge$ ו-$\vee$, והחלפת התפקידים של 1 ו-0. למשל, הדואלי של השוויון $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ הוא השוויון $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$. אם השוויון המקורי נכון עבור איברים כלשהם של אלגברה $\mathcal{B}$, אז השוויון הדואלי נכון עבור אותם איברים כאשר חושבים עליהם כאיברי האלגברה הדואלים $\mathcal{B}^*$. לכן, אם שוויון כלשהו נכון לכל האלגברות הבוליאניות, אז גם הדואלי שלו נכון עבורן. אנחנו נשתמש בזה באופן חופשי.

התרגיל הבא מציג דרך נוספת לחשוב על אלגברות בוליאניות, שלעתים מקלה על הוכחת תכונות כמו בתרגיל האחרון.

תרגיל 2.1.11. תהי $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית, ונגדיר לכל שני איברים $a, b \in \mathcal{B}$ ש-$a \leq b$ אם $a \wedge b = a$.

1. הוכיחו שזהו סדר חלקי על $\mathcal{B}$, עם מקסימום 1 ומינימום 0.

2. הוכיחו שלכל שני איברים $a, b \in \mathcal{B}$, החסם העליון ביניהם ביחס ל-$\leq$ קיים ושווה ל-$a \vee b$ והחסם התחתון שווה ל-$a \wedge b$ (נזכיר ש*חסם עליון* של קבוצה A בסדר חלקי הוא איבר m הגדול או שווה לכל איבר ב-A, וקטן מכל איבר אחר שמקיים זאת. חסם עליון כזה, אם קיים, הוא יחיד) חסם עליון

3. נניח ש-P קבוצה סדורה כמו בסעיפים הקודמים, ונסמן ב-$a \vee b$ את החסם העליון וב-$a \wedge b$ את החסם התחתון. נניח שלכל $a \in P$ קיים $b \in P$ כך ש-$a \wedge b = 0$ ו-$a \vee b = 1$, ושלכל $a, b, c \in P$ מתקיים: $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leq a \vee (b \wedge c)$. הוכיחו ש-$\langle P, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ אלגברה בוליאנית.

4. פתרו שוב את תרגיל 2.1.9 בעזרת התרגיל הנוכחי

בהמשך, כשנדבר על אלגברות בוליאניות, נתייחס באופן חופשי ליחס הסדר מהתרגיל האחרון.

נחזור למוטיבציה: אם אנחנו חושבים על איברי אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ כטענות, איך לנסח את העובדה שבמצב נתון, כל טענה היא אמיתית או שיקרית? אנחנו רוצים להצמיד לכל טענה $b \in \mathcal{B}$ ערך אמת $v(b)$, שיכול להיות אמת או שקר. כלומר, אנחנו מדברים על פונקציות $v : B \to \{0, 1\}$, אבל הפונקציות צריכות לקיים תנאים מסוימים: אם אמרנו שהטענות a ו-b שתיהן נכונות, אז כך גם $a \wedge b$, ואילו $\neg a$ שיקרית. במונחים של ההגדרה הבאה, אנחנו מתעניינים בהומומורפיזמים מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathbf{2} = \{0, 1\}$.

הגדרה 2.1.12. *העתקה של אלגברות בוליאניות* מאלגברה בוליאנית $\mathcal{B}_1$ לאלגברה בוליאנית $\mathcal{B}_2$ היא פונקציה $\omega : B_1 \to B_2$ המקיימת: העתקה של אלגברות בוליאניות

1. $\omega(a \wedge b) = \omega(a) \wedge \omega(b)$

2. $\omega(\neg a) = \neg \omega(a)$

לכל $a, b \in B_1$. (העתקה כזו נקראת גם *הומומורפיזם* של אלגברות בוליאניות) הומומורפיזם

העתקה כזו נקראת *שיכון* אם היא חד-חד-ערכית, ו*איזומורפיזם* אם היא הפיכה. שיכון איזומורפיזם

הערה 2.1.13. בגלל תרגיל 2.1.9, העתקה כזו מקיימת גם $\omega(a \vee b) = \omega(a) \vee \omega(b)$, $\omega(1) = 1$ ו-$\omega(0) = 0$. כמו-כן, היא שומרת על הסדר החלקי מתרגיל 2.1.11. נשים לב שלמרות הסימון הזהה, הפעולות בצד שמאל הן ב-$\mathcal{B}_1$ ואלה שבצד ימין הן ב-$\mathcal{B}_2$.

דוגמא 2.1.14. לכל אלגברה יש העתקה יחידה אל האלגברה בת איבר אחד. אם ב-$\mathcal{B}$ יש יותר מאיבר אחד, אין העתקה מהאלגברה בת איבר אחד ל-$\mathcal{B}$.

דוגמא 2.1.15. יש העתקה יחידה מ-2 לכל אלגברה בוליאנית. העתקה מאלגברה $\mathcal{B}$ ל-2 נקראת *השמה*. אלה העתקות שנתעניין בהן מאד בהמשך, שכן, כאמור, הן ממדלות את התהליך של בחירת ערכי אמת לטענות. השמה

דוגמא 2.1.16. אם $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ היא אלגברת קבוצת החזקה, כל איבר x של X מגדיר השמה $\omega_x : \mathcal{B} \to 2$, הנתונה על ידי: $\omega_x(A) = 1$ אם $x \in A$, ו-0 אחרת. אם חושבים על איברי $\mathcal{B}$ כטענות על איברי X, אז ω_x היא ההשמה ש"בודקת" האם הטענה נכונה עבור x.

תרגיל 2.1.17. באופן יותר כללי, אם $C \subseteq X$, הוכיחו שהפונקציה $A \mapsto A \cap C$ היא הומומורפיזם מ-$\mathcal{P}(X)$ ל-$\mathcal{P}(C)$.

דוגמא 2.1.18. אם $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית בת יותר מאיבר אחד, אז פונקציית הזהות *אינה* הומומורפיזם מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathcal{B}^*$ (למה?) מאידך, פונקציית השלילה היא איזומורפיזם מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathcal{B}^*$.

סוף הרצאה 1, 4 בנוב

איבר $a \neq 0$ של אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ הוא *אטום* אם אין איבר $b \in \mathcal{B}$ המקיים $0 < b < a$. למשל, אם $\mathcal{B} = \mathcal{P}(A)$ אלגברת חזקה, האטומים הם בדיוק היחידונים. אטום

תרגיל 2.1.19 (אלגברות בוליאניות סופיות). נניח ש-$\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית *סופית*

1. הוכיחו שלכל איבר $b \neq 0$ יש אטום $a \leq b$.
2. הוכיחו ש-$\mathcal{B}$ איזומורפית לאלגברת חזקה
3. הוכיחו שאלגברה בוליאנית אינסופית אינה בהכרח איזומורפית לאלגברת חזקה

2.1.20 משפט סטון

מי שניסה לפתור את תרגיל 2.1.9, גילה אולי שזה יותר קשה ממה שזה נראה. מצד שני, כל הטענות שם קלות מאד להוכחה עבור המקרה בו $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ היא אלגברת החזקה של איזושהי קבוצה. בתרגיל האחרון ראינו שכל אלגברה בוליאנית סופית היא כזו, אבל זה לא נכון לאלגברות כלליות.

נניח עכשיו ש-$\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית כלשהי, עבורה יש לנו שיכון $t : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$ עבור איזושהי קבוצה X. אז אפשר להוכיח את אחד השוויונים עבור $\mathcal{B}$ באופן הבא: נניח שהשוויון אינו נכון עבור איזשהם איברים $a, b \in \mathcal{B}$. אחרי שנפעיל את t נקבל, בגלל ש-t שיכון, שהשוויון אינו נכון עבור האיברים $t(a)$ ו-$t(b)$ ב-$\mathcal{P}(X)$. אבל כבר הוכחנו שהשוויון נכון לכל זוג איברים בכל אלגברה מהצורה הזו.

במילים אחרות, כל משוואה שנכונה לכל האיברים באלגברה $\mathcal{B}$ נכונה גם לכל האיברים באלגברה שמשוכנת בה (בהמשך תהיה לנו השפה לנסח את הטענה הזו באופן יותר מדויק ויותר כללי). הואיל ובדיקת שוויונים כאלה קלה מאד באלגברות חזקה, נשאלת השאלה: אילו אלגברות ניתנות לשיכון באלגברות חזקה?

משפט 2.1.21 (משפט הייצוג של סטון). *לכל אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ קיימת קבוצה X ושיכון* $t : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$

על מנת להוכיח את המשפט, עלינו ראשית לזהות את X. נניח ראשית ש-$\mathcal{B} = \mathcal{P}(Y)$ עבור איזשהו Y. האם אנחנו יכולים לשחזר את איברי Y מתוך מבנה האלגברה של $\mathcal{B}$? ראינו בדוגמא 2.1.16 שלכל איבר $y \in Y$ ניתן להתאים השמה $\omega_y : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$. לכן, קיבלנו העתקה $Y \to \mathscr{S}(\mathcal{B})$, כאשר $\mathscr{S}(B)$ קבוצת ההשמות על $\mathcal{B}$, אשר נתונה על-ידי $y \mapsto \omega_y$. העתקה זו חד-חד-ערכית, משום שאם $y \neq z$, אז $1 = \omega_y(\{y\}) \neq \omega_z(\{y\}) = 0$ (כפי שנראה בהמשך, היא לרוב לא על, אבל זה פחות חשוב, כי אנחנו מחפשים רק שיכון).

אז תיארנו קבוצה X המכילה את Y במונחים של מבנה האלגברה הבוליאנית בלבד. בפרט, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X)$. כעת נוותר על ההנחה ש-$\mathcal{B}$ אלגברת חזקה, ונשתמש באותו רעיון כדי להגדיר את X באופן כללי.

הוכחת משפט סטון. נסמן ב-X את קבוצת ההשמות על $\mathcal{B}$, ונגדיר $t : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$ על-ידי: $t(b) = \{\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2} \mid \omega(b) = 1\} \subseteq X$. אז לכל $b, c \in \mathcal{B}$,

$$t(b \wedge c) = \{\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2} \mid 1 = \omega(b \wedge c) = \omega(b) \wedge \omega(c)\} = \{\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2} \mid 1 = \omega(b)\} \cap \{\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2} \mid 1 = \omega(c)\} = t(b) \cap t(c)$$

ובאופן דומה לשלילה.

זה מראה ש-t העתקה של אלגברות בוליאניות. כדי להוכיח ש-t חד-חד-ערכית, עלינו להוכיח שלכל $a \neq b \in \mathcal{B}$ יש השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega(a) \neq \omega(b)$. זה התוכן של המשפט הבא, שמסיים את ההוכחה. $\square$

משפט 2.1.22. *אם a ו-b שני איברים שונים באלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, אז יש השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega(a) \neq \omega(b)$.*

נשים לב שבפרט, המשפט אומר שלכל אלגברה בוליאנית לא טריוויאלית $\mathcal{B}$ יש השמה, עובדה לא ברורה בכלל.

אנחנו נוכיח את המשפט באמצעות תרגומו לכמה טענות שקולות. הראשונה היא רדוקציה למקרה פרטי:

תרגיל 2.1.23. הוכיחו שהמשפט נובע מהמקרה הפרטי בו $b = 0$

לפי התרגיל האחרון, עלינו להוכיח שאם $b \neq 0$, אז יש השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega(b) = 1$. על מנת להוכיח זאת, נתבונן בהשמה כלשהי $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$, ונשאל: איך נראית הקבוצה $\omega^{-1}(1)$? מסתבר שקבוצות כאלה מתוארות באופן הבא:

על-מסנן

הגדרה 2.1.24. תת-קבוצה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ של אלגברה בוליאנית נקראית *על-מסנן* אם:

1. לכל $a, b \in \mathcal{F}$ גם $a \wedge b \in \mathcal{F}$.
2. לכל $a \in \mathcal{B}$, אחד מ-$a, \neg a$ שייך ל-$\mathcal{F}$
3. $0 \notin \mathcal{F}$

תרגיל 2.1.25. הוכיחו שאם $\mathcal{F}$ על-מסנן, אז

1. $\mathcal{F}$ לא ריק
2. אם $a \in \mathcal{F}$ ו-$b \geq a$ אז $b \in \mathcal{F}$

תרגיל 2.1.26. הוכיחו ש-$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ על-מסנן אם ורק אם יש השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\mathcal{F} = \omega^{-1}(1)$

לפי התרגיל האחרון, ניתן לתרגם את הבעיה שלנו לשאלה: האם לכל $b > 0$ יש על-מסנן שמכיל אותו? כדי לענות על השאלה, מסתבר שכדאי לשאול שאלה קצת יותר כללית: אילו קבוצות של איברים של $\mathcal{B}$ מוכלות בעל-מסנן?

מסנן

הגדרה 2.1.27. תת-קבוצה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ נקראת *מסנן* אם:

1. לכל $a, b \in \mathcal{F}$ גם $a \wedge b \in \mathcal{F}$
2. לכל $a \in \mathcal{F}$ ו-$a \geq b$ גם $b \in \mathcal{F}$
3. $\mathcal{F}$ לא ריקה
4. $0 \notin \mathcal{F}$

היתרון במסננים (על פני על-מסננים) הוא שיש הרבה מסננים שמופיעים באופן טבעי ואפשר לתאר אותם במפורש, בעוד שזה לרוב בלתי אפשרי לתאר על-מסנן. נראה דוגמאות של מסננים בהמשך, אבל בינתיים נשים לב לעובדה הבאה:

תרגיל 2.1.28. נניח ש-$\mathcal{F}_0$ תת-קבוצה של אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ כך שלכל $b_1, \ldots, b_k \in \mathcal{F}_0$, $b_1 \wedge \cdots \wedge b_k \neq 0$. אז יש מסנן שמכיל את $\mathcal{F}_0$. בפרט, אם $b \neq 0$ אז יש מסנן שכולל אותו.

אינטואיטיבית, אפשר לחשוב על מסנן כעל אוסף הטענות שאדם (רציונלי) יכול להאמין בהן. על-מסנן הוא אז אוסף הדעות של אדם שיש לו דעה על כל דבר. הקשר הפורמלי בין מסננים לעל-מסננים נתון בטענה הבאה.

טענה 2.1.29. *התנאים הבאים על תת-קבוצה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ שקולים*

1. *$\mathcal{F}$ על-מסנן*

2. $\mathcal{F}$ *מסנן מקסימלי (כלומר, לא מוכל ממש במסנן אחר)*

הוכחה. נניח ש-$\mathcal{F}$ על-מסנן, ו-$a\in\mathcal{F}$. אז לכל $b\geq a$, בדיוק אחד מ-b ו-$\neg b$ ב-$\mathcal{F}$. אם זה $\neg b$ אז גם $0=a\wedge\neg b\in\mathcal{F}$. בסתירה להגדרה. זה מראה ש-$\mathcal{F}$ מסנן. אם $\mathcal{F}_1\supset\mathcal{F}$ מסנן שמרחיב אותו, ניקח $a\in\mathcal{F}_1\setminus\mathcal{F}$. כיוון ש-$a\notin\mathcal{F}$ ההגדרה נותנת $\neg a\in\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_1$, ולכן $0=a\wedge\neg a\in\mathcal{F}_1$, בסתירה להגדרה.

נניח עכשיו ש-$\mathcal{F}$ מסנן מקסימלי. אם אינו על-מסנן, יש $a\in\mathcal{B}$ כך ש-$a,\neg a\notin\mathcal{F}$. אם לכל $b\in\mathcal{F}$, $a\wedge b\neq 0$, אז לפי תרגיל 2.1.28, יש מסנן שמכיל את $\mathcal{F}$ ואת a, בסתירה למקסימליות של $\mathcal{F}$. לכן יש $b\in\mathcal{F}$ כך ש-$b\wedge a=0$. באותו אופן, יש $c\in\mathcal{F}$ כך ש-$c\wedge\neg a=0$. אבל אז $b\wedge c=0$, בסתירה לכך ש-$\mathcal{F}$ מסנן. $\square$

תרגיל 2.1.30. הוכיחו שמסנן $\mathcal{F}$ הוא על-מסנן אם ורק אם לכל $b,c\in\mathcal{B}$, אם $b\vee c\in\mathcal{F}$ אז $b\in\mathcal{F}$ או $c\in\mathcal{F}$.

הטענה האחרונה, בתוספת התרגיל שלפניה, מראים שהוכחת המשפט תסתיים אם נראה שכל מסנן מוכל במסנן מקסימלי. הכלי הסטנדרטי לעשות זאת נקרא *הלמה של צורן*. כדי לצטט אותה, נזכיר את ההגדרה הבאה.

הגדרה 2.1.31. תהי $(X,\prec)$ קבוצה סדורה חלקית.

1. *שרשרת* ב-X הינה תת-קבוצה Y עליה הסדר *מלא*, כלומר לכל $x\neq y\in Y$, מתקיים $x\prec y$ או $y\prec x$. שרשרת סדר מלא

2. תת-קבוצה $Y\subseteq X$ ב-X היא *חסומה מלעיל* אם קיים $x\in X$ כך ש-$y\prec x$ או $y=x$ לכל $y\in Y$. חסומה מלעיל

3. *איבר מירבי* ב-X הוא איבר $x\in X$ עבורו לכל $y\in X$ מתקיים $x\not\prec y$. איבר מירבי

דוגמא 2.1.32. תהי S קבוצה, ו-X קבוצה של קבוצות המוכלות ב-S. אז X סדורה חלקית ביחס להכלת קבוצות: $x\prec y$ אם $x\subset y$. תת-קבוצה Y של X חסומה מלעיל אם יש קבוצה $y\in X$ המכילה את כל הקבוצות ב-Y. איבר מירבי הוא איבר שלא מוכל בשום קבוצה אחרת ב-X.

לעיתים קרובות נעסוק בקבוצות X מסוג זה, עם התכונה שהאיחוד של כל שרשרת של קבוצות ב-X, גם הוא קבוצה ב-X. במקרה זה, האיחוד הוא חסם מלעיל של השרשרת, ולכן כל שרשרת חסומה מלעיל.

דוגמא 2.1.33. בתור מקרה פרטי של הדוגמא הקודמת, יהי S מרחב וקטורי (מעל שדה כלשהו), ותהי X קבוצת הקבוצות הבלתי תלויות לינארית ב-S. איחוד של שרשרת של קבוצות בלתי תלויות הוא קבוצה בלתי תלויה (שכן כל תלות לינארית היא בין מספר סופי של וקטורים, אשר שייכים לאחד האיברים בשרשרת). איבר מירבי ב-X, כלומר קבוצה בלתי תלויה מירבית, נקרא בסיס של S.

עובדה 2.1.34 (הלמה של צורן). *תהי X קבוצה סדורה חלקית, בה כל שרשרת חסומה מלעיל. אז קיים ב-X איבר מירבי*

תרגיל 2.1.35. הראו שמהלמה של צורן נובעת הגירסא היותר חזקה: עם אותן הנחות, לכל איבר קיים איבר מירבי הגדול ממנו

תרגיל 2.1.36. הקבוצה הריקה הינה קבוצה סדורה חלקית (באופן יחיד). למה היא אינה מהווה סתירה ללמה של צורן?

בגלל הלמה של צורן, משתלם לנסח תכונות של עצמים על-ידי תנאי מקסימליות. למשל:

דוגמא 2.1.37. לפי דוגמא 2.1.33, לכל מרחב וקטורי יש בסיס

מסיבות דומות, הלמה של צורן מופיעה במקומות רבים במתמטיקה. אנחנו נשתמש בה כדי להראות את קיומם של על-מסננים, ובכך להחזיר את כל החובות שצברנו:

טענה 2.1.38. *כל מסנן באלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ מוכל בעל-מסנן*

הוכחה. נתבונן בקבוצת כל המסננים, עם יחס ההכלה. לפי תרגיל 2.1.35, מספיק להראות: איחוד של שרשרת מסננים היא מסנן. נניח ש-C שרשרת כזו, עם איחוד $\mathcal{F}$. אם $a, b \in \mathcal{F}$, קיימים $\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b \in C$, כך ש-$a \in \mathcal{F}_a$ ו-$b \in \mathcal{F}_b$. הואיל ו-C שרשרת, אחד משני המסננים, נניח $\mathcal{F}_a$, מוכל בשני. אז $a, b \in \mathcal{F}_b$, ולכן $a \wedge b \in \mathcal{F}_b \subseteq \mathcal{F}$ (כי $\mathcal{F}_b$ מסנן). הוכחת התכונות האחרות דומה. □

נסכם את ההוכחה:

הוכחת משפט 2.1.22. לפי תרגיל 2.1.23,עלינו להראות שלכל $b > 0$ ב-$\mathcal{B}$ קיימת השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega(b) = 1$. לפי תרגיל 2.1.28, b שייך למסנן, ולפי הטענה האחרונה, מסנן זה מוכל בעל-מסנן $\mathcal{F}$. נגדיר $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ על-ידי $\omega(a) = 1$ אם ורק אם $a \in \mathcal{F}$. אז $\omega(b) = 1$, ולפי תרגיל 2.1.26, ω השמה. □

סוף הרצאה 2, 7 בנוב

מקורות

[1] Herbert B. Enderton. *A mathematical introduction to logic*. 2nd ed. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, ,2001 pp. xii+317. ISBN: -0-12 .238452-0

[2] Euclid. *The Elements*. Online version with Java illusetrations by David E. Joyce. URL: `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`.

[3] Martin Hils and François Loeser. *A first journey through logic*. Student Mathematical Library .89 American Mathematical Society, Providence, RI, ,2019 pp. xi+185. ISBN: .978-1-4704-5272-8 DOI: `10.1090/stml/089`.

[4] Douglas R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. New York, NY, USA: Basic Books, Inc., .1979 ISBN: .0465026850

[5] Elliott Mendelson. *Introduction to mathematical logic*. 4th ed. Chapman & Hall, London, ,1997 pp. x+440. ISBN: .0-412-80830-7

[6] Woflgang Rautenberg. *A concise introduction to mathematical logic*. 2nd ed. Universitext. With a foreword by Lev Beklemishev. Springer, New York, ,2006 pp. xviii+256. ISBN: .978-0387-30294-2