מבוא לתורת הקבוצות

משה קמנסקי

6 במאי 2024

1 מבוא

מטרת הקורס היא לתת מבוא לתורה של המבנים המתמטיים הכי בסיסיים, קבוצות. קבוצה A מאופיינת על-ידי אוסף האיברים ששייכים אליה: לכל עצם x, ניתן לשאול: האם x שייך ל-A? אנחנו נסמן את הטענה ש-x שייך ל-A ב-$x \in A$. הנה כמה מהשאלות בהן נתמקד:

1.1 איזה מבנים מעניינים ניתן לתאר באמצעות קבוצות?

1. תכונות כתתי קבוצות
2. בניית קבוצות חדשות מקבוצות קיימות
3. יחסים ופעולות

1.2 איך אפשר לעבוד עם קבוצות אינסופיות?

1. קבוצות סופיות ואינסופיות
2. גדלים של קבוצות אינסופיות
3. על מה אפשר לעשות אינדוקציה?

1.3 מהן קבוצות?

1. הגישה האקסיומטית
2. הגדרה ותכונות של קבוצות מוכרות

1.4 כמה שאלות

1. האם לכל מרחב וקטורי יש בסיס?
2. האם קיים מספר ממשי שאינו אלגברי?
3. האם קיימת פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שהיא חיבורית אבל לא רציפה?
4. האם אפשר להגדיר באופן סביר את האורך של כל תת-קבוצה של קטע ממשי חסום?
5. האם כל פונקציה מהטבעיים לטבעיים ניתנת לחישוב על-ידי תכנית מחשב?
6. האם קיימת קבוצה של נקודות במישור שכל ישר פוגש בשתי נקודות בדיוק?
7. האם המישור הוא איחוד של מעגלים זרים? מה לגבי המרחב התלת-מימדי?

2 תורת קבוצות אלמנטרית (תזכורת)

2.1 פעולות בסיסיות

1. הכלה
2. חיתוך, איחוד, הפרש, הפרש סימטרי
3. קבוצת חזקה

2.2 גרפים

מכפלה קרטזית, יחסים, פונקציות, תחום, תמונה, הרכבה, יחס הפוך

הגדרה 2.2.1. *גרף* הוא זוג $\Gamma=\langle X,R\rangle$ כאשר X קבוצה ו-$R\subseteq X\times X$ יחס מעל X. גרף

הגדרה 2.2.2. נניח ש-$\langle A,R\rangle$ ו-$\langle B,S\rangle$ שני גרפים ו-$f:A\to B$ פונקציה. אז f נקראת *העתקה* (של גרפים) אם לכל $a,a'\in A$, אם aRa' אז $f(a)Sf(a')$. אם בנוסף גם הכיוון השני נכון (כלומר לכל $a,a'\in A$, אם $f(a)Sf(a')$ אז aRa'), אז f נקראת *שיכון*. אם f העתקה שהפיכה כפונקציה, וההפכית היא גם העתקה של גרפים, אז f נקראת *איזומורפיזם*. העתקה שיכון איזומורפיזם

2.3 יחסי שקילות, מנות

הגדרה 2.3.1. *יחס שקילות* על קבוצה A הוא יחס סימטרי, טרנזיטיבי ורפלקסיבי מעל A. יחס שקילות

דוגמה 2.3.2. A קבוצת המשולשים במישור שאינם שווי שוקיים. יחס החפיפה על A הוא יחס שקילות, וכך גם יחס הדמיון. ■

דוגמה 2.3.3. נניח ש-n מספר שלם, ו-$A = \mathbb{Z}$. נגדיר יחס E_n על $\mathbb{Z}$ על-ידי: mE_nk אם $n \mid m-k$, כאשר יחס החלוקה $p \mid q$ (כלומר "p מחלק את q") מתקיים אם יש l שלם עבורו $q = pl$. אז לכל n שלם, E_n יחס שקילות (תרגיל) ■

אינטואיטיבית, יחס שקילות על A מבטא את הרעיון שאנחנו רוצים לזהות איברים שונים של A. דרך אחת שזה יכול לקרות היא שערכי פונקציה מסוימת על האיברים הללו הם זהים.

הגדרה 2.3.4. אם $f : A \to B$ פונקציה, *הגרעין* של f הוא היחס $\ker(f) = \{\langle a_1, a_2 \rangle \in A \times A \mid f(a_1) = f(a_2)\}$. הגרעין

תרגיל 2.3.5. הוכיחו שלכל $f : A \to B$, הגרעין של f הוא יחס שקילות.

דוגמה 2.3.6. נניח ש-$n > 0$ שלם, ונסמן $C_n = \{0, \dots, n-1\}$. נגדיר $r_n : \mathbb{Z} \to C_n$ על-ידי: $r_n(m)$ הוא השארית של m בחלוקה ב-n (כלומר, המספר היחיד $k \in C_n$ כך ש-$m-k$ מתחלק ב-n). אז $\ker(r_n) = E_n$ מדוגמה 2.3.3 (תרגיל). ■

נמשיך להשתמש בסימונים r_n, C_n ו-E_n מהדוגמה האחרונה גם בהמשך.

דוגמה 2.3.7. אם A קבוצת המשולשים במישור שאינם שווי שוקיים, נגדיר את $f : A \to B$ להיות הפונקציה שמתאימה לכל משולש את קבוצת אורכי הצלעות שלו (הבחירה במשולשים שאינם שווי שוקיים היא כדי להבטיח שהקבוצה הזו היא בת שלושה איברים בדיוק, ולכן ניתן לשחזר את אורכי כל הצלעות בצורה יחידה). לפי משפט החפיפה צלע-צלע-צלע, f היא העתקת מנה עבור יחס החפיפה. ■

תרגיל 2.3.8. מצאו פונקציה f על אותה קבוצת משולשים כך ש-$\ker(f)$ הוא יחס הדמיון

יחסי שקילות מהצורה $\ker(f)$ הם נוחים במיוחד: על מנת לקבוע האם a_1 ו-a_2 שקולים, מספיק לחשב את הערכים $f(a_i)$. לכן, מעניין לשאול אילו יחסי שקילות הם מהצורה הזו. מסתבר שהתשובה היא: כולם.

משפט 2.3.9. *לכל יחס שקילות E על קבוצה A קיימת פונקציה $f : A \to B$ שהיא על, כך ש-$\ker(f) = E$. כל פונקציה כזו נקראת העתקת מנה עבור E.* העתקת מנה

על-מנת להוכיח את המשפט, נציג את המינוח הבא: אם E יחס שקילות על A, ו-$a \in A$, *מחלקת השקילות* של a היא הקבוצה $[a]_E = \{a' \in A \mid aEa'\}$. מחלקת השקילות

הוכחה. נגדיר $B = \{[a]_E \mid a \in A\}$ ו-$f : A \to B$ על ידי $f(a) = [a]_E$. □

תרגיל 2.3.10. השלימו את ההוכחה (הנקודה העיקרית היא ש-$[a_1]_E = [a_2]_E$ אם ורק אם a_1Ea_2).

הערה 2.3.11. בניגוד למקובל במקומות אחרים, אנחנו לא נשתמש במפורש בבנייה שמופיעה בהוכחת המשפט (כלומר, בקבוצת מחלקות השקילות) אלא רק במשפט עצמו. הסיבה היא שהמידע הנוסף שהבנייה הזו מספקת אינו שימושי לרוב, ומאידך הגמישות שבבחירת העתקת מנה כלשהי היא לעתים שימושית ויותר אינטואיטיבית. למשל, ראינו את העתקת המנה r_n עבור היחס E_n, שהיא יותר טבעית מהבניה בהוכחה.

כאמור, ניתן לחשוב על יחס שקילות E על A כעל מושג מוחלש של שוויון בין איברי A. מנקודת המבט הזו, העתקת מנה $f: A \to B$ "שוכחת" את המידע הלא רלוונטי על איברי A, והופכת את השוויון המוחלש לשוויון ממש: aEa' אם ורק אם $f(a) = f(a')$. לכן, ניתן לחשוב על איבר $b \in B$ כמחזיק "המידע הרלוונטי" אודות $a \in A$ עבורו $f(a) = b$ (ההנחה ש-f מבטיחה שלכל $b \in B$ אכן קיים a כזה). לכן, מעניין להבין איזה מידע מעניין על A מושרה ל-B. נדגים זאת באמצעות השימוש הבא.

שלשה פיתגורית היא שלשה a, b, c של מספרים טבעיים כך ש-$a^2 + b^2 = c^2$ (לכן, הם אורכים של צלעות משולש ישר זווית). אנחנו רוצים להוכיח את הטענה הבאה: שלשה פיתגורית

טענה 2.3.12. *לא קיימת שלשה פיתגורית בה אורכי הניצבים a, b הם אי-זוגיים.*

על מנת להוכיח את הטענה הזו, נשתמש בטענה הבאה:

טענה 2.3.13. *נניח ש-n טבעי חיובי, ו-$\pi: \mathbb{Z} \to B$ העתקת מנה עבור E_n. אז קיימות פעולות יחידות $\oplus$ ו-$\odot$ על B המקיימות לכל $m, k \in \mathbb{Z}$ את השוויונות $\pi(m+n) = \pi(m) \oplus \pi(n)$ ו-$\pi(mn) = \pi(m) \odot \pi(n)$.*

נוכיח את הטענה הזו בהמשך. בינתיים, נשים לב שהתנאים בטענה מאפשרים לחשב את הפעולות על כל זוג איברים: למשל, כדי לחשב את $b_1 \oplus b_2$, עלינו לבחור $a_i \in A$ כך ש-$\pi(a_i) = b_i$, ולחשב את $\pi(a_1 + a_2)$. הטענה מבטיחה שהתשובה אינה תלויה בבחירה של a_i. תכונות של הפעולות הללו גם ניתן להסיק מתוך הטענה. למשל:

תרגיל 2.3.14. הוכיחו שלכל $u, v, w \in B$ מתקיים $u \oplus v = v \oplus u$, $u \odot v = v \odot u$ ו-$u \odot (v \oplus w) = (u \odot v) \oplus (u \odot w)$ (במונחים של טענה 2.3.13)

עבור $n = 4$ ו-$\pi = r_4$ כמו בדוגמא 2.3.6, אפשר בקלות לחשב את טבלת ה"חיבור" וה"כפל" ב-C_4, קבוצה בת ארבעה איברים. אנחנו בעיקר רוצים לשים לב שאם $u \in C_4$ זוגי (כלומר 0 או 2) אז $u \odot u = 0$ ואחרת $u \odot u = 1$. עכשיו אפשר להוכיח את טענה 2.3.12:

הוכחת טענה 2.3.12. נניח בשלילה שקיימים מספרים אי-זוגיים a, b ושלם c כך ש-$a^2 + b^2 = c^2$. נחשב את r_4 בשני הצדדים:

$$\begin{aligned} r_4(c) \odot r_4(c) = r_4(c \cdot c) = r_4(a \cdot a + b \cdot b) = \\ (r_4(a) \odot r_4(a)) \oplus (r_4(b) \odot r_4(b)) = 1 \oplus 1 = 2 \in C_4 \end{aligned}$$

כאשר השוויון הלפני אחרון נובע מההנחה ש-a, b אי-זוגיים, ומהחישוב שעשינו לפני ההוכחה. אותו חישוב מראה שהגענו לסתירה, שכן צד שמאל חייב להיות 0 או 1. □

על-מנת להשלים את ההוכחה, עלינו להוכיח את טענה 2.3.13. נשים לב ראשית שהטענה אינה טריוויאלית: ישנן פעולות על השלמים שלא מקיימות את התכונה המקבילה.

תרגיל 2.3.15. נסמן $m \star k = m^{|k|}$ עבור מספרים שלמים m, k. הוכיחו שלא קיימת פעולה $\circledast$ על C_4 כך שלכל $m, k \in \mathbb{Z}$ מתקיים $r_4(m \star k) = r_4(m) \circledast r_4(k)$.

אנחנו נוכיח את טענה 2.3.13 כמסקנה מטענה כללית על יחסי שקילות. אנחנו מתעניינים בטענה מהצורה הבאה: נתון יחס שקילות E על קבוצה A, עם העתקת מנה $\pi : A \to B$. יש לנו "מבנה מעניין" על A, ואנחנו מעוניינים להבין באיזה תנאי הוא "משרה" מבנה דומה על B. בטענה 2.3.13 המבנה המעניין היה פעולות החיבור והכפל. באופן כללי, זה יכול להיות למשל פונקציה מ-A, תת-קבוצה של A, יחס על A וכו'.

אנחנו נתמקד ראשית במקרה הפשוט של פונקציה. נתונה לנו פונקציה $g : A \to C$ (כאשר C קבוצה כלשהי). מתי הפונקציה הזו "משרה" פונקציה על B? אנחנו שואלים האם קיימת פונקציה $\bar{g} : B \to C$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $g(a) = \bar{g}(\pi(a))$ (כלומר, האם הגודל g שאנחנו מודדים על איברי A תלוי בעצם רק במידע שבאמת מעניין אותנו, כלומר בתמונה של האיבר ב-B). נשים לב שאם זה המצב, ו-a' שקול ל-a, אז $g(a) = \bar{g}(\pi(a)) = \bar{g}(\pi(a')) = g(a')$. לכן, מצאנו תנאי הכרחי. מסתבר שהוא גם תנאי מספיק:

משפט 2.3.16. *נניח ש-E יחס שקילות על קבוצה A, עם העתקת מנה $\pi : A \to B$, ונניח ש-$g : A \to C$ פונקציה כלשהי. אז התנאים הבאים שקולים:*

1. *קיימת פונקציה $\bar{g} : B \to C$ כך ש-$g = \bar{g} \circ \pi$.*
2. *לכל $a, a' \in A$, אם aEa' אז $g(a) = g(a')$ (במילים אחרות, $E \subseteq \ker(g)$).*

אם התנאים מתקיימים, אז $\bar{g}$ יחידה.

סוף הרצאה 1, 1 במאי 2024

הוכחה. כיוון אחד ראינו בדיוק לפני הניסוח של המשפט. בכיוון השני, נגדיר

$$\bar{g} = \{\langle \pi(a), g(a) \rangle \mid a \in A\}$$

נוכיח ש-$\bar{g}$ פונקציה: אם $\langle u, v \rangle$ ו-$\langle u, w \rangle$ שייכים ל-$\bar{g}$ אז קיים $a \in A$ כך ש-$u = \pi(a)$ ו-$v = g(a)$ וקיים $a' \in A$ כך ש-$u = \pi(a')$ ו-$w = g(a')$. כיוון ש-$\pi(a) = u = \pi(a')$, מתקיים aEa' ולכן לפי ההנחה $g(a) = g(a')$, כלומר $v = w$.

השוויון $g = \bar{g} \circ \pi$ נובע ישירות מהבניה. העובדה ש-$\bar{g}$ מוגדרת על B ויחידה נובעת מכך ש-π על: הערך של $\bar{g}$ על כל איבר $b \in B$ נקבע על-ידי התנאי $g = \bar{g} \circ \pi$. □

למשפט יש מספר מסקנות והכללות שימושיות:

מסקנה 2.3.17. *נניח ש-E יחס שקילות על X, עם העתקת מנה $\pi_X : X \to \bar{X}$, ו-F יחס שקילות על Y, עם העתקת מנה $\pi_Y : Y \to \bar{Y}$. נניח ש-$h : Y \to X$ פונקציה. אז שני התנאים הבאים שקולים:*

1. *קיימת פונקציה $\bar{h} : \bar{Y} \to \bar{X}$ כך שלכל $y \in Y$ מתקיים $\pi_X(h(y)) = \bar{h}(\pi_Y(y))$.*
2. *לכל $y, y' \in Y$, אם yFy' אז $h(y)Eh(y')$.*

הוכחה. נגדיר $g : Y \to \bar{X}$ על-ידי $g = \pi_X \circ h$. אז לכל $y, y' \in Y$ מתקיים: $g(y) = g(y')$ אם ורק אם $h(y)Eh(y')$. לכן, לפי משפט 2.3.16, התנאי השני שקול לקיומה של פונקציה $\bar{h} : \bar{Y} \to \bar{X}$ כך ש-$\bar{h} \circ \pi_Y = g = \pi_X \circ h$, כנדרש. □

דוגמה 2.3.18. נניח ש-$X = Y = \mathbb{Z}$, $E = E_2$ ו-$F = E_6$, עם העתקות מנה r_2 ו-r_6, כמו בדוגמא 2.3.6, ונניח ש-$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ נתונה על-ידי $h(n) = 7n$. אם nFn' אז $n - n'$ מתחלק ב-6. לכן $h(n) - h(n') = 7(n - n')$ מתחלק ב-6 ולכן גם ב-2, כלומר $h(n)Eh(n')$. המסקנה מבטיחה שקיימת פונקציה (יחידה) $\bar{h} : C_6 \to C_2$ עם התכונה: $\bar{h}(r_6(n)) = r_2(7n)$ לכל $n \in \mathbb{Z}$. במלים אחרות, הזוגיות של $7n$ (שנמדדת על-ידי r_2) תלויה רק בשארית של n ביחס ל-6: אם השארית הזו ידועה, אנחנו יודעים האם $7n$ זוגי. לא קשה לחשב את $\bar{h}$: לכל $k \in C_6$ מתקיים $\bar{h}(k) = 1$ אם ורק אם k אי-זוגי (כמספר טבעי).

אפשר גם לחשוב על אותה דוגמא כאשר מחליפים בין E ו-F. במקרה הזה, אין $\bar{h}$ המקיימת $\bar{h}(r_2(n)) = r_6(7n)$: השארית של $7n$ ביחס ל-6 לא תלויה רק בזוגיות של n, איבדנו יותר מדי מידע. ■

מסקנה 2.3.19. *נניח ש-E יחס שקילות על קבוצה X עם העתקת מנה $\pi : X \to \bar{X}$, וש-$h : X \times X \to X$ פונקציה. אז התנאים הבאים שקולים:*

1. *קיימת פונקציה (יחידה) $\bar{h} : \bar{X} \times \bar{X} \to \bar{X}$ כך שלכל $x_1, x_2 \in X$ מתקיים $\bar{h}(\pi(x_1), \pi(x_2)) = \pi(h(x_1, x_2))$.*
2. *לכל $x_1, x_1', x_2, x_2' \in X$, אם x_1Ex_1' ו-x_2Ex_2' אז $h(x_1, x_2)Eh(x_1', x_2')$.*

לפני שנוכיח את המסקנה, נסיק ממנה את טענה 2.3.13.

הוכחת טענה 2.3.13. ניקח $X = \mathbb{Z}$ עם $E = E_n$ ו-$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ פונקציית החיבור $h(m, k) = m + k$. התנאי הראשון במסקנה 2.3.19 מבטיח פונקציה (יחידה) $\bar{h} : B \times B \to B$ כך שלכל $m, k \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\pi(m + k) = \pi(h(m, k)) = \bar{h}(\pi(m), \pi(k))$, כלומר $\bar{h} = \oplus$ היא בדיוק הפונקציה שאנחנו מחפשים.

המסקנה אומרת שקיומה של הפונקציה הזו שקול לתנאי שאם mEm' וגם kEk' אז $m + kEm' + k'$. ההנחה במקרה שלנו היא ש-$m - m'$ מתחלק ב-n וגם $k - k'$ מתחלק ב-n. אם זה אכן המצב, אז גם הסכום שלהם $m - m' + k - k' = m + k - (m' + k')$ מתחלק ב-n, כנדרש.

ההוכחה עבור כפל דומה (תרגיל). □

סוף הרצאה 2, 6 במאי, 2024