

# לוגיקה מתמטית

משה קמנסקי

5 בנובמבר 2024

## 1 מבוא

לוגיקה מתמטית הוא התחום במתמטיקה שחוקר בצורה מדויקת מושגים כמו "טענה" ו-"הוכחה". על מנת לספק מוטיבציה, נתבונן בשתי דוגמאות היסטוריות.

### 1.1 גאומטריית המישור

אוקלידס רצה לדעת את כל הדברים שנכונים עבור נקודות, קווים ומעגלים במישור<sup>1</sup>. על-מנת להבין זאת, אוקלידס ניסה לנסח רשימה קצרה של הנחות יסוד שנקראות "אינה מוטלת בספק", ולהוכיח מהן את כל יתר הטענות הנכונות. ארבעת הנחות היסוד הראשונות אכן פשוטות מאוד: הראשונה, לדוגמא, אומרת שבין כל שתי נקודות קיים קו ישר אחד (את עבודתו של אוקלידס, "האלמנטים", ניתן לקרוא עד היום, גם באינטרנט: [2]). אוקלידס הצליח להוכיח את עשרים ושמונה הטענות הראשונות שלו בעזרת ארבע הנחות בסיס אלה<sup>2</sup>. על מנת להוכיח טענות נוספות, הוא נזקק להנחת יסוד נוספת, שקולה לאקסיומת המקבילים: דרך נקודה הנמצאת מחוץ לישר נתון, עובר בדיוק ישר אחד מקביל לישר הנתון. הנחת יסוד זו פחות פשוטה ומובנת מאליה, ואוקלידס ניסה, אך לא הצליח, להוכיח אותה מארבע הנחות היסוד הראשונות.

השאלה איך להוכיח את אקסיומת המקבילים נותרה פתוחה מאות שנים, עד שהוכח שהאקסיומה בלתי תלויה: לא ניתן להוכיח (או להפריך) אותה מיתר הנחות היסוד. נשים לב, שטענה זו אינה טענה גאומטרית: היא אינה עוסקת בנקודות או קווים, אלא בטענות מתמטיות (מבחינה גאומטרית, אנחנו יודעים שאקסיומת המקבילים תקפה במישור). הטענה שייכת לתחום של לוגיקה מתמטית, בו הטענה שאקסיומת המקבילים בלתי תלויה באקסיומות האחרות, היא עצמה טענה מתמטית.

איך הוכחה הטענה? גאוס, לובאצ'בסקי ובויליאם (ובעקבותיהם מתמטיקאים אחרים) בנו מודל של ארבע האקסיומות הראשונות של אוקלידס, כלומר מבנה עם "קווים" ו-"נקודות", בו הקווים

<sup>1</sup>ניתן לקרוא את הסיפור הזה יותר בהרחבה ב-[4]

<sup>2</sup>למעשה, כפי שנראה, הוא השתמש בהנחות נוספות

והנקודות מתנהגים כמו שמוכתב על ידי האקסיומות הראשונות, אולם בו אקסיומת המקבילים אינה מתקיימת. מודל זה בהכרח שונה מהמישור הרגיל, בו אקסיומת המקבילים תקפה, אבל הוא "שווה זכויות" לו: כל טענה שניתן להוכיח מארבע האקסיומות הראשונות, תקפה גם בו. למעשה, כל הוכחה מתוך אקסיומות אלה נותן טענה תקפה בכל המבנים המקיימים אותן. מה לגבי הכיוון ההפוך? נניח שיש לנו טענה בגאומטריה שנכונה בכל המודלים שסופקו על-ידי גאוס וחבריו, וגם בכל מודל אחר של ארבע האקסיומות הראשונות. האם ניתן אז להוכיח טענה זו מתוך אותן אקסיומות? לכאורה, אפשר לדמיין שהטענה נכונה "במקרה" בכל המבנים הללו, בלי שניתן להוכיח אותה. אנחנו נראה שזה לא כך: משפט א' (משפט השלמות, ??). כל טענה שנכונה בכל מבנה המקיים את האקסיומות של אוקלידס, ניתן להוכחה מאקסיומות אלה

בניסוח המשפט (שאינו מנוסח בצורה מדויקת בשלב זה) לא הקפדנו לציין על איזו קבוצת אקסיומות מדובר. למעשה, זה לא משנה: המשפט תקף לכל קבוצת אקסיומות, ולא רק לגאומטריה. כאמור, משפט השלמות אינו משפט בגאומטריה. מהם האובייקטים המתמטיים המופיעים במשפט הזה? על-מנת שנוכל אפילו לנסח את המשפט, עלינו לענות לפחות על השאלות הבאות:

שאלה 1.1.1. איך אפשר לראות טענות כאובייקטים מתמטיים?

שאלה 1.1.2. מהי הוכחה של טענה אחת מטענות אחרות?

שאלה 1.1.3. מהי משמעות האמירה שטענה מסוימת נכונה בגאומטריית המישור? באופן יותר כללי, מתי נאמר שטענה היא נכונה? מה הקשר בין זה לבין הוכחות של הטענה?

שאלה 1.1.4. איך ניתן להוכיח שטענה מסוימת לא תלויה באחרות?

בהינתן שהאקסיומה בלתי תלויה, התוספת שלה כהנחת יסוד מוצדקת. אבל האם יש טענות נוספות שאינן תלויות במערכת האקסיומות החדשה? האם אפשר לרשום רשימת אקסיומות המאפינות את המישור לחלוטין? תשובה אפשרית אחת לשאלה האחרונה נתונה במשפט הבא:

משפט ב' (משפט לוונהיים-סקולם, ??). לכל קבוצה אינסופית  $A$  קיים מבנה המקיים את כל הטענות המתקיימות בגאומטריית המישור, שבו קבוצת הנקודות היא  $A$ .  
שוב, גם משפט זה נכון למבנים כלליים, ולא רק לגאומטריה.

## 1.2 אריתמטיקה

ראינו לעיל שלא ניתן לאפיין לגמרי את גאומטריית המישור על ידי רשימה של אקסיומות. עדיין, אפשר לשאול האם לפחות אפשר להוכיח את כל מה שנכון בגאומטריית המישור מתוך כל חמש האקסיומות של אוקלידס. מסתבר שלא, ולמעשה אפילו המשפט הראשון בספרו של אוקלידס דורש אקסיומות נוספות. אולם טארסקי, בתחילת המאה ה-20 (בעקבות עבודה של קליין, הילברט, ומתמטיקאים נוספים) הצליח להשלים את הרשימה: הוא נתן רשימה מפורשת של אקסיומות, והוכיח שמהן ניתן להוכיח את כל הטענות הגאומטריות הנכונות במישור.

תחום נוסף שבו עסקו היוונים הוא תורת המספרים. גם שם הניסיון הוא לגלות את כל הטענות הנכונות עבור המספרים הטבעיים. בניגוד לגאומטריה, הם לא ניסו לעבוד בשיטה האקסיומטית.

שאלה 1.2.1. האם ניתן לראות גם טענות על מספרים כאובייקטים מתמטיים?  
 מערכת אקסיומות עבור המספרים הטבעיים הוצעה על-ידי פיאנו. כמו בגאומטריה, גם כאן ניתן לשאול:  
 שאלה 1.2.2. האם אקסיומות פיאנו מוכיחות את כל הטענות הנכונות על מספרים טבעיים? אם לא, האם קיימת מערכת אחרת שעושה זאת?  
 אנחנו נראה:  
 משפט ג' (משפט אי השלמות, ??). ישנן טענות בתורת המספרים שנכונות בטבעיים, אך אינן ניתנות להוכחה מאקסיומות פיאנו  
 למעשה, המשפט אינו יחודי לאקסיומות פיאנו, ותקף לכל מערכת אקסיומות שניתנת לתיאור מפורש (במובן שנראה מאוחר יותר).

## 1.3 מבנים אחרים

שתי הדוגמאות האחרונות דנות בשני נושאים מרכזיים במתמטיקה: גאומטריה ותורת המספרים. אלה תחומים חשובים, אך אינם היחידים.  
 שאלה 1.3.1. באילו מבנים ותורות מתמטיות ניתן לעסוק בשיטות הנ"ל? אילו כלים קיימים על מנת לענות על שאלות מהסוג לעיל לתורות אחרות?  
 אנחנו נראה מספר שימושים מפתיעים של טענות בלוגיקה לתחומים אחרים במתמטיקה, ביניהם:  
 משפט ד' (טענה ??). אם  $G$  גרף שכל תת-גרף (מלא) סופי שלו הוא  $k$ -צביע, אז  $G$  עצמו  $k$ -צביע  
 משפט ה' (דוגמא ??). אם  $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  העתקה פולינומית חד-חד-ערכית, אז היא על  
 המשפט הבא הוא משפט קלאסי על פונקציות ממשיות, אולם אנחנו נראה הוכחה פשוטה שלו, בשפה קרובה (אך מדויקת לגמרי!) לניסוחים המקוריים של ניוטון ולייבניץ  
 משפט ו' (משפט ערך הביניים, ??). אם  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ומקיימת  $f(0) \leq 0 \leq f(1)$ , אז קיים  $c \in [0, 1]$  עבורו  $f(c) = 0$ .  
 הרשימות מבוססות בין היתר על הספרים [1, 5, 6]. הספר [3] מומלץ אף הוא.

## 2 תחשיב הפסוקים

בסעיף זה נעסוק בסוג פשוט במיוחד של לוגיקה: תחשיב הפסוקים. לוגיקה זו לא מניחה דבר על המבנה של טענות בסיסיות, ובמקום זה עונה על שאלות הנוגעות לבניה של טענה מורכבת מתוך טענות יותר פשוטות על-ידי פעולות לוגיות. בהתאם לשאלות שהותוו במבוא, נראה את התשובות המדויקות שלוגיקה זו נותנת לשאלות:

1. מהי טענה?

2. מהי המשמעות של האמירה "טענה זו נכונה"?

3. מהי הוכחה?

לאחר שנגדיר את כל המושגים, נראה שניתן לענות על כל השאלות מהמבוא עבור לוגיקה זו, ונראה גם כמה שימושים.

## 2.1 אלגברות בוליאניות

כאמור, בשלב זה אנו מתייחסים אל כל טענה כאל קופסה שחורה. אם  $a$  ו- $b$  טענות כלשהן, אינטואיטיבית ניתן ליצור מהן את הטענות החדשות " $a$  וגם  $b$ ", " $a$  או  $b$ " ו-"לא  $a$ ". אנחנו מעוניינים למצוא מבנה פורמלי בו האינטואיציה הזו באה לידי ביטוי. במילים אחרות, על קבוצת הטענות  $B$  בהן אנו מתעניינים מוגדרות פעולות  $\wedge : B \times B \rightarrow B$  ("וגם"),  $\vee : B \times B \rightarrow B$  ("או") ו- $\neg : B \rightarrow B$  ("שלילה"). הואיל ובשלב זה אנו מתעניינים בתוכן של הטענה, ולא בצורת כתיבתה, למשל, הטענות " $a$  וגם  $b$ " ו-" $b$  וגם  $a$ " הן מבחינתנו אותה טענה. באופן דומה, ניתן להצדיק את התנאים האחרים בהגדרה הבאה:

**הגדרה 2.1.1.** אלגברה בוליאנית מורכבת מקבוצה  $B$ , איברים  $0, 1 \in B$  ופעולות  $\wedge : B \times B \rightarrow B$  ("וגם"),  $\vee : B \times B \rightarrow B$  ו- $\neg : B \rightarrow B$ , המקיימים את התנאים הבאים לכל  $a, b, c \in B$ :

$$1. \text{ (חילופיות) } a \vee b = b \vee a, a \wedge b = b \wedge a$$

$$2. \text{ (קיבוציות) } a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

$$3. \text{ (פילוג) } a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$4. a \wedge 1 = a, a \vee 0 = a$$

$$5. a \vee \neg a = 1, a \wedge \neg a = 0$$

נסמן ב- $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$  את המבנה כולו

**הערה 2.1.2.** כתוצאה מחוקי הקיבוץ, אין צורך לרשום סוגריים כאשר מפעילים אותה פעולה ברצף, ואנחנו נרשום למשל  $a \wedge b \wedge c$  במקום  $(a \wedge b) \wedge c$ . כמו-כן, נפעל לפי מוסכמה ש-"וגם" קודם, מבחינת סדר הפעולות, ל-"או", וכך נשמיט סוגריים נוספים (כלומר, נרשום  $a \wedge b \vee c$  במקום  $(a \wedge b) \vee c$ ). בנוסף נשתמש לרוב בחילופיות בלי להזכיר זאת.

**דוגמא 2.1.3.** אם  $B$  קבוצה בת איבר אחד, יש עליה מבנה יחיד של אלגברה בוליאנית (שימו לב שלא דרשנו ש- $0 \neq 1$ ! תרגיל: הוכיחו שאם ב- $B$  יותר מאיבר אחד, אז  $0 \neq 1$ ).

דוגמא 2.1.4. ישנה אלגברה בוליאנית יחידה בת שני איברים,  $B = \{0, 1\}$ . מבחינה אינטואיטיבית, זוהי האלגברה של ערכי האמת, כאשר 1 מסמל אמת, ו-0 שקר. נסמן אותה לרוב ב-2.

דוגמא 2.1.5. אם  $X$  קבוצה כלשהי, המבנה  $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup, \cdot^c, \emptyset, X \rangle$ , כאשר  $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$  היא קבוצת החזקה, ו- $A^c = X \setminus A$ , הוא אלגברה בוליאנית. אנחנו נקרא לאלגברות כאלה אלגברות חזקה.

אלגברות חזקה

ניתן לזהות את שתי הדוגמאות הקודמות כמקרים פרטיים של הדוגמא הזו, כאשר  $X$  קבוצה ריקה או קבוצה בת איבר אחד.

דרך אחת לחשוב על הדוגמא האחרונה היא לחשוב על איברי  $B$  כעל טענות על איברי  $X$ : נזהה כל טענה עם איברי  $X$  המקיימים את הטענה. תחת הפירוש הזה, הפעולות של  $\mathcal{B}$  מזהות עם האינטואיציה של "וגם", "או" ושלילה (כלומר, אם  $C \subseteq X$  קבוצת האיברים ב- $X$  המקיימים טענה  $c$ , ו- $D$  קבוצת האיברים המקיימים טענה  $d$ , אז  $C \cap D$  היא קבוצת האיברים המקיימים את הטענה " $c$  וגם  $d$ ").

תת-קבוצה קוסופית

דוגמא 2.1.6. אם  $X$  קבוצה כלשהי, תת-קבוצה קוסופית של  $X$  היא תת-קבוצה שהמשלימה שלה (ביחס ל- $X$ ) סופית. הקבוצה  $B$  המורכבת מתתי הקבוצות של  $X$  שהן סופיות או קו-סופיות היא אלגברה בוליאנית (עם פעולות כמו קודם).

דוגמא 2.1.7. אם  $X = [0, 1]$ , קבוצת הממשיים בין 0 ל-1, אז קבוצת תתי-הקבוצות של  $X$  שהן איחוד סופי של קטעים היא אלגברה בוליאנית (שוב, עם פעולות החיתוך והאיחוד). אנחנו נראה עוד דוגמאות רבות מהסוג הזה בהמשך.

דוגמא 2.1.8. אם  $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$  אלגברה בוליאנית כלשהי, אז המבנה  $\mathcal{B}^* = \langle B, \vee, \wedge, \neg, 1, 0 \rangle$  גם הוא אלגברה בוליאנית, שנקראת האלגברה הדואלית.

האלגברה הדואלית

התרגיל הבא כולל כמה עובדות שימושיות על אלגברות בוליאניות:

תרגיל 2.1.9. לכל אלגברה בוליאנית  $\mathcal{B}$ , ולכל  $a, b \in \mathcal{B}$  מתקיים:

$$1. \quad a \vee 1 = 1, a \wedge 0 = 0$$

$$2. \quad a \wedge a = a$$

$$3. \quad a = b \text{ אם } a \wedge b = a \vee b$$

$$4. \quad a \vee b = 1 \text{ ו- } a \wedge b = 0 \text{ אז } b = \neg a$$

$$5. \quad \neg(\neg a) = a$$

$$6. \quad \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$

$$7. \quad a \wedge (a \vee b) = a$$

הערה 2.1.10. בהנתן שוויון כלשהו בין שני ביטויים בוליאניים כמו בתרגיל, השוויון הדואלי הוא השוויון המתקבל מהמקורי על-ידי החלפת התפקידים של  $\vee$  ו- $\wedge$ , והחלפת התפקידים של 1 ו-0. למשל, הדואלי של השוויון  $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$  הוא השוויון  $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ . אם השוויון המקורי נכון עבור איברים כלשהם של אלגברה  $B$ , אז השוויון הדואלי נכון עבור אותם איברים כאשר חושבים עליהם כאיברי האלגברה הדואלים  $B^*$ . לכן, אם שוויון כלשהו נכון לכל האלגברות הבוליאניות, אז גם הדואלי שלו נכון עבורן. אנחנו נשתמש בזה באופן חופשי.

התרגיל הבא מציג דרך נוספת לחשוב על אלגברות בוליאניות, שלעתים מקלה על הוכחת תכונות כמו בתרגיל האחרון.

תרגיל 2.1.11. תהי  $B$  אלגברה בוליאנית, ונגדיר לכל שני איברים  $a, b \in B$  ש- $a \leq b$  אם  $a \wedge b = a$ .

1. הוכיחו שזהו סדר חלקי על  $B$ , עם מקסימום 1 ומינימום 0.

2. הוכיחו שלכל שני איברים  $a, b \in B$ , החסם העליון ביניהם ביחס  $\leq$  קיים ושווה ל- $a \vee b$  והחסם התחתון שווה ל- $a \wedge b$  (נזכיר שחסם עליון של קבוצה  $A$  בסדר חלקי הוא איבר  $m$  הגדול או שווה לכל איבר ב- $A$ , וקטן מכל איבר אחר שמקיים זאת. חסם עליון כזה, אם קיים, הוא יחיד).

3. נניח ש- $P$  קבוצה סדורה כמו בסעיפים הקודמים, ונסמן ב- $a \vee b$  את החסם העליון וב- $a \wedge b$  את החסם התחתון. נניח שלכל  $a \in P$  קיים  $b \in P$  כך ש- $a \wedge b = 0$  ו- $a \vee b = 1$ , ושלכל  $a, b, c \in P$  מתקיים:  $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leq a \vee (b \wedge c)$ . הוכיחו ש- $\langle P, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  אלגברה בוליאנית.

4. פתרו שוב את תרגיל 2.1.9 בעזרת התרגיל הנוכחי

בהמשך, כשנדבר על אלגברות בוליאניות, נתייחס באופן חופשי ליחס הסדר מהתרגיל האחרון. נחזור למוטיבציה: אם אנחנו חושבים על איברי אלגברה בוליאנית  $B$  כטענות, איך לנסח את העובדה שבמצב נתון, כל טענה היא אמיתית או שיקרית? אנחנו רוצים להצמיד לכל טענה  $b \in B$  ערך אמת  $v(b)$ , שיכול להיות אמת או שקר. כלומר, אנחנו מדברים על פונקציות  $v: B \rightarrow \{0, 1\}$ , אבל הפונקציות צריכות לקיים תנאים מסוימים: אם אמרנו שהטענות  $a$  ו- $b$  שתיהן נכונות, אז כך גם  $a \wedge b$ , ואילו  $\neg a$  שיקרית. במונחים של ההגדרה הבאה, אנחנו מתעניינים בהומומורפיזמים מ- $B$  ל- $2 = \{0, 1\}$ .

הגדרה 2.1.12. העתקה של אלגברות בוליאניות מאלגברה בוליאנית  $B_1$  לאלגברה בוליאנית  $B_2$  היא פונקציה  $\phi: B_1 \rightarrow B_2$  המקיימת:

$$1. \phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$$

$$2. \phi(\neg a) = \neg \phi(a)$$

לכל  $a, b \in B_1$ . (העתקה כזו נקראת גם הומומורפיזם של אלגברות בוליאניות) העתקה כזו נקראת שיכון אם היא חד-חד-ערכית, ואיזומורפיזם אם היא הפיכה.

הערה 2.1.13. בגלל תרגיל 2.1.9, העתקה כזו מקיימת גם  $\phi(1) = 1, \phi(a \vee b) = \phi(a) \vee \phi(b)$  ו- $\phi(0) = 0$ . כמו-כן, היא שומרת על הסדר החלקי מתרגיל 2.1.11. נשים לב שלמרות הסימון הזה, הפעולות בצד שמאל הן ב- $B_1$  ואלה שבצד ימין הן ב- $B_2$ .

דוגמא 2.1.14. לכל אלגברה יש העתקה יחידה אל האלגברה בת איבר אחד. אם ב- $B$  יש יותר מאיבר אחד, אין העתקה מהאלגברה בת איבר אחד ל- $B$ .

דוגמא 2.1.15. יש העתקה יחידה מ-2 לכל אלגברה בוליאנית. העתקה מאלגברה  $B$  ל-2 נקראת השמה. אלה העתקות שנתעניין בהן מאד בהמשך, שכן, כאמור, הן ממדלות את התהליך של בחירת ערכי אמת לטענות.

דוגמא 2.1.16. אם  $B = \mathcal{P}(X)$  היא אלגברת קבוצת החזקה, כל איבר  $x$  של  $X$  מגדיר השמה  $\phi_x: B \rightarrow 2$ , הנתונה על ידי:  $\phi_x(A) = 1$  אם  $x \in A$  ו-0 אחרת. אם חושבים על איברי  $B$  כטענות על איברי  $X$ , אז  $\phi_x$  היא ההשמה ש"בודקת" האם הטענה נכונה עבור  $x$ .

תרגיל 2.1.17. באופן יותר כללי, אם  $C \subseteq X$ , הוכיחו שהפונקציה  $A \mapsto A \cap C$  היא הומומורפיזם מ- $\mathcal{P}(X)$  ל- $\mathcal{P}(C)$ .

דוגמא 2.1.18. אם  $B$  אלגברה בוליאנית בת יותר מאיבר אחד, אז פונקציית הזהות אינה הומומורפיזם מ- $B$  ל- $B^*$  (למה?), מאידך, פונקציית השלילה היא איזומורפיזם מ- $B$  ל- $B^*$ .

סוף

הרצאה 1,  
24 באוק'

## מקורות

- [1] Herbert B. Enderton. *A mathematical introduction to logic*. 2nd ed. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, ,2001 pp. xii+317. ISBN: -0-12.238452-0
- [2] Euclid. *The Elements*. Online version with Java illustrations by David E. Joyce. URL: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>.
- [3] Martin Hils and François Loeser. *A first journey through logic*. Student Mathematical Library .89 American Mathematical Society, Providence, RI, ,2019 pp. xi+185. ISBN: .978-1-4704-5272-8 DOI: 10.1090/stml/089.
- [4] Douglas R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. New York, NY, USA: Basic Books, Inc., .1979 ISBN: .0465026850
- [5] Elliott Mendelson. *Introduction to mathematical logic*. 4th ed. Chapman & Hall, London, ,1997 pp. x+440. ISBN: .0-412-80830-7
- [6] Wolfgang Rautenberg. *A concise introduction to mathematical logic*. 2nd ed. Universitext. With a foreword by Lev Beklemishev. Springer, New York, ,2006 pp. xviii+256. ISBN: .978-0387-30294-2