מבוא לאלגברה קומוטטיבית

משה קמנסקי

2 בינואר 2024

1 מבוא

1.1 על מה מדובר

אלגברה קומוטטיבית עוסקת בחקר חוגים חילופיים. נזכיר:

חוג

הגדרה 1.1.1. *חוג* הוא חבורה חילופית $(A, +, 0)$ ביחד מבנה של מונואיד $(\cdot, 1)$ על A, כך שלכל $a \in A$, ההעתקות $x \mapsto a \cdot x$ ו-$x \mapsto x \cdot a$ הן אנדומורפיזם של החבורה החיבורית A. החוג הוא *חוג חילופי* אם הפעולה $\cdot$ היא חילופית.

חוג חילופי

העתקה של חוגים
הומומורפיזם
איזומורפיזם
איזומורפי

העתקה של חוגים (*הומומורפיזם*) היא העתקה של חבורות ששומרת גם על מבנה המונואיד. *איזומורפיזם* מחוג A לחוג B הוא הומומורפיזם $f : A \to B$ שהוא הפיך, במובן שיש הומומורפיזם $g : B \to A$ עבורו $f \circ g$ ו-$g \circ f$ הן הזהות. החוג A *איזומורפי* ל-B אם יש איזומורפיזם מ-A ל-B.

אלגברה

אלגברה (חילופית) מעל חוג חילופי A היא חוג חילופי B ביחד עם העתקת חוגים מ-A ל-B. העתקה (הומומורפיזם) של אלגברות מעל A מ-(B, f) ל-(C, g) היא העתקה $h : B \to C$ של חוגים כך ש-$h \circ f = g$.

ברשימות אלה, המילה "חוג" תהווה קיצור ל-"חוג חילופי", אלא אם יוכרז אחרת.

נשים לב שחוג הוא מקרה פרטי של אלגברה:

תרגיל 1.1.2. הוכיחו שלכל חוג יש מבנה יחיד של אלגברה מעל החוג $\mathbb{Z}$ של המספרים השלמים

לכן, כל הגדרה או משפט כללי על אלגבראות תקפים בפרט לחוגים.

תרגיל 1.1.3. הוכיחו שהומומורפיזם של חוגים $f : A \to B$ הוא איזומורפיזם אם ורק אם הוא חח"ע ועל. הוכיחו שאם A ו-B אלגברות מעל חוג k, ו-f העתקה של אלגברות שהיא איזומורפיזם של חוגים, אז היא איזומורפיזם של אלגברות (כלומר, ההעתקה ההפכית היא מעל k)

מניין מגיעות דוגמאות של חוגים חילופיים? נזכיר שלושה סוגים של דוגמאות:

שדות

כל שדה הוא בפרט חוג חילופי. השדות ימלאו תפקיד חשוב בהמשך, אבל התורה שלהם מספיק חשובה ומספיק עשירה כדי להקדיש להם קורס נפרד.

חוגי מספרים

הקבוצה $\mathbb{Z}$ של המספרים השלמים, עם החיבור והכפל הרגילים, היא חוג חילופי. זהו החוג בו עוסקים בתחום *תורת המספרים*. לעתים, למרות שהעניין העיקרי הוא ב-$\mathbb{Z}$, מעניין להסתכל על חוגים נוספים, כפי שנראה בדוגמאות הבאות:

דוגמא 1.1.4. איזה מספרים שלמים הם מהצורה a^2-b^2, עבור שלמים a,b? קל לראות שקבוצת המספרים עם התכונה הזו סגורה תחת כפל. לכן, מעניין במיוחד לשאול את השאלה עבור ראשוניים. אם p ראשוני ו-$p=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, אז מראשוניות נובע ש-$a-b=1$ ו-$a+b=p$, כלומר $2a=p+1$ ו-$2b=p-1$. לכן קיים פתרון לבעיה אם ורק אם p אי-זוגי (מספר כללי ניתן להצגה כזו אם ורק אם הוא אי-זוגי או מתחלק ב-4, ההוכחה היא תרגיל).

הצעד הקריטי בניתוח הזה היה ההפיכה של הבעיה לכפלית, באמצעות השוויון $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

דוגמא 1.1.5. איזה מספרים שלמים הם מהצורה a^2+b^2? שוב המקרה המעניין הוא ראשוניים, אבל לא ניתן להפוך את הבעיה לכפלית באותה צורה כמו בדוגמא הקודמת, לפחות כל עוד ממשיכים לעבוד ב-$\mathbb{Z}$. גאוס הציע להסתכל על הבעיה בחוג $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{Z}\}\subseteq\mathbb{C}$, *חוג השלמים של גאוס*. היתרון הוא שבחוג זה הבעיה שוב הופכת לכפלית: $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$. כדי להמשיך כמו בדוגמא הקודמת, צריך להבין את החוג $\mathbb{Z}[i]$: האם יש בו מושג של "ראשוניים" (ומהם)? האם יש פירוק יחיד לראשוניים כמו ב-$\mathbb{Z}$? אנחנו נעסוק בשאלות מהסוג הזה עבור חוגים כלליים.

חוגים שמתקבלים מ-$\mathbb{Z}$ על-ידי הרחבות מהסוג הזה נקראים *חוגי מספרים*. אלה דוגמאות מרכזיות, שמספקות כמה מהשאלות המעניינות בתחום, אבל ישנה מחלקה של חוגים יותר פשוטים מבחינה טכנית וקונספטואלית, והם החוגים שמגיעים מגאומטריה.

1.2 חוגי פונקציות

עבור כל חוג k, נסמן ב-$k[x]$ את קבוצת הפולינומים במשתנה x מעל k. קבוצה זו מהווה חוג עבור הפעולות של חיבור וכפל פולינומים. לרוב נחשוב על חוג כזה כאלגברה מעל k. אם k שדה, החוג הזה דומה מבחינות מסוימות ל-$\mathbb{Z}$. למשל, ניתן לבצע ב-$k[x]$ חלוקה עם שארית. החוגים כל-כך דומים, שאפשר לצפות שתהיה להם תורה דומה. הנה דוגמא מעניינת:

משפט א'. *עבור $n>2$ טבעי, לא קיימים פולינומים לא קבועים $a,b,c\in\mathbb{C}[x]$ עבורם $a^n+b^n=c^n$.*

על מנת להוכיח את המשפט, נסמן ב-$\deg(f)$ את הדרגה של פולינום $f\neq 0$, ב-$Z(f)$ את קבוצת השורשים שלו, וב-$z(f)$ את הגודל של $Z(f)$. אנחנו טוענים:

טענה ב'. *אם $f,g,h\in\mathbb{C}[x]$ זרים בזוגות ולא קבועים כך ש-$f+g+h=0$, אז $\deg(f)<z(fgh)$*

ההנחה ש-f,g,h זרים בזוגות שקולה לטענה ש-$z(fgh)=z(f)+z(g)+z(h)$, ואם כל השורשים של f פשוטים, אז $\deg(f)=z(f)$. לכן, במקרה הזה הטענה טריוויאלית. המקרה הכללי נתון בתרגיל בהמשך.

הוכחת משפט ב׳. נניח ש-a,b,c פולינומים לא קבועים המקיימים $a^n+b^n+c^n=0$. ניתן להניח שהם זרים בזוגות, שכן גורם משותף של שניים מהם חייב להיות גם גורם של השלישי, ואז אפשר לחלק. לכן לפי הטענה,

$$n\deg(a)=\deg(a^n)<z(a^nb^nc^n)=z(abc)\leqslant\deg(a)+\deg(b)+\deg(c)$$

כמובן שזה נכון גם אם מחליפים את a ב-b או ב-c, ולכן $n<3$. □

תרגיל 1.2.1. לכל פולינום $f\neq 0$, נסמן $r(f)=\Pi_{a\in Z(f)}(x-a)$ (כלומר, $r(f)$ פולינום מוני שכל שורשיו פשוטים, ו-$Z(r(f))=Z(f)$). בפרט, f מתחלק ב-$r(f)$, ונסמן $e(f)=f/r(f)$ (אז $e(f)$ "מודד" עד כמה f אינו פשוט). נסמן ב-f' את הנגזרת של f.

1. הוכיחו ש-$e(f)$ מחלק את f'
2. אם g פולינום נוסף, נסמן $w(f,g)=f'g-fg'$. הסיקו ש-$e(f)$ מחלק את $w(f,g)$.
3. הוכיחו שאם $f+g+h=0$ אז $w(f,g)=-w(h,g)$. לכן במקרה זה, $e(f)$ מחלק את $w(g,h)$.
4. הוכיחו שאם g ו-h זרים, אז $w(g,h)\neq 0$, ו-$\deg(w(g,h))<\deg(g)+\deg(h)$
5. הוכיחו שאם g ו-h זרים, ו-$f+g+h=0$, אז $e(f)e(g)e(h)$ מחלק את $w(g,h)$
6. הוכיחו את טענה ב׳

1.3 יריעות אפיניות

כאמור, כמה מהרכיבים בהוכחה משותפים לחוג הפולינומים ולשלמים, אולם ישנם רכיבים יחודיים, למשל השימוש בקבוצת השורשים, והקשר שלה לדרגת הפולינום. קבוצת השורשים מגיעה מתוך מבט על חוג הפולינומים לא כחוג מופשט, אלא כחוג פונקציות על הקבוצה $\mathbb{C}$. העובדה הזו הופכת את הקבוצה $\mathbb{C}$ ל*מרחב עם פונקציות*:

הגדרה 1.3.1. יהי k שדה. *מרחב עם פונקציות* מעל k הוא קבוצה X ביחד עם תת-אלגברה A (מעל k) של האלגברה k^X של כל הפונקציות מ-X ל-k. מרחב עם פונקציות

באופן יותר כללי, נרשה גם ש-A תהיה רק איזומורפית לתת-אלגברה של אלגברת הפונקציות, בתנאי שהאיזומורפיזם נתון.

הרעיון הוא שהאלגברה A "מקודדת" את המבנה הגאומטרי על X, באמצעות המידע שאלה הן הפונקציות ה-"חלקות מספיק" על X. דוגמאות הן $X=\mathbb{C}^n$ או $\mathbb{R}^n$ עם אלגברת הפונקציות הרציפות, הגזירות, או האנליטיות. דוגמאות אלה משתמשות במבנה האנליטי על $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, מבנה שאינו קיים על שדות כלליים. מכיוון שאנחנו מתעניינים בתורה האלגברית, אנחנו נחליף את תנאי החלקות האלה בתנאי חלקות אלגברי: נדרוש שהאלגברה A נוצרת סופית כאלגברה מעל k:

הגדרה 1.3.2. אם A אלגברה מעל חוג k ו-$S \subseteq A$ תת-קבוצה, תת-האלגברה הקטנה ביותר של A שמכילה את S נקראת *תת-האלגברה הנוצרת* על ידי S (למה תת-אלגברה כזו קיימת?) אם תת-אלגברה זו היא A עצמה, נאמר ש-S *יוצרת* את A (כאלגברה מעל k). אם קיימת תת-קבוצה סופית S שיוצרת את A מעל k, נאמר ש-A נוצרת סופית (מעל k)

תת-האלגברה הנוצרת

יוצרת

דוגמא 1.3.3. לכל חוג k ולכל קבוצה S, אלגברת הפולינומים $k[S]$ מעל k עם משתנים ב-S נוצרת על-ידי הקבוצה S. לכן, היא נוצרת סופית אם S סופית.

מכיוון שאנחנו מעוניינים בסופו של דבר באלגברה, נתמקד באותם מרחבים בהם האלגברה כוללת מידע רב ככל האפשר על המרחב. מכיוון שהמידע הנוסף הוא רק הקבוצה X, אנחנו שואלים: האם ניתן לשחזר את הקבוצה X מתוך האלגברה? אם (X, A) מרחב עם פונקציות מעל k, ו-$x \in X$ נקודה, חישוב ערך הפונקציה ב-x נותן העתקה של אלגברות $\phi_x : A \to k$, כלומר: $\phi_x(a) = a(x)$. אם נסמן ב-$\mathrm{Hom}_k(A, k)$ את קבוצת ההעתקות מ-A ל-k (כאלגבראות מעל k), קיבלנו פונקציה מ-X ל-$\mathrm{Hom}_k(A, k)$, הנתונה על-ידי $x \mapsto \phi_x$. כעת אפשר להגדיר:

הגדרה 1.3.4. *יריעה אפינית* מעל שדה k היא מרחב עם פונקציות $\langle X, A\rangle$ מעל k כך ש:

יריעה אפינית

1. A אלגברה נוצרת סופית מעל k
2. ההעתקה $x \mapsto \phi_x$ מ-X ל-$\mathrm{Hom}_k(A, k)$ היא הפיכה

דוגמא 1.3.5. לכל שדה אינסופי k, ולכל טבעי n, הזוג $(k^n, k[x_1, \dots, x_n])$ הוא יריעה אפינית (באופן יותר כללי, לכל קבוצה סופית S, הזוג $(k^S, k[S])$ הוא יריעה אפינית)

הזכרנו כבר ש-$k[S]$ נוצרת על-ידי S, ולכן נוצרת סופית כאשר S סופית. כדי להראות את התנאי השני, עלינו להראות ראשית שאכן ניתן לחשוב על $k[S]$ כאלגברת פונקציות על k^S. האלגברה $k[S]$ מכילה את הקבוצה S, ויש דרך טבעית לראות את האיברים האלה כפונקציות על k^S: אם $s \in S$ ו-$x \in k^S$, אז $s(x) = x(s)$. נשים לב גם שלפי ההגדרה שלנו, $\phi_x(s) = s(x) = x(s)$ לכל $s \in S$, כלומר, ϕ_x היא הרחבה של x מ-S ל-$k[S]$. לכן, התכונה היא מסקנה של הטענה הבאה.

טענה 1.3.6. *אם k חוג, S קבוצה ו-A אלגברה מעל k, לכל פונקציה (של קבוצות) $x : S \to A$ יש הרחבה יחידה להעתקה $\phi_x : k[S] \to A$ של אלגברות מעל k.*

נדחה את הוכחת הטענה להמשך.

היריעה האפינית $(k^n, k[x_1, \dots, x_n])$ נקראת *המרחב האפיני* (מעל k) ממימד n.

תרגיל 1.3.7. מיצאו את החור בהוכחת הדוגמא, וסיתמו אותו (רמז: לא השתמשנו בכך שהשדה אינסופי)

יריעות אפיניות (ויריעות אלגבריות בכלל) הן נושאי המחקר של *גאומטריה אלגברית*. עבורנו, הן בעיקר מקור לאינטואיציה ולשאלות. למשל:

- נניח ש-X ו-Y יריעות אפיניות. האם יש מבנה טבעי של יריעה אפינית על $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ ועל $\mathrm{X} \coprod \mathrm{Y}$ (איחוד זר)?

- אם $\mathbf{X}$ יריעה אפינית, לאילו תתי-קבוצות של $\mathbf{X}$ יש מבנה טבעי של יריעה?

- אם $k=\mathbb{R}$ או $k=\mathbb{C}$, ליריעות אפיניות יש תכונות גאומטריות המגיעות מתוך המבנה האנליטי של השדות הללו. למשל, אפשר לדבר על המימד של קבוצות כאלה, או על מידת החלקות שלהן. האם ניתן לגלות תכונות אלה מתוך המבנה האלגברי של היריעה? האם יש משמעות לתכונות האלה גם עבור שדות (או חוגים) כלליים?

- האם אפשר להכליל את הרעיונות האלה לחוגים שאינם חוגי פונקציות על יריעה אפינית (והאם זה כדאי)?

הנה דוגמא לתת-קבוצה מעניינת של $\mathbb{R}^2$:

דוגמא 1.3.8. מעגל היחידה X ב-$\mathbb{R}^2$ נתון על-ידי המשוואה $x^2+y^2=1$. כפי שראינו, כל פולינום $p(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$ מגדיר פונקציה על $\mathbb{R}^2$ ולכן, על-ידי צמצום, על X. צמצום זה מגדיר העתקה של אלגברות מעל $\mathbb{R}$ מ-$\mathbb{R}[x,y]$ ל-$\mathbb{R}^X$. נגדיר את אלגברת הפונקציות A על X להיות התמונה של ההעתקה הזו r. קל לראות (בידקו!) שתמונה של אלגברה נוצרת סופית היא אלגברה נוצרת סופית.

אם u נקודה כלשהי על המעגל, היא בפרט נקודה ב-$\mathbb{R}^2$, ולכן היא מגדירה העתקות $\phi_u:A\to\mathbb{R}$ ו-$\psi_u:k[x,y]\to\mathbb{R}$. קל לראות ש-$\psi_u=\phi_u\circ r$. לכן, אם u,v נקודות שונות על המעגל, כדי להראות ש-$\phi_u\neq\phi_v$ מספיק להראות ש-$\psi_u\neq\psi_v$, אבל את זה כבר ראינו. סוף הרצאה 1, 1 בינואר

באופן דומה, אם $\phi:A\to\mathbb{R}$ היא העתקה, אז $\phi\circ r:\mathbb{R}[x,y]\to\mathbb{R}$ מתאימה לנקודה u של $\mathbb{R}^2$. נשים לב ש-$r(x^2+y^2-1)=0$, ובפרט $\psi_u(x^2+y^2-1)=0$. לכן u נמצאת על המעגל X. הוכחנו ש-$\mathbf{X}=\langle X,A\rangle$ היא יריעה אפינית.

תרגיל 1.3.9. השלימו את הפרטים החסרים בדוגמא

1.4 אידיאלים

נסמן ב-Y את קבוצת הנקודות על מעגל היחידה X (מדוגמא 1.3.8) ללא הקוטב הדרומי $s=\langle 0,-1\rangle$. בדומה לדוגמא, נסמן ב-B את קבוצת הפונקציות על Y שהן צימצום של פולינום בשני משתנים (וב-r את העתקת הצמצום). האם הזוג $\langle Y,B\rangle$ מהווה יריעה?

כמו בדוגמא, B נוצרת סופית מעל $\mathbb{R}$, והעובדה שההעתקה מ-Y ל-$\mathrm{Hom}(B,\mathbb{R})$ היא חד-חד-ערכית כללית גם היא:

תרגיל 1.4.1. אם $\langle X,A\rangle$ יריעה אפינית מעל k (שדה כלשהו), $Y\subseteq X$, ו-B אלגברת הפונקציות על Y שהן צימצום של איברי A, אז ההעתקה הטבעית מ-Y ל-$\mathrm{Hom}_k(B,k)$ היא חד-חד-ערכית.

שוב כמו בדוגמא 1.3.8, כל העתקה $\phi:B\to\mathbb{R}$ מתאימה לנקודה u שנמצאת על מעגל היחידה X. לכן, על מנת לקבוע האם $\langle Y,B\rangle$ יריעה אפינית, עלינו להחליט האם קיימת העתקה $\phi:B\to\mathbb{R}$ כך ש-$\phi\circ r=\psi_s$ היא ההעתקה המתאימה ל-$s\in\mathbb{R}^2$. לשם כך, ננסה לתאר בצורה יותר מפורשת את B. זה כרוך בהבנת קבוצת האיברים שהולכים ל-0 תחת r.

הגדרה 1.4.2. אם $r:A\to B$ העתקה של חוגים, הקבוצה $\mathrm{Ker}(r)=\{a\in A\,|\,r(a)=0\}$ נקראית *הגרעין* של r. גרעין

מהן התכונות של הגרעין?

הגדרה 1.4.3. *אידיאל* בחוג A הוא תת-חבורה חיבורית I של A, כך שלכל $a \in A$ ו-$b \in I$ מתקיים $ab \in I$. נאמר ש-I *אידיאל ממש* אם $I \neq A$.

אידיאל
אידיאל ממש

דוגמאות לאידיאלים נתונות על-ידי התרגיל הבא

תרגיל 1.4.4. נניח ש-A חוג

1. הוכיחו ש $0 \in I$ לכל אידיאל $I \subseteq A$, וש-$1 \in I$ אם ורק אם $I = A$.
2. הוכיחו שלכל תת-קבוצה $S \subseteq A$ יש אידיאל קטן ביותר (S) המכיל את S. אידיאל זה נקרא האידיאל *שנוצר על-ידי* S (אם S כוללת איבר אחד s, נכתוב גם (s) במקום (S)

אידיאל שנוצר על-ידי S

3. הוכיחו ש-$A = (a)$ עבור איבר $a \in A$ אם ורק אם a *הפיך*, כלומר, אם ורק אם קיים $b \in A$ כך ש-$ab = 1$

הפיך

התפקיד של אידיאלים בחוגים דומה לזה של תתי-חבורות נורמליות:

טענה 1.4.5. *יהי A חוג*

1. *אם $r : A \to B$ העתקה של חוגים, אז הגרעין של r הוא אידיאל של A.*
2. *אם I אידיאל של A, אז קיים חוג A/I והעתקה $\pi : A \to A/I$ על, שהגרעין שלה I.*
3. *אם $r : A \to B$ העתקה שהיא על, ו-C חוג נוסף, אז העתקה $\psi : A \to C$ היא מהצורה $\psi = \phi \circ r$ אם ורק אם $\mathrm{Ker}(\psi) \supseteq \mathrm{Ker}(r)$, ובמקרה זה, ϕ יחידה.*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "r"] \arrow[dr, "\psi"'] & B \arrow[d, dashed, "\phi"] \\
 & C
\end{tikzcd}
\tag{1.1}
$$

החלק הראשון של הטענה הוא תרגיל. את יתר החלקים נוכיח בהמשך.

דוגמא 1.4.6. אם $\langle X, A \rangle$ יריעה אפינית, ו-$Y \subseteq X$, הקבוצה $I(Y)$ של פונקציות שמתאפסות על כל הנקודות ב-Y היא אידיאל: היא הגרעין של העתקת הצמצום.

בחזרה לשאלה שהתחלנו איתה, לאור ההבחנות האחרונות, עלינו לקבוע האם כל פולינום ששייך לאידיאל $I(Y)$ מתאפס גם על s. בשלב זה היינו יכולים להיזכר של-$\mathbb{R}$ יש מבנה אנליטי, וכל פונקציה רציפה שמתאפסת על הקבוצה Y (בפרט פולינומים ב-$I(Y)$) חייבת להתאפס גם על הסגור שלה, שהוא המעגל X. זה טיעון תקף, אבל הוא תקף רק ל-$\mathbb{R}$. אנחנו מעוניינים לשמר את אותה אינטואיציה, אבל בצורה אלגברית.

נשים לב ש-$I(Y)$ מכיל את האידיאל $J = (x^2 + y^2 - 1)$: כל כפולה של פולינום זה מתאפסת על Y. על-מנת להראות שהנקודה s, שאינה נמצאת על Y, מגדירה העתקה מ-B ל-$\mathbb{R}$ (ולכן, ש-(Y, B) אינה יריעה אפינית) מספיק להראות ש-$J = I(Y)$. נשאיר זאת לתרגיל הבא.

תרגיל 1.4.7. נסמן ב-$\pi : \mathbb{R}[x,y] \to {}^{\mathbb{R}[x,y]}/_J$ את ההעתקה הנתונה על-ידי 1.4.5.

1. הוכיחו שלכל פולינום $p(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ יש פולינומים $q(x)$ ו-$r(x)$, כך ש-$\pi(p(x,y)) = \pi(q(x) + yr(x))$.
2. נניח ש-$q(x) + yr(x)$ פולינום שמתאפס על Y. הוכיחו ש-$r(x)^2(1-x^2) = q(x)^2$ (רמז: ביחרו מספיק נקודות ב-Y)
3. הוכיחו שבתנאים של הסעיף הקודם, בהכרח $q = r = 0$. הסיקו מזה ש-$J = I(Y)$

ההבדל המהותי בין שתי הקבוצות X ו-Y שהסתכלנו עליהן הוא ש-X הייתה נתונה כקבוצת האפסים של פולינום. היא דוגמא לתת-קבוצה סגורה זריצקי:

הגדרה 1.4.8. נניח ש-$\langle X, A\rangle$ יריעה אפינית, ו-$S \subseteq A$ תת-קבוצה. תת-הקבוצה

$$\mathrm{Z}(S) = \{x \in X \mid s(x) = 0 \; \forall s \in S\}$$

נקראית *קבוצת האפסים* של הקבוצה S. תת-קבוצה $Y \subseteq X$ נקראית *סגורה זריצקי* ב-X אם היא קבוצת האפסים של איזושהי קבוצה. קבוצת האפסים סגורה זריצקי

קל לראות שלקבוצה S ולאידיאל שהיא יוצרת יש אותה קבוצת אפסים. לכן, נתעניין לרוב במקרה ש-S אידיאל. ניתן לחזור על ההדוגמא של המעגל לקבוצה סגורה כלשהי, ולהראות שלכל קבוצה כזו יש מבנה טבעי של יריעה אפינית, כאשר אלגברת הפונקציות נתונה על-ידי צמצום.

לכל יריעה אפינית $\langle X, A\rangle$ מעל שדה k אנחנו מקבלים התאמה בין אידיאלים ב-A ותתי-קבוצות סגורות של X, קבוצת הפתרונות של המשוואות שנתונות על-ידי איברי האידיאל. התאמה זו הופכת סדר: אם יש יותר משוואת, קבוצת הפתרונות קטנה. ראינו גם שניתן ללכת בכיוון ההפוך: לכל תת-קבוצה $Y \subseteq X$, הקבוצה $I(Y)$ היא אידיאל ב-A.

על-פי ההגדרה, $Y \subseteq \mathrm{Z}(I(Y))$ ו-$I \subseteq I(\mathrm{Z}(I))$. אחת השאלות המרכזיות שנעסוק בהן היא: מתי מתקיים שוויון בהכלות הללו? בפרט, נניח ש-$\mathrm{Z}(I) = \varnothing$, כך ש-$I(\mathrm{Z}(I)) = A$. האם נובע מכך ש-$I = A$? במלים אחרות, אם למערכת משוואות אלגבריות אין פתרון, האם זה משום שהן שקולות (על-ידי מניפולציות אלגבריות) למשוואה $1 = 0$? התשובה באופן כללי היא לא: למשוואה $x^2 + 1 = 0$ אין פתרון ממשי, אבל היא לא שקולה למשוואה הטריוויאלית (והאידיאל שנוצר על-ידי (x^2+1) אינו $\mathbb{R}[x]$). אבל המצב משתפר אם עובדים מעל שדה סגור אלגברית. זה אחד הניסוחים של *משפט האפסים של הילברט*:

משפט ג' (משפט האפסים של הילברט). *אם k שדה סגור אלגברית, $\langle X, A\rangle$ יריעה אלגברית מעל k, ו-$I \subseteq A$ אידיאל כך ש-$\mathrm{Z}(I) = \varnothing$, אז $I = A$.*

תרגיל 1.4.9. תהי X תת-הקבוצה של $\mathbb{R}^2$ (המרחב האפיני) שהיא איחוד הצירים $x = 0$ ו-$y = 0$. הוכיחו ש-X סגורה זריצקי בתוך $\mathbb{R}^2$. תארו את אלגברת הפונקציות A של X. הוכיחו ש-A אינה תת-חוג של שדה.

1.5 תנאי סופיות

הזכרנו שהתחליף שלנו לתנאי חלקות הוא קיום של קבוצת יוצרים סופית עבור האלגברה שלנו. נשים לב שניתן לנסח את התנאי הזה באופן הבא:

תרגיל 1.5.1. הוכיחו שאלגברה A מעל k היא נוצרת סופית אם ורק אם יש העתקה על $r : k[S] \to A$ של אלגברות מעל k, עבור קבוצה סופית S.

באופן יותר מדויק, קיימת התאמה "טבעית" בין העתקות מ-$k[x_1, \ldots, x_n]$ על A, לקבוצות יוצרים בגודל n ב-A.

מבחינה גאומטרית, זה אומר שאנחנו עוסקים בקבוצה סגורה זריצקי של המרחב האפיני k^S, קבוצת הנקודות שפותרות את כל המשוואות $p = 0$ כאשר p בגרעין של r. האם ניתן להסתפק במספר סופי של משוואות? הזכרנו כבר שקבוצת האפסים של קבוצת משוואות זהה לקבוצת הפתרונות של האידיאל שהיא יוצרת. לכן, אנחנו מגיעים באופן טבעי להגדרה הבאה:

הגדרה 1.5.2. חוג A נקרא *חוג נתרי* אם כל אידיאל ב-A נוצר סופית חוג נתרי

התשובה לשאלה שלנו נתונה על-ידי:

משפט ד' (משפט הבסיס של הילברט). *אם A חוג נתרי, אז גם $A[x]$ חוג נתרי*

ינבע מזה שכל החוגים שמופיעים כחוגי פונקציות של יריעות אפיניות הם נתריים. אבל המחלקה של חוגים נתריים היא הרבה יותר גדולה מחוגים אלה, ולמעשה כמעט כל החוגים שנראה יהיו נתריים.

תרגיל 1.5.3. הוכיחו ששדה הפונקציות הרציונליות $\mathbb{C}(t)$ הוא נתרי, אבל לא נוצר סופית מעל $\mathbb{C}$ (כאלגברה)

1.6 מודולים

המקביל של מרחב וקטורי מעל חוגים כלליים נקרא מודול:

הגדרה 1.6.1. יהי A חוג. *מודול מעל* A הוא חבורה אבלית M יחד עם העתקה $\cdot : A \times M \to M$ כך שלכל $a, b \in A$ ו-$m, n \in M$ מודול

1. $(ab) \cdot (m + n) = a \cdot (b \cdot m) + a \cdot (b \cdot n)$
2. $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$
3. $1 \cdot m = m$

אם M ו-N שני מודולים מעל A, *העתקה של מודולים* מ-M ל-N היא העתקה $f : M \to N$ של חבורות, כך ש-$f(a \cdot m) = a \cdot f(m)$. העתקה של מודולים

דוגמא 1.6.2. אם A שדה, אז מודולים מעל A הם מרחבים וקטוריים

מרחבים וקטוריים מעל שדה נתון A ממויינים על-ידי גודל יחיד, המימד: לכל עוצמה κ קיים מרחב וקטורי מעל A ממימד κ, וכל שניים כאלה הם איזומורפיים. עבור מודולים מעל חוג כללי, המצב יותר מורכב, משום שכל המבנה של החוג משתקף במבנה של המודול:

דוגמא 1.6.3. כל חוג A הוא מודול מעל עצמו. תתי-המודולים של A הם בדיוק האידיאלים.

קבוצות יוצרים עבור מודולים מוגדרות בדרך הרגילה: אם M מודול מעל A ו-$S \subseteq M$, תת-המודול שנוצר על-ידי S הוא חיתוך כל תתי-המודולים של M שמכילים את S, ואם תת-המודול הזה הוא M עצמו, נאמר ש-M נוצר על-ידי S. אז כל חוג A נוצר כמודול מעל עצמו על-ידי איבר אחד, 1, אבל תתי-המודולים שלו (כלומר, האידיאלים) עשוי לדרוש יותר יוצרים. לכן, אין הגדרה משמעותית של מימד עבור מודולים.

מאידך, מודולים מעל החוג $\mathbb{Z}$ הם פשוט חבורות אבליות. בפרט, משפט המיון של חבורות נוצרות סופית הוא למעשה משפט מיון עבור מודולים (נוצרים סופית) מעל $\mathbb{Z}$, והוא מקרה פרטי של משפט מיון עבור מודולים מעל מחלקה מסוימת של חוגים, כפי שנראה בהמשך.

דוגמא 1.6.4. כל אלגברה $f : A \to B$ מעל החוג A היא גם מודול מעל A, עם המבנה שנתון על-ידי $a \cdot b = f(a)b$

מה אנחנו מרוויחים מלראות אלגברות כמודולים? ראשית, אנחנו מקבלים משפחה של אובייקטים שכוללת גם את האידיאלים וגם את האלגברות. כמו עבור מרחבים וקטוריים, קיימות פעולות רבות על מודולים שלא קיימות עבור אלגברות: למשל, אם M ו-N שני מודולים מעל A, לחבורה $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ של כל ההעתקות ביניהם יש מבנה טבעי של מודול מעל A. מאידך, לרוב אין לקבוצה הזו שום מבנה סביר של אלגברה מעל A, אפילו כאשר M ו-N הם אלגברות.

תרגיל 1.6.5. הוכיחו את מה שנאמר בפסקה האחרונה: אם M ו-N מודולים מעל A, הקבוצה $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ של העתקות מ-M ל-N היא מודול מעל A, תחת הפעולות של חיבור וכפל בסקלר. אם $M = N$, אז $\mathrm{End}_A(M) = \mathrm{Hom}_A(M,M)$ היא בנוסף חוג (לא בהכרח חילופי), כאשר פעולת הכפל הוא הרכבה של העתקות.

דוגמא 1.6.6. נניח ש-k שדה. איך ניתן לתאר את המודולים מעל $k[x]$? אם M הוא מודול כזה, הוא בפרט מודול מעל $k \subseteq k[x]$, כלומר, מרחב וקטורי מעל k. מבנה המודול כולל גם את הפעולה של x: הפונקציה $m \mapsto xm$ היא, לפי הגדרת המודול, העתקה לינארית. מאידך, נראה בהמשך (וגם קל לבדוק ישירות) שלכל העתקה לינארית $T : M \to M$ על מרחב וקטורי M מעל k קיים מבנה יחיד של מודול על M כך ש-$x \cdot m = T(m)$ לכל $m \in M$. במילים אחרות, מודול מעל $k[x]$ הוא מרחב וקטורי מעל k בתוספת העתקה לינארית מ-M לעצמו.

נניח ש-$\langle X, A \rangle$ יריעה אפינית מעל k. מה המשמעות של מודולים בהקשר הזה? החוג A הוא חוג של פונקציות מ-X ל-k. פעולת הכפל על A מגיעה מתוך פעולת הכפל על k. באופן יותר כללי, אפשר לחשוב על פונקציות מ-X למרחב וקטורי V מעל k. על פונקציות כאלה יש פעולות של חיבור, וכפל בפונקציה עם ערכים ב-k, כלומר באיברי A. לכן, קבוצת כל הפונקציות מ-X ל-V היא מודול מעל A. זהו מודול גדול, באופן כללי. במקרים רבים נסתכל שוב על קבוצות מצומצמות יותר של פונקציות שמקיימות איזשהם "תנאי חלקות". מאידך, המרחב הוקטורי עצמו V לא חייב להיות קבוע, אלא תלוי בנקודה $x \in X$. במובן הזה, ניתן לחשוב על מודול מעל A כעל משפחה של מרחבים וקטוריים V_x מעל k, שתלויה באופן אלגברי ב-x.

תרגיל 1.6.7. נתבונן בישר האפיני $\langle X, \mathbb{R}[x] \rangle$ מעל $\mathbb{R}$ (כאשר $X = \mathbb{R}$ כקבוצה). נגדיר את $M \subseteq \mathbb{R}^X$ להיות קבוצת הפונקציות הממשיות על X ששוות ל-0 על כל נקודה שאינה 1, 3 או 7. הוכיחו ש-M מודול מעל $\mathbb{R}[x]$ (עם כפל פונקציות) ותארו אותו במונחים של דוגמא 1.6.6.

תרגיל 1.6.8. נניח ש-M חבורה חילופית (במילים אחרות, מודול מעל $\mathbb{Z}$). ראינו בתרגיל 1.6.5 שלקבוצה $\mathrm{End}(M)$ של העתקות מ-M לעצמה יש מבנה טבעים של חוג (לא בהכרח חילופי). הוכיחו שאם A חוג, אז מבנה של מודול מעל A על M שקול להעתקה של חוגים מ-A ל-$\mathrm{End}(M)$.

סוף הרצאה 2, 16 במרץ

1.7 תכונות אוניברסליות

עכשיו הגיע הזמן לשלם חובות ולהוכיח את טענות 1.3.6 ו-1.4.5. שתי הטענות הללו שייכות למשפחה רחבה של טענות שניתן לנסח כקיום *אובייקטים אוניברסליים*. ננסח ראשית מספר טענות דומות לטענה 1.3.6:

טענה 1.7.1. *תהי S קבוצה. אז קיים מונואיד F_S ופונקציה $i : S \to F_S$ כך שלכל מונואיד G ופונקציה $j : S \to G$ יש העתקה יחידה $a : F_S \to G$ עבורה $a \circ i = j$:*

$$\begin{tikzcd} & F_S \arrow[dd, dashed, "!a"] \\ S \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & \\ & G \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

כמו-כן, קיים מונואיד חילופי A_S ופונקציה $i : S \to A_S$ כך שלכל מונואיד חילופי G ופונקציה $j : S \to G$ יש העתקה יחידה $a : F_S \to G$ עבורה $a \circ i = j$.

האובייקטים שנתונים על-ידי הטענה אינם בדיוק יחידים: ניתן תמיד "לשנות שמות" לאיברים ולקבל אובייקט אחר. אולם אם F_1 ו-F_2 הם שני מונואידים שנתונים עם פונקציות $i_k : S \to F_k$, יש דרך יחידה לזהות אותם:

לפי הטענה קיימת העתקה $a : F_1 \to F_2$ שהיא הזהות על S. כמו-כן, לפי הטענה עבור F_2, קיימת העתקה $b : F_2 \to F_1$ שהיא הזהות על S. ההרכבה $b \circ a : F_1 \to F_1$ היא העתקה מ-F_1 לעצמו שהיא הזהות על S. הזהות על F_1 גם היא העתקה שהצמצום שלה ל-S הוא הזהות, ולכן לפי היחידות בטענה (עבור $F_S = F_1$ ו-$G = F_1$), ההעתקה $b \circ a$ היא הזהות. באופן דומה, $a \circ b$ היא הזהות על F_2, ולכן ההעתקה a היא איזומורפיזם (יחיד!) מ-F_1 ל-F_2 שמתצמצם לזהות על S.

המשמעות של הטיעון האחרון היא ש-F_S, ביחד עם הפונקציה $i : S \to F_S$ יחידים *מכל בחינה מעשית*. משום כך, נהוג לפעמים *להגדיר* את F_S בתור המונואיד היחיד (מכל בחינה מעשית) בעל התכונות בטענה. מונואיד זה נקרא *המונואיד החפשי* על קבוצת היוצרים S.

המונואיד החפשי

נשים לב שהוכחת היחידות לעיל לא השתמשה בשום דרך באופן בניית המונואיד F_S (עליו לא אמרנו דבר עד כה), אלא היא *מסקנה פורמלית* של הטענה. בפרט, אותה הוכחה מראה ש-A_S

מונואיד החילופי החפשי
אובייקט אוניברסלי

יחיד, ושוב משתמשים בתכונה זו כדי *להגדיר* את A_S *כמונואיד החילופי החפשי* שנוצר על-ידי S. אומרים גם ש-F_S *אובייקט אוניברסלי* בין המונואידים עם פונקציה מ-S. בהמשך נציג שפה בה ניתן לדבר על תכונות כאלה בצורה יותר מדויקת. בינתיים נדגיש שוב, שרוב התכונות המעניינות של F_S מגיעות מהטענה שמגדירה אותו, ולא מהבנייה הספציפית בה משתמשים כדי להראות שהוא קיים. למשל:

תרגיל 1.7.2. הוכיחו שהפונקציה $i : S \to F_S$ המופיעה בטענה 1.7.1 היא חד-חד-ערכית

בגלל התרגיל הזה (ודומים לו בהמשך) נתייחס לרוב אל S כאל תת-קבוצה של F_S או M_S. תרגיל נוסף שיהיה שימושי בהמשך, הוא שניתן לתאר את המונואיד החילופי החופשי גם במשפחת כלל המונואידים:

תרגיל 1.7.3. נניח שנתונה פונקציה $f : S \to M$, כאשר S קבוצה ו-M מונואיד, כך שלכל $s, t \in S$ מתקיים $f(s)f(t) = f(t)f(s)$. הוכיחו שקיימת העתקה יחידה מ-A_S (המונואיד החילופי החופשי על S) ל-M, שצמצומה ל-S הוא f.

קבוצת המלים

לגבי ההוכחה של טענה 1.7.1, נזכיר רק שהמונואיד החפשי F_S נקרא גם *קבוצת המלים מעל* S: מילה מעל S היא סדרה סופית של איברים של S. בהנתן שתי סדרות כאלה, המכפלה ביניהן נתונה על-ידי שרשור, כלומר הוספת הסדרה השניה אחרי הראשונה. הפונקציה $i : S \to F_S$ שולחת כל איבר של S למילה באורך 1 שמורכבת מהאיבר הזה. נשאיר בתור תרגיל את הבדיקה שמונואיד זה אכן מקיים את התכונות הנדרשות. לגבי A_S, הבנייה דומה להוכחה של הטענה הבאה:

טענה 1.7.4. *יהי A חוג, ותהי S קבוצה. אז קיים מודול M_S מעל A, ופונקציה $i : S \to M_S$, כך שלכל מודול N מעל A, עם פונקציה $j : S \to N$ קיימת העתקה יחידה $a : M_S \to N$ עבורה $a \circ i = j$:*

$$\begin{tikzcd} & M_S \arrow[dd, dashed, "!a"] \\ S \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & \\ & N \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

המודול החפשי
תומך

במילים אחרות, כל פונקציה מ-S ל-N ניתן להרחיב באופן יחיד להעתקה של מודולים מ-M_S ל-N (באופן שתואם את ההעתקות מ-S). המודול M_S שוב נקבע על-ידי התכונה הזו עד כדי איזומורפיזם יחיד, והוא נקרא *המודול החפשי* על היוצרים S (מעל החוג A). על מנת להוכיח את הטענה, נשתמש בהגדרה הבאה: אם $f : U \to A$ פונקציה מקבוצה U לחבורה חילופית A, *התומך* של f הוא הקבוצה $\mathrm{supp}(f) = \{u \in U \mid f(u) \neq 0\}$. בפרט, פונקציה עם תומך סופי היא פונקציה עבורה התומך הוא קבוצה סופית.

הוכחת טענה 1.7.4. הקבוצה A^S של כל הפונקציות מ-S ל-A היא מודול מעל A, עם חיבור וכפל בסקלר של פונקציות. נגדיר את M_S להיות תת-הקבוצה של A^S המורכבת מפונקציות עם תומך

סופי. קבוצה זו סגורה תחת חיבור וכפל באיברי A, ולכן היא תת-מודול. נגדיר $i:S\to M_S$ על-ידי: $i(s)(t)=\begin{cases}1 & s=t\\ 0 & s\neq t\end{cases}$ (כלומר, $i(s)$ היא הפונקציה המציינת של s).

אם $j:S\to N$ היא פונקציה למודול כלשהו N מעל A, נגדיר $a:M_S\to N$ על-ידי $a(f)=\sum_{s\in S}f(s)\cdot j(s)$. הסכום מוגדר היטב משום שהתומך של f סופי. הבדיקה ש-a העתקה של מודולים היא מיידית, וכן העובדה ש-$a\circ i=j$. היחידות של a נובעת מכך שהתמונה של i יוצרת את M_S. $\square$

נשים לב שבמקרה ש-S סופית, $M_S=A^S$, אבל באופן כללי הם שונים. במקרה ש-A שדה, כל מודול (כלומר מרחב וקטורי) מעל A הוא חופשי, אבל בכלל זה לא המצב:

תרגיל 1.7.5. 1. הוכיחו שאם V מרחב וקטורי מעל שדה k, ו-S בסיס של V, אז V איזומורפי למודול החופשי על S.

2. נניח ש-$A=k[x]$, ו-$M=\delta_7$ הוא המודול מעל A שמורכב מפונקציות שנתמכות על 7. הוכיחו ש-M אינו מודול חופשי מעל A (על שום קבוצה)

רמז: מה קורה לאיבר של δ_7 כאשר כופלים אותו ב-$x-7$?

אנחנו כמעט מוכנים להוכיח את טענה 1.3.6. הדבר היחיד שחסר לנו הוא *ההגדרה* של אלגברת הפולינומים. אבל ראינו כבר שהתכונה בטענה 1.3.6 קובעת את האלגברה הזו (עד כדי איזומורפיזם יחיד). לכן כל מה שצריך לעשות זה להוכיח קיום של אלגברה עם התכונות הללו, ואז ניתן לקחת את זה כהגדרה.

טענה 1.7.6. *יהי A חוג, ותהא S קבוצה כלשהי. אז קיימת אלגברה $A[S]$ מעל A, ופונקציה $i:S\to A[S]$ שהיא אוניברסלית עם התכונות הללו: לכל אלגברה B מעל A ופונקציה $j:S\to B$ קיימת העתקה יחידה $f:A[S]\to B$ (של אלגברות מעל A) כך ש-$f\circ i=j$.*

כמו במקרים הקודמים, האלגברה $A[S]$ היא יחידה, ונקראת אלגברת הפולינומים במשתנים S מעל A. הטענה היא מסקנה של הטענות הקודמות:

הוכחה. נסמן ב-T את המונואיד החילופי החופשי על S, כפי שמובטח בטענה 1.7.1. איברי T נקראים *המונומים* ב-S. את הפעולה על T נסמן ב-$\cdot$, וכאמור, אנחנו חושבים על S כתת-קבוצה של T. מונומים

נגדיר את $A[S]$ כמודול מעל A להיות המודול החפשי על T. עלינו להגדיר את פעולת הכפל על $A[S]$, והעתקה של חוגים מ-A ל-$A[S]$ (באופן שתואם את מבנה המודול). לכל $t\in T$, נסמן ב-$m_t:T\to A[S]$ את הפונקציה הנתונה על-ידי הכפל ב-t, כלומר $m_t(u)=t\cdot u\in T\subseteq A[S]$. לפי הגדרת המודול החופשי, ניתן להרחיב פונקציה זו באופן יחיד להעתקה של מודולים $m_t:A[S]\to A[S]$ (הכפלה במונום t).

נתבונן כעת בקבוצת כל ההעתקות $\mathrm{End}_A(A[S])=\mathrm{Hom}_A(A[S],A[S])$ של $A[S]$ אל עצמו, כמודול מעל A. ראינו בתרגיל 1.6.5 שלקבוצה זו יש מבנה טבעי של מודול מעל A. הגדרנו לעיל, לכל איבר $t\in T$ איבר m_t של $\mathrm{End}_A(A[S])$. במילים אחרות, קיבלנו פונקציה

$m : T \to \mathrm{End}_A(A[S])$, הנתונה על ידי $m(t) = m_t$. לכן, שוב לפי התכונה האוניברסלית, ל-m יש הרחבה יחידה להעתקה $m : A[S] \to \mathrm{End}_A(A[S])$, של מודולים מעל A. נגדיר פעולה $\cdot : A[S] \times A[S] \to A[S]$ על-ידי: $a \cdot b = m(a)(b)$.

עלינו להוכיח שפעולה זו הופכת את $A[S]$ לחוג. רוב התנאים נובעים ישירות מהבניה. נוכיח את הקיבוציות והחילופיות של $\cdot$. לכל $a \in A[S]$ נסמן ב-$u_a : A[S] \to \mathrm{End}_A(A[S])$ את ההעתקה $u_a(b) = m_{ab}$ וב-$v_a : A[S] \to \mathrm{End}_A(A[S])$ את $v_a(b) = m_a \circ m_b$. עלינו להראות ש-$u_a = v_a$ ולשם כך, לפי האוניברסליות, מספיק להראות זאת עבור $b \in T$. נניח ראשית ש-a גם הוא ב-T. אז יש להוכיח ש-$m_{ab} = m_a \circ m_b$ לכל $a, b \in T$, וזו פשוט הטענה שכפל במונואיד T הוא קיבוצי (ליתר דיוק, זה עבור הצמצום של הפונקציות הללו ל-T, ואז זה שוב נובע מהיחידות).

הוכחנו כעת שלכל $a \in T$, הפונקציות u_a ו-v_a שוות. אולם הפונקציות $a \mapsto u_a$ ו-$a \mapsto v_a$ הן פונקציות של מודולים מעל A, ולכן, שוב לפי היחידות בתנאי האוניברסליות, $u_a = v_a$. זה מוכיח שהפעולה $\cdot$ היא קיבוצית. את החילופיות מוכיחים באופן דומה, על ידי בחינת הפונקציות m_a והפונקציה n_a המוגדרת כמו m_a אבל עבור כפל מימין. איבר היחידה $1 \in T$ הוא גם איבר היחידה של $A[S]$, וההעתקה מ-A ל-$A[S]$ נתונה על-ידי $a \mapsto a \cdot 1$.

בנינו את האלגברה $A[S]$, ונותר רק להראות שהיא מקיימת את תנאי האוניברסליות. ראשית, $S \subseteq T \subseteq A[S]$. נניח שנתונה אלגברה B ופונקציה $j : S \to B$. לפי תנאי האוניברסליות של T, ניתן להרחיב את j באופן יחיד להעתקה כפלית $j' : T \to B$, ולפי האוניברסליות של המודול החופשי, ניתן להרחיב את j' באופן יחיד להעתקה $a : A[S] \to B$ של מודולים מעל A. העובדה ש-a העתקה של אלגברות (כלומר, שומרת על מבנה הכפל) נובעת מכך ש-j' כפלית, באופן דומה להוכחות לעיל. $\square$

תרגיל 1.7.7. השלימו את הפרטים בהוכחה

כמו במקרה של מונואידים (תרגיל 1.7.3), מעניין לצאת קצת מהעולם החילופי

תרגיל 1.7.8. נניח ש-S קבוצה, $f : S \to B$ פונקציה לחוג לא בהכרח חילופי B, ו-$u : A \to B$ העתקה מחוג (חילופי) A, כך ש-$u(a)f(s) = f(s)u(a)$ ו-$f(s)f(t) = f(t)f(s)$ לכל $s, t \in S$ ו-$a \in A$.

הוכיחו שקיימת העתקה יחידה מ-$A[S]$ ל-B שהצמצום שלה ל-A הוא u, והצמצום שלה ל-S הוא f. הסיקו שמודול מעל $A[S]$ הוא מודול M מעל A, ביחד עם העתקות מתחלפות $T_s : M \to M$ של מודולים מעל A, אחת לכל $s \in S$ (השוו לדוגמא 1.6.6)

סוף הרצאה 3, 19 במרץ

נעבור כעת לסוג נוסף של אובייקטים אוניברסליים, במטרה להוכית את 1.4.5. נתחיל, כמו קודם, בניסוח מחדש של טענה על קבוצות. אם $f : A \to B$ פונקציה בין קבוצות, היחס $\sim_f$ על A המוגדר על-ידי $a \sim_f b$ אם $f(a) = f(b)$ הוא יחס שקילות, שנקרא הגרעין של f. מסתבר שכל יחס שקילות הוא גרעין:

טענה 1.7.9. *נניח ש-$\sim$ יחס שקילות על קבוצה A. אז קיימת קבוצה $A/\sim$ ופונקציה $\pi : A \to A/\sim$ כך ש:*

1. *לכל $a, b \in A$, אם $a \sim b$ אז $\pi(a) = \pi(b)$*
2. *אם $g : A \to B$ פונקציה כלשהי עם התכונה הנ"ל, אז יש פונקציה יחידה $h : A/\sim \to B$, כך ש-$h \circ \pi = g$*

הפונקציה π נקראת *העתקת המנה.* בלי להזכיר את ההוכחה של הטענה הזו (כלומר, בלי לבנות במפורש את ${}^{A}/_{\sim}$) הוכיחו: העתקת המנה

תרגיל 1.7.10. נניח ש-E יחס שקילות על קבוצה A, עם העתקת מנה $\pi : A \to {}^{A}/_{\sim}$.

1. אם $p : A \to Q$ העתקה נוספת עם אותן תכונות, אז יש פונקציה יחידה $t : {}^{A}/_{\sim} \to Q$ כך ש-$t \circ \pi = p$

2. לכל $a, b \in A$ מתקיים $\pi(a) = \pi(b)$ אם ורק אם $a \sim b$

3. π היא על

נניח עכשיו ש-M ו-N מודולים מעל חוג A. אם $f : M \to N$ העתקה של מודולים, המידע על יחס השקילות $\sim_f$ מצוי כולו בקבוצה $\mathrm{Ker}(f) = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$: לכל $a, b \in M$ מתקיים $a \sim_f b$ אם ורק אם $a - b \in \mathrm{Ker}(f)$. לכן במקרה הזה, מחליפים את המידע על יחס השקילות בגרעין $\mathrm{Ker}(f)$. הגרעין הזה, כפי שאפשר לבדוק בקלות, הוא תת-מודול של M. אילו תתי מודולים מופיעים כגרעינים של העתקות כאלה?

טענה 1.7.11. *נניח ש-M מודול מעל חוג A, ו-$N \subseteq M$ תת-מודול. אז קיים מודול ${}^{M}/_{N}$ והעתקה של מודולים $\pi : M \to {}^{M}/_{N}$ כך ש:*

1. *$\pi(n) = 0$ לכל $n \in N$*

2. *אם $g : M \to K$ היא העתקה של מודולים מעל A כך ש-$g(n) = 0$ לכל $n \in N$, אז יש העתקה יחידה $h : {}^{M}/_{N} \to K$ כך ש-$g = h \circ \pi$*

יתר על כן, π היא על, ו-$\mathrm{Ker}(\pi) = N$

יתכן שהטענה מוכרת במקרים פרטיים: במקרה ש-A שדה, היא אומרת שכל תת-מרחב של מרחב וקטורי הוא גרעין של העתקה לינארית. במקרה ש-$A = \mathbb{Z}$, היא אומרת שכל תת-חבורה של חבורה חילופית היא גרעין של העתקה של חבורות (במקרה של חבורות כלליות, קיים תיאור דומה לחבורות נורמליות, אבל הוא אינו מקרה פרטי של הטענה).

ההוכחה של הטענה שוב משתמשת רק בתכונות של המנה ביחס שקילות:

הוכחת טענה 1.7.11. נגדיר ${}^{M}/_{N} = {}^{M}/_{\sim}$, כאשר $\sim$ יחס השקילות הנתון על-ידי $x \sim y$ אם $x - y \in N$, ותהי π העתקת המנה. עלינו להגדיר פעולות חיבור וכפל בסקלר על המנה.

לכל $m \in M$, נסמן ב-$a_m : M \to M$ את הפונקציה $a_m(k) = m + k$, ונסמן $b_m = \pi \circ a_m : M \to {}^{M}/_{N}$. אם $x \sim y$, אז $a_m(x) - a_m(y) = m + x - (m + y) = x - y \in N$, ולכן $b_m(x) = b_m(y)$. לפי התכונה האוניברסלית של המנה, קיבלנו פונקציה $c_m : {}^{M}/_{N} \to {}^{M}/_{N}$.

קיבלנו, לכל $m \in M$, פונקציה c_m, ולכן פונקציה $c : M \to {}^{M}/_{N}{}^{{}^{M}/_{N}}$, הנתונה על-ידי $c(m) = c_m$. אם $n \sim m$, אז $a_n - a_m$ היא פונקציה קבועה, עם ערך ב-N, ולכן $b_n = b_m$ ו-$c_n = c_m$. על-כן, הפונקציה c קובעת פונקציה $d : {}^{M}/_{N} \to {}^{M}/_{N}{}^{{}^{M}/_{N}}$, ואנחנו מגדירים $x + y = d(x)(y)$ על המנה. ההוכחה שפעולה זו מקיימת את התנאים של חבורה חילופית דומה

להוכחת טענה 1.7.6, ותישאר כתרגיל. העובדה ש-π העתקה של חבורות על המבנה הזה, ושהיא מקיימת את תנאי האוניברסליות (עבור חבורות) תישאר גם היא תרגיל.

באופן דומה, כדי להגדיר את פעולה הכפל בסקלר $a \in A$, נתבונן בפונקציה $t_a : M \to M$ הנתונה על-ידי הכפלה ב-a. זו העתקה של חבורות, ובגלל ש-N תת-מודול, $t_a(N) \subseteq N$. בגלל התכונה האוניברסלית (עבור תת-החבורה N של M), נקבל העתקה $r_a : {}^{M}/{}_{N} \to {}^{M}/{}_{N}$. נגדיר את הפעולה של A על ${}^{M}/{}_{N}$ על ידי $ax = r_a(x)$. שוב, העובדות שזה נותן מבנה של מודול מעל A, שההעתקה π היא העתקה של מודולים ושהתכונה האוניברסלית מתקיימת תישאר כתרגיל.

הטענה האחרונה נובעת מכך שהקבוצה ${}^{M}/{}_{N}$ וההעתקה π הן מנה ביחס שקילות, ולכן מתרגיל 1.7.10 $\square$

תרגיל 1.7.12. השלימו את הפרטים בהוכחה

נציין שהמשפט האחרון בטענה נותן אפיון חלופי להעתקת המנה:

תרגיל 1.7.13. הוכיחו שאם $f : M \to K$ היא העתקה של מודולים מעל חוג A שהיא על, והגרעין של f הוא 0, אז f איזומורפיזם (כלומר, יש לה הפכי דו-צדדי שהיא העתקה של מודולים).

הסיקו שאם $N \subseteq M$, ו-$g : M \to K$ היא העתקה על שהגרעין שלה הוא N, אז $\langle K, g\rangle$ העתקת מנה (כלומר, יש איזומורפיזם יחיד $h : M/N \to K$ המקיים $g = h \circ \pi$)

לא עשינו שום שימוש בבנייה של קבוצת המנה, מעבר לעצם קיומה. במקרה ש-A שדה (ולכן M מרחב וקטורי, עם תת-מרחב N) נתאר עכשיו בנייה שונה של קבוצת המנה. כפי שראינו, שני המרחבים יהיו איזומורפיים באופן יחיד, ואופן בנייתם לחלוטין לא רלוונטי.

נזכיר שאם M מרחב וקטורי מעל שדה A, *המרחב הדואלי* $\check{M}$ של M הוא המרחב $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ של העתקות לינאריות מ-M לשדה (פונקציונלים לינאריים). ישנה העתקה טבעית t ממרחב M לדואלי הכפול $\check{\check{M}}$, שנתונה על ידי $t(m)(f) = f(m)$ עבור $m \in M$ ו-$f \in \check{M}$. המרחב הדואלי

אם $N \subseteq M$ תת-מרחב לינארי, ישנה העתקה טבעית מ-$\check{M}$ ל-$\check{N}$, שנתונה על-ידי צמצום. נסמן ב-K את הגרעין של ההעתקה הזו. מאותו שיקול, ישנה העתקת צמצום $\check{\check{M}} \to \check{K}$. נסמן ב-$\pi : M \to \check{K}$ את ההרכבה של העתקה זו עם ההעתקה t של M לדואלי הכפול שהוגדרה לעיל.

תרגיל 1.7.14. הוכיחו שהגרעין של $\pi : M \to \check{K}$ הוא N. לכן, התמונה של π בתוך $\check{K}$ (ביחד עם ההעתקה π) איזומורפית ל-${}^{M}/{}_{N}$. מה משתבש אם A אינו שדה?

חזרה לענייננו, כמעט השלמנו את הוכחת טענה 1.4.5: ראינו כבר שאידיאל I בחוג A הוא פשוט תת-מודול, ולכן הטענה האחרונה נותנת העתקה על מ-A ל-${}^{A}/{}_{I}$, של מודולים מעל A. כדי להשלים את ההוכחה, צריך להגדיר את המבנה הכפלי על ${}^{A}/{}_{I}$. נשאיר זאת כתרגיל:

תרגיל 1.7.15. הוכיחו שאם A חוג ו-$f : A \to M$ העתקה על של מודולים מעל A, אז קיימת פעולה יחידה $\cdot$ על M, כך ש-M חוג ו-f העתקה של חוגים.

2 תחומי שלמות ואידיאלים ראשוניים

2.1 תחומי שלמות

הגדרה 2.1.1. איבר a של חוג A נקרא *מחלק אפס* אם $ab = 0$ עבור איבר $b \neq 0$ של A. איבר מחלק אפס

איבר רגולרי
$a \neq 0$ שאינו מחלק אפס נקרא *איבר רגולרי*.

תחום שלמות
תחום
חוג שונה מ-0 ללא מחלקי אפס שונים מ-0 נקרא *תחום שלמות* (או לפעמים פשוט *תחום*)

שדות, והחוגים $\mathbb{Z}$ ו-$k[x]$ הם תחומי שלמות.

תרגיל 2.1.2. הוכיחו שאם A תחום שלמות אז גם $A[x]$ תחום שלמות

בתרגיל 1.4.9 ראינו דוגמא לחוג שאינו תחום שלמות. ראינו שם גם שחוג זה אינו תת-חוג של שדה. באופן יותר כללי:

תרגיל 2.1.3. תת-חוג שונה מ-0 של תחום שלמות הוא תחום שלמות

איבר פיתול
תרגיל 2.1.4. נניח ש-M מודול מעל חוג A. איבר $m \in M$ נקרא מחלק אפס אם יש $a \neq 0$ ב-A עבורו $am = 0$, והוא נקרא *איבר פיתול* אם יש איבר רגולרי $a \in A$ עבורו $am = 0$. הוכיחו שתת-הקבוצה $\mathrm{Tor}(M)$ של איברי הפיתול ב-M היא תת-מודול, אבל קבוצת מחלקי האפס לא בהכרח.

מתרגיל 2.1.2 נובע באינדוקציה שחוגי פולינומים במספר סופי של משתנים מעל תחום שלמות הוא תחום שלמות. כדי להכליל לקבוצה כלשהי של משתנים, נוח להגדיר את המושג הבא:

איחוד מכוון
הגדרה 2.1.5. קבוצה S היא *איחוד מכוון* של אוסף קבוצות C אם $S = \bigcup C$, ולכל $x, y \in C$ יש $z \in C$ כך ש-$x, y \subseteq z$.

לדוגמא, כל קבוצה היא איחוד מכוון של תתי-הקבוצות הסופיות שלה.

תרגיל 2.1.6. הוכיחו שאיחוד מכוון של תחומי שלמות הוא תחום שלמות, כלומר: אם C אוסף של תתי-חוגים של חוג A, כך ש-A איחוד מכוון של C, וכל איבר של C הוא תחום שלמות, אז גם A תחום שלמות. הסיקו שחוג הפולינומים בקבוצה כלשהי של משתנים מעל תחום שלמות הוא תחום שלמות.

הנה דוגמא "קיצונית" של חוגים שאינם תחומי שלמות:

תרגיל 2.1.7. הוכיחו שאם A, B חוגים שונים מ-0, אז $A \times B$ אינו תחום שלמות (הפעולות על $A \times B$ מוגדרות בנפרד על כל רכיב)

נניח ש-$\mathbf{X} = \langle X, A \rangle$ יריעה אפינית מעל שדה k. מה המשמעות הגאומטרית של הטענה ש-A תחום שלמות? נניח ש-$a, b \in A$. אם $ab(x) = a(x)b(x) = 0$, אז (בגלל ש-k שדה) $a(x) = 0$ או $b(x) = 0$. לכן, $\mathrm{Z}(ab) = \mathrm{Z}(a) \cup \mathrm{Z}(b)$. בפרט, אם $ab = 0$ אז $X = \mathrm{Z}(a) \cup \mathrm{Z}(b)$. מאידך, אם $a \neq 0$ אז $\mathrm{Z}(a) \neq X$ ובדומה עבור b. כלומר, X הוא איחוד של שתי תתי-קבוצות ממש סגורות זריצקי.

יריעה פריקה
יריעה אי-פריקה
הגדרה 2.1.8. יריעה אפינית נקראת *יריעה פריקה* אם היא איחוד של מספר (סופי) שונה מאחד של תתי-קבוצות ממש סגורות זריצקי. אחרת היא נקראת *יריעה אי-פריקה*.

נשים לב שתתי-קבוצות סגורות (במובן הקלאסי) של $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$ הן כמעט תמיד פריקות, שם המושג פחות מעניין. מאידך, הדיון לפני ההגדרה מראה:

טענה 2.1.9. *יריעה $\langle X, A \rangle$ היא אי-פריקה אם ורק אם A תחום שלמות*

הוכחה. נניח ש-$X=Y\cup Z$, כאשר Y,Z תתי-קבוצות ממש, סגורות זריצקי. אז $Y=\mathrm{Z}(I)$ כאשר I אידיאל שונה מ-0. בפרט, יש $a\neq 0$ ב-A שהצמצום שלה ל-Y הוא 0. באופן דומה, יש $b\neq 0$ ב-A שהצמצום שלה ל-Z הוא 0. אז ab היא פונקציית ה-0 על $X=Y\cup Z$, כלומר $ab=0$, ו-A אינו תחום שלמות. הכיוון השני הוסבר בדיון שלפני ההגדרה. □

למשל, בתרגיל 1.4.9 ראינו דוגמא לאלגברת פונקציות שאינה תחום שלמות. הקבוצה המתאימה הייתה איחוד הצירים ב-$\mathbb{R}^2$. כל אחד מהצירים הוא תת-קבוצה סגורה זריצקי, שנתונה על-ידי $x=0$ או $y=0$, והאיחוד שלהם הוא כל הקבוצה. לכן, היריעה הזו פריקה.

2.2 אידיאלים ראשוניים

הגדרה 2.2.1. אידיאל I בחוג A נקרא *אידיאל ראשוני* אם A/I תחום שלמות. I הוא *אידיאל מקסימלי* אם A/I הוא שדה. אידיאל ראשוני
אידיאל מקסימלי

בפרט, A תחום שלמות אם ורק אם 0 אידיאל ראשוני, והוא שדה אם ורק אם 0 אידיאל מקסימלי. מההגדרה של תחום שלמות נובע ש-I ראשוני אם ורק אם הוא אידיאל ממש, ולכל $x,y\in A$, אם $xy\in I$ אז $x\in I$ או $y\in I$. לגבי אידיאלים מקסימליים, השם מוסבר על-ידי הטענה הבאה:

טענה 2.2.2. *יהי A חוג.*

1. *איבר $a\in A$ הוא הפיך אם ורק אם $A=(a)$*
2. *אם M מודול מעל A ו-N תת-מודול עם העתקת מנה $\pi:M\to M/N$, יש התאמה חד-חד-ערכית ועל בין תתי-מודולים של M/N ותתי מודולים של M המכילים את N. ההתאמה מתאימה לתת-מודול $K\subseteq M/N$ את תת-המודול $\pi^{-1}(K)$.*
3. *אידיאל I הוא מקסימלי אם הוא מירבי ביחס להכלה בין האידיאלים ממש של A*

הוכחה. 1. תרגיל

2. אם $N\subseteq L\subseteq M$, אז העתקת המנה מ-M ל-M/L שולחת את N ל-0, ולכן לפי ההגדרה משרה העתקה מ-M/N ל-M/L. הגרעין K של ההעתקה הזו מקיים $\pi^{-1}(K)=L$.
3. ראינו שאידיאל הוא תת-מודול של A כמודול מעל עצמו. לפי הסעיף הקודם, I מירבי להכלה בין האידיאלים ממש אם ורק אם 0 מירבי להכלה בין האידיאלים ממש ב-A/I. לפי הסעיף הראשון, זה קורה אם ורק אם A/I שדה.

□

תרגיל 2.2.3. הוכיחו שאידיאל I הוא ראשוני ב-A אם ורק אם $A\backslash I$ תת-מונואיד כפלי סוף הרצאה 4, 23 במרץ

האנאלוג של תרגיל 2.1.6 בשפה של אידיאלים הוא זה:

תרגיל 2.2.4. נניח ש-C קבוצה לא ריקה של אידיאלים ראשוניים בחוג A, עם התכונה: לכל $I,J\in C$ יש $P\in C$ כך ש-$P\subseteq I\cap J$. הוכיחו ש-$\bigcap C$ אידיאל ראשוני

2.3 קיום של אידיאלים ראשוניים

עד כה לא ראינו שאידיאלים ראשוניים או מקסימליים קיימים. לפי ההגדרה, אידיאל ראשוני הוא אידיאל ממש, ולכן לא יכול לכלול איברים הפיכים. מסתבר, שזו המגבלה היחידה.

טענה 2.3.1. *נניח ש-$S \subseteq A$ תת-מונואיד כפלי של חוג A, ונניח ש-I אידיאל של A שזר ל-S. אז*

1. *קיים אידיאל מירבי מבין אלה שמכילים את I וזרים ל-S*
2. *כל אידיאל כזה הוא ראשוני*

בפרט, כל איבר שאינו הפיך מוכל באידיאל מירבי

הוכחה. 1. נתבונן בקבוצה C של אידיאלים שמכילים את I וזרים ל-S, סדורה תחת הכלה. אם U שרשרת ב-C, אז $I \cup \bigcup U$ חסם של U. לכן, לפי הלמה של צורן ב-C יש איבר מירבי.

2. נניח ש-P מירבי מבין האידיאלים שזרים ל-S, ונניח ש-$B = {}^{A}/_{P}$ אינו תחום שלמות. אז יש $x, y \in B$ שונים מ-0, כך ש-$xy = 0$. נסמן ב-$\pi : A \to B$ את העתקת המנה, ו-$T = \pi(S)$. אז T תת-מונואיד של B, ובגלל ש-S זרה ל-P, מונואיד זה לא כולל את 0.

נניח שקיימים $u, v \in B$ כך ש-$xu, yv \in T$. אז גם $0 = xuyv \in T$, כי T מונואיד, בניגוד להנחה. לכן, לפחות אחד האידיאלים (x) או (y) זר ל-T. נניח בלי הגבלת הכלליות שזה x, ונסמן ב-$\phi : B \to {}^{B}/_{(x)}$ את העתקת המנה. אז הגרעין של $\phi \circ \pi$ מכיל ממש את P וזר ל-S, בסתירה להנחה

המשפט האחרון נובע מכך שקבוצת האיברים ההפיכים היא תת-מונואיד בכל חוג, וכל אידיאל ממש זר לה. □

נניח $\mathbf{X} = \langle X, A \rangle$ יריעה אפינית מעל שדה k. כל נקודה $x \in X$ מתאימה להעתקה מ-A ל-k, ולכן הגרעין שלה אידיאל מקסימלי. לכן לכל נקודה $x \in X$ מתאים אידיאל מקסימלי m_x, וחלק מההגדרה של יריעה אפינית אומר שההתאמה $x \mapsto m_x$ היא חד-חד-ערכית. החלק השני של ההגדרה אומר שכל אידיאל מקסימלי עם מנה k מתקבל באופן הזה. האם אלה כל האידיאלים המקסימליים? לפי הטענה האחרונה, על מנת להראות שהתשובה היא לא, מספיק למצוא איבר $a \in A$ שאין לו אפסים על X, אבל אינו הפיך (במלים אחרות, a הפיך כפונקציה על X, אבל לא כאיבר של A). הנה דוגמא:

דוגמא 2.3.2. האיבר $x^2 + 1$ של $\mathbb{R}[x]$ אינו הפיך, ולכן מוכל באידיאל מירבי m (למעשה, $(m = (x^2 + 1)$). אידיאל זה לא מתאים לאף נקודה בישר האפיני $\mathbb{R}$, משום שלמשוואה $x^2 + 1 = 0$ אין פתרונות ב-$\mathbb{R}$. המנה ${}^{\mathbb{R}[x]}/_{(x^2+1)}$ היא $\mathbb{C}$

המשמעות של הדיון היא שניתן לראות את קבוצת הנקודות X באופן טבעי כתת-קבוצה של קבוצת האידיאלים הראשוניים של A. לכן, אפשר לחשוב על האידיאלים הראשוניים כ"נקודות מוכללות" של $\mathbf{X}$.

ראינו כבר דוגמא ליריעה אפינית שהחוג שלה אינו תחום שלמות. נראה עכשיו דוגמא קצת אחרת:

הגדרה 2.3.3. איבר a של חוג A נקרא *איבר אפיסי* (*איבר נילפוטנטי*) אם $a^n = 0$ עבור n טבעי כלשהו. קבוצת כל האיברים האפיסים ב-A נקראת *השרשון האפיסוני* (*הרדיקל הנילפוטנטי*) של A, ומסומנת ב-$\mathrm{nilrad}(A)$. החוג A נקרא *חוג מצומצם* אם 0 הוא הנילפוטנטי היחיד בו.

איבר אפיסי
איבר נילפוטנטי
השרשון האפיסוני
הרדיקל הנילפוטנטי
חוג מצומצם

תרגיל 2.3.4. הוכיחו שהרדיקל הנילפוטנטי של כל חוג A הוא אידיאל ב-A, שמוכל בכל אידיאל ראשוני של A.

כמובן שכל איבר נילפוטנטי הוא מחלק אפס, וראינו כבר שלא בהכרח להיפך. למעשה:

תרגיל 2.3.5. הוכיחו שאם $\langle X, A\rangle$ יריעה אפינית, אז A חוג מצומצם.

למרות זאת, נראה בהמשך שלחוגים לא מצומצמים יש פירוש גאומטרי מעניין. הכי מוכר (וגם הכי פשוט) נתון בדוגמא הבאה:

דוגמא 2.3.6. יהי k חוג. נסמן $k[\epsilon] = \{a + b\epsilon \mid a, b \in k\}$, עם חיבור בקואורדינטות (כלומר, כמודול $k[\epsilon]$ הוא המודול החופשי מעל k על הקבוצה $\{1, \epsilon\}$), והכפל נקבע על-ידי התנאי $\epsilon^2 = 0$. אז כל איבר מהצורה $a\epsilon$ הוא נילפוטנטי. אם k תחום שלמות, אלה הם מחלקי האפס היחידים בחוג זה. החוג הזה נקרא *חוג המספרים הדואליים* מעל k.

ראינו כבר שהרדיקל מוכל בכל אידיאל ראשוני. טענה 2.3.1 נותנת את הכיוון ההפוך:

טענה 2.3.7. *בכל חוג A, הרדיקל הוא החיתוך של כל האידיאלים הראשוניים*

הוכחה. עלינו להוכיח שאם a אינו נילפוטנטי, אז קיים אידיאל ראשוני שלא כולל את a. ההנחה על a אומרת שתת-המונואיד S שנוצר על-ידי a לא כולל את 0. לפי טענה 2.3.1 עבור S זאת ו-$I = 0$, יש אידיאל ראשוני שזר ל-S. $\square$

נניח ש-$\mathbf{X} = \langle X, A\rangle$ היא יריעה אפינית מעל k. *רכיב אי-פריקות* של $\mathbf{X}$ הוא תת-קבוצה אי-פריקה מירבית (ביחס להכלה). אם $\mathbf{Y} = \langle Y, B\rangle$ תת-קבוצה אי-פריקה של $\mathbf{X}$, יש העתקה r מ-A על B, ו-B תחום שלמות. לכן הגרעין של r הוא אידיאל ראשוני, ואם $\mathbf{Z}$ תת-קבוצה סגורה שמכילה את $\mathbf{Y}$, אז האידיאל שמתאים מוכל באידיאל של $\mathbf{Y}$. לכן, $\mathbf{Y}$ רכיב אי פריקות אם ורק אם האידיאל המתאים ב-A הוא מינימלי בין האידיאלים הראשוניים. לכן הטענה הבאה (שעוסקת בחוגים כלליים) מראה שכל תת-קבוצה אי-פריקה מוכלת ברכיב אי-פריקות.

רכיב אי-פריקות

טענה 2.3.8. *כל אידיאל ראשוני בחוג A מכיל אידיאל ראשוני מינימלי (ביחס להכלה). הרדיקל של A הוא החיתוך של כל האידיאלים הראשוניים המינימליים. חוג מצומצם A הוא תחום שלמות אם ורק אם יש בו בדיוק אידיאל ראשוני מינימלי אחד.*

הוכחה. אם C שרשרת של אידיאלים ראשוניים, היא מקיימת את התנאי בתרגיל 2.2.4. לכן, $\bigcap C$ הוא אידיאל ראשוני, שמהווה חסם תחתון ל-C. לפי הלמה של צורן עבור אוסף האידיאלים הראשוניים שמוכלים באידיאל ראשוני I, יש בתוך I אידיאל ראשוני מינימלי.

הטענה על החיתוך נובעת ישירות מזה ומהטענה הקודמת.

אם ב-A יש אידיאל ראשוני מינימלי יחיד, אז הוא שווה לרדיקל לפי הטענה האחרונה, ששווה ל-0 כי A חוג מצומצם. מאידך, אם יש יותר מאידיאל ראשוני מינימלי אחד, אז 0 אינו אחד מהם. $\square$

מבחינה גאומטרית, נובע מהטענה האחרונה שכל יריעה היא איחוד רכיבי האי-פריקות שלה. בהמשך נראה שיש רק מספר סופי של רכיבים כאלה.

סוף הרצאה 5, 26 במרץ

2.4 מכפלות

ראינו כבר שאם A, B חוגים שונים מ-0, אז $A \times B$ אינו תחום שלמות. עכשיו נראה איך לזהות חוגים כאלה, ונחקור את התכונות שלהם. איבר a של חוג C נקרא *אידמפוטנט* אם $a^2 = a$. נסמן ב-$I(C)$ את המונואיד של האידמפוטנטים ב-C. תת-קבוצה $T \subseteq I(C)$ של אידמפוטנטים נקראת אורתוגונלית אם המכפלה של כל שני איברים בה הוא 0 אם ורק אם הם שונים. אידמפוטנט נקרא פרימיטיבי אם אינו סכום של שני אידמפוטנטים אורתוגונליים. אידמפוטנט

תרגיל 2.4.1. יהי C חוג

1. הוכיחו שאם e אידמפוטנט, אז לקבוצה eC יש מבנה של חוג, כך שהפונקציה $x \mapsto ex$ מ-C ל-eC היא העתקה של חוגים. הוכיחו ש-eC מכפלה של חוגים שונים מ-0 אם ורק אם e אינו פרימיטיבי. בפרט, C מכפלה של חוגים שונים מ-0 אם ורק אם 1 אינו פרימיטיבי

2. נגדיר יחס $\leqslant$ על $I(C)$ על-ידי: $a \leqslant b$ אם $ab = a$. הוכיחו ש-$\leqslant$ יחס סדר (חלקי), בו לכל שני איברים יש מינימום ומקסימום. הוכיחו שאידמפוטנט הוא פרימיטיבי אם ורק אם הוא מינימלי ב-$I(C) \backslash \{0\}$

3. נניח ש-$t : C \to A$ העתקה לתחום שלמות A. נסמן ב-$\mathcal{F}_t \subseteq I(C)$ את הקבוצה $t^{-1}(1)$. הוכיחו של-$\mathcal{F}_t$ התכונות הבאות:

   - $0 \notin \mathcal{F}_t$
   - אם $a \in \mathcal{F}_t$ ו-$a \leqslant b$ אז גם $b \in \mathcal{F}_t$
   - לכל $a \in I(C)$ מתקיים $a \in \mathcal{F}_t$ או $1 - a \in \mathcal{F}_t$

   (קבוצה עם התכונות הללו נקראת *על-מסנן*)

4. נניח ש-$C = \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ (כאשר $\mathbb{F}_2$ השדה עם שני איברים). מיצאו את האיברים האידמפוטנטים. נסמן ב-D את תת-החוג שנוצר על-ידי $I(C)$. הוכיחו ש-D תת-חוג ממש של C, אבל $I(D) = I(C)$.

תרגיל 2.4.2. נניח ש-$\mathbf{X} = \langle X, A\rangle$ ו-$\mathbf{Y} = \langle Y, B\rangle$ יריעות אפיניות, ונסמן ב-Z את האיחוד הזר $X \coprod Y$ של X ו-Y. הוכיחו שעל Z יש מבנה טבעי של יריעה אפינית עם חוג פונקציות $A \times B$

נניח שב-A מספר סופי של ראשוניים מינימליים, $I_1, \dots, I_m$. העתקות המנה השונות נותנות העתקה של חוגים $t : A \to {}^{A}/_{I_1} \times \dots \times {}^{A}/_{I_m}$, כאשר כל אחד מהגורמים תחום שלמות, טענה 2.3.7 אומרת שהגרעין שלה הוא הרדיקל של A. בפרט, אם A חוג מצומצם, זהו שיכון. במקרה ש-A חוג הפונקציות על של $\mathbf{X}$ (בפרט, A מצומצם, ונראה בהמשך שיש רק מספר סופי של ראשוניים מינימליים), ראינו שהאידיאלים המינימליים מתאימים לרכיבי אי פריקות, וראינו בתרגיל האחרון שמכפלה קרטזית מתאימה לאיחוד זר. לכן, בצד ימין של ההעתקה הזו מופיעה אלגברת הפונקציות על האיחוד הזר של רכיבי אי-הפריקות של $\mathbf{X}$. ההעתקת החוגים מתאימה להעתקה הטבעית מהאיחוד הזר של הרכיבים לאיחוד, שהוא $\mathbf{X}$.

יש גם גרסה "משוכנת" של המכפלה, שידועה תחת השם *משפט השאריות הסיני*:

טענה 2.4.3 (משפט השאריות הסיני). *נניח ש-A חוג, ו-$I_1,\dots,I_m$ אידיאלים, כך שלכל $k \neq j$, $I_k + I_j = A$. אז $I_1 \cdot \dots \cdot I_m = I_1 \cap \dots \cap I_m$ וההעתקה*

$$A/_{I_1 \dots I_m} \to A/_{I_1} \times \dots \times A/_{I_m}$$

היא איזומורפיזם

נשים לב שככלל, לכל שני אידיאלים I, J מתקיים $IJ \subseteq I \cap J$, אבל לא בהכרח יש שוויון (למשל, קל למצוא דוגמא בה $I = J$).

הוכחה. נוכיח ראשית עבור שני אידיאלים שנסמן ב-I, J, עם העתקות $p : A \to A/_I$ ו-$q : A \to A/_J$. כיוון ש-$I + J = A$, יש $a \in I$ ו-$b \in J$ כך ש-$a + b = 1$. אם $x \in I \cap J$, אז $x = 1 \cdot x = (a+b)x = ax + bx \in IJ$ שכן $ax, bx \in IJ$. זה מוכיח את הטענה הראשונה, ולכן נשאר להראות ש-$A/_{I \cap J} \to A/_I \times A/_J$ איזומורפיזם.

החד-חד-ערכיות של ההעתקה נובעת ישירות מההגדרה. כדי להראות שההעתקה היא על, נבחר נקודות $u \in A/_I$ ו-$v \in A/_J$. נבחר איברים $c, d \in A$ כך ש-$p(c) = u$ ו-$q(d) = v$. לפי ההנחה, יש $e \in I$ ו-$f \in J$ כך ש-$c - d = e + f$. אז $c - e = d + f$, וזה האיבר שאנחנו מחפשים.

למקרה הכללי, נשים לב שאם $I_1 + J = A = I_2 + J$, אז $I_1 I_2 + J = A$. לכן אפשר להמשיך באינדוקציה. $\square$

מבחינה גאומטרית, ההנחה ש-$A = I + J$ אומרת שהקבוצות הסגורות $\mathrm{Z}(I)$ ו-$\mathrm{Z}(J)$ הן זרות (באופן כללי, $\mathrm{Z}(I + J) = \mathrm{Z}(I) \cap \mathrm{Z}(J)$). לכן, הטענה אומרת שבמצב כזה, הן "מספיק רחוקות" אחת מהשניה, כדי שפונקציות על האיחוד הזה הן בדיוק זוגות של פונקציות, אחת על כל חלק באיחוד.

תרגיל 2.4.4. הכלילו חלק מהטענה האחרונה באופן הבא: עבור אידיאלים כלשהם I, J בחוג A, נסמן $B = A/_{I+J}$. אז יש העתקות $p : A/_I \to B$ ו-$q : A/_J \to B$. נסמן

$$C = A/_I \times_B A/_J = \{\langle u, v\rangle \in A/_I \times A/_J \mid p(u) = q(v)\}$$

הוכיחו שיש איזומורפיזם של חוגים $A/_{I \cap J} \to C$. חישבו על המשמעות הגאומטרית

2.5 דוגמאות

בסעיף זה נחשב את קבוצת האידיאלים הראשוניים של מספר חוגים בסיסיים, ואת חוגי המנה המתאימים. נתחיל מהחוג הבסיסי ביותר, $\mathbb{Z}$.

טענה 2.5.1. *כל אידיאל ב-$\mathbb{Z}$ נוצר על-ידי איבר אחד n. האידיאל ראשוני אם ורק אם n ראשוני (כמספר) או 0.*

הוכחה. נניח ש-I אידיאל שונה מ-0. אז יש בו איבר חיובי קטן ביותר n. אם $m \in I$ מספר חיובי אחר, האלגוריתם של אוקלידס מראה שהמחלק המשותף המקסימלי שלהם נמצא ב-I. זהו מספר חיובי שמחלק את n ולכן שווה ל-n, כלומר, m כפולה של n. לכן n יוצר את I.

אם $n = kl$ פריק, אז המכפלה הזו מראה ש-I אינו ראשוני. אם n ראשוני ו-$kl \in I$, אז n מחלק את kl ולכן (כיוון שהוא ראשוני) מחלק את k או את l. $\square$

ראינו שלכל חוג A יש העתקה יחידה מ-$\mathbb{Z}$. היוצר האי-שלילי של הגרעין של ההעתקה הזו נקרא *המציין של A*.

המציין של A

לחוגים עם התכונה הזו יש שם:

הגדרה 2.5.2. תחום שלמות בו כל אידיאל נוצר על-ידי איבר אחד נקרא *תחום ראשי*

תחום ראשי

יתר הדוגמאות יהיו מהצורה $A[x]$, עבור מספר חוגים A. הדוגמאות בהן A שדה מהוות גם הן תחומים ראשיים:

טענה 2.5.3. *לכל שדה k, חוג הפולינומים $k[x]$ הוא תחום ראשי. האידיאל שנוצר על-ידי פולינום $p(x)$ הוא ראשוני אם ורק אם $p(x)$ אי פריק (או 0).*

תרגיל 2.5.4. הוכיחו את טענה 2.5.3

ניתן להכליל את הטענה לכל חוג שיש בו חילוק עם שארית. זה לא לגמרי ברור איך להגדיר "חילוק עם שארית" באופן כללי. הנה הגדרה אחת:

הגדרה 2.5.5. *תחום אוקלידי* הוא תחום A שיש עליו פונקציה $\alpha : A\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ כך שלכל $a, b \in A$ עם $b \neq 0$ קיימים $q, r \in A$ כך ש-$a = bq + r$, ואם $r \neq 0$ אז $\alpha(r) < \alpha(b)$. הפונקציה α נקראת *פונקציה אוקלידית* במקרה הזה.

תחום אוקלידי

פונקציה אוקלידית

נשים לב שהפונקציה α אינה חלק מהמבנה, ואינה נקבעת ביחידות, רק הקיום שלה נדרש.

דוגמא 2.5.6. החוגים הבאים הם תחומים אוקלידיים:

1. $\mathbb{Z}$ עם הערך המוחלט
2. $k[x]$ עם פונקציית הדרגה
3. $\mathbb{Z}[i]$, עם הערך המוחלט מצומצם מהמרוכבים: בהנתן a, b, אנחנו מחפשים q, r כך ש-$a = bq + r$, ו-$|r| < |b|$. אחרי חלוקה ב-b, אנחנו מחפשים $q \in \mathbb{Z}[i]$ כך ש-$|\frac{a}{b} - q| < 1$. במילים אחרות, אנחנו מחפשים נקודה עם קואורדינטות שלמות בתוך עיגול היחידה הפתוח סביב $\frac{a}{b}$. זה נכון לכל נקודה מרוכבת.

באופן דומה אפשר לטפל בתתי-חוגים נוספים של $\mathbb{C}$.

תרגיל 2.5.7. יהי A תת-החוג של $\mathbb{C}$ שנוצר על-ידי α, כאשר $\alpha^3 = 1$ (ו-$\alpha \neq 1$). הוכיחו שהערך המוחלט מראה ש-A תחום אוקלידי

טענה 2.5.8. *כל תחום אוקלידי הוא תחום ראשי*

הוכחה. נניח ש-I אידיאל שונה מ-0 בתחום A עם פונקציה α. קיים $b \in I$ עבורו $\alpha(b)$ מינימלי. עבור $a \in I$, יש $q, r \in A$, כך ש-$a = bq + r$, כלומר $r = a - bq \in I$. אם $r \neq 0$ אז $\alpha(r) < \alpha(b)$, בסתירה למינימליות. לכן $r = 0$, ו-$a \in (b)$. □

חילוק עם שארית בשלמים ובפולינומים מאפשר לחשב מחלק משותף מירבי. למעשה, הם קיימים בכל חוג ראשי: אם $a,b\in A$, האידיאל שנוצר על-ידם הוא נוצר על-ידי איבר אחד c. אז c מחלק את a ואת b, ויש $x,y\in A$ כך ש-$c=ax+by$. אם d איבר נוסף שמחלק את a ואת b, אז הוא מחלק את $c=ax+by$. לכן c מחלק משותף מירבי. סוף הרצאה 6, 30 במרץ

פונקציות אוקלידיות הן דרך זולה להוכיח שתחום הוא ראשי, אבל היא לא תמיד אפשרית: ישנם תחומים ראשיים שאינם אוקלידיים. בסדרת התרגילים הבאה נראה דוגמא לזה. בפרט, נראה דרכים נוספות להוכיח שתחום הוא ראשי.

תרגיל 2.5.9. נניח ש-A חוג סופי, או אלגברה ממימד סופי מעל שדה. הוכיחו ש-A הוא תחום שלמות אם ורק אם הוא שדה.

מסתבר שמספיק לבדוק ראשיות על אידיאלים ראשוניים:

תרגיל 2.5.10. נניח ש-A חוג, ו-C אוסף האידיאלים שאינם נוצרים על-ידי איבר אחד ב-A.

1. הוכיחו שאם C לא ריק אז יש בו איבר מירבי (ביחס להכלה)
2. הוכיחו שכל איבר מירבי כזה הוא ראשוני

בפרט, אם A תחום בו כל אידיאל ראשוני נוצר על-ידי איבר אחד, אז A תחום ראשי.

תרגיל 2.5.11. נניח ש-k שדה ממציין שונה מ-2, ו-$A={}^{k[x,y]}/_{(x^2+y^2+1)}$. נסמן $B=k[x]$, תת-חוג של A. נבחר אידיאל ממש $p\subseteq A$ שונה מ-0, ונסמן $q=B\cap p$.

1. הוכיחו ש-q אידיאל ממש שונה מ-0 ב-B, וש-A תחום שלמות.
2. הוכיחו ש-$L={}^{A}/_{p}$ מרחב וקטורי ממימד סופי מעל k. הסיקו שאם p ראשוני אז L שדה הרחבה ממימד סופי של k, ושאם $k=\mathbb{R}$ אז השדה הזה איזומורפי ל-$\mathbb{C}$.
3. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $k=\mathbb{R}$ ו-p ראשוני, אז הוא נוצר על-ידי איבר מהצורה $ax+by+c$ עבור $a,b,c\in\mathbb{R}$ (רמז: הסתכלו על התמונות של $1,x,y\in A$ ב-L).

הסיקו ש-A תחום ראשי.

הראינו שהחוג A בתרגיל הוא תחום ראשי מבלי להשתמש בפונקציה אוקלידית. כדי להשלים את הדוגמא, צריך להראות שפונקציה כזו אינה קיימת. התרגיל הבא כולל דרך כללית לעשות זאת.

תרגיל 2.5.12.

1. נניח ש-A תחום אוקלידי שאינו שדה, עם פונקציה אוקלידית α, ונניח ש-$a\in A$ איבר מינימלי (ביחס ל-α) מבין האיברים שאינם הפיכים. הוכיחו שלכל $b\in A$ שונה מ-0 קיים $q\in A$ כך ש-$aq-b$ הפיך או 0. הסיקו שהצמצום של ההעתקה הטבעית $t{:}A\to{}^{A}/_{(a)}$ לחבורת האיברים ההפיכים הוא איזומורפיזם (של חבורות האיברים ההפיכים)
2. הוכיחו שבחוג A משאלה 2.5.11 חבורת האיברים ההפיכים היא $\mathbb{R}^\times$. הסיקו ש-A אינו תחום אוקלידי

בתור דוגמאות קצת יותר מורכבות, נסתכל עכשיו על חוגים מהצורה $A[x]$ כאשר A עצמו הוא תחום ראשי. לצורך הדוגמא, נסתכל על המקרים $A=\mathbb{Z}$ או $A=k[t]$ (כאשר k שדה), אבל ניתוח דומה יהיה נכון גם לתחומים ראשיים אחרים.

ראשית, $A[x]$ אינו תחום ראשי: למשל האידיאל (x,y) של כל הפונקציות שמתאפסות בראשית הצירים לא נוצר על-ידי איבר אחד. אילו מהתכונות של תחומים ראשיים עדיין תקפות גם כאן? תכונה אחת שמשותפת לשני החוגים A היא פירוק לגורמים ראשוניים: כל איבר ניתן לכתוב כמכפלה סופית של ראשוניים, באופן יחיד עד כדי הכפלה באיבר הפיך. כדי להבין אם התכונה הזו קיימת בעוד חוגים, צריך קודם כל להבין מהם ראשוניים. מסתבר שיש שתי אפשרויות:

איבר פריק

איבר אי-פריק

איבר ראשוני

הגדרה 2.5.13. איבר $a\in A$ נקרא *איבר פריק* אם ניתן לכתוב אותו כמכפלה $a=bc$ כאשר b,c אינם הפיכים. הוא נקרא *איבר אי-פריק* אם אינו פריק ואינו הפיך.

הוא נקרא *איבר ראשוני* אם האידיאל שנוצר על-ידו הוא ראשוני.

בחוגים $\mathbb{Z}$ ו-$k[t]$ שתי ההגדרות הללו מתארות אותם איברים. ככלל, כל איבר ראשוני הוא בבירור אי-פריק, אבל הכיוון השני לא בהכרח נכון:

דוגמא 2.5.14. בחוג $D=\mathbb{C}[x,y,z]/z^2-xy$, האידיאל שנוצר על-ידי z אינו ראשוני, אבל x,y,z הם אי-פריקים: לכל איבר f ב-D הצגה יחידה בצורה $p+qz$, כאשר $p,q\in\mathbb{C}[x,y]$. נסמן ב-$d(f)$ את הדרגה (הכוללת) של הפולינום מהצורה הזו שמייצג את f. אז d הומומורפיזם מהמונואיד הכפלי $D\backslash\{0\}$ ל-$\mathbb{N}$, ו-$d(f)=0$ אם ורק אם f הפיך. כיוון ש-$d(x)=d(y)=d(z)=1$, הם כולם אי-פריקים.

נשים לב שחוג זה אינו תחום ראשי: האידיאל (x,y) לא נוצר על-ידי איבר אחד.

ההערה בדוגמא האחרונה אינה מקרית:

טענה 2.5.15. *בכל תחום ראשי, כל איבר אי-פריק הוא ראשוני*

הוכחה. נניח ש-a אי-פריק, ו-$bc\in(a)$. נניח ש-$b\notin(a)$. האידיאל (a,b) נוצר על-ידי איבר יחיד d. כיוון ש-a אי-פריק, $d=ua$ כאשר u הפיך, או ש-d עצמו הפיך. אבל המקרה הראשון לא יתכן, כי $b\in(d)$ אבל לא ב-(a). אז קיימים u,v כך ש-$ua+vb=1$. לכן $c=c(ua+vb)=cua+cvb$ וסכום זה מתחלק ב-a. $\square$

הדוגמא לעיל מראה שבחוג בו שתי ההגדרות לא מתלכדות, ההצגה של איבר כמכפלה של אי-פריקים אינה יחידה. לכן, אם רוצים לקבל תורת פירוק כמו בתחומים ראשיים, סביר לדרוש שההגדרות יתלכדו. החלק השני הוא לדרוש קיום:

תחום פריקות יחידה

הגדרה 2.5.16. תחום A נקרא *תחום פריקות יחידה* אם כל איבר בו הוא מכפלה סופית של איברים אי-פריקים, וכל איבר אי-פריק הוא ראשוני

ראינו כבר דוגמא לאיבר אי-פריק שאינו ראשוני. בהמשך נראה דוגמאות לחוגים (שאינם שדות) שאין בהם איברים אי-פריקים שונים מ-0, אז התנאי הראשון הוא לא ריק. השם נובע מכך שכמו בחוגים $\mathbb{Z}$ ו-$k[t]$, הפירוק לגורמים ראשוניים הוא יחיד:

טענה 2.5.17. *אם A תחום פריקות יחידה, אז כל איבר שונה מ-0 ניתן להציג כמכפלה סופית $ap_1^{n_1}\dots p_m^{n_m}$, כאשר a הפיך וה-p_i אי-פריקים זרים, וההצגה יחידה עד-כדי כפל באיברים הפיכים.*

הוכחה. הקיום הוא חלק מההגדרה. נניח $p_1^{k_1}\cdots p_n^{k_n} = q_1^{l_1}\cdots q_m^{l_m}$ עבור אי-פריקים זרים בזוגות p_i ו-q_j. אפשר להניח שכל q_i זר לכל p_j משום ש-A תחום שלמות, ואפשר להניח ש-m מינימלי. לפי ההנחה, האידיאל (p_1) הוא ראשוני, ולכן מכפלה של תת-קבוצה ממש של ה-q_i שייכת אליו. זה מהווה סתירה למינימליות של m. $\square$

ראינו כבר שבכל תחום ראשי, אי-פריקים וראשוניים מתלכדים. למעשה:

טענה 2.5.18. *כל תחום ראשי הוא תחום פריקות יחידה*

לכן התחום של פריקות יחידה חלשה יותר מההנחה שהתחום ראשי. מצד שני, יש הרבה יותר דוגמאות:

טענה 2.5.19. *אם A תחום פריקות יחידה, אז גם $A[x]$ תחום פריקות יחידה*

את שתי הטענות האחרונות נוכיח בהמשך.

תרגיל 2.5.20. נניח שחוג A הוא איחוד מכוון של קבוצה E של תתי-חוגים, כך שלכל $B \subseteq C$ ב-E, כל איבר אי-פריק של B הוא אי-פריק גם ב-C. הוכיחו שאם כל חוג ב-E הוא תחום פריקות יחידה, אז גם A תחום פריקות יחידה (בהמשך נראה שזה לא נכון ללא התנאי הנוסף).
הסיקו שלכל קבוצה S ולכל תחום פריקות יחידה D, חוג הפולינומים $D[S]$ גם הוא תחום פריקות יחידה

נשתמש עכשיו בטענה 2.5.19 כדי להבין את האידיאלים הראשוניים ב-$B = A[x]$, כאשר $A = \mathbb{Z}$ או $A = k[t]$ כאשר k שדה. בשני המקרים, החוג A מוכל בשדה, שנסמנו L: במקרה הראשון $L = \mathbb{Q}$, ובשני $L = k(t)$, שדה הפונקציות הרציונליות (בקרוב נראה שדבר דומה נכון לכל תחום שלמות). אנחנו נשתמש בתוצאה הבאה, שגם אותה נוכיח בהמשך, כדי להשוות אידיאלים ב-B וב-$L[x]$.

טענה 2.5.21. *נניח ש-p אידיאל ראשוני ב-B המקיים $p \cap A = 0$. אז p ראשי*

נניח עכשיו ש-$p \subseteq B$ אידיאל ראשוני שונה מ-0. אם האידיאל הוא ראשי, אז על-פי ההגדרה, הוא נוצר על-ידי איבר ראשוני (ולכן אי-פריק) $f \in B$. מאידך, כל פולינום אי-פריק נותן אידיאל ראשוני לפי טענה 2.5.19.
נותר להבין את המקרה ש-p אינו ראשי. לפי הטענה האחרונה $q = A \cap p$ שונה מ-0. כיוון ש-A תחום ראשי, הוא נוצר על-ידי איבר אי-פריק כלשהו $a \in A$. נסמן ב-E את שדה השארית A/q. אז יש לנו העתקה מ-B ל-$E[x]$, והתמונה של p שם היא אידיאל ראשוני r. אידיאל זה נוצר על-ידי איבר אי-פריק אחד g'. אם $g \in p$ הולך ל-g' במנה, אז p נוצר על-ידי a ו-g, והמנה $B/p = E[x]/r$ היא שדה הרחבה סופי של E. בפרט, p הוא מקסימלי במקרה הזה.
בפרט, כאשר $A = k[t]$, ו-k סגור אלגברית, השדה E הוא בהכרח k, והפולינומים a ו-g הם לינאריים. במלים אחרות, כל אידיאל מירבי ב-$k[t, x]$ במקרה הזה הוא מהצורה $(t-u, x-v)$ עבור איברים $u, v \in k$. זהו האידיאל שמתאים לנקודה $\langle u, v\rangle \in k^2$.

3 לוקאליזציה

ראינו שאם $\mathbf{X}=\langle X,A\rangle$ יריעה אפינית, ו-$Z\subseteq X$ תת-קבוצה סגורה זריצקי, אז ל-Z יש מבנה טבעי של יריעה אפינית. מה לגבי המשלימה שלה, $U=X\backslash Z$? נניח ש-A היה תחום שלמות, ו-Z היא קבוצת האפסים של פונקציה אחת $f\in A$. אפשר, כמו קודם, לצמצם פונקציות מ-X ל-U. פונקציית הצמצום תהיה, במקרה הזה, חד-חד-ערכית: פונקציה שמתאפסת על הקבוצה הפתוחה U תתאפס על כל היריעה X. איך אפשר לגלות, באמצעות אלגברת הפונקציות, שעברנו מ-X ל-U? הפונקציה f מתאפסת רק ב-Z, אז הצמצום שלה ל-U הוא פונקציה שונה מ-0. לכן, ההפכית (הכפלית) שלה היא פונקציה מוגדרת היטב על U. לכן אנחנו מחפשים חוג B עם העתקה מ-A, בו (התמונה של) f הפיכה. אנחנו ניקח את החוג האוניברסלי עם התכונה הזו.

לוקאליזציה **הגדרה 3.0.1.** נניח ש-A חוג, ו-$S\subseteq A$ תת-קבוצה. ה*לוקאליזציה* של A ביחס ל-S היא חוג $S^{-1}A$ ביחד עם העתקה $l:A\to S^{-1}A$ כך ש:

- לכל $s\in S$, האיבר $l(s)\in S^{-1}A$ הפיך
- ההעתקה l היא אוניברסלית בין אלה שמקיימות את התנאים: אם $g:A\to B$ העתקה של חוגים, כך ש-$g(s)$ הפיך לכל $s\in S$, אז קיימת העתקה יחידה $h:S^{-1}A\to B$ כך ש-$h\circ l=g$.

טענה 3.0.2. *לכל חוג A ולכל קבוצה $S\subseteq A$, קיימת לוקאליזציה $l:A\to S^{-1}A$, יחידה עד-כדי איזומורפיזם יחיד מעל A.*

כרגיל, היחידות נובעת מהתכונה האוניברסלית, והקיום פחות חשוב ויוכח בהמשך. בינתיים נסיק כמה מסקנות:

תרגיל 3.0.3. הוכיחו שאם $S\subseteq T\subseteq A$ אז יש העתקה טבעית מ-$S^{-1}A$ ל-$T^{-1}A$. הוכיחו ש-$S^{-1}A=\widetilde{S}^{-1}A$ כאשר $\widetilde{S}$ היא המונואיד שנוצר על-ידי S והאיברים ההפיכים. בפרט, אם S כוללת רק איברים הפיכים אז $S^{-1}A=A$.

תרגיל 3.0.4. הוכיחו שאם $a\in S$ ו-$ab=0$ ב-A, אז $l(b)=0$ עבור ההעתקה הטבעית $l:A\to S^{-1}A$. בפרט, אם S כוללת איבר נילפוטנטי אז $S^{-1}A=0$.

טענה 3.0.5. *אם $S=\{a\}$ עבור $a\in A$, אז $B=S^{-1}A$ איזומורפי באופן קאנוני מעל A ל-$C={}^{A[x]}\!/_{xa-1}$ (כאשר x משתנה חדש)*

הוכחה. ב-C, ל-a יש הופכי: x. לכן, לפי התכונה האוניברסלית, יש העתקה יחידה מ-B ל-C. מאידך, אם b ההפכי של a ב-B, ההעתקה היחידה מעל A מ-$A[x]$ ל-B ששולחת את x ל-b שולחת את $xa-1$ ל-0, ולכן מתקבלת העתקה מ-C ל-B. הבדיקה שההרכבה היא הזהות נשארת כתרגיל. $\square$

סוף הרצאה 2, 7 באפריל

תרגיל 3.0.6. הוכיחו שאם S קבוצה סופית אז יש קבוצה בת איבר אחד T כך ש-$S^{-1}A=T^{-1}A$

אם A חוג ו-$a\in A$, נסמן גם ב-A_a את החוג $S^{-1}A$ כאשר $S=\{a\}$.

תרגיל 3.0.7. הוכיחו שאם $a\in A$ ו-$l:A\to A_a$ העתקת הלוקאליזציה, אז הגרעין של l הוא $\{b\in A\mid \exists n\in\mathbb{N}\, a^n b=0\}$

זהו מקרה פרטי של טענה 3.0.16, שתוכח בהמשך.

מסקנה 3.0.8. *נניח ש-*$\mathbf{X}=\langle X,A\rangle$ *יריעה אפינית מעל שדה* k, $a\in A$, *ו-* $U=\{x\in X\mid a(x)\neq 0\}$. *אז* $\langle U,A_a\rangle$ *היא יריעה אפינית.*

הוכחה. נסמן ב-$l:A\to A_a$ את העתקת הלוקאליזציה. הפעולה של A_a על איברי U מוגדרת באופן הבא: אם $u\in U$, אז $u\in X$, ולכן, כיוון ש-$\mathbf{X}$ יריעה אפינית, ניתן לחשוב על u כהעתקה $u{:}A\to k$. לפי ההנחה, $u(a)=a(u)\neq 0$ ולכן הפיך (כי k שדה), אז u משרה העתקה $u{:}A_a\to k$.

עלינו להוכיח ראשית ש-A_a אלגברת פונקציות על U, כלומר, שאם עבור $b\in A_a$ מתקיים $u(b)=0$ לכל $u\in U$, אז $b=0$ ב-A_a. בהמשך נראה שלכל $b\in A_a$ יש $n\in\mathbb{N}$ עבורו $a^n b\in l(A)$, נניח $l(c)=a^n b$. אז לכל $x\in X$ מתקיים $x(ac)=0$: אם $x\in U$ אז $x(ac)=x(l(ac))=x(a)^{n+1}x(b)=0$, אחרת $x(a)=0$. כיוון ש-$\mathbf{X}$ יריעה אפינית, $ac=0$ ב-A. לכן, $a^n b=l(c)=0$ (תרגיל 3.0.4). כיוון ש-a הפיך ב-A_a, קיבלנו $b=0$.

העובדה ש-A_a נוצרת סופית נובעת מטענה 3.0.5. אם $x,y\in U$, אז בפרט, $x,y\in X$, ולכן יש $b\in A$ כך ש-$b(x)=0$ ו-$b(y)\neq 0$. והתמונה של b ב-A_a מראה שהעתקות אלה שונות (במלים אחרות, אם b מקבלת ערכים שונים בנקודות x,y, אז זה נכון גם לאחר שמצמצמים את b לקבוצה פתוחה שכוללת את x,y)

אם $\phi:A_a\to k$ העתקה כלשהי, הצמצום שלה ל-A מתאים לנקודה $x\in X$. כיוון ש-$x(b)=\phi(b)$ לכל $b\in A$, בפרט $x(a)\neq 0$. לכן $x\in U$. $\square$

אם A חוג הפונקציות של יריעה אפינית $\mathbf{X}$, נסמן ב-$\mathbf{X}_f$ את היריעה המתאימה, כמו במסקנה. תת-קבוצה כזו נקראית *תת-קבוצה פתוחה בסיסית* של $\mathbf{X}$. תת-קבוצה פתוחה בסיסית

תרגיל 3.0.9. הוכיחו שחיתוך של שתי תתי-קבוצות פתוחות בסיסיות היא פתוחה בסיסית. הוכיחו שאם k סגור אלגברית, אז $k^2\setminus\{\langle 0,0\rangle\}$ אינה פתוחה בסיסית.

דוגמא 3.0.10. הקבוצה $k^\times$ של האיברים ההפיכים ב-k היא יריעה אפינית, שחוג הפונקציות עליה הוא $k[\frac{1}{t},t]$, החוג של *פולינומי לורן* ב-t. כאן רשמנו $\frac{1}{t}$ במקום האיבר t מהטענה. גאומטרית, אנחנו מזהים את האיברים ההפיכים כתמונת ההטלה על ציר t של הקבוצה הסגורה זריצקי $xt=1$ ב-k^2. התמונה במקרה הכללי דומה.

לפעולת הלוקאליזציה יש הכללה למודולים. נניח ש-$\mathbf{X}=\langle X,A\rangle$ יריעה אפינית מעל שדה k, ו-$f\in A$ פונקציה על X. אם M מודול מעל A_f, ראינו שאפשר לחשוב עליו כמשפחה של מרחבים וקטוריים מעל היריעה המתאימה, $\mathbf{X}_f$. כיוון ש-$\mathbf{X}_f\subseteq\mathbf{X}$, אפשר לחשוב על המשפחה הזו גם כמשפחה מעל $\mathbf{X}$. אלגברית, יש לנו העתקה $l:A\to A_f$, ולכן אפשר לחשוב על M כמודול מעל A: הפעולה של $a\in A$ על $m\in M$ נתונה על-ידי $l(a)m$. כיוון ש-M היה מודול מעל A_f, הפעולה של f על M היא הפיכה. התכונה האוניברסלית אומרת שהכיוון השני גם נכון:

טענה 3.0.11. *נניח* A *חוג,* $S\subseteq A$, *ו-* M *מודול מעל* A. *אז התנאים הבאים שקולים:*

1. *כל האיברים של S פועלים באופן הפיך על M (כלומר, הפונקציה $\mu_s : m \mapsto sm$ מ-M לעצמו היא הפיכה לכל $s \in S$)*

2. *קיים על M מבנה של מודול מעל $S^{-1}A$, כך שמבנה המודול הנתון מתקבל דרך ההעתקה הטבעית $l : A \to S^{-1}A$ (במלים אחרות, $am = l(a)m$ לכל $a \in A$ ו-$m \in M$)*

יתר על כן, מבנה כזה על M הוא יחיד.

בשפה פחות פורמלית, מודול מעל $S^{-1}A$ זה "אותו דבר" כמו מודול מעל A שאיברי S פועלים עליו באופן הפיך

הוכחה. אם M מודול מעל $S^{-1}A$, ההפכית של ההעתקה μ_s, עבור $s \in S$, נתונה על-ידי $\mu_{s^{-1}}$ (זה נכון באופן כללי לכל חוג בו s הפיך)

בכיוון השני, נסמן ב-$\mathrm{End}_A(M)$ את קבוצת ההעתקות מ-M לעצמו (כמודול מעל A). זהו חוג (לא חילופי) עם הפעולות של חיבור והרכבת העתקות. נסמן ב-B את המרכז של החוג הזה (כלומר, כל האיברים שמתחלפים עם כל האיברים בחוג). זהו תת-חוג חילופי, וכל ההעתקות מהצורה μ_a נמצאות בו. לפי ההנחה, כל האיברים מהצורה μ_s, כאשר $s \in S$, הפיכים ב-B. לכן, לפי התכונה האוניברסלית, יש הרחבה יחידה של ההעתקה $a \mapsto \mu_a$ ל-$S^{-1}A$. זה נותן את מבנה המודול (וגם את היחידות) $\square$

לאור הדיון האחרון, אם $f : M \to N$ העתקה של מודולים מעל A, כאשר כל איברי S פועלים בצורה הפיכה על N, אפשר לחשוב על f כצמצום של M לקבוצה בה איברי S הפיכים. מסתבר בשבדומה לחוג עצמו, אפשר למצוא דרך אוניברסלית לעשות זאת:

הגדרה 3.0.12. אם A חוג, $S \subseteq A$ תת-קבוצה, ו-M מודול מעל A, אז *הלוקאליזציה* של M ביחס ל-S היא מודול $S^{-1}M$ ביחד עם העתקה $f : M \to S^{-1}M$ של מודולים מעל A, כך שהפעולה של S על $S^{-1}M$ היא הפיכה, ו-$S^{-1}M$ אוניברסלי עם תכונה זו: לכל מודול אחר N עם העתקה $t : M \to N$, שבו איברי S פועלים בצורה הפיכה, יש העתקה יחידה $u : S^{-1}M \to N$ כך שההרכבה של ההעתקה מ-M עם u היא t. הלוקאליזציה

במצב שבהגדרה, הואיל ואיברי S פועלים בצורה הפיכה על $S^{-1}M$, ניתן לחשוב עלו כעל מודול מעל $S^{-1}A$. הטענה האחרונה בשילוב עם ההגדרה מראה לכן:

מסקנה 3.0.13. *אם A חוג, $S \subseteq A$ תת-קבוצה, ו-M מודול מעל A, אז ההעתקה מ-M ל-$S^{-1}M$ היא אוניברסלית עבור העתקות מ-M למודול מעל $S^{-1}A$: אם N מודול מעל $S^{-1}A$, אז העתקות של מודולים מעל A מ-M ל-N מתאימות באופן קאנוני להעתקות מ-$S^{-1}M$ ל-N (כמודולים מעל $S^{-1}A$).*

תרגיל 3.0.14. הוכיחו את המסקנה

תרגיל 3.0.15. אם A חוג, ו-$S \subseteq A$, אפשר לחשוב על A כעל מודול מעל עצמו, וגם על $S^{-1}A$ (החוג) אפשר לחשוב כעל מודול מעל A. הוכיחו ש-$S^{-1}A$, כמודול מעל A, מקיים את תנאי ההגדרה (כלומר, מהווה $S^{-1}A$ גם כמודול)

מעכשיו, נניח לרוב ש-S תת-מונואיד (כפלי). ראינו שכל לוקאליזציה מתקבלת ככה, ויותר נוח לנסח את הטענות תחת ההנחה הזו. הטענה הבאה נותנת תיאור מפורש יותר של איברי הלוקאליזציה, ושל ההעתקה אליה. את החלק הראשון יהיה קל יותר להוכיח כשיהיו לנו כלים נוספים, ולכן נדחה את ההוכחה שלו להמשך (מקרה פרטי הופיע בתרגיל 3.0.7). הסעיף השני כבר שימש אותנו בהוכחת טענה 3.0.8.

טענה 3.0.16. *נניח ש-M מודול מעל חוג A, ו-S תת-מונואיד ב-A. נסמן ב-$l : M \to S^{-1}M$ את העתקת הלוקאליזציה. אז:*

1. *הגרעין של l הוא הקבוצה $\{m \in M \mid \exists s \in S\ sm = 0\}$.*
2. *לכל איבר $n \in S^{-1}M$ יש $s \in S$ כך ש-$sn \in l(M)$*

הוכחה. 1. נדחה להמשך

2. נתבונן על $S^{-1}M$ כעל מודול מעל A, ונסמן $N = {}^{S^{-1}M}/_{l(M)}$. אם L מודול נוסף מעל A, העתקה $t : N \to L$ מתאימה להעתקה $t_1 : S^{-1}M \to L$ כך ש-$t_1 \circ l = 0$. אם איברי S פועלים על L באופן הפיך אז t_1 כזו נקבעת על-ידי $t_1 \circ l$, ולכן $t_1 = 0$ במקרה זה. במלים אחרות, כל העתקה מ-N ל-L עליו S פועלת בצורה הפיכה היא העתקת האפס. לכן, $S^{-1}N = 0$. לפי הסעיף הראשון, לכל איבר של N יש איבר ב-S שמאפס אותו. זה בדיוק מה שצריך להוכיח □

סוף הרצאה 8, 6 באפריל

סדרה מדויקת של מודולים

נניח ש-A חוג. *סדרה מדויקת של מודולים* מעל A היא סדרה של העתקות

$$\dots \to M_i \xrightarrow{\phi_i} M_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} M_{i+2} \xrightarrow{\phi_{i+2}} \dots$$

כך ש-$\mathrm{Im}(\phi_i) = \mathrm{Ker}(\phi_{i+1})$ (הסדרה יכולה להיות סופית או אינסופית). למשל, אם $0 \to N \to M \xrightarrow{f} L \to 0$ היא סידרה מדויקת, אז ההעתקה f היא על, והגרעין שלה הוא (איזומורפי ל-) N. במלים אחרות, $L = {}^{M}/_{N}$. סדרה כזו נקראת *סדרה מדויקת קצרה.*

סדרה מדויקת קצרה

טענה 3.0.17. *נניח ש-A חוג, ו-$S \subseteq A$ תת-מונואיד*

1. *אם $f : M \to N$ היא העתקה של מודולים מעל A, אז יש העתקה יחידה $f_S : S^{-1}M \to S^{-1}N$ כך ש-$f_S \circ l_M = l_N \circ f$, כאשר l_M ו-l_N העתקות הלוקאליזציה:*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad f \quad} & N \\ \Big\downarrow{\scriptstyle l_M} & & \Big\downarrow{\scriptstyle l_N} \\ S^{-1}M & \overset{f_S}{\dashrightarrow} & S^{-1}N \end{array} \tag{3.1}$$

2. *אם $g : N \to L$ העתקה נוספת, אז $(g \circ f)_S = g_S \circ f_S$*

3. *אם*

$$\ldots \to M_i \xrightarrow{\phi_i} M_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} M_{i+2} \xrightarrow{\phi_{i+2}} \ldots$$

סדרה מדויקת, אז גם

$$\ldots \to S^{-1}M_i \xrightarrow{\phi_{iS}} S^{-1}M_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1S}} S^{-1}M_{i+2} \xrightarrow{\phi_{i+2S}} \ldots$$

סדרה מדויקת

הוכחה. 1. ההעתקה $l_N \circ f$ היא אל מודול מעל $S^{-1}A$, ולכן מתפרקת ביחידות דרך $S^{-1}M$.

2. שתי ההעתקות מצטמצמות ל-$g \circ f$ כאשר מצמצמים אותן ל-M, אז הטענה נובע מהיחידות בסעיף הקודם

3. מספיק להוכיח את הטענה לסדרות באורך 3, כלומר: נתונה סדרה מדויקת $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$, וצריך להראות שהיא נשארת מדויקת אחרי לוקאליזציה. הטענה שהתמונה של f_S מוכלת בגרעין של g_S שקולה לזה שההרכבה היא 0, ולכן נובעת מהסעיף הקודם.

נותר להוכיח שכל איבר n בגרעין של g_S נמצא בתמונה של f_S. לפי טענה 3.0.16, קיים $s \in S$ ו-$n' \in N$ כך ש-$sn = l_N(n')$. אז

$$l_L(g(n')) = g_S(l_N(n')) = g_S(sn) = sg_S(n) = 0$$

ולכן, לפי הסעיף הראשון באותה טענה, יש $t \in S$ כך ש-$g(tn') = tg(n') = 0$. לכן, קיים $m' \in M$ עבורו $tn' = f(m')$. אז

$$f_S(l_M(m')) = l_N(f(m')) = tl_N(n') = tsn$$

כיוון שאיברי S פועלים בצורה הפיכה על $S^{-1}M$, קיים $m \in S^{-1}M$ כך ש-$stm = l_M(m')$. אז $f_S(m) = n$. □

מסקנה 3.0.18. *אם $N \subseteq M$ מודולים מעל חוג A, ו-$S \subseteq A$, אז ההעתקה $S^{-1}N \to S^{-1}M$ העתקה חד-חד-ערכית, ו-$S^{-1}M/S^{-1}N = S^{-1}M/N$*

כפי שעשינו במסקנה, במצב כזה נחשוב על $S^{-1}N$ כעל תת-מודול של $S^{-1}M$.

מסקנה 3.0.19. *נניח ש-I אידיאל בחוג A, ונסמן $B = A/I$. אם $S \subseteq A$ תת-מונואיד, נסמן ב-T את התמונה של S ב-B. אז האידיאל שנוצר על-ידי I ב-$S^{-1}A$ הוא $S^{-1}I$, והמנה היא $T^{-1}B$.*

הוכחה. אפשר לחשוב על I, A ו-B כמודולים מעל A. אז $S^{-1}B$ ו-$T^{-1}B$ מקיימים אותה תכונה אוניברסלית, ולכן שווים, ולפי המסקנה האחרונה, הגרעין של ההעתקה מ-$S^{-1}A$ ל-$S^{-1}B = T^{-1}B$ הוא $S^{-1}I$. בפרט, האידיאל שנוצר על-ידי I מוכל ב-$S^{-1}I$, אבל S פועלת על אידיאל זה בצורה הפיכה, ולכן הם שווים. □

נשים לב שבפרט, $S^{-1}B=0$ אם ורק אם S לא זר ל-I (ובמקרה זה, $S^{-1}I=S^{-1}A$).

במקרה ש-A אלגברת הפונקציות של יריעה אפינית $\mathbf{X}$, ו-S נוצר על ידי איבר יחיד $f\in A$, למסקנה יש הפירוש הגאומטרי הבא: האידיאל I קובע תת-קבוצה סגורה $Z\subseteq X$, ו-f קובעת תת-קבוצה פתוחה $U=X_f$. אז B אלגברת הפונקציות על Z, ו-$T^{-1}B$ היא אלגברת הפונקציות על הקבוצה הפתוחה $Z_{f'}$, כאשר f' הצמצום של f ל-Z. מאידך, $S^{-1}A$ היא אלגברת הפונקציות על U, ו-$S^{-1}I$ אידיאל הפונקציות שמתאפסות על Z בתוכה. לכן, הטענה אומרת שהקבוצה הפתוחה שנקבעת על-ידי f' בתוך היריעה Z היא החיתוך $Z\cap U$ (אם $f\in I$, החיתוך הזה ריק).

למסקנה הזו נזדקק בהמשך.

מסקנה 3.0.20. *נניח ש-p אידיאל ראשוני בחוג A, ו-$S\subseteq A$ תת-מונואיד זר ל-p. נסמן ב-$l:A\to S^{-1}A$ את העתקת הלוקאליזציה. אז $p=l^{-1}(S^{-1}l(p))$.*

הוכחה. ההכלה $p\subseteq l^{-1}(S^{-1}l(p))$ נכונה בלי שום הנחות, ולכן עלינו להוכיח שאם, עבור $a\in A$, מתקיים $l(a)\in S^{-1}l(p)$ אז $a\in p$. לפי ההנחה, $l(a)$ הולך ל-0 ב-$S^{-1}B$ (כאשר $B={}^{A}/_{p}$). לכן, התמונה $\bar{a}\in B$ של a הולכת ל-0 תחת הלוקליזציה. אבל B תחום שלמות, ו-S זרה ל-p, אז הלוקליזציה היא חד-חד-ערכית על B. לכן $\bar{a}=0$, כלומר $a\in p$. $\square$

נשים לב שההנחות דרושות: אם $A=\mathbb{Z}[x]$ ו-$S=\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, אז האידיאלים (2) ו-$(2x)$ לא מקיימים את המסקנה.

תרגיל 3.0.21. נניח ש-$S\subseteq A$ תת-קבוצה של חוג A, ו-M מודול מעל A. הוכיחו שאם $N'\subseteq S^{-1}M$ תת-מודול מעל $S^{-1}A$, אז יש תת-מודול $N\subseteq M$ כך ש-$N'=S^{-1}N$.

תרגיל 3.0.22. נזכיר שאם M,N מודולים מעל A, אז לקבוצת ההעתקות $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ ביניהם יש מבנה טבעי של מודול מעל A. אם $S\subseteq A$, הוכיחו שיש העתקה טבעית מ-$S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M,N)$ ל-$\mathrm{Hom}_A(M,S^{-1}N)$. הוכיחו שהעתקה זו היא על אם M נוצר סופית, אבל לא בהכרח אחרת (*רמז:* הסתכלו על $A[t]$ כמודול מעל A)

3.1 חוגי שברים

נזכיר שאיבר של חוג A נקרא רגולרי אם אינו מחלק אפס. קל לראות שקבוצת האיברים הרגולריים היא תת-מונואיד.

הגדרה 3.1.1. יהי A חוג. *חוג השברים של* A הוא החוג $K(A)=S^{-1}A$, כאשר S המונואיד של האיברים הרגולריים ב-A. חוג השברים

את חוג השברים ניתן לאפיין באופן הבא:

טענה 3.1.2. *יהי A חוג. אז העתקת הלוקאליזציה $l:A\to K(A)$ היא חד-חד-ערכית. לכל לוקאליזציה אחרת $r:A\to S^{-1}A$ עבורה r חד-חד-ערכית קיים שיכון יחיד $t:S^{-1}A\to K(A)$ מעל A.*

הוכחה. העובדה ש-l שיכון נובעת ישירות מטענה 3.0.16. כדי להראות את החלק השני, מספיק להראות שכל S עבורו r שיכון מורכב מאיברים רגולריים, וזה שוב נובע מאותה טענה. $\square$

מסקנה 3.1.3. *חוג A הוא תחום שלמות אם ורק אם הוא תת-חוג של שדה. במקרה זה, $K(A)$ הוא השדה הקטן ביותר שמכיל את A. באופן יותר כללי, אידיאל $I \subseteq A$ הוא ראשוני אם ורק אם הוא גרעין של העתקה לשדה.*

הוכחה. ראינו כבר שתת-חוג של תחום שלמות (בפרט של שדה) הוא תחום שלמות. בכיוון השני, בתחום שלמות כל האיברים פרט ל-0 רגולריים, ולכן כל האיברים פרט ל-0 ב-$K(A)$ הם הפיכים. □

שדה השברים
שדה השארית

במקרה ש-A תחום שלמות, חוג השברים $K(A)$ נקרא גם *שדה השברים* של A. אם $p \subseteq A$ אידיאל ראשוני, *שדה השארית* של p הוא שדה השברים של A/p (נשים לב שאם A עצמו הוא שדה, אז $K(A) = A$, ובפרט, ההגדרה הזו מכלילה את שדה השארית עבור אידיאל מקסימלי).

המעבר לשדה השברים (במקרה שהחוג הוא תחום שלמות) נותן מספר יתרונות, שאת חלקם כבר ראינו: למשל, בסוף הסעיף הקודם ניתחנו את האידיאלים הראשוניים ב-$\mathbb{Z}[x]$ וב-$k[t,x]$. על מנת לעשות זאת, השתמשנו בשדה L, שהיה $\mathbb{Q}$ במקרה הראשון ו-$k(t)$ במקרה השני. השדות הללו הם פשוט שדות השברים של $\mathbb{Z}$ ו-$k[t]$, בהתאמה, וכל הטיעון שם תקף באופן כללי כאשר A תחום ראשי, ו-L שדה השברים שלו. הטיעון הסתמך על שלוש טענות שלא הוכחו שם, שתיים מהן נוכיח עכשיו. הכלי הבסיסי הוא *הלמה של גאוס*, שמשתמשת במושג הבא:

פולינום פרימיטיבי

הגדרה 3.1.4. נניח ש-A חוג. פולינום $g(t)$ מעל A נקרא *פולינום פרימיטיבי* אם למקדמים שלו אין מחלקים משותפים (עד כדי הפיכים)

תרגיל 3.1.5. נניח ש-A תחום פריקות יחידה. הוכיחו שלכל פולינום $p(t)$ מעל $K(A)$ יש הצגה $p = a_0p_0$, כאשר $a_0 \in K(A)$ ו-p_0 פרימיטיבי מעל A, והצגה זו היא יחידה עד כדי הפיכים ב-A.

טענה 3.1.6 (הלמה של גאוס). *אם A תחום פריקות יחידה, ו-p, q פולינומים פרימיטיביים מעל A, אז pq פרימיטיבי*

הוכחה. כיוון ש-A תחום פריקות יחידה, מספיק להראות שכל ראשוני $a \in A$ לא מחלק את כל המקדמים של pq. נסמן $B = A/(a)$, אז B תחום שלמות. אם כל המקדמים של pq מתחלקים ב-a, אז התמונה $\bar{p}\bar{q}$ של pq ב-B היא 0. כיוון שזו העתקה של חוגים, נקבל $\bar{p}\bar{q} = 0$, וכיוון ש-B תחום, גם $B[t]$ תחום. לכן $\bar{p} = 0$ או $\bar{q} = 0$, כלומר a מחלק את כל המקדמים של p או של q, בסתירה להנחה. □

אם A תחום פריקות יחידה ו-$p(t), q(t)$ פולינומים מעל $K(A)$, לפי תרגיל 3.1.5 אפשר לרשום $p = a_0p_0$ ו-$q = b_0q_0$ כאשר p_0 ו-q_0 פרימיטיביים מעל A, וההצגה יחידה. לפי הלמה של גאוס, p_0q_0 פרימיטיבי, ולכן $pq = a_0b_0p_0q_0$ ההצגה היחידה בצורה זו של pq (כל היחידות היא עד כדי הכפלה בהפיכים של A). זה מאפשר לנו לעבור בנוחות בין פולינומים מעל A ומעל $K(A)$. למשל, פולינום פרימיטיבי הוא פריק מעל A אם ורק אם הוא פריק מעל $K(A)$.

הוכחת טענה 2.5.19. כיוון שכל פולינום מעל A הוא מכפלה של איבר מ-A בפולינום פרימיטיבי, וכיוון ש-A תחום פריקות יחידה, נובע מההערה האחרונה שכל פולינום הוא מכפלה סופית של איברים אי-פריקים.

כדי להוכיח שכל אי-פריק הוא ראשוני, נניח ש-$p(t)$ אי-פריק. בפרט, הוא פרימיטיבי, ולכן אי-פריק גם כאיבר של $K(A)[t]$. אם $rs=0$ ב-${}^{A[t]}/_{p}$, אז זה נכון גם ב-${}^{K(A)[t]}/_{p}$, ולכן אחד מ-r, s הוא 0 שם, נניח שזה r. אז $r=pu$ עבור $u\in K(A)[t]$, אבל כיוון ש-p פרימיטיבי, $u\in A[t]$. $\square$

טענה 2.5.21 נוסחה למקרה $B=A[x]$, כאשר $A=\mathbb{Z}$ או $A=k[t]$, אבל למעשה נכונה לתחום פריקות יחידה כללי A:

טענה 3.1.7 (=טענה 2.5.21). *אם A תחום פריקות יחידה ו-$p\subseteq A[x]$ אידיאל ראשוני כך ש-$p\cap A=0$ אז p אידיאל ראשי*

הוכחה. נסמן ב-L את שדה השברים של A, וב-$q\subseteq L(x)$ את האידיאל שנוצר על-ידי p. אז q נוצר על-ידי איבר אחד, $f(x)$, שניתן להניח שהוא מעל A ופרימיטיבי מעל A. לפי מסקנה 3.0.20, $p=q\cap A[x]$, ולכן $f\in p$. אנחנו טוענים ש-p נוצר על-ידי f. כדי להוכיח את זה, מספיק (כיוון ש-p ראשוני) להוכיח שכל אי-פריק $g\in p$ הוא כפולה של f. כיוון ש-$g\in q$, קיים $u\in L(x)$ כך ש-$g=uf$. כיוון ש-g אי-פריק, הוא בפרט פרימיטיבי, וכיוון ש-f גם פרימיטיבי, $u\in A[x]$. $\square$

להוכחת הלמה של גאוס יש ניסוח אלטרנטיבי. נניח ש-A תחום פריקות יחידה, ו-$a\in A$ ראשוני. אז לכל איבר הפיך $x\in K(A)$ יש $k\in\mathbb{Z}$ יחיד כך ש-$x=a^k y$ עבור y זר ל-a. נסמן $v_a(x)=k$. הפונקציה $v_a:K(A)^\times\to\mathbb{Z}$ נקראת *פונקציית ההערכה* ביחס ל-a. היא "מודדת" באיזו מידה x מתחלק ב-a. פונקציית ההערכה

דוגמא 3.1.8. אם $A=\mathbb{C}[t]$, אז $v_t(f)$ הוא סדר האפס (או הקוטב) ב-0. באופן יותר כללי, v_{t-c} מודדת את סדר האפס ב-c (זה נכון גם כאשר A אלגברת הפונקציות ההולומורפיות)

באופן כללי, אם L שדה, פונקציה $v:L^\times\to\mathbb{Z}$ נקראת *הערכה* אם היא מקיימת את התכונות הבאות לכל $x,y\in L^\times$: הערכה

1. $v(xy)=v(x)+v(y)$
2. $v(x+y)\geqslant\min(v(x),v(y))$ אם $x+y\neq 0$ (לרוב נוהגים להגדיר $v(0)=\infty$ ואז התכונות ממשיכות להתקיים אם מפרשים את הפעולות בצורה הצפויה).

את הוכחת הלמה של גאוס אפשר לנסח גם כמו בתרגיל הבא:

תרגיל 3.1.9. נניח ש-A תחום פריקות יחידה עם שדה שברים $L=K(A)$.

1. אם $a\in A$ ראשוני, הוכיחו ש-v_a היא הערכה
2. עבור $p(x)=\sum b_i x^i\in L[x]$ שונה מ-0 ו-$a\in A$ ראשוני, נגדיר $v_a(p)=\min\{v_a(b_i)\}$. הוכיחו ש-$v_a:L[x]\to\mathbb{Z}$ גם מקיימת את תכונות ההערכה (רמז: השתמשו בהוכחה הנ"ל למה של גאוס).
3. הוכיחו שאם $p\in L[x]$ שונה מ-0, אז p פרימיטיבי מעל A אם ורק אם $v_a(p)=0$ לכל $a\in A$ ראשוני. הסיקו את הלמה של גאוס.

הערה 3.1.10. אם $v: L \to \mathbb{Z}$ הערכה ו-$e \geqslant 1$ מספר ממשי, הפונקציה $x \mapsto e^{-v(x)}$ נקראת הערך המוחלט המתאים ל-v. תכונות ההערכה מראות שהערך המוחלט כפלי ומגדיר מטריקה על L. יש אפשרות לקחת השלמה של L ביחס למטריקה הזו, ולחקור את השדה שמתקבל בכלים אנליטיים. במקרה $L = \mathbb{Q}$ ו-$v = v_p$ (עבור מספר ראשוני p), השדה שמתקבל כך נקרא *שדה המספרים ה-p-אדיים*, $\mathbb{Q}_p$.

סוף הרצאה 9, 20 באפריל

המעבר לשדה השברים מאפשר לחקור מודולים מעל תחום באמצעות אלגברה לינארית. אם M מודול מעל תחום שלמות A, נסמן ב-$K(M)$ את המודול $S^{-1}M$, כאשר S קבוצת האיברים הרגולריים ב-A. אז $K(M)$ מודול מעל $K(A)$, כלומר, מרחב וקטורי מעליו.

מסקנה 3.1.11. *נניח ש-A תחום, ו-M מודול מעל A*

1. *הגרעין של העתקת הלוקאליזציה $M \xrightarrow{l} K(M)$ הוא תת-המודול של איברי הפיתול ב-M. בפרט, M חסר פיתול אם העתקה זו היא שיכון, ו-M פיתול אם ורק אם $K(M) = 0$.*
2. *תת-קבוצה $D \subseteq M$ היא בלתי-תלויה מעל A אם ורק אם התמונה שלה ב-$K(M)$ בלתי תלויה לינארית מעל $K(A)$*
3. *אם M מודול חופשי ו-$m \in M$ שונה מ-0, אז יש העתקה $f: M \to A$ (של מודולים מעל A) כך ש-$f(m) \neq 0$ (במלים אחרות, ההעתקה מ-M ל-$\check{\check{M}}$ היא חד-חד-ערכית)*
4. *נניח ש-M נוצר סופית. אז M חסר פיתול אם ורק אם הוא ניתן לשיכון במודול חופשי*

הוכחה. 1. תרגיל

2. נסמן ב-N את המודול החפשי על הקבוצה D. אז יש העתקה טבעית מ-N ל-M, והיא חד-חד-ערכית אם ורק אם D בלתי-תלויה לינארית מעל A. אם זה המצב, אז גם ההעתקה מ-$K(N)$ ל-$K(M)$ חד-חד-ערכית, לפי טענה 3.0.17, כלומר D בלתי תלויה מעל $K(A)$. הכיוון ההפוך טריוויאלי.
3. תרגיל
4. מודול חופשי הוא חסר פיתול לפי הסעיף הקודם, ותת-מודול של מודול חסר פיתול הוא חסר פיתול. בכיוון השני, אם M חסר-פיתול, העתקת הלוקאליזציה $l: M \to K(M)$ היא שיכון. נבחר בסיס B ל-$K(M)$ מעל $K(A)$. אם x_i קבוצה סופית של יוצרים ל-M, ניתן להניח, על-ידי הכפלה בגורמים מתאימים, שכל x_i צירוף לינארי עם מקדמים מ-A של איברי B. אז תת-המודול שנוצר על-ידי B הוא מודול חופשי שמכיל את M. □

תרגיל 3.1.12. השלימו את פרטי ההוכחה

תרגיל 3.1.13. הוכיחו שאם M חסר-פיתול ונוצר על-ידי n יוצרים, אז כל תת-קבוצה בלתי תלויה מעל A ב-M היא בגודל לכל היותר n

תרגיל 3.1.14. הוכיחו ש-$\mathbb{Q}$ אינו מודול חופשי מעל $\mathbb{Z}$

תרגיל 3.1.15. מיצאו דוגמא למודול נוצר סופית וחסר פיתול שאינו חופשי מעל תחום A

תרגיל 3.1.16. הוכיחו שאם N תת-מודול חסר פיתול של M כך ש-M/N חסר פיתול, אז M חסר פיתול

3.2 תכונות מקומיות

אם X מרחב גאומטרי נחמד (למשל הישר הממשי), יש חשיבות לתכונות של פונקציות על X שניתן לבדוק באופן מקומי: אם f פונקציה "נחמדה" על X, ו-$U \subseteq X$ תת-קבוצה פתוחה, אז הצמצום של f ל-U לרוב תהיה נחמדה באותה מידה (למשל, אם f רציפה, או גזירה, או חסומה על X, אז גם הצמצום שלה ל-U היא כזו). בכיוון ההפוך, אין סיבה לצפות שאם f הצמצום של f נחמדה אז גם f תהיה כזו, אבל אם U_α *כיסוי* של X, ניתן לפעמים להסיק תכונות נחמדות של f מתכונות נחמדות של הצמצום שלה לכיסוי. תכונות שמקיימות זאת נקראות תכונות מקומיות. למשל, רציפות וגזירות של פונקציה הן תכונות מקומיות. מאידך, חסימות אינה תכונה מקומית: העובדה שפונקציה חסומה על כל אחת מהקבוצות בכיסוי אינה גוררת ש-f חסומה על כל X.

בהקשר שלנו, המעבר לקבוצה פתוחה נתון על-ידי לוקאליזציה. נגיד שתכונה P של חוגים או של מודולים היא *סגורה תחת לוקאליזציה* אם כל פעם שהחוג A (או המודול M) מקיים את P, גם $S^{-1}A$ (או $S^{-1}M$) מקיים את P, לכל תת-מונואיד $S \subseteq A$. כמעט כל התכונות שנדבר עליהן יהיו כאלה. למשל: סגורה תחת לוקאליזציה

טענה 3.2.1. *נניח ש-A חוג, $S \subseteq A$ תת-מונואיד, ו-M מודול מעל A*

1. *אם A מצומצם, תחום, תחום ראשי או תחום פריקות יחידה, אז $S^{-1}A$ גם $S^{-1}A$ כזה (או 0)*

2. *אם M חופשי, נוצר סופית, פיתול או חסר פיתול, גם $S^{-1}M$ כזה*

הוכחה. נסמן ב-$l : A \to S^{-1}A$ את העתקת הלוקאליזציה. נשים לב קודם כל: אם $\{m_\alpha\}$ יוצרת את M, אז $\{l(m_\alpha)\}$ יוצרת את $S^{-1}M$. זה נובע מתרגיל 3.0.21.

1. הטענה כש-A מצומצם או תחום היא תרגיל. הטענה לגבי תחומים ראשיים נובעת מהמקרה $M = A$ בהערה לעיל. נשים לב למסקנה הבאה מהטענה על תחומים: אם I אידיאל ראשוני ב-A, אז $S^{-1}I$ אידיאל ראשוני או כל החוג ב-$S^{-1}A$.

   נניח ש-A תחום פריקות יחידה. לפי האבחנה האחרונה, איבר ראשוני $a \in A$ הוא הפיך או ראשוני ב-$S^{-1}A$. נניח ש-I אידיאל ראשוני שונה מ-0 ב-$S^{-1}A$. אז $J = A \cap I$ אידיאל ראשוני שונה מ-0 ב-A. כל איבר שונה מ-0 של J הוא מכפלה של אי-פריקים וכל אי-פריק כזה הוא ראשוני (כי A תחום פריקות יחידה), ואחד מהם a נמצא ב-J (כי J ראשוני). לפי ההערה לעיל, $a \in I$ ראשוני גם כן. לכן, בכל אידיאל ראשוני שונה מ-0 ב-$S^{-1}A$ מצאנו איבר ראשוני שונה מ-0. עכשיו הטענה נובעת מקריטריון קפלנסקי 3.2.3.

2. תרגיל □

תרגיל 3.2.2. השלימו את הוכחת הטענה

בהוכחת הטענה השתמשנו בקריטריון הבא של קפלנסקי לאפיון תחומי פריקות יחידה:

טענה 3.2.3 (קריטריון קפלנסקי). *הטענות הבאות על תחום A הן שקולות*

1. *A הוא תחום פריקות יחידה*

2. *כל אידיאל ראשוני ב-A נוצר על-ידי איברים ראשוניים*

3. *כל אידיאל ראשוני שונה מ-0 כולל איבר ראשוני רגולרי*

הוכחה. הגרירה מ-(1) ל-(2) הוכחה למעשה בטענה הקודמת (תרגיל), והגרירה מ-(2) ל-(3) טריוויאלית.

נניח שכל אידיאל ראשוני שונה מ-0 כולל ראשוני רגולרי. נסמן ב-S את תת-המונואיד שנוצר על-ידי כל הראשוניים הרגולריים והאיברים ההפיכים. אנחנו טוענים ש-S *רווי*, כלומר, שאם $ab\in S$ אז $a,b\in S$. ההוכחה היא באינדוקציה על k, כאשר $ab=up_1\dots p_k$ עבור u הפיך ו-p_i-ראשוניים. אם $k=0$ אז a,b הפיכים ואין מה להוכיח.

נניח ש-$k>0$. אז a או b שייך לאידיאל שנוצר על-ידי p_k, נניח $b=p_kx$. אז $ap_kx=ab=up_1\dots p_k$, ולכן $ax=up_1\dots p_{k-1}$ (כי A תחום). באינדוקציה, $a,x\in S$ ולכן גם $b=p_kx$ ב-S.

אנחנו טוענים שכל איבר $a\in A$ שונה מ-0 נמצא ב-S. אחרת, לפי הטענה שעכשיו הוכחנו, האידיאל (a) זר ל-S. לפי טענה 2.3.1, קיים אידיאל ראשוני שמכיל את (a) וזר ל-S. לפי ההנחה, כל אידיאל כזה כולל איבר ראשוני רגולרי, אבל זו סתירה.

הראינו שכל איבר שונה מ-0 הוא מכפלה של ראשוניים. התרגיל הבא מסיים את ההוכחה. $\square$

תרגיל 3.2.4. הוכיחו שאם בתחום A, כל איבר הוא מכפלה של איברים ראשוניים, אז A תחום פריקות יחידה.

התכונה של S שהוכחה בהוכחת קריטריון קפלנסקי מעניינת בפני עצמה: היא מתארת את קבוצת האיברים ההפיכים בלוקאליזציה:

תרגיל 3.2.5. לכל תת-מונואיד S של חוג A, נסמן $\bar{S}=\{a\in A\,|\,\exists b\in A\; ab\in S\}$. הוכיחו שהתמונה של $a\in A$ ב-$S^{-1}A$ היא הפיכה אם ורק אם $a\in\bar{S}$. בפרט, $S^{-1}A=\bar{S}^{-1}A$.

הערה 3.2.6. את קריטריון קפלנסקי אפשר להכליל באופן הבא: אם A תחום, ו-S תת-מונואיד שנוצר על-ידי ראשוניים, אז איבר אי-פריק $a\in A$ הוא אי-פריק או הפיך ב-$S^{-1}A$, והוא ראשוני אם ורק אם הוא ראשוני או הפיך ב-$S^{-1}A$. זה נקרא קריטריון נגטה. המסקנה היא שאם ב-A כל איבר הוא מכפלה של אי-פריקים ו-$S^{-1}A$ תחום פריקות יחידה, אז גם A תחום פריקות יחידה. זה נותן הוכחה נוספת של טענה 2.5.19: אם B תחום פריקות יחידה, ו-$A=B[x]$, ראינו שכל איבר של A הוא מכפלה של אי-פריקים, ואם S קבוצת האיברים הרגולריים ב-B, אז $S^{-1}A=K(B)[x]$ תחום ראשי, ולכן תחום פריקות יחידה. $\square$

כדי לדבר על תכונות מקומיות, צריך להסביר מהו כיסוי. ראינו שאם $a\in A$, אז לוקאליזציה ביחס ל-a מתאימה לקבוצה הפתוחה U_a שהיא המשלימה של קבוצת האפסים של a. אם $C\subseteq A$ קבוצה של איברים, המשלים של האיחוד של הקבוצות U_a, עבור $a\in C$, הוא החיתוך של המשלימים, כלומר קבוצת האפסים המשותפת של כל האיברים ב-C, או, באופן שקול, של האידיאל שנוצר על-ידי C.

בפרט, סביר לחשוב על האוסף U_a ככיסוי של כל המרחב אם המשלים ריק, כלומר, אם האידיאל שנוצר על-ידי C הוא כל החוג. נשים לב שאם זה המצב, אז האיבר $1\in A$ שייך כבר לאידיאל שנוצר על-ידי תת-קבוצה סופית של C. בשפה טופולוגית, המרחב שאנחנו מדברים עליו הוא *קומפקטי*.

בהתאם לאינטואיציה הזו, נגיד שתכונה P של חוגים (או של מודולים) היא *תכונה מקומית* אם, בהינתן $a_1,\dots,a_n\in A$ כך שהאידיאל שנוצר על-ידי ה-a_i הוא כל החוג, אם P נכונה לכל לוקאליזציה A_{a_i}, אז P נכונה עבור A. במילים אחרות, מספיק לבדוק את התכונה P באופן מקומי. ההגדרה עבור מודולים דומה. הנה כמה דוגמאות: תכונה מקומית

סוף הרצאה 10, 23 באפריל

טענה 3.2.7. *נניח ש-A חוג, ו-$a_1,\dots,a_n\in A$ איברים שיוצרים את A כאידיאל. לכל מודול M מעל A נסמן ב-M_i את הלוקאליזציה ביחס ל-a_i.*

1. *אם $m\in M$ איבר שתמונתו בכל M_i היא 0, אז $m=0$.*
2. *אם M מודול מעל A ו-$M_i=0$ לכל i, אז $M=0$.*
3. *אם $B\subseteq M$ תת-קבוצה שהתמונה שלה בכל M_i יוצרת את M_i, אז B יוצרת את M*
4. *אם $f:M\to N$ העתקה בין מודולים מעל A כך ש-$f_i:M_i\to N_i$ חד-חד-ערכית או על, אז גם f כזו.*
5. *אם כל A_i מצומצם אז גם A מצומצם.*
6. *אם M_i חסר פיתול לכל i, אז גם M חסר פיתול*

הוכחה. נשים לב ראשית, שאם $a_1,\dots,a_n$ יוצרים את כל החוג, אז זה נכון גם לכל חזקה שלהם: נסמן ב-I את האידיאל שנוצר על-ידי a_i^k, וב-$\bar{a}_i$ את התמונה של a_i ב-A/I. אז $\bar{a}_i{}^k=0$, כלומר, כל ה-$\bar{a}_i$ הם נילפוטנטים, ומצד שני, הם יוצרים את כל החוג. לפי תרגיל 2.3.4, כל החוג מורכב מנילפוטנטים, ולכן שווה ל-0, כלומר $1\in I$.

להוכחת הטענה הראשונה, לפי הנתון, קיימת חזקה k כך ש-$a_i^k m=0$ לכל i. כיוון שיש $b_1,\dots,b_n\in A$ כך ש-$a_1^kb_1+\dots+a_n^kb_n=1$, נקבל

$$m=1m=(a_1^kb_1+\dots+a_n^kb_n)m=0$$

יתר הסעיפים נובעים בקלות מהטענה הזו. □

תרגיל 3.2.8. השלימו את הוכחת הטענה

לא כל התכונות הן מקומיות. למשל, התכונה של מודול להיות חפשי אינה מקומית:

דוגמא 3.2.9. יהי $A=\mathbb{C}[x,y]/y^2-x^3+x$. אז A חוג הפונקציות על יריעה אפינית E שכוללת את הנקודה 0. נתבונן באידיאל המקסימלי $M=(x,y)$ ב-A המתאים לנקודה זו, בתור מודול M מעל A.

נשים לב ראשית שבכל חוג, אידיאל I הוא חופשי כמודול אם ורק אם הוא ראשי ונוצר על-ידי איבר שאינו מחלק אפס: אם $a,b\in I$ איברים שונים, אז $ab-ba=0$ היא תלות מעל A, ולכן יש לכל היותר יוצר אחד, והוא חופשי בדיוק אם הוא רגולרי. לכן, כדי להוכיח ש-M אינו חופשי, מספיק להוכיח שאידיאל זה אינו ראשי, וזה תרגיל (גאומטרית, E הוא משטח רימן מגנוס 1, כלומר טורוס. אם האידיאל היה ראשי, היוצר היה נותן פונקציה שמקבל כל ערך מרוכב בדיוק פעם אחת, כלומר איזומורפיזם לספירה של רימן.ניתן לנסח את הטיעון הזה גם אלגברית)

מאידך, אם הופכים שתיים מהפונקציות $x, x-1, x+1$ אז האידיאל נוצר על-ידי y (שאינו מחלק 0): למשל, $x = \frac{y^2}{x^2-1}$. כיוון ש-$x^2 - x + x^2 + x - 2(x^2-1) = 2$, קיבלנו כיסוי שעל כל אחד מחלקיו, המודול חופשי.

אותה דוגמא מראה, מאותה סיבה, שהתכונה של חוג להיות תחום ראשי אינה מקומית, וכך גם התכונה של להיות תחום פריקות יחידה. למעשה, אלה שתי הרחבות "בלתי תלויות" של המושג של תחום ראשי:

טענה 3.2.10. *תחום פריקות יחידה שהוא תחום ראשי מקומית הוא תחום ראשי.*

הוכחה. ראינו בתרגיל 2.5.10 שמספיק לבדוק שכל אידיאל ראשוני (שונה מ-0) הוא ראשי. נניח ש-I אידיאל כזה. לפי משפט קפלנסקי, I כולל איבר ראשוני a. כיוון שלהיות ראשוני תכונה סגורה תחת לוקאליזציה, מקומית I נוצר על-ידי a (שכן אם I ראשי וראשוני, ו-$a \in I$ אז a יוצר את I). לפי הטענה האחרונה, a יוצר את I. □

נדבר עוד בהמשך על התכונה של חוג להיות ראשי מקומית. באופן כללי, אפשר "להפוך בכוח" תכונה למקומית על-ידי זה שמבקשים שתתקיים רק מקומית. במקרים רבים, מקבלים מושג יותר שימושי. נראה דוגמאות בהמשך.

3.3 חוגים מקומיים

נניח שאנחנו עוסקים במרחב גאומטרי X, ואנחנו מעוניינים לחקור את התכונות המקומיות של X בסביבת נקודה $a \in X$. אם נקודת המבט שלנו היא דרך פונקציות על X (עם ערכים ב-k), אז אנחנו עשויים להסתכל על פונקציות f שמוגדרות בסביבה U של a. שוב, כיוון שמה שמעניין אותנו הוא רק ההתנהגות סביב a, אין אנו רוצים להבדיל בין f, לבין הצמצום של f לסביבה קטנה יותר $U' \subseteq U$ של a. צמצום כזה שימושי אם נניח נרצה להשוות את f לפונקציה g המוגדרת על סביבה אחרת V של a. נוכל אז לצמצם את שתי הפונקציות ל-$U \cap V$.

המסקנה היא שאנחנו רוצים להסתכל על הקבוצה ${}^{\{f:U\to k \mid a\in U\subseteq X\}}/_{\sim}$ כאשר U סביבה של a, ו-$\sim$ הוא יחס השקילות שנתון על-ידי $f \sim g$ אם יש סביבה V של a שמוכלת בתחום ההגדרה של f ושל g, שהצמצום של שתי הפונקציות אליה שווה. קבוצה זו O_a נקראת *הגבעול* (stalk) של פונקציות רגולריות בנקודה a, וכל איבר שלו נקרא *נבט* (germ) של פונקציה ב-a. אם k חוג, אז גם הגבעול חוג. אינטואיטיבית, היינו רוצים לקחת את הסביבה "הכי קטנה" של a; סביבה כזו לא קיימת (לרוב), אבל חוג הפונקציות עליה קיים. לחוג זה יש אידיאל מירבי יחיד: קבוצת הנבטים של פונקציות שמתאפסות ב-a (זה תרגיל, אבל בקרוב נוכל להוכיח זאת בקלות). בגלל הדוגמא הזו, חוג עם התכונה הזו נקרא חוג מקומי:

הגבעול

נבט

הגדרה 3.3.1. חוג עם אידיאל מירבי יחיד נקרא *חוג מקומי*

חוג מקומי

נחזור כעת להקשר שלנו. אם A חוג הפונקציות הרגולריות על יריעה אפינית X מעל שדה k, ו-$a \in X$ כמו קודם נקודה, $a : A \to k$, הגדרנו למעלה את הסביבות של a להיות קבוצות מהצורה X_f המכילות את a, כאשר X_f הקבוצה ב-X הנתונה על-ידי $f(x) \neq 0$. כיוון ש-$a \in X_f$, מתקיים $a(f) = f(a) \neq 0$. ראינו ש-X_f היא יריעה אפינית עם אלגברת פונקציות A_f. לכן, כל נבט במקרה זה מיוצג על-ידי איבר $g \in A_f$, כאשר $f(a) \neq 0$. בפרט, כל פונקציה שלא מתאפסת ב-a

מיוצגת על-ידי איבר הפיך בגבעול, ואנחנו מקבלים העתקה מהלוקאליזציה $S^{-1}A$ לגבעול, כאשר S היא קבוצת האיברים שלא מתאפסים ב-a.

סוף הרצאה 11, 27 באפריל

באופן כללי, אם $I \subseteq A$ אידיאל ב-A, אז I ראשוני אם ורק אם המשלים S של I תת-מונואיד. במקרה זה, $S^{-1}A$ הוא חוג מקומי שמסומן A_I, והאידיאל המירבי שלו הוא I. זה נובע מהטענה הבאה:

טענה 3.3.2. *אם I אידיאל בחוג A, אז A חוג מקומי עם אידיאל מירבי I אם ורק אם המשלים של I תת-חבורה (ביחס לכפל)*

הוכחה. כיוון ש-I אידיאל ממש, הוא לא יכול לכלול אף איבר הפיך. לכן, אם כל האיברים מחוץ ל-I הפיכים, I בהכרח מירבי.

בכיוון השני, ראינו שכל איבר שאינו הפיך מוכל באיזשהו אידיאל מירבי. אם האיבר לא שייך ל-I, אידיאל מירבי זה שונה מ-I. □

כיוון שכל איבר של S, המשלים של I, הוא הפיך ב-$S^{-1}A$, האידאל I מירבי. טענה זו גם מוכיחה את הטענה לעיל בנוגע לפונקציות אנליטיות, שכן כל פונקציה כזו שלא מתאפסת ב-a היא הפיכה בסביבה כלשהי של a (וההופכית אנליטית גם היא).

הנה כמה דוגמאות של חוגים מקומיים:

דוגמא 3.3.3. החוג $k[x]_{(x)}$, הלוקאליזציה של $k[x]$ באידיאל (x), הוא דוגמא לדיון הנ"ל. ניתן לתאר אותו כתת-חוג של $k(x)$, שדה הפונקציות הרציונליות, המורכב מפונקציות שהמכנה שלהן לא מתחלק ב-x.

דוגמא 3.3.4. תת-החוג של $\mathbb{Q}$ המורכב משברים בהם המכנה לא מתחלק ב-3 הוא חוג מקומי: האידיאל המירבי היחיד הוא זה נוצר על-ידי 3. זהו החוג $\mathbb{Z}_{(3)}$, הלוקאליזציה של $\mathbb{Z}$ ב-(3).

דוגמא 3.3.5. כל שדה הוא חוג מקומי

שלוש הדוגמאות הללו הן גם מקרים פרטיים של התרגיל הבא:

תרגיל 3.3.6. נניח ש-K שדה, ו-$v : K^\times \to \mathbb{Z}$ הערכה. הוכיחו שהקבוצה

$$O = \{x \in K \mid x = 0 \vee v(x) \geqslant 0\}$$

היא תת-חוג מקומי.

דוגמא 3.3.7. קבוצת הפונקציות הרציונליות בשני משתנים $\frac{p(x,y)}{q(x,y)}$ (מעל שדה) עבורן $q(0,0) \neq 0$ היא חוג מקומי, עם אידיאל מקסימלי (x,y).

תרגיל 3.3.8. הוכיחו שהחוג מדוגמא 2.3.6 הוא מקומי

לסיכום, אם I אידיאל ראשוני בחוג A, ו-$S = A \backslash I$, אז $A_I = S^{-1}A$ חוג מקומי, אם I הוא אידיאל מקסימלי שמתאים לנקודה a ביריעה אפינית ש-A חוג הפונקציות שלה, יש לנו העתקה מ-A_I לגבעול ב-a. אנחנו טוענים שההעתקה הזו היא איזומורפיזם. ניתן להוכיח זאת בקלות באמצעות טענה 3.0.16, אבל טענה זו לא הוכחה עדיין, ולכן נוכיח את הטענה באופן יותר ישיר, על-ידי כך שנראה שהגבעול מקיים את התכונה האוניברסלית המתאימה. נעשה זאת על-ידי כך שנתאר את בניית הגבעול כמקרה פרטי של בנייה יותר כללית.

הגדרה 3.3.9. נניח ש-C קבוצה של קבוצות, ו-M קבוצה של פונקציות ביניהן. *הגבול הישר* של (C,M) הוא קבוצה E ביחד עם פונקציות $f_X : X \to E$ לכל $X \in C$, כך ש: הגבול הישר

1. לכל $g : X \to Y$ ב-M מתקיים $f_Y \circ g = f_X$

2. E ביחד עם ההעתקות f_X אוניברסלית ביחס לתכונה זו: אם E' קבוצה עם העתקות $f'_X : X \to E'$ לכל X ב-C, והעתקות אלה מקיימות $f'_Y \circ g = f'_X$ לכל $g \in M$, אז יש העתקה יחידה $t : E \to E'$ כך ש-$t \circ f_X = f'_X$ לכל X ב-C.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "g_1"] \arrow[dd, "g_2"'] \arrow[drr, bend left, "f_X"] \arrow[dddrr, dashed, bend right, "f'_X"] & & \\
& Y \arrow[r, "f_Y"] \arrow[dl, "g_3"] \arrow[ddr, dashed, "f'_Y"] & E \arrow[dd, dotted, "!t"] \\
Z \arrow[d, "g_4"] \arrow[urr, bend right, "f_Z"'] \arrow[drr, dashed, bend right, "f'_Z"'] & & \\
\vdots & & E'
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

אם C קבוצה של חוגים או מודולים, ו-M העתקות ששומרות על מבנה זה, הגבול הישר מוגדר באופן דומה.

אם כוללים בקבוצה M את העתקת הזהות של כל איבר ב-C, אז אפשר לוותר על C ולדבר רק על M. הקבוצה M נקראת לרוב *דיאגרמה*, ונאמר ש-E', ביחד עם ההעתקות f'_X, *משלימה* את הדיאגרמה. לכן, הגבול הישר הוא השלמה אוניברסלית של הדיאגרמה. לעתים, נוח להניח ש-M סגורה תחת הרכבות. זה לא מגביל את הכלליות: קל לבדוק שאם M' הסגור של M תחת הרכבות, אז E משלימה את M אם ורק אם היא משלימה את M' (ובפרט, היא הגבול הישר של M אם ורק אם היא הגבול הישר של M'). דיאגרמה

ההגדרה די כללית, אבל מקרים פרטיים שלה די מוכרים:

דוגמא 3.3.10. אם הקבוצה C (ולכן גם M) ריקה, אז כל קבוצה E' משלימה, באופן ריק ויחיד, את הדיאגרמה בהגדרה. לכן, אנחנו מחפשים קבוצה E שיש לה העתקה יחידה לכל קבוצה. זוהי הקבוצה הריקה. באופן דומה, בהקשר של חוגים, הגבול הישר הוא במקרה הזה $\mathbb{Z}$, ובמקרה של מודולים, זהו מודול האפס.

דוגמא 3.3.11. אם C מורכבת משתי קבוצות, X ו-Y, ו-M ריקה (או מורכבת מהעתקות הזהות על X ועל Y), אנחנו מחפשים קבוצה E עם העתקות מ-X ומ-Y, שתהיה אוניברסלית. האיחוד הזר של שתי הקבוצות מקיים את הדרישות הללו.

במקרה ש-X ו-Y הם מודולים, האיחוד הזר של שני מודולים אינו מודול. האינטואיציה היא שאנחנו מחפשים מודול E שמכיל את X ואת Y בצורה "החופשית ביותר". בפרט, לכל $x \in X$

ו-$y \in Y$, הסכום שלהם צריך להיות שייך ל-E. אפשר, לכן, לבנות E כקבוצת הסכומים $x \oplus y$, עם יחסים מתאימים. המודול הזה נקרא *הסכום הישר* של X ו-Y (אפשר לממש אותו גם כמכפלה $X \times Y$) הסכום הישר

דוגמא 3.3.12. אם C כוללת שתי קבוצות X, Y ו-M כוללת העתקה אחת $f : X \to Y$, אז הגבול הישר הוא Y.

את הדוגמא האחרונה אפשר להכליל:

תרגיל 3.3.13. הוכיחו שאם C כוללת קבוצה X, ולכל $Y \in C$ הקבוצה M כוללת העתקה $g_Y : Y \to X$, שביחד מהווים השלמה של הדיאגרמה, אז השלמה זו היא הגבול הישר.

דוגמא 3.3.14. נניח ש-C כוללת שתי קבוצות X, Y, ושתי פונקציות $g, h : X \to Y$. אנחנו מחפשים: קבוצה E, והעתקות $f_X : X \to E$ ו-$f_Y : Y \to E$ כך ש-$f_Y \circ g = f_Y \circ h = f_X$. נבנה שוב את E כקבוצה החפשית ביותר שמקיימת את התנאים: האיחוד הזר $X \coprod Y$ של X ושל Y מגיע עם העתקות מ-X ומ-Y. הן לא בהכרח יקיימו את התנאים, אבל ניתן לכפות זאת על-ידי חלוקה ביחס שקילות: יחס השקילות שנוצר על-ידי $x \sim g(x) \sim h(x)$. אז העובדה שהקבוצה המתקבלת מקיימת את תנאי ההגדרה נובעת מהתכונה האוניברסלית של יחסי שקילות.

תרגיל 3.3.15.
1. הוכיחו שאם, בדוגמא האחרונה, X, Y הם מודולים מעל חוג A, ו-g, h הן העתקות של מודולים, אז לקבוצה שמתקבלת יש מבנה של מודול, שהוא הגבול הישר של המערכת (רמז: הסתכלו על $g - h$)
2. הוכיחו שהטענה המקבילה עבור חוגים אינה נכונה: אם X, Y חוגים ו-g, h העתקות של חוגים, הבנייה הנ"ל לא נותנת חוג (עבורו f_Y העתקה של חוגים). הוכיחו שבכל זאת, יש חוג שהוא הגבול הישר של הדיאגרמה הזו.

הדוגמא האחרונה מרמזת איך ניתן לבנות גבול ישר של מערכת כלשהי של קבוצות. כרגיל, היחידות נובעת באופן כללי מהיות התכונה אוניברסלית.

טענה 3.3.16. *לכל מערכת של קבוצות יש גבול ישר, יחיד עד כדי העתקה יחידה שמתחלפת עם המערכת.*

הוכחה. נניח ש-C קבוצה של קבוצות, ו-M קבוצה של פונקציות ביניהן. נגדיר $E = \coprod C/\sim$ כאשר $\coprod C$ האיחוד הזר של הקבוצות ב-C, ו-$\sim$ יחס השקילות שנוצר על ידי היחס: $x \sim y$ אם $y = f(x)$ עבור $f \in M$. לכל $X \in C$ ההרכבה של ההכלה של X באיחוד הזר עם ההעתקה הטבעית למנה נותנת העתקה $f_X : X \to E$.

נובע ישירות מההגדרה ש-E, ביחד עם ההעתקות האלה משלימה את הדיאגרמה. כדי להוכיח שזהו הגבול, נניח ראשית ש-M ריקה. אז E האיחוד הזר של C, ואם E' קבוצה שמשלימה את הדיאגרמה, עם העתקות f'_X, אז האיחוד הזר של כל ההעתקות הללו נותן העתקה מ-E ל-E', וברור שהיא יחידה.

במקרה הכללי, נסמן ב-E_0 את האיחוד הזר. ראינו עכשיו שיש פונקציה יחידה g_0 מ-E_0 ל-E' שמתחלפת עם כל ההעתקות. כיוון ש-E', עם ההעתקות שלה, משלימה את הדיאגרמה, לכל $x \sim y$ ב-E_0 מתקיים $g_0(x) = g_0(y)$, ולכן g_0 נותנת העתקה (יחידה) $g : E \to E'$. □

כפי שראינו בדוגמאות האחרונות, לא ניתן להכליל את הטענה ישירות למודולים או חוגים, אבל מיד נראה שההוכחה נותנת את התשובה הנכונה במקרים מסוימים. בפרט, נניח כמו בתחילת הסעיף, שנתון מרחב X ונקודה a בו. אז לכל סביבה פתוחה U של a יש לנו חוג A_U של פונקציות מ-U ל-k. הצמצום של פונקציות מקבוצה U לקבוצה V שמוכלת ב-U נותן העתקה של חוגים מ-A_U ל-A_V, ואם C היא קבוצת החוגים הללו, ו-M קבוצת העתקות הצמצום, אז הבנייה שתוארה בהוכחת הטענה האחרונה מתלכדת, עבור המערכת הזו, עם האופן בו בנינו את הגבעול בנקודה a. בפרט, אנחנו מקבלים חוג, וקל לראות שחוג זה הוא אכן הגבול של המערכת. התכונה שמאפשרת לטיעון זה לעבוד נתונה בהגדרה הבאה.

מערכת מסננת

הגדרה 3.3.17. מערכת לא ריקה של קבוצות C והעתקות M נקראת *מערכת מסננת* אם:

1. לכל $X,Y\in C$ יש $Z\in C$ והעתקות $f:X\to Z$ ו-$g:Y\to Z$ ב-M
2. אם $f,g:X\to Y$ שתי העתקות ב-M אז יש $Z\in C$ והעתקה $h:Y\to Z$, כך ש-$h\circ f=h\circ g$

מערכת מסננת של חוגים או מודולים מוגדרת באותה צורה.

דוגמא 3.3.18. אם C אוסף מכוון של קבוצות (כלומר, לכל $x,y\in C$ יש $z\in C$ כך ש-$x,y\subseteq z$), ו-M קבוצת ההכלות ביניהן, אז (C,M) מערכת מסננת (התנאי השני נכון באופן כמעט ריק במקרה זה).

דוגמא 3.3.19. הדוגמא של החוגים A_U שמתקבלים מהסביבות הפתוחות של נקודה היא דוגמא למערכת מסננת של חוגים: החוגים A_U ו-A_V ממופים שניהם, דרך העתקת הצמצום, ל-$A_{U\cap V}$, והתנאי השני שוב נכון באופן ריק. נשים לב שככלל, ההעתקות במערכת כזו אינן הכלות.

כבר אמרנו שבמערכת כמו בדוגמא האחרונה, לגבול הישר (כקבוצה) יש מבנה טבעי של חוג, וחוג זה (הגבעול) הוא הגבול הישר כמערכת של חוגים. זה נכון באופן כללי למערכות מסננות:

טענה 3.3.20. *אם C ו-M מערכת מסננת של חוגים או של מודולים, אז יש לה גבול ישר. גבול זה שווה, כקבוצה, לגבול הישר של המערכת כמערכת של קבוצות.*

גבול ישר מסונן

גבול ישר של מערכת מסננת נקרא *גבול ישר מסונן*.
לפני הוכחת הטענה, נוח להוכיח את טענת העזר הבאה:

למה 3.3.21. *אם (C,M) מערכת מסננת, אז לכל תת-מערכת סופית (C_0,M_0) יש איבר $X\in C$ והעתקות ב-M שמשלימים אותה*

תרגיל 3.3.22. הוכיחו את הלמה

הוכחת הטענה. נתמקד במקרה של חוגים, המקרה של מודולים דומה. נסמן ב-E את הגבול של המערכת כקבוצה. עלינו להגדיר את פעולות החיבור והכפל על E. כיוון ש-E התקבלה כמנה של האיחוד הזר ביחס שקילות, על מנת להגדיר את הפעולה מספיק להגדיר פעולה מהאיחוד הזר, שאינווריאנטית ליחס השקילות.

נבחר $x \in X \in C$ ו-$y \in Y \in C$. אז קיים חוג $Z \in C$ והעתקות $g_X : X \to Z$ ו-$g_Y : Y \to Z$ ב-M. נגדיר $x \cdot y = g_X(x)g_Y(y)$ (כאשר צד ימין הוא כפל ב-Z). זה תלוי בבחירה של g_X ושל g_Y (ושל הטווח), אבל אם g'_X ו-g'_Y בחירה אחרת, עם טווח Z', אז לפי הלמה יש השלמה $h_Z : Z \to W$ ו-$h'_Z : Z' \to W$ למערכת הזו, והואיל וכל הפונקציות הן העתקות של חוגים, מתקיים

$$h_Z(f_X(x)g_Y(y)) = h_Z(f_X(x))h_Z(g_Y(y)) = \\ h'_Z(f'_X(x))h'_Z(g'_Y(y)) = h'_Z(f'_X(x)g'_Y(y))$$

ולכן $f_X(x)g_Y(y)$ שקול ל-$f'_X(x)g'_Y(y)$, והפעולה מוגדרת היטב במנה. ההגדרה של חיבור והבדיקה שזה נותן מבנה של חוג, ושההעתקות f_X הן העתקות של חוגים דומות.

כדי להראות את התכונה האוניברסלית, נשים לב שלכל חוג E' שמשלים את הדיאגרמה יש העתקה יחידה f של קבוצות מ-E ל-E', ולכן צריך רק לבדוק שהעתקה זו שומרת על מבנה החוג. אם $x, y \in E$, אפשר להניח, שוב לפי הלמה, שיש $A \in C$ ו-$a, b \in A$ כך ש-$x = f_A(a)$ ו-$y = f_A(b)$. אז $xy = f_A(ab)$ ו-$f(x) = f'_A(a)$ ו-$f(y) = f'_A(b)$, ולכן $f(x)f(y) = f'_A(a)f'_A(b) = f'_A(ab) = f(xy)$, שכן f'_A העתקה של חוגים. הבדיקה עבור חיבור דומה $\square$

תרגיל 3.3.23. השלימו את הפרטים בהוכחה

סוף הרצאה 12, 30 באפריל

בהמשך נזדקק לטענת העזר הבאה:

למה 3.3.24. *נניח ש-$\langle C, M\rangle$ מערכת מסננת של קבוצות, עם גבול ישר E והעתקות $f_X : X \to E$, ונניח ש-$x \in X \in C$ ו-$y \in Y \in C$ שני איברים המקיימים $f_X(x) = f_Y(y)$. אז יש $Z \in C$ ו-$g : X \to Z$ ו-$h : Y \to Z$ כך ש-$g(x) = h(y)$*

נעיר שבגלל טענה 3.3.20, הטענה נכונה גם לחוגים ולמודולים.

הוכחה. לפי הבניה של הגבול, אם $f_X(x) = f_Y(y)$, אז $x \sim y$. זה מוסבר על-ידי מספר סופי של העתקות ב-M, ולפי למה 3.3.21, יש קבוצה Z עם העתקות ב-M שמשלימה את המערכת הסופית הזו. זו הקבוצה שאנחנו מחפשים. $\square$

בחזרה ללוקאליזציה, נזכיר שעבור נקודה a ביריעה אפינית X, עם חוג פונקציות A, רצינו לקשר בין הלוקאליזציה באידיאל המתאים $m = \operatorname{Ker} a$ של A לגבעול בנקודה זו. למעשה, אפשר לעשות זאת באופן הרבה יותר כללי:

טענה 3.3.25. *לכל תת-קבוצה S בחוג A, נסמן ב-C_0 את אוסף תתי-הקבוצות הסופיות של S. נסמן ב-C את האוסף $\{T^{-1}A \mid T \in C_0\}$, וב-$M$ את אוסף העתקות הלוקאליזציה $T^{-1}A \to R^{-1}A$, עבור $T \subseteq R$. אז:*

1. *המערכת (C, M) היא מערכת מסננת של חוגים*
2. *הגבול הישר של המערכת הזו הוא הלוקאליזציה $S^{-1}A$*

בפרט, הלוקאליזציה $S^{-1}A$ קיימת לכל חוג A וכל תת-קבוצה $S\subseteq A$. טענה דומה נכונה גם למודולים.

הוכחה. 1. אם $T_1,T_2\in C_0$ אז גם $T=T_1\cup T_2\in C_0$ ולכן $T^{-1}A\in C$ והעתקות הלוקאליזציה $T_i^{-1}A\to T^{-1}A$ הן ב-M. התנאי השני מתקיים באופן ריק משום שיש לכל היותר העתקה אחת בין כל שני איברי C.

2. נסמן ב-B את הגבול של המערכת. כיוון ש-$\varnothing\in C_0$, החוג $A\in C$, ובפרט יש לנו העתקה l מ-A ל-B. זו תהיה העתקת הלוקאליזציה. לכל $T\subseteq S$ סופית, נסמן ב-$l_T:A\to T^{-1}A$ את העתקת הלוקאליזציה, וב-$f_T:T^{-1}A\to B$ את ההעתקה שנתונה על-ידי הגבול הישר. נשים לב שלכל T סופית, $f_T\circ l_T=l$.

נניח ש-D חוג ו-$g:A\to D$ העתקה כך ש-$g(s)$ הפיך לכל $s\in S$. בפרט, לכל תת-קבוצה סופית $T\subseteq S$ האיבר $g(t)$ הפיך לכל $t\in T$, ולכן ישנה העתקה יחידה $g_T:T^{-1}A\to D$. אם $T\subseteq R\in C_0$, אז $g_R\circ h=g_T$, כאשר $h\in M$ העתקת הלוקאליזציה מ-$T^{-1}A$ ל-$R^{-1}A$. במלים אחרות, D משלים את הדיאגרמה (C,M), ולכן יש העתקה יחידה מהגבול הישר B ל-D, כנדרש.

לסיום ההוכחה, עלינו להוכיח שכל איבר $s\in S$ הפיך ב-B. עבור $T=\{s\}$, איבר זה הפיך כבר ב-$T^{-1}A$, והתמונה של ההופכי ב-B היא ההופכי של תמונת s.

הטענה האחרונה נובעת מכך שהראינו את הקיום של הלוקאליזציה עבור קבוצות סופיות בטענה 3.0.5 (ביחד עם תרגיל 3.0.6), ראינו עכשיו שהמקרה הכללי הוא גבול ישר מסונן של לוקאליזציות כאלה, וראינו שגבולות ישרים כאלה קיימים עבור חוגים. שוב, הטיעונים עבור מודולים מקבילים לחלוטין. □

נרשום שוב את המסקנה שהיוותה מוטיבציה כאן:

מסקנה 3.3.26. *אם $\mathbf{X}=\langle X,A\rangle$ היא יריעה אפינית מעל שדה k, ו-$x:A\to k$ היא נקודה של $\mathbf{X}$, אז הגבעול של $\mathbf{X}$ ב-x (ביחס לקבוצות פתוחות זריצקי) הוא הלוקאליזציה של A באידיאל המקסימלי m של פונקציות שמתאפסות ב-x.*

הוכחה. באופן כללי, הגבעול הוא הגבול הישר המסונן של החוגים A_U, כאשר U סביבה פתוחה של x, ו-A_U קבוצת הפונקציות על U. למעשה, ניתן לקחת רק את הקבוצות U באיזשהו בסיס של הטופולוגיה. במקרה האלגברי, בסיס כזה נתון על-ידי קבוצות פתוחות בסיסיות X_a (כאשר $a\notin m$), וחוג הפונקציות על קבוצה כזו הוא הלוקאליזציה A_a. □

בתור עוד מסקנה, נוכל להחזיר חוב נוסף:

הוכחת טענה 3.0.16. עלינו לחשב את הגרעין של הלוקאליזציה $l:M\to S^{-1}M$. ראינו כבר שאם $sm=0$ עבור איזשהו $s\in S$, אז $l(m)=0$. נניח ש-$l(m)=0$. לפי למה 3.3.24, ולפי בניית הלוקאליזציה, יש תת-קבוצה סופית $T\subseteq S$ כך שהתמונה של $m\in M$ ב-$T^{-1}M$ היא 0. עכשיו הטענה נובעת מתרגיל 3.0.7 (ליתר דיוק, מהמקביל שלו למודולים). □

הגבול הישר נותן דרך אחת לתאר את בניית הלוקאליזציה. שתי דרכים נוספות נתונות בתרגילים הבאים:

תרגיל 3.3.27. לתרגיל 3.0.7 יש הכללה ישירה לקבוצה כלשהי. נניח ש-A חוג, ו-$S \subseteq A$ תת-קבוצה. נתבונן בקבוצה $X = \{x_s \mid s \in S\}$ של משתנים, ונסמן $B = {}^{A[X]}/_{I}$ כאשר $A[X]$ אלגברת הפולינומים במשתנים אלה מעל A, ו-I האידיאל שם שנוצר על-ידי האיברים $sx_s - 1$, עבור כל ה-$s \in S$. הוכיחו ש-B (יחד עם ההעתקה הטבעית שלה מ-A) הוא הלוקאליזציה $S^{-1}A$.

תרגיל 3.3.28. אפשר להשתמש בתיאור מטענה 3.0.16 כדי לבנות את הלוקאליזציה במפורש (זו הכללה של בניית $\mathbb{Q}$ מתוך $\mathbb{Z}$ שעושים בכיתה ג): נניח ש-$S \subseteq A$ תת-מונואיד. נסמן ב-I את הקבוצה $\{a \in A \mid \exists s \in S\; sa = 0\}$. הוכיחו ש-$I$ אידיאל. נסמן ב-$B = {}^{A}/_{I}$ את המנה, ב-T את התמונה של S ב-B. נגדיר יחס $\sim$ על $B \times T$ על-ידי: $\langle b_1, t_1\rangle = \langle b_2, t_2\rangle$ אם $b_1t_2 = b_2t_1$. הוכיחו ש-$\sim$ יחס שקילות, ושהמנה בו (עם פעולות חוג מוגדרות בהתאם) היא $S^{-1}A$.

3.4 הלמה של נאקאיימה

ראינו שאם $m \subseteq A$ הוא אידיאל מירבי שמתאים לנקודה x, אפשר לחשוב על הלוקאליזציה ב-m כמייצגת את "הסביבה הקטנה ביותר" של x. זה נותן לנו מושג נוסף של תכונה מקומית: נגיד שתכונה P של חוגים היא *תכונה מקומית במובן החזק* אם מקיום התכונה לכל לוקאליזציה A_m של חוג A בכל אידיאל מירבי m, נובע שהתכונה מתקיימת ב-A. כיוון שהתכונות שאנחנו מדברים עליהן נשמרות תחת לוקאליזציה, המושג הזה אכן יותר חזק: תכונה מקומית במובן החזק

טענה 3.4.1. *נניח ש-P תכונה של חוגים (או של מודולים) שנשמרת תחת לוקאליזציה. אם P מקומית במובן החזק אז היא מקומית.*

הוכחה. נניח ש-$f_1, \dots, f_n \in A$ יוצרים את A כאידיאל, ונניח ש-P נכונה על כל A_{f_i}. אם $m \subseteq A$ אידיאל מירבי, אז קיים i כך ש-$f_i \notin m$. לכן, A_m לוקאליזציה של A_{f_i}, ולפי ההנחה, P נכונה עבור A_m. כיוון ש-P מקומית במובן החזק, P נכונה עבור A. □

כל התכונות שהוכחנו בטענה 3.2.7 שהן מקומיות הן *למעשה* מקומיות במובן החזק. הנה דוגמא נוספת לתכונה כזו. מודול M מעל חוג A הוא *מודול מוצג סופית* אם הוא נוצר סופית, והגרעין של ההעתקה המתאימה מ-A^n ל-M גם הוא נוצר סופית. במילים אחרות, הוא נתון על-ידי מספר סופי של יוצרים ויחסים. מודול מוצג סופית

תרגיל 3.4.2. נניח ש-A חוג. העתקה $f : M \to N$ של מודולים מעל A *מתפצלת* אם יש לה הפכית חד-צדדית $s : N \to M$, כלומר $f \circ s = Id_N$.

1. הוכיחו שאם העתקה מתפצלת, אז היא על. הראו דוגמא שהכיוון השני לא בהכרח נכון.
2. הוכיחו שההעתקה f מתפצלת אם ורק אם ההעתקה $g \mapsto f \circ g$ מ-$\operatorname{Hom}(N, M)$ ל-$\operatorname{Hom}(N, N)$ היא על
3. נניח ש-N מוצג סופית. הוכיחו שאם לכל אידיאל מירבי p, ההעתקה $f_p : M_p \to N_p$ מתפצלת, אז f מתפצלת (רמז: דרך אחת לעשות זאת היא להראות שבמקרה ש-N מוצג סופית, ההעתקה מ-$\operatorname{Hom}_A(N, M)_p$ ל-$\operatorname{Hom}_{A_p}(N_p, M_p)$ היא איזומורפיזם. אפשר גם לעשות זאת ישירות)

זה נוח, משום שבמובנים מסוימים, יותר קל לעבוד עם חוגים מקומיים: הם לא מאוד רחוקים משדות. מקרה אחד של העיקרון הזה נקרא הלמה של נאקאיימה:

טענה 3.4.3 (הלמה של נאקאיימה). *נניח ש-M מודול נוצר סופית מעל חוג מקומי $\langle A,p\rangle$, ונניח ש-$M=pM$. אז $M=0$.*

הוכחה. באינדוקציה על מספר היוצרים. עבור 0 יוצרים אין מה להוכיח.

נניח ש-M נוצר על-ידי $m_1,\dots,m_k$. לפי ההנחה, $m_1=\sum a_i m_i$, כאשר $a_i\in p$. אז $(1-a_1)m_1=\sum_{i>1}a_i m_i$. כיוון ש-$a_1\in p$ ו-A חוג מקומי, $1-a_1$ הפיך, ולכן m_1 צירוף לינארי של היוצרים האחרים. באינדוקציה, $M=0$. $\square$

מסקנה 3.4.4. *נניח ש-M מודול נוצר סופית מעל חוג מקומי $\langle A,p\rangle$. אם $m_1,\dots,m_k\in M$ איברים שהתמונות שלהם פורשות את המרחב הוקטורי M/pM (מעל A/p), אז $m_1,\dots,m_k$ יוצרים את M.*

הוכחה. נסמן ב-N את תת-המודול שנוצר על-ידי $m_1,\dots,m_k$, ונסמן $L=M/N$. אז L נוצר סופית (על-ידי כל קבוצת יוצרים של M), ו-$L/pL=M/pM/N/pN=0$, כלומר $L=pL$. לכן, לפי הלמה של נאקאיימה, $L=0$, כלומר $M=N$. $\square$

גאומטרית, אפשר לחשוב על M כנבטים של פונקציות בסביבת הנקודה (המתאימה ל-) p, ועל התמונות שלהן ב-M/pM כערכים בנקודה. אז הגרסה הזו של הלמה אומרת שאם ערכי הפונקציות בנקודה מסוימת פורסים את כל מרחב הערכים, אז זה נכון גם בסביבה של הנקודה.

ההנחה ש-M נוצר סופית מראש חשובה כאן: למשל, המודול $M=\mathbb{Q}$ מעל $A=\mathbb{Z}_{(3)}$ מקיים $3M=M$, אבל $M\neq 0$.

מסקנה 3.4.5. *נניח ש-M מודול נוצר סופית מעל חוג A, ונניח ש-$\phi:M\to M$ העתקה של מודולים שהיא על. אז ϕ איזומורפיזם*

הוכחה. לפי טענה 3.2.7, מספיק להוכיח זאת כאשר A חוג מקומי, עם אידיאל מירבי p. נתבונן בחוג $B=A[t]$, ובאידיאל q בו שנוצר על-ידי p ו-t. אז q אידיאל מירבי (כי $B/q=A/p$), ואפשר לחשוב על M כעל מודול מעליו, כאשר t פועל כ-ϕ. אז לפי הנתון, $qM=M$, ולכן הלוקאליזציה של M ביחס ל-q היא 0. זה אומר שיש $b\in B\backslash q$, כך ש-$bM=0$. אם $b\in A$ אז $M=0$ ואין מה להוכיח. לכן, b הוא פולינום לא טריוויאלי $b(t)=a+tr(t)$, כאשר $a\notin p$. כיוון ש-A חוג מקומי, a הפיך, וניתן להניח ש-$a=1$. אז $-r(t)$ פועל על M כהפכי של ϕ. $\square$

נשים לב שבמהלך ההוכחה מצאנו פולינום b מעל A שמתאפס על-ידי ϕ. קיומו של פולינום כזה הוא מסקנה של טענה יותר ספציפית, משפט קיילי–המילטון, אותה נראה בהמשך (מקרה פרטי של המשפט הזה מופיע באלגברה לינארית).

תרגיל 3.4.6. הוכיחו שאם M מודול חפשי על m יוצרים מעל חוג A, אז כל קבוצה של m יוצרים היא בלתי תלויה. שני מודולים חופשיים הם איזומורפיים אם ורק אם הם חופשיים על אותו מספר יוצרים

מודול M נקרא *מודול פרויקטיבי* אם כל העתקה ממודול N על M מתפצלת. מודול פרויקטיבי

תרגיל 3.4.7. הוכיחו שכל מודול פרויקטיבי נוצר סופית מעל חוג מקומי הוא חופשי. הסיקו (בעזרת תרגיל 3.4.2) שעבור מודולים מוצגים סופית, "פרויקטיבי" זה אותו דבר כמו "חופשי מקומית"

מבחינה גאומטרית, מודולים אלה הם האנלוג לאגדים וקטוריים: משפחה של מרחבים וקטוריים, שעל קבוצות פתוחות מספיק קטנות הופכות לטריוויאליות.

הלמה של נאקאיימה נכונה באופן קצת יותר כללי מאשר רק לחוגים מקומיים:

תרגיל 3.4.8. נניח ש-A חוג ו-$I \subseteq A$ אידיאל. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

1. לכל $a \in I$, האיבר $1 + a$ הפיך
2. I מוכל בחיתוך של כל האידיאלים המירביים של A (חיתוך זה נקרא *רדיקל ג'קובסון*) רדיקל ג'קובסון
3. הלמה של נאקאיימה מתקיימת עבור I (כלומר, לכל מודול נוצר סופית M מעל A, אם $IM = M$ אז $M = 0$)

סוף הרצאה 4, 13 במאי

4 תנאי סופיות

4.1 מודולים נתריים

הגדרה 4.1.1. מודול M מעל חוג A נקרא *מודול נתרי* אם כל תת-מודול שלו נוצר סופית מודול נתרי
החוג A נקרא *חוג נתרי* אם הוא נתרי כמודול מעל עצמו חוג נתרי

כיוון שכל חוג נוצר סופית כמודול מעל עצמו, וכיוון שתת-מודול של A זה אידיאל, ההגדרה הזו מתיישבת עם הגדרה 1.5.2. הניסוח בהגדרה זו תלוי (לכאורה) בבחירת יוצרים, ולעתים יותר נוח (וגם יותר ברור גאומטרית) לעבוד עם הגדרה שקולה:

הגדרה 4.1.2. נאמר שקבוצה סדורה חלקית $\langle P, \leqslant \rangle$ מקיימת את *תנאי השרשרת העולה* אם לא קיימת שרשרת עולה אינסופית $a_0 < a_1 < \dots$ ב-P. תנאי השרשרת העולה

במלים אחרות, לא קיים שיכון של $\mathbb{N}$ (עם הסדר הרגיל) ב-P. תנאי השרשרת היורד מוגדרת באופן דומה. במלים אחרות, זהו תנאי השרשרת העולה על הסדר ההפוך (סדר כזה נקרא גם *סדר טוב*) סדר טוב

דוגמא 4.1.3. קבוצת השלמים השליליים (עם הסדר הרגיל) מקיימת את תנאי השרשרת העולה אך לא היורד. כך גם קבוצת תתי-הקבוצות הקו-סופיות (אלה שהמשלימה שלהן סופית) של תת-קבוצה אינסופית (עם סדר ההכלה)

טענה 4.1.4. *מודול M מעל חוג A הוא נתרי אם ורק אם קבוצת תתי-המודולים שלו מקיימת את תנאי השרשרת העולה.*

הוכחה. נניח ש-M לא נוצר סופית. אז לכל סדרה סופית $m_1, \dots, m_k \in M$ יש איבר $m_{k+1} \in M$ שלא נמצא בתת-המודול M_k שנוצר על-ידי $m_1, \dots, m_k$. זה נותן סדרה עולה אינסופית של תתי-מודולים.

מאידך, נניח ש-M_i סדרה עולה אינסופית של תתי-מודולים. אז $N=\bigcup_i M_i$ הוא תת-מודול של M. אם N נוצר סופית, קיים i עבורו קבוצה סופית של יוצרים נמצאת ב-M_i. לכן $M_i=N$, בסתירה לאינסופיות השרשרת. $\square$

ראינו שמבחינה גאומטרית, אידיאלים מתאימים לתתי-קבוצות סגורות של היריעה המתאימה. לכן, תנאי שרשרת עולה על אידיאלים מתורגם לתנאי שרשרת יורד על תתי-קבוצות סגורות זריצקי: אם החוג של יריעה אפינית הוא נתרי, אז כל שרשרת יורדת של תתי קבוצות סגורות של היריעה היא סופית. מרחב עם התכונה הזו נקרא *מרחב נתרי*. זה כמעט לעולם לא קורה בטופולוגיות הקלאסיות. מרחב נתרי

הנה מספר דוגמאות:

דוגמא 4.1.5. כל שדה הוא נתרי

באופן יותר כללי:

דוגמא 4.1.6. כל תחום ראשי הוא נתרי

נראה דוגמאות נוספות בהמשך. למעשה, הרוב המכריע של חוגים שנדבר עליהם יהיו נתריים, אז מעניין לראות חוגים שאינם כאלה:

דוגמא 4.1.7. אם S קבוצה אינסופית ו-A חוג שונה מ-0, אז $A[S]$ אינו חוג נתרי

דוגמא 4.1.8. נניח ש-k שדה אינסופי. אז החוג $A\subseteq k[x,y]$ המורכב מפולינומים שערכם על ציר ה-x קבוע אינו נתרי

תרגיל 4.1.9. הוכיחו את האמור בדוגמא האחרונה (רמז: זהו חוג מקומי והאידיאל המירבי שלו לא נוצר סופית)

בהמשך נראה שאלגברת הפולינומים $k[x,y]$ היא חוג נתרי, אז הדוגמא האחרונה מראה בפרט שתת-חוג של חוג נתרי אינו בהכרח נתרי

כדי להראות דוגמא נוספת, נשים לב ראשית:

טענה 4.1.10. *אם A תחום נתרי, אז כל איבר שונה מ-0 בו הוא מכפלה של אי-פריקים. בפרט, תחום כזה הוא תחום פריקות יחידה אם ורק אם כל איבר אי-פריק בו הוא ראשוני.*

תרגיל 4.1.11. הוכיחו את הטענה. הסיקו ממנה את טענה 2.5.18 (כל תחום ראשי הוא תחום פריקות יחידה)

תרגיל 4.1.12. יהי A תת-החוג של $k[x,y]_y$ שנוצר (מעל השדה k) על-ידי y ו-xy^k עבור $k\in\mathbb{Z}$. הוכיחו שחוג זה אינו נתרי

דוגמא 4.1.13. יהי A הגבעול של פונקציות רציפות סביב 0 ב-$\mathbb{R}$. האידיאל המקסימלי (של פונקציות שמתאפסות ב-0) אינו נוצר סופית, משיקולי גידול.

המטרה הבאה שלנו להראות שקיימים "מספיק" חוגים ומודולים נתריים. נתחיל ממודולים:

טענה 4.1.14. *אם $0\to L\to M\to N\to 0$ סדרה מדויקת של מודולים, אז L,N נתריים אם ורק אם M נתרי.*

הוכחה. נניח ש-M נתרי. כל תת-מודול של L הוא גם תת-מודול של M ולכן L נתרי. מאידך, התמונה ההפוכה של סדרה עולה של מודולים ב-N היא סדרת עולה של מודולים ב-M, אז גם N נתרי.

נניח עכשיו ש-M_i סדרה עולה של מודולים ב-M. אם L נתרי, הסדרה $M_i \cap L$ מתייצבת, באיזשהו מודול L', אחרי מספר סופי של צעדים. אפשר לעבור למנה ולהניח ש-$L' = 0$. אבל אז ההעתקה ל-N היא חד-חד-ערכית על כל ה-M_i, אז הם נותנים סדרה עולה של מודולים ב-N. אם N נתרי, הסדרה סופית. $\square$

מסקנה 4.1.15. *אם A חוג נתרי, אז מודול מעליו הוא נתרי אם ורק אם הוא נוצר סופית, אם ורק אם הוא מוצג סופית.*

הוכחה. ראשית, לכל $n > 0$ יש סדרה מדויקת $0 \to A^{n-1} \to A^n \to A \to 0$ של מודולים מעל A, אז עבור $M = A^n$ המסקנה נובעת באינדוקציה מהטענה. אם M נוצר סופית, אז יש סדרה מדויקת $0 \to L \to A^n \to M \to 0$, ולכן שוב המסקנה נובעת מהטענה. $\square$

אם נתונה העתקה $f : A \to B$ של חוגים, אז כל מודול מעל B אפשר לראות גם כמודול מעל A. בפרט, כל שרשרת עולה כתתי-מודול מעל B היא גם שרשרת עולה של תתי-מודולים מעל A. אנחנו מקבלים:

טענה 4.1.16. *אם $f : A \to B$ העתקה של חוגים, ו-M מודול מעל B שנתרי כמודול מעל A, אז הוא נתרי גם כמודול מעל B. בפרט, אם B נתרי כמודול מעל A, אז הוא נתרי (כחוג)*

המשפט הבא הוא אחד המשפטים הבסיסיים בתחום:

משפט 4.1.17 (*משפט הבסיס של הילברט, משפט ד'*). *אם A חוג נתרי אז גם $A[x]$ חוג נתרי*

הוכחה. נוכיח שכל אידיאל $I \subseteq A[x]$ נוצר סופית. לכל $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ נסמן $a_n = in(f)$. נבנה באופן אינדוקטיבי סדרה $f_i \in I$, כאשר $f_{i+1} \in I$ מדרגה מינימלית בין אלה שלא ב-$(f_1, \ldots, f_i)$. נסמן $b_i = in(f_i)$. האידיאל J שנוצר על-ידי $\{b_i\}$ נוצר על-ידי תת-קבוצה סופית. נסמן ב-k את המספר המינימלי עבורו $b_1, \ldots, b_k$ יוצרים את J. אנחנו טוענים ש-I נוצר על-ידי $f_1, \ldots, f_k$.

אחרת, $f_{k+1} = b_{k+1}x^m + \cdots + c$ נמצא ב-I אבל לא באידיאל $I' = (f_1, \ldots, f_k)$. כיוון ש-J נוצר על-ידי b_i עבור $i < k+1$, ניתן לרשום $b_{k+1} = \sum d_i b_i$, כאשר $d_i \in A$. אז $\sum d_i x^{j_i} f_i$, עבור j_i מתאימים, הוא פולינום ב-I', מאותה דרגה m ועם אותו מקדם b_{k+1} כמו f_{k+1}. ההפרש ביניהם הוא לכן, ב-I, לא ב-I' ומדרגה יותר נמוכה מ-m, בסתירה למינימליות בבחירת f_{k+1}. $\square$

מסקנה 4.1.18. *כל אלגברה נוצרת סופית מעל חוג נתרי היא חוג נתרי*

נזכיר שלפי ההנחה, אלגברת הפונקציות על יריעה אפינית היא נוצרת סופית מעל שדה, ולכן היא נתרית. בפרט, עבור אלגברות כאלה, בטענות על מודולים מוצגים סופית, ניתן להחליף את ההנחה ב-"נוצרים סופית" (למשל: כל מודול נוצר סופית מעל חוג נתרי הוא חפשי מקומית אם ורק אם הוא פרויקטיבי)

הנה מסקנה נוספת של תנאי הנתריות, שהובטחה בסעיף 2.3

טענה 4.1.19 (משפט נתר). *אם I אידיאל בחוג נתרי A, אז מספר האידיאלים הראשוניים המינימליים שמכילים את I הוא סופי*

נזכיר שמבחינה גאומטרית, האידיאלים הראשוניים הללו מתאימים לרכיבי אי-הפריקות של הקבוצה הסגורה שמוגדרת על-ידי I. לכן, כל יריעה אפינית היא איחוד סופי של רכיבים אי-פריקים.

הוכחה. נניח שלא. מהנחת הנתריות אפשר להניח ש-I אידיאל מירבי עם התכונה הזו. אז I עצמו לא ראשוני, ולכן יש a, b מחוץ ל-I, כך ש-$ab \in I$. כל אידיאל ראשוני שמכיל את I חייב לכלול את a או את b, אז אחד האידיאלים (I, a) או (I, b) כלול באינסוף אידיאלים מינימליים מעליהם, בסתירה למקסימליות של I. $\square$

משפט הבסיס מראה שהחוגים העיקריים המעורבים בגאומטריה הם נתריים. חוגים נוספים שהתבוננו בהם הם לוקאליזציות. מסתבר שהתכונה נשמרת גם תחת לוקאליזציה:

טענה 4.1.20. *אם A חוג נתרי ו-$S \subseteq A$, אז $S^{-1}A$ נתרי. באופן יותר כללי, אם M מודול נתרי מעל A, אז $S^{-1}M$ נתרי מעל $S^{-1}A$.*

תרגיל 4.1.21. הוכיחו את הטענה

סוף הרצאה 14, 7 במאי

בכיוון השני, נתריות היא מקומית (במובן החלש):

טענה 4.1.22. *אם A חוג, $f_1, \dots, f_k \in A$ יוצרים את החוג כאידיאל, ולכל i החוג A_{f_i} נתרי, אז גם A נתרי*

הוכחה. אם I_α שרשרת עולה של אידיאלים, אז לכל f_i, הלוקאליזציות $I_{\alpha f_i}$ גם מהוות שרשרת ב-A_{f_i}. כיוון ש-A_{f_i} נתרית, ההכלות הן הכלות ממש רק במספר סופי של מקומות. כיוון שזה נכון לכל f_i, יש רק מספר סופי של מקומות בהם ההכלה היא הכלה ממש עבור *איזשהו* f_i. מכאן שכמעט כל ההכלות ב-I_α אינן הכלות ממש $\square$

מאידך, הנתריות אינה מקומית במובן החזק:

דוגמא 4.1.23. תהי X קבוצה אינסופית, ונתבונן בחוג $A = \mathbb{F}_2^X$ של כל הפונקציות מ-X ל-$\mathbb{F}_2$. ניתן לזהות את איברי A עם תתי-הקבוצות של X (כפונקציות אפייניות). אידיאלים מירביים מתאימים, תחת הזיהוי הזה, לעל-מסננים, ובפרט, לכל אידיאל מירבי p ואיבר $a \in A$ מתקיים $a \in p$ אם ורק אם $1 - a \notin p$. לכן, הלוקאליזציה מתלכדת במקרה זה עם המנה $A/p = \mathbb{F}_2$, שהיא שדה (ולכן חוג נתרי).

מאידך, החוג כולו אינו נתרי: כל תת-קבוצה Y של X מגדירה אידיאל I_Y ב-A, קבוצת הפונקציות שמתאפסות על Y, והכלה ממש $Y \subset Z$ נותנת הכלה ממש $I_Z \subset I_Y$. לכן, שרשרת יורדת של קבוצות ב-X נותנת שרשרת עולה של אידיאלים.

נשים לב שבדוגמא זו, כל האידיאלים הראשוניים הם מירביים. לכן, דוגמא זו גם מראה שלא ניתן לבדוק נתריות על-ידי בדיקה של שרשראות אידיאלים ראשוניים. מאידך:

תרגיל 4.1.24. הוכיחו שאם A חוג בו כל אידיאל ראשוני נוצר סופית, אז A נתרי. *רמז:* אם I אידיאל מירבי מבין אלה שלא נוצרים סופית, ו-$ab \in I$ אבל $a \notin I$, התבוננו באידיאל

$$(I : a) = \{f \in A \mid fa \in I\}.$$

המכשלה לנתריות בדוגמא 4.1.23 הגיעה מאיברים (שונים מ-0) של החוג ששייכים לאינסוף אידיאלים מירביים. מסתבר שזו המכשלה היחידה:

טענה 4.1.25. *אם A חוג כך שלכל אידיאל מירבי p החוג המקומי A_p הוא נתרי, ולכל $a \in A$ קיים רק מספר סופי של אידיאלים מירביים אליהם a שייך, אז A נתרי.*

הוכחה. נניח ש-$I_0 \subset I_1 \subset \dots$ סדרה עולה של אידיאלים ראשוניים. אם $f \in I_1$ שונה מ-0, לפי ההנחה יש קבוצה סופית X של אידיאלים מירביים ב-A בהם f נמצא. אם $p \subseteq A$ אידיאל מירבי שאינו ברשימה הזו, אז ב-A_p כל השרשרת שווה לכל החוג (פרט אולי ל-I_0). לכן, לפי מקומיות חזקה של שוויון אידיאלים, מספיק להראות שלכמעט כל k מתקיים $I_{kq} = I_{k+1_q}$ לכל $q \in X$. זה נכון לכל q בנפרד בגלל ש-A_q נתרי, וכיוון ש-X סופית, גם לכל הקבוצה. □

התרגיל הבא מראה שימוש טיפוסי בנתריות:

תרגיל 4.1.26. נניח ש-$t : A \to A$ העתקה מחוג A *על* עצמו. הוכיחו שאם A נתרי, אז t בהכרח חד-חד-ערכית (רמז: התבוננו בגרעין של t^k). הראו שההנחה ש-A נתרי הכרחית. מבחינה גאומטרית, t מתאימה להעתקה חד-חד-ערכית ממרחב X לעצמו. הטענה אומרת (במקרה הנתרי) שהתמונה של העתקה כזו צפופה.

4.2 מימד

אם אנחנו מאמינים שהאלגברה של חוג הפונקציות על מרחב $\mathbf{X}$ כוללת הרבה מידע גאומטרי, צריכה להיות דרך נוחה "לשלוף" אותו מתוך האלגברה. פריט מידע גאומטרי מעניין אחד הוא *המימד*. בסעיף זה נראה שתי גישות להגדרה אלגברית של מימד, ונוכיח שהן מתלכדות (במקרים הרלוונטיים). נראה גם שההגדרה נותנת את התשובה הנכונה במקרים בהם יש לנו ציפייה גאומטרית ברורה.

כדי להבין את הרעיון, נזכיר שכל יריעה אפינית היא איחוד *סופי* של רכיבים אי-פריקים. כיוון שהקשר בין הרכיבים הללו הוא רופף, לכל אחד מהם יש מימד משלו, והמימד של כל היריעה יהיה פשוט המימד המירבי של הרכיבים. לכן, המקרה המעניין הוא כשהיריעה אי-פריקה. במקרה זה, אינטואיטיבית כל תת-קבוצה סגורה ממש תהיה ממימד יותר נמוך. בהנחה שהמימד סופי, זה נותן הגדרה אינדוקטיבית של מימד: המימד של היריעה גדול מהמימד של כל תת-יריעה ממש. כיוון שניתן להחליף כל תת-יריעה כזו ברכיב ממימד מקסימלי בה, אפשר תמיד להניח שתת-היריעה גם היא אי-פריקה. במלים אחרות, המימד של היריעה האורך המירבי של שרשרת תת-יריעות אי-פריקות. בתרגום חזרה לאלגברה, תתי-יריעות מתאימות לאידיאלים ראשוניים (והאינטואיציה הגאומטרית אינה הכרחית להגדרה):

הגדרה 4.2.1. *מימד קרול* של חוג A הוא האורך המירבי (אם קיים) של שרשרת אידיאלים ראשוניים ב-A (האורך של השרשרת הוא מספר סימני ההכלה) המימד של חוג ה-0 מוגדר להיות -1, ואם אין אורך מירבי כזה, נאמר שהמימד אינו סופי. מימד קרול

ננסה להשתכנע שהמושג סביר באמצעות מספר דוגמאות:

דוגמא 4.2.2. המימד של כל שדה הוא 0. זה מתיישב עם האינטואיציה ששדה מתאים לנקודה, מבחינה גאומטרית.

דוגמא 4.2.3. אם k שדה, אז המימד של $k[x]$ הוא 1. באופן יותר כללי, המימד של כל תחום ראשי הוא לכל היותר 1 (הוכיחו)

באופן יותר כללי, אחת מ-"בדיקות השפיות" העיקריות שלנו יהיו לוודא שהמימד של $k[x_1,\dots,x_n]$, אלגברת הפונקציות על המרחב האפיני ה-n-מימדי, הוא n. זו אחת התוצאות בהמשך, אבל כיוון אחד הוא קל מאוד:

דוגמא 4.2.4. המימד של $A=k[x_1,\dots,x_n]$, כאשר k שדה הוא לפחות n. באופן יותר כללי, אם k חוג ממימד m, אז המימד של A הוא לפחות $n+m$. אכן, אם $I_0\subset\dots\subset I_m$ מראה שהמימד של k הוא m, ו-J_l האידיאל שנוצר על-ידי I_l ב-A, אז הסדרה

$$J_0\subset\dots\subset J_m\subset(J_m,x_1)\subset(J_m,x_1,x_2)\subset\dots$$

מראה שהמימד לפחות $n+m$. מבחינה גאומטרית (במקרה ש-k שדה), אנחנו מסתכלים על סדרה יורדת של תתי-מרחבים לינאריים.

תרגיל 4.2.5. השלימו את הפרטים בדוגמא

הזכרנו כבר שבחלקים שונים של יריעה אפינית, המימד יכול להיות שונה. למשל, אם X איחוד של מישור ה-x,y וציר z (זו היריעה שנתונה על-ידי האידיאל (zx,zy) ב-$k[x,y,z]$), אז המימד (צפוי להיות) 2 על מישור x,y ו-1 על ציר z:

תרגיל 4.2.6. נסמן $A={}^{k[x,y,z]}/_{(xz,yz)}$, כאשר k שדה

1. הוכיחו שהאידיאל $p=(z-1)$ הוא מירבי ב-A. חשבו את A_p והוכיחו שהמימד של A_p הוא 1
2. הוכיחו שיש בדיוק אידיאל ראשוני אחד ב-A שמוכל ממש ב-p
3. הוכיחו שהמימד של A הוא לפחות 2

הדוגמא הזו מובילה להכרה שהמימד הוא מושג *מקומי*. ההכרה הזו מתבטאת באופן הבא בהגדרה שלנו:

טענה 4.2.7. *אם A חוג, אז המימד של A הוא המקסימום של המימדים של החוגים A_p, כאשר A_p החוג המקומי המתאים לאידיאל מירבי p. בפרט, המימד סופי אם ורק אם המקסימום קיים. הוא גם המקסימום של המימדים של התחומים A/p, עבור הראשוניים המינימליים p.*

הוכחה. נניח ש-p אידיאל מירבי ב-A. אז כל שרשרת של אידיאלים ראשוניים ב-A_p נותנת שרשרת דומה ב-A, ולכן המימד של A הוא לפחות המימד של A_p (ובפרט, לא קיים אם המימדים של החוגים A_p לא חסומים). בכיוון ההפוך, אם $p_0\subset\dots\subset p_n$ מראה שהמימד של A הוא n, אז השרשרת הזו יוצרת שרשרת ב-A_{p_n}.

המשפט האחרון נכון משום שבאופן דומה, כל שרשרת מקסימלית כוללת ראשוני מינימלי. $\square$

בגלל הטענה הזו, נתמקד בהרבה מקרים במימדים של חוגים מקומיים. כאשר k סגור אלגברית, ראינו שכל אידיאל מירבי ב-$k[x,y]$ הוא מהצורה $(x-a,y-b)$ עבור $a,b\in k$ (בהמשך נראה שטענה דומה נכונה לכל אלגברת פולינומים). לכן:

מסקנה 4.2.8. *אם k שדה סגור אלגברית, אז המימד של $k[x,y]$ שווה למימד של $k[x,y]_{(x,y)}$, הגבעול ב-0.*

כאמור, נראה בהמשך שהטענה נכונה גם עבור מספר משתנים גדול יותר.

הוכחה. לפי הטענה, המימד של $k[x,y]$ הוא המקסימום של המימדים של כל החוגים $k[x,y]_{(x-a,y-b)}$, עבור a,b ב-k. אבל כל החוגים הללו איזומורפיים, על-ידי הזזה. □

ההגדרה של מימד קרול נראית קרובה להגדרה של חוגים נתריים, אבל ככלל אין חפיפה: ראינו כבר דוגמא של חוג ממימד סופי (אפילו מימד 0!) שאינו נתרי:

דוגמא 4.2.9. בדוגמא 4.1.23 ראינו חוג שאינו נתרי, אבל מימד קרול שלו הוא 0 (כל אידיאל ראשוני הוא מירבי).

סוף הרצאה 15, 11 במאי

בכיוון השני, ישנה הדוגמא הבאה של נגטה:

דוגמא 4.2.10. יהי k שדה אינסופי (לשם הפשטות), ותהי P חלוקה של קבוצה S (כלומר, P קבוצה של תתי-קבוצות זרות ולא ריקות שאיחודה S). לכל $c\in P$ נגדיר את I_c להיות האידיאל ב-$k[S]$ שנוצר על-ידי c, ותהי $T=k[S]\setminus\bigcup_c I_c$. נתבונן בחוג $A=T^{-1}k[S]$. נסמן ב-J_c את האידיאל שנוצר על-ידי I_c ב-A.

אנחנו טוענים ש-J_c הם בדיוק האידיאלים המירביים ב-A. ראשית, כל אידיאל כזה אכן מירבי: ניקח $p\notin J_c$, ונראה שהתמונה שלו ב-A/J_c הפיכה. אפשר להניח ש-$p\in k[S]$ (ולא שייך ל-I_c), ועל-ידי הוספת איבר מ-c אפשר להניח שאינו שייך גם לאף I_d אחר. לכן, $p\in T$ הפיך כבר ב-A.

בכיוון ההפוך, נוכיח שכל אידיאל I ב-$k[S]$ שמוכל ב-$\bigcup I_c$ מוכל באחד מהם. לכל $f\in k[S]$ נסמן $Z(f)=\{c\in P\mid f\in I_c\}$. אז לכל $f\neq 0$ הקבוצה $Z(f)$ סופית, ולפי ההנחה, אם $f\in I$ אז $Z(f)$ לא ריקה. נניח שיש $f,g\in I$ כך ש-$Z(f)\cap Z(g)$ ריקה. נבחר $s\in S$ שלא שייך לאף אחת מהקבוצות c ב-$Z(f)\cup Z(g)$ (אם אין כזה אז סיימנו). אז לכל m טבעי, $f+s^mg\in I$, אבל $Z(f+s^mg)$ זרה ל-$Z(f)$ ול-$Z(g)$. בנוסף, אם m גדול מספיק, אין ביטולים בין f ל-s^mg, ולכן $Z(f+s^mg)$ נחתכת עם $Z(f)$ ריקה, בסתירה להנחה. המסקנה היא ש-$Z(f)$ נחתכת עם $Z(g)$ לכל $g\in I$, כלומר $I\subseteq\bigcup_{c\in Z(f)}I_c$. אבל כל אחד מ-$I,I_c$ מרחב וקטורי מעל השדה האינסופי k, ולכן בהכרח I מוכל באחד ה-I_c.

הוכחנו שהאידיאלים המירביים ב-A הם בדיוק ה-J_c. לכן, המימד של A הוא המקסימום של המימדים של החוגים $A_{J_c}=k[S]_{I_c}$. אבל $k[S]_{I_c}$ איזומורפי ל-$L[c]_{I_c}$, עבור שדה מתאים L, ולכן המימד שלו הוא לפחות הגודל של c. בפרט, אם נבחר חלוקה P בה הגדלים של הקבוצות c לא חסומים, נקבל שהמימד של A אינו סופי.

מאידך, אנחנו טוענים שאם כל קבוצה c היא סופית, אז A חוג נתרי. זה נובע מהעובדה שכל איבר שונה מ-0 של A שייך רק למספר סופי של אידיאלים J_c (כי הוא מורכב ממספר סופי של מונומים), ושאם c סופית, אז A_{J_c} הוא, כמו שראינו למעלה, לוקאליזציה של חוג פולינומים במשתנים c, ובפרט, חוג נתרי. עכשיו הטענה נובעת מטענה 4.1.25.

מבחינה גאומטרית, אפשר לחשוב על A כעל חוג הפונקציות על איחוד זר של מרחבים אפיניים, כאשר לאיבר $c \in P$ מתאים מרחב אפיני ממימד הגודל של c. אז אם הגדלים לא חסומים, המימד אינסופי, אבל הטופולוגיה היא כזאת שבה כל קבוצה סגורה מוכלת באיחוד סופי של המרחבים הללו, ולכן נתרית. $\square$

בהמשך נראה שהמצב משתפר עבור חוגים מקומיים.

נחזור עכשיו לתכונות הבסיסיות של מימד. אחת הציפיות הבסיסיות שלנו היא שקבוצה סופית היא ממימד 0. נדון בהמשך מהו המושג האלגברי המתאים ל"קבוצה סופית", אבל מקרה פרטי אחד הוא מימד סופי כמרחב וקטורי:

תרגיל 4.2.11. הוכיחו שאם A אלגברה מעל שדה k שהיא ממימד סופי מעל k כמרחב וקטורי, אז היא נתרית, וממימד 0. הוכיחו גם שאם A אלגברת הפונקציות על מרחב X, אז X קבוצה סופית שגודלה שווה למימד של A מעל k (כמרחב וקטורי)

אנחנו מעוניינים להכליל את העובדה הזו למצב יחסי, כלומר, למקרה בו k חוג יותר כללי. ראשית נגדיר:

הגדרה 4.2.12. העתקה $f : A \to B$ של חוגים נקראת *העתקה סופית* אם B נוצר סופית כמודול מעל A העתקה סופית

מבחינה גאומטרית, מקור אחד להעתקות בין חוגים הוא העתקה בין יריעות אפיניות, בכיוון ההפוך: אם B אלגברת הפונקציות של יריעה אפינית Y, $p_y : B \to k$ העתקת החישוב בנקודה $y \in Y$, ו-$f : A \to B$ העתקה של אלגברות מעל k, אז $p_y \circ f : A \to k$ היא גם העתקה של אלגברות מעל k. אם A גם היא אלגברת הפונקציות של יריעה אפינית X מעל k, אז לפי ההגדרה, ההעתקה $p_y \circ f$ מתאימה לנקודה יחידה $x \in X$, שאותה נסמן ב-$f^\sharp(y)$. לכן, ההעתקה $f : A \to B$ מגדירה העתקה $f^\sharp : Y \to X$.

נשים לב שניתן לשחזר את f מתוך $f^\sharp$: לכל $a \in A$, $f(a) = a \circ f^\sharp$ כאשר חושבים על a כפונקציה על X. על מנת להראות זאת, מספיק להראות (לפי ההגדרה של יריעה אפינית) ששני הצדדים מסכימים על כל נקודה $y \in Y$. אבל לכל נקודה כזו, $f(a)(y) = p_y(f(a)) = p_{f^\sharp(y)} = a(f^\sharp(y))$. ככלל, אם $s : Y \to X$ היא פונקציה כלשהי, s נקראת העתקה אלגברית אם לכל $a \in A$, ההרכבה $a \circ s$ היא ב-B. ראינו עכשיו שכל פונקציה $f : A \to B$ מגדירה העתקה אלגברית. מאידך:

תרגיל 4.2.13. הוכיחו שאם $s : Y \to X$ העתקה אלגברית, אז ההעתקה $f : A \to B$ שנקבעת על-ידי התנאי $f(a) = a \circ s$ (כפונקציה על Y) היא העתקה של אלגברות מעל k, ו-$f^\sharp = s$.

נניח עכשיו ש-$x \in X$. *הסיב* של הפונקציה $f^\sharp$ מעל x הוא, על-פי הגדרה, התמונה ההפוכה של x תחת $f^\sharp$. איך לתאר סיב זה מבחינה אלגברית? אנחנו מחפשים את קבוצת כל הנקודות $y \in Y$ כך ש-$p_y \circ f = p_x$. אם y נקודה כזו, ו-$a \in A$ פונקציה שמתאפסת ב-x, אז $f(a) = a \circ f^\sharp$ היא פונקציה שמתאפסת על y. במלים אחרות, אם $m_x \subset A$ האידיאל המירבי של פונקציות המתאפסות ב-x, אז p_y מתאפסת על $I = f(m_x)$, ולכן נותנת העתקה מ-B/I ל-k. מאידך, לכל העתקה $p : B/I \to k$ מעל k, ההעתקה המושרית מ-A ל-k היא p_x, שכן כל איבר ב-A הוא סכום של איבר ב-k ואיבר ב-m_x. לכן הוכחנו: סיב

טענה 4.2.14. *אם $\mathbf{X}=\langle X,A\rangle$ ו-$\mathbf{Y}=\langle Y,B\rangle$ שתי יריעות אפיניות מעל k, $f:A\to B$ העתקה של אלגברות מעל k, ו-$x\in X$, אז יש התאמה בין נקודות בסיב של ההעתקה המתאימה $f^\sharp$ מעל x והעתקות $p:{}^{B}/_{f(m_x)}\to k$ של אלגברות מעל k (כאשר m_x האידיאל של פונקציות שמתאפסות ב-x).*

בפרט, אם ${}^{B}/_{f(m_y)}$ אלגברה אפינית, אז הנקודות של היריעה האפינית המתאימה הן הנקודות בסיב. אם ההעתקה f היא סופית, אז כל סיב הוא סופי.

דוגמא 4.2.15. נניח ש-$A=k[x]$ ו-$B={}^{k[x,y]}/_{(x^2+y^2-1)}$, עם העתקת ההכלה. אז B חוג סופי מעל A: הוא נוצר (כמודול!) על-ידי $1,y$. אם $k=\mathbb{R}$ אז B אלגברת הפונקציות על מעגל היחידה, וההעתקה מתאימה להטלה ממעגל היחידה לציר x. הסיבים של העתקה זו הם אכן סופיים. עבור $k=\mathbb{C}$, אבל לא עבור $k=\mathbb{R}$, ההעתקה היא על.

תרגיל 4.2.16. חשבו את הסיב מעל $x=1$ בדוגמא האחרונה

סוף הרצאה 16, 14 במאי

אנחנו מצפים שמספר סופי של נקודות לא ישנה את המימד גם במקרה היחסי. במילים אחרות, המימד של חוג סופי B מעל תת-חוג A צריך להיות שווה למימד של A, וזה אכן מה שקורה. כדי להראות זאת, צריך להראות שיש התאמה בין אידיאלים ראשוניים ב-A וב-B:

טענה 4.2.17. *נניח שהחוג B סופי מעל תת-חוג A. אז לכל אידיאל ראשוני p ב-A יש אידיאל ראשוני q ב-B כך ש-p-$q\cap A=$*

מבחינה גאומטרית, הטענה היא שהתמונה ההפוכה של תת-יריעה אי-פריקה תחת העתקה סופית (עם תמונה צפופה) מכילה רכיב אי-פריקות שהתמונה שלו גם צפופה. אומרים שהאידיאל q מונח מעל p.

הוכחה. אפשר להניח ש-$B\neq 0$, כי אחרת אין מה להוכיח. נניח ראשית ש-A חוג מקומי עם אידיאל מירבי p. כיוון ש-B מודול סופי שונה מ-0 מעל A, לפי הלמה של נאקאיימה pB תת-אידיאל ממש של B. אז כל אידיאל מירבי q שמכיל את pB מקיים את הטענה.

במקרה הכללי, אחרי לוקאליזציה בקבוצה $S=A\backslash p$, אנחנו מוצאים אידיאל q' ב-$S^{-1}B$, לפי המקרה הראשון. התמונה ההפוכה של q של q' ב-B היא אידיאל ראשוני ב-B, וקל לראות ש-$q\cap A$ הוא התמונה ההפוכה של $p'=S^{-1}p\subseteq A_p$ תחת הלוקאליזציה $A\to A_p$, כלומר שווה ל-p. □

תרגיל 4.2.18. הסיקו את ההכללה הבאה: אם $A\subseteq B$ הרחבה סופית של חוגים, $p_1\subseteq p_2$ אידיאלים ראשוניים ב-A, ו-$q_1\subseteq B$ מונח מעל p_1, אז יש ראשוני $q_1\subset q_2\subset B$ שמונח מעל p_2.

מסקנה 4.2.19. *אם $A\subseteq B$ הרחבה סופית של חוגים, אז המימדים של A ושל B שווים.*

הוכחה. אם $p_1\subset\cdots\subset p_k$ שרשרת אידיאלים ראשוניים ב-A, ראינו עכשיו שאפשר למצוא אידיאלים ראשוניים $q_i\subseteq B$ כך ש-$q_i\cap A=p_i$. לפי התרגיל האחרון אפשר לבחור אותם כך שיהוו שרשרת, והם בבירור שונים.

בכיוון השני, נניח ש-q_i היא שרשרת של אידיאלים ראשוניים ב-B. החיתוך שלהם עם A נותן שרשרת אידיאלים ראשוניים p_i, וצריך להראות שהם כולם שונים. זה התוכן של תרגיל 4.2.20. □

תרגיל 4.2.20. אם $A \subseteq B$ הרחבה סופית של חוגים, ו-$q_1 \subseteq q_2$ אידיאלים ראשוניים ב-B כך ש-$q_1 \cap A = q_2 \cap A$, אז $q_1 = q_2$.

הנה מסקנה מעניינת:

מסקנה 4.2.21. *אם $A \subseteq B$ הרחבה סופית של חוגים, ו-B שדה, אז גם A שדה*

הוכחה. לפי מסקנה 4.2.19, התחום A הוא ממימד 0. $\square$

תרגיל 4.2.22. הנה עוד דרך להוכיח את המסקנה האחרונה: נניח ש-a איבר בחוג A המקיים משוואה $b_n a^n + \cdots + b_0 = 0$, כאשר $b_i \in A$, ו-b_0 הפיך. הוכיחו שגם a הפיך. הסיקו את המסקנה האחרונה (אפשר להשתמש בעובדה הבאה, שנוכיח בהמשך: אם $b \in B$ כאשר $A \subseteq B$ הרחבה סופית, אז יש פולינום מתוקן $p(x)$ מעל A כך ש-$p(b) = 0$)

מסקנה 4.2.19 מראה שלמטרת חישוב מימדים, אפשר לעבור בין חוגים שיש ביניהם העתקות סופיות. זה יכול להיות שימושי אם העתקות כאלה יכולות להוביל אותנו לחוגים שאנחנו מכירים. במקרה של אלגברות נוצרות סופית מעל שדה (שכולל את המקרה של אלגברות אפיניות), מסתבר שזה המצב. זוהי עוד תוצאה מפורסמת של אמי נתר:

משפט 4.2.23 (משפט הנורמליזציה של נתר). *אם A אלגברה נוצרת סופית מעל שדה k, אז קיימת תת-אלגברה $B \subseteq A$ כך ש-A סופית מעל B, ו-B היא אלגברת פולינומים.*

מבחינה גאומטרית, הטענה אומרת שלכל יריעה אפינית יש הטלה העתקה סופית למרחב אפיני. את ההוכחה שניתן (שעובדת רק במקרה ש-k אינסופי) אפשר גם לפרש בצורה גאומטרית: ראשית, נשכן את היריעה במרחב אפיני כלשהו. עכשיו, ניקח הטלה "אקראית" למרחב אפיני. אוסף כל ההטלות הללו יש מבנה גאומטרי, ומסתבר ש"רוב" הנקודות בו נותנות הטלה סופית.

הוכחת משפט הנורמליזציה לשדה אינסופי. נוכיח שאם A נוצרת על-ידי $x_1, \dots, x_{n+1}$ בצורה לא חופשית, אז יש $y_1, \dots, y_n \in A$ כך ש-A סופית מעל תת-האלגברה שנוצרת על-ידי $y_1, \dots, y_n$. באינדוקציה, זה ייתן את התוצאה.

נסמן $x = x_{n+1}$. נניח ש-$f(x_1, \dots, x_n, x) = 0$, כאשר f פולינום מדרגה כוללת $d > 0$. אם המקדם העליון של x ב-f הפיך, אז סיימנו כי מספיק מונומים x^l יוצרים את A כמודול מעל תת-החוג שנוצר על-ידי x_i. אנחנו טוענים שאפשר להגיע למצב זה על-ידי שינוי משתנים מהצורה $y_i = x_i - a_i x$, עבור $a_i \in k$ מתאימים. אז

$$0 = f(x_1, \dots, x_n, x) = f(y_1 + a_1 x, \dots, y_n + a_n x, x) = h(a_1, \dots, a_n, 1)x^d + \dots$$

כאשר h הוא החלק ההומוגני מדרגה d, ויתר האיבר הם בדרגה נמוכה יותר במשתנה x. כיוון ש-k אינסופי, יש $a_1, \dots, a_n$ עבורם $h(a_1, \dots, a_n) \neq 0$. $\square$

דוגמא 4.2.24. *שיטת ההוכחה הזו לא יכולה לעבוד לשדות סופיים:* אם $k = \mathbb{F}_p$, האלגברה $k[x,y]/_{xy^p - x^p y}$ אינה נוצרת סופית כמודול מעל אף אחד מתתי-החוגים $k[x - ay]$ (עבור $a \in \mathbb{F}_p$).

במקרים אלה, המשפט עדיין נכון, ומוכח באמצעות חילוף משתנים לא לינארי

דוגמא 4.2.25. האלגברה $k[x]_x$ לא נוצרת סופית כמודול מעל $k[x]$, אבל כן נוצרת סופית מעל $k[x+\frac{a}{x}]$ עבור כל $a \neq 0$. גאומטרית, אפשר לזהות את $k[x]_x$ עם אלגברת הפונקציות על ההיפרבולה במישור. ההכלה ה"רגילה" של $k[x]$ מתאימה להטלה על ציר x, ובנקודה 0 "בורחת לאינסוף". הטלות בכיוונים אחרים (שאינן על ציר y) לא סובלות מבעיה זו.

תרגיל 4.2.26. השלימו את הפרטים בשתי הדוגמאות האחרונות

משפט הנורמליזציה והדיון שלפניו מאפשר לנו לחשב, באופן עקרוני, את המימד של חוגים אפיניים. על מנת להשלים את החישוב, עלינו לחשב את המימד של חוגי פולינומים. גם זו מסקנה של משפט הנורמליזציה:

מסקנה 4.2.27. *לכל שדה k ומספר טבעי n, המימד של $A=k[x_1,\dots,x_n]$ הוא n*

הוכחה. ראינו כבר שהמימד הוא לפחות n. נוכיח את הכיוון ההפוך באינדוקציה על n. אם $0 \subset p_1 \subset \dots \subset p_m$ שרשרת, ניקח איבר ראשוני $f \in p_1$. אז A/f סופי מעל אלגברת פולינומים B בפחות משתנים. האידיאלים נותנים שרשרת $0 \subset p_2 \subset \dots \subset p_m$, במנה, ואלה נותנים שרשרת באותו אורך ב-B, לפי מסקנה 4.2.19. באינדוקציה, $m-1 \leqslant n-1$. □

לסיכום: כל אלגברה נוצרת סופית מעל שדה היא הרחבה סופית של אלגברת פולינומים ב-n משתנים, עבור n יחיד, שהוא המימד שלה. הנה תוצאה מעניינת של זה, עליה נרחיב בהמשך:

מסקנה 4.2.28. *אם A שדה הרחבה של שדה k, שנוצר סופית כאלגברה מעל k, אז A הרחבה סופית של k*

הוכחה. לפי משפט הנורמליזציה, A סופי מעל חוג פולינומים B. לפי מסקנה 4.2.21, B שדה. לכן, מספר היוצרים של B הוא 0, כלומר $B=k$. □

ראינו לעיל איך אפשר לחשב מימד של אלגברת נוצרת סופית מעל שדה, אבל לא ברור שקל לחשב בעזרתה. המסקנה הבאה נותנת תיאור פשוט וקל לחישוב של המימד במקרה שהאלגברה היא תחום:

מסקנה 4.2.29. *נניח ש-A תחום שלמות נוצרת סופית מעל שדה k. אז המימד של A שווה לדרגת הטרנסנדנטיות של $K(A)$ מעל k.*

הוכחה. נסמן ב-n את המימד של A. אז A סופית מעל חוג פולינומים B ב-n משתנים. כיוון שיוצרים נשמרים תחת לוקאליזציה, $K(A)$ מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $K(B)$, ו-$K(B)$ טרנסנדנטי מדרגה n מעל k. □

למסקנה הזו יש אינטואיציה גאומטרית: אם יריעה היא ממימד n, צריכים להיות עליה "n כיוונים בלתי תלויים". יוצרים בלתי-תלויים מעל k מגדירים כיוונים כאלה.

תרגיל 4.2.30. הוכיחו שאם A תחום שלמות נוצר סופית מעל שדה, ממימד n, אז כל שרשרת מירבית של אידיאלים ראשוניים היא באורך n.

4.3 תחומי דדקינד

בסעיף זה נחקור מחלקה מעניינת של חוגים ממימד 1:

הגדרה 4.3.1. *תחום דדקינד* הוא תחום נתרי A כך שלכל אידיאל מירבי p ב-A, החוג A_p הוא תחום ראשי תחום דדקינד

בפרט, כל תחום דדקינד הוא ממימד 1. כמובן שכל תחום ראשי הוא תחום דדקינד, אבל לא כל תחום דדקינד הוא ראשי. למעשה ראינו כבר דוגמא:

דוגמא 4.3.2. החוג A מדוגמא 3.2.9 הוא תחום דדקינד (דוגמא זו מראה שאינו תחום ראשי). ראשית, זהו תחום אפיני ולכן נתרי. נראה בהמשך שכל אידיאל מירבי p ב-A הוא מהצורה $(x-x_0, y-y_0)$ כאשר נקודה על העקום. במקרה $y_0 = 0$ כבר טיפלנו בדוגמא 3.2.9, ולכן אפשר להניח ש-$y_0 \neq 0$. אבל אז

$$(y+y_0)(y-y_0) = y^2 - y_0^2 = x^3 - x + x_0^3 - x_0 = (x-x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2 - 1)$$

וכיוון ש-$y_0 \neq 0$, האידיאל המירבי של A_p נוצר על-ידי $x - x_0$.

לא כל תחום נתרי ממימד 1 הוא תחום דדקינד. למשל:

תרגיל 4.3.3. הוכיחו שהחוג $A = \mathbb{C}[x,y]/y^2=x^3$ הוא תחום נתרי ממימד 1, אך אינו תחום דדקינד

מבחינה גאומטרית, תחומי דדקינד הם חוגי פונקציות של עקומים *חלקים*, כלומר, כאלה שאין להם "חודים". אינטואיטיבית, בסביבה של נקודה חלקה, העקום נראה כמו קו ישר עם נקודה בתוכו, ולכן הנקודה נתונה על-ידי התאפסות של פונקציה אחת. סוף הרצאה 17, 18 במאי

המטרה העיקרית שלנו תהיה למיין מודולים נוצרים סופית מעל תחומים כאלה. לשם כך, נוכיח ראשית:

טענה 4.3.4. *מודול נוצר סופית מעל תחום דדקינד הוא פרויקטיבי אם ורק אם הוא חסר פיתול. מודול נוצר סופית מעל תחום ראשי הוא חופשי אם ורק אם הוא חסר פיתול. בפרט, כל התכונות הללו עוברות לתתי-מודולים.*

הוכחה. לפי טענה 3.2.7 ותרגיל 3.4.7, פיתול הוא תכונה מקומית, ומודול נוצר סופית הוא פרויקטיבי אם ורק אם הוא חופשי מקומית, אז הטענה הראשונה נובעת מהשנייה.

נניח ש-M חסר-פיתול ונוצר סופית מעל תחום ראשי A. לפי מסקנה 3.1.11, אפשר לשכן את M במודול חופשי A^r. נוכיח באינדוקציה על r.

עבור $r = 1$, כיוון ש-A תחום ראשי, M נוצר על-ידי איבר אחד. איבר זה מגדיר איזומורפיזם ל-A.

עבור $r > 1$, אפשר להניח שהתמונה של M תחת ההטלה האחרונה שונה מ-0 (אחרת אפשר להקטין את r). תמונה זו היא חסר פיתול ולכן חופשית. לכן M הוא סכום ישר של מודול חופשי ושל הגרעין. הגרעין משוכן ב-A^{r-1} ונוצר סופית (כי A חוג נתרי) ולכן שוב באינדוקציה, חופשי.

החלק האחרון ברור עבור פיתול, ולכן נכון גם לתנאים השקולים. $\square$

אם M מודול מעל תחום A, אז המימד של $K(M)$ מעל $K(A)$ נקרא *הדרגה* של M. דרגה

מסקנה 4.3.5. *כל מודול פרויקטיבי נוצר סופית מעל תחום דדקינד A הוא סכום ישר של מודולים פרויקטיביים מדרגה 1.*

תרגיל 4.3.6. הוכיחו את המסקנה

מודולים פרויקטיביים נוצרים סופית הם המקביל האלגברי של *אגדים וקטוריים* ביריעות חלקות. התוכן הגאומטרי של הטענה האחרונה הוא שעל עקום חלק, כל אגד וקטורי הוא סכום ישר של אגדים קוויים (כלומר, משפחות של מרחבים וקטוריים חד-ממדיים).

מסקנה 4.3.7. *נניח ש-M מודול מדרגה סופית מעל תחום דדקינד A. אז $M = M^t \oplus P$, כאשר M^t תת-מודול הפיתול של M, ו-P פרויקטיבי מדרגה r.*

השלב הבא הוא להבין את המבנה של M^t, כלומר של מודול פיתול נוצר סופית. זה נעשה על-ידי מעבר לחוגים המקומיים, ואז ניתוח המבנה שם. החלק הראשון עובד מעל כל תחום נתרי ממימד 1, והוא למעשה טענה על חוגים ממימד 0:

טענה 4.3.8. *אם M מודול מעל חוג נתרי B ממימד 0, אז $M = \bigoplus_i M_i$, כאשר כל M_i הוא התמונה של M תחת העתקת לוקאליזציה למודול M_{p_i}, עבור אידיאל מירבי p_i של B.*

הוכחה. כיוון ש-B נתרי, יש ב-B מספר סופי של אידיאלים ראשוניים מינימליים $p_1, \dots, p_n$, וכיוון שהמימד הוא 0, הם כולם מירביים.

אנחנו טוענים ראשית שההעתקה מ-M ל-$\bigoplus_i M_i$ היא חד-חד ערכית. אכן, אם $m \in M$ הולך ל-0 בכל M_{p_i} אז הוא הולך ל-0 בכל לוקאליזציה באידיאל ראשוני, ולכן $m = 0$ לפי טענה 3.2.7.

נותר להראות שההעתקה היא על. נעשה זאת ראשית עבור המודול B עצמו. ההוכחה דומה להוכחת משפט השאריות הסיני: לכל i, נמצא איבר $b_i \in B$ כך ש-b_i הולך ל-1 ב-B_i, ול-0 ב-B_j עבור $j \neq i$. מטעמי סימטריה, אפשר להניח ש-$i = 1$.

אם $n = 1$ הטענה ברורה, אז נניח ש-$n > 1$, ונסמן $p = p_1$ ו- $q = p_2 \dots p_n$. כיוון שה-p_i מירביים, קיימים $a \in p$ ו-$b \in q$ כך ש-$a + b = 1$. אז $ab \in pq = p_1 \cap p_2 \cap \dots \cap p_n$ לפי משפט השאריות הסיני, ולכן לפי טענה 2.3.8, יש k טבעי עבורו $(ab)^k = 0$. ראינו בהוכחה של טענה 3.2.7 שיש $c, d \in B$ כך ש-$ca^k + db^k = 1$. אז אפשר להחליף את a, b ב-ca^k, db^k, ולהניח ש-$a + b = 1$ ו-$ab = 0$. אבל אז $a = a1 = a^2 + ab = a^2$, כלומר a, b אידמפוטנטים אורתוגונליים. כיוון ש-$b \notin p$, הוא הפיך ב-B_p, ולכן a הולך ל-0 ב-B_p, אז $b = 1 - a$ הולך ל-1 שם. מאידך, $a \notin q \subseteq p_i$ עבור $i > 1$, אז b הולך ל-0 ב-B_{p_i} לכל $i > 1$.

המקרה $M = B$ נותן איברים $b_i \in B$ כך ש-b_i הולך ל-1 ב-B_i ול-0 בכל B_j אחר. עכשיו, אם M מודול כלשהו מעל B, בהינתן איבר $(m_1, \dots, m_n) \in \bigoplus_i M_i$, אפשר למצוא איברים $n_i \in M$ כך ש-n_i הולך ל-m_i לכל i. אז האיבר $m = \sum_i b_i n_i$ הולך אל האיבר הנתון. $\square$

סוף הרצאה 18, 21 במאי

מסקנה 4.3.9. *בתנאים של טענה 4.3.8, המודול M_i איזומורפי לתת-המודול*

$$N_i = \{m \in M \mid \forall a \in p_i \, \exists k \geqslant 0 \, a^k m = 0\}$$

הוכחה. לפי הטענה, M_i מזוהה עם האיברים ב-M שהולכים ל-0 בכל M_j עבור $j \neq 0$. מאידך, הקבוצה N_i היא קבוצת האיברים שהולכים ל-0 תחת לוקאליזציה ביחס לכל $a \in p_i$. לכן, אנחנו רוצים להוכיח שלכל $m \in M$, שני התנאים הבאים שקולים:

1. התמונה של m ב-M_a היא 0 לכל $a \in p_i$

2. התמונה של m היא 0 בכל M_{p_j} לכל $j \neq i$.

נניח שהתנאי הראשון נכון, ו-ש-$j \neq i$. אז יש $a \in p_i \backslash p_j$. איבר זה הפיך ב-M_{p_j} ולכן m הולך ל-0 שם.

מאידך, נניח שהתנאי השני מתקיים, ונניח ש-$a \in p_i$. האידיאלים הראשוניים בחוג $C = B_a$ הם תת-קבוצה של האידיאלים הראשוניים ב-B, שאינה כוללת את p_i. לכן, התמונה של m ב-M_a הולכת ל-0 בכל לוקאליזציה של C באידיאל ראשוני, ולכן התמונה הזו היא 0. $\square$

מסקנה 4.3.10. *אם M מודול פיתול נוצר סופית מעל תחום נתרי A שהמימד שלו 1 או פחות, אז יש מספר סופי של אידיאלים מירביים p_i ב-A, כך ש-$M = \bigoplus_i M_i$, כאשר כל M_i הוא התמונה של M תחת העתקת הלוקאליזציה ל-M_{p_i}.*

בהמשך נראה הכללה של הטענה הזו לחוגים יותר כלליים.

הוכחה. נסמן ב-I את האידיאל שמאפס את M, כלומר $I = \{a \in A \mid aM = 0\}$. כיוון ש-$M$ מורכב מאיברי פיתול ונוצר סופית, זה אידיאל שונה מ-0. כיוון ש-A תחום נתרי ממימד 1, החוג $B = {}^{A}/_{I}$ הוא נתרי ממימד 0. כיוון ש-I מאפס את M, אפשר לחשוב על M כעל מודול מעל B. לפי טענה 4.3.8, M איזומורפי לסכום ישר של מודולים M_i. $\square$

התיאור של M_i כאיברים שמתאפסים על-ידי חזקות ב-p_i תקף גם כאן. למעשה, כיוון ש-M נוצר סופית, יותר מזה נכון: לכל i קיים k_i כך ש-$M_i = \{m \in M \mid p_i^{k_i} m = 0\}$.

נשים לב שהמודולים M_i נקבעים ביחידות מהמבנה של M:

תרגיל 4.3.11. הוכיחו שאם p, q אידיאלים מירביים שונים בחוג A, ו-M_p ו-M_q מודולים מעל A_p ו-A_q, אז (כמודולים מעל M) ההעתקה היחידה מ-M_p ל-M_q היא 0. הסיקו שאם $p_1, \dots, p_n$ הם כל האידיאלים המירביים של חוג נתרי B ממימד 0, ולכל i נתונים מודולים M_i, N_i שמגיעים מ-B_{p_i}, כך ש-$\bigoplus M_i = \bigoplus N_i$, אז לכל i המודולים M_i ו-N_i איזומורפיים.

דוגמא 4.3.12. עבור המקרה $A = \mathbb{Z}$, הטענות אומרות שכל חבורה חילופית סופית היא סכום ישר של חבורות p, למספר סופי של ראשוניים p, והרכיבים הללו נקבעים ביחידות.

על מנת לסיים את המיון, צריך להבין איך נראים מודולים מעל החוגים המקומיים. זה המקום בו באמת נכנסת ההנחה שהחוג הוא תחום דדקינד. ראשית, הגדרה:

הגדרה 4.3.13. *חוג הערכה בדידה* הוא תחום ראשי מקומי חוג הערכה בדידה

לפי הגדרתו, החוג המקומי של כל תחום דדקינד הוא חוג הערכה בדידה. מקור השם מוסבר בתרגיל הבא:

תרגיל 4.3.14. הוכיח שתחום A הוא חוג הערכה בדידה אם ורק אם יש הערכה (בדידה) $v : K(A) \to \mathbb{Z}$ כך ש-$A = \{a \in K(A) \mid v(a) \geqslant 0\}$.

גאומטרית, אפשר לחשוב על חוג כזה כחוג הפונקציות על סביבה קטנה של 0 בישר, כאשר יוצר של האידיאל מירבי הוא קואורדינטה שמתאפסת ב-0.

כיוון שאנחנו עוסקים כעת במודולי פיתול, אנחנו למעשה מתעניינים במנות של חוגים כאלה, כלומר חוגים מקומיים בהם האידיאל המירבי נוצר על-ידי איבר אחד נילפוטנטי.

מודול מעגלי

מודול שנוצר על-ידי איבר אחד נקרא *מודול מעגלי*. במלים אחרות, זהו מודול שהוא מנה של החוג (אז חבורה חילופית היא מעגלית אם היא מעגלית כמודול מעל $\mathbb{Z}$). במקרה של חוג מקומי ראשי B, שהאידיאל הראשי שלו נוצר על-ידי t, המודולים האלה הם בדיוק B/t^i, כאשר $i \geqslant 0$, או B עצמו.

טענה 4.3.15. *כל מודול נוצר סופית מעל חוג מקומי ראשי הוא סכום ישר של מודולים מעגליים.*

הוכחה. אם החוג B הוא תחום מקומי, אז הוא תחום דדקינד, ולכן המנה חסרת הפיתול של מודול נוצר סופית M היא מחובר ישר פרויקטיבי שלו. מאידך, ראינו בתרגיל 3.4.7 שכל מודול פרויקטיבי נוצר סופית מעל חוג מקומי הוא חופשי (ולכן סכום ישר של מודולים מעגליים). לכן, אפשר להניח ש-M הוא פיתול, וכיוון שהוא נוצר סופית, יש חזקה של האידיאל המירבי p שהורגת את M. על-ידי חלוקה בחזקה זו, אפשר להניח שהאידיאל המירבי של B הוא נילפוטנטי. נקבע יוצר t של p, ונסמן ב-i את החזקה הגבוהה ביותר כך ש-$t^i \neq 0$.

תת-המודול t^iM נוצר סופית, ומתאפס על-ידי הכפלה ב-t. לכן, הוא מרחב וקטורי ממימד סופי מעל השדה $k = B/t$. נבחר לו בסיס $e_1, \dots, e_d$, ונבחר איברים $m_j \in M$ כך ש-$t^i m_j = e_j$. אז ה-m_j יוצרים תת-מודול חופשי N מדרגה d של M. אנחנו טוענים שקיים תת-מודול L של M כך ש-$M = N \oplus L$.

על מנת להוכיח זאת, מספיק למצוא העתקה $r : M \to N$ שהיא הזהות על N (ואז L הוא הגרעין של r). כיוון ש-N מודול חופשי מדרגה d, העתקה r כזו נתונה על-ידי d העתקות הרכיבים $r_j : M \to B$, שמרחיבות את העתקות הרכיבים על N. במלים אחרות, נתונות לנו העתקות r_j מתת-המודול N ל-B, ואנחנו מנסים להרחיב אותן ל-M. העובדה שניתן לעשות זאת מוסברת בלמה 4.3.17. □

הערה 4.3.16. ההוכחה של טענה 4.3.15 מראה איך לחשב את מספר המודולים מכל סוג שמופיעים בסכום: הדרגה של המודול החופשי מעל B/t^{i+1} היא המימד של $t^iM/t^{i+1}M$.

למה 4.3.17. *אם B חוג מקומי ראשי עם אידיאל מירבי נילפוטנטי, $N \subseteq M$ מודולים מעל B, ו-$r : N \to B$ העתקה, אז יש ל-r הרחבה ל-M.*

אם נסמן ב-$\breve{M}$ את המודול $\mathrm{Hom}(M, B)$ של העתקות מ-M ל-B, אז הטענה אומרת שההעתקה $\breve{M} \to \breve{N}$ המתקבלת מההכלה היא על.

הוכחה. נבחר יוצר t לאידיאל המירבי של B. אז יש n מינימלי עבורו $t^n = 0$.

נניח ראשית ש-$M = B$. אז N הוא אידיאל, ולכן נוצר על-ידי t^i, עבור $i \leqslant n$. אם $a = r(t^i)$, אז להרחיב את r ל-B משמעו למצוא איבר $b \in B$ כך ש-$a = t^i b$. נשים לב ש-$t^{n-i}a = r(t^n) = 0$, אז מספיק להראות: אם $t^{n-i}a = 0$ אז יש $b \in B$ כך ש-$a = t^i b$. עבור $i = 1$, הטענה אומרת שאם $t^{n-1}a = 0$ אז a נמצא באידיאל המירבי. זה נכון כי אחרת a הפיך,

ואז $t^{n-1}=0$, בסתירה למינימליות. עבור $i>1$, נובע מהמקרה $i=1$ ש-$a=tc$ עבור איזשהו $c\in B$, ואז $t^{n-i+1}c=0$, אז באינדוקציה $c=t^{i-1}b$, ולכן $a=t^ib$.

המשך ההוכחה לא תלוי בהנחות על B. נניח ש-M נוצר על-ידי N ואיבר נוסף m. על מנת להרחיב את r ל-M, עלינו למצוא איבר $b\in B$, כך שלכל משוואה $um=n$ המתקיימת ב-M עבור $u\in B$ ו-$n\in N$, מתקיים גם $ub=r(n)$. נסמן ב-$s:B\to M$ את ההעתקה ששולחת את 1 ל-m, ונסמן $I=s^{-1}(N)$. אז $r\circ s$ היא העתקה מ-I ל-B, ולפי החלק הראשון יש לה הרחבה $q:B\to B$. נסמן $b=q(1)$. אם $um=n$ מתקיים ב-M, אז $s(u)=um=n$ אז $r(n)=r(s(u))=q(u)=uq(1)=ub$. לכן b פותר את הבעיה.

המקרה הכללי נובע מהלמה של צורן (תרגיל). □

מודול אינקטיבי

Injective module

הערה 4.3.18. מודול L מעל חוג A נקרא *מודול אינקטיבי* (*Injective module*) אם הוא מקיים את התכונה של B בלמה, כלומר: כל העתקה מתת-מודול של מודול M ל-L ניתנת להרחבה לכל M. אז הלמה אומרת ש-B אינקטיבי כמודול מעל עצמו. ההוכחה של הלמה כוללת הוכחה של קריטריון כללי לאינקטיביות, שידוע *כקריטריון באאר* (*Baer criterion*): מספיק לבדוק את התנאי עבור המקרה $M=A$.

קריטריון באאר

Baer criterion

התנאי של חוג להיות אינקטיבי כמודול מעל עצמו הוא די נדיר. למשל, תחום שלמות אינקטיבי מעל עצמו אם ורק אם הוא שדה (תרגיל).

הטענה הבאה מסכמת את מה שהוכחנו:

טענה 4.3.19. *כל מודול נוצר סופית מעל תחום דדקינד A הוא סכום ישר של מודול פרויקטיבי P ומודול פיתול T. מודול הפיתול הוא סכום ישר של מודולים מהצורה A/p^i, כאשר p אידיאל ראשוני. האידיאלים p, החזקות i ומספר המחוברים נקבעים ביחידות.*

עבור המקרה הפרטי $M=A/I$, כאשר I אידיאל ב-A מקבלים:

מסקנה 4.3.20. *כל אידיאל I בתחום דדקינד A הוא באופן יחיד מכפלה $I=p_1^{n_1}\dots p_k^{n_k}$, כאשר p_i אידיאלים ראשוניים*

ראינו כבר שתחום דדקינד הוא תחום פריקות יחידה רק אם הוא תחום ראשי, אבל עכשיו אנחנו רואים שפריקות יחידה מתקיימת במובן של אידיאלים. זו הייתה המוטיבציה המקורית של ההגדרה של תחומי דדקינד (ושל אידיאלים).

לבסוף, נשים לב שעבור תחומים ראשיים, המצב קצת יותר פשוט:

מסקנה 4.3.21. *כל מודול נוצר-סופית מעל תחום ראשי הוא סכום ישר סופי של מודולים מעגליים. טיפוסי האיזומורפיזם של המודולים שמופיעים ומספרם נקבעים ביחידות.*

המסקנה נובעת ישירות מטענה 4.3.4, שכן במקרה זה פרויקטיבי וחופשי זה היינו-הך.

תרגיל 4.3.22. חשבו את הפירוק מטענה 4.3.19 עבור המקרים הבאים:

1. חבורת האוטומורפיזמים של C_{15}, החבורה המעגלית מסדר 15 (כמודול מעל $\mathbb{Z}$)

2. המודול מעל $\mathbb{R}[x,y]/x^2+y^2-1$ של פונקציות ממשיות $g(x,y)$ על המעגל, כך שלכל נקודה $r=\langle x,y\rangle$ על המעגל, הוקטור $\langle g(r),0\rangle$ משיק למעגל בנקודה r (זהו תת-מודול של מודול כל הפונקציות הממשיות על המעגל)

3. המודול של כל הפונקציות מהשדה $\mathbb{F}_{17}$ לעצמו, כמודול מעל $\mathbb{F}_{17}[x]$

תרגיל 4.3.23. נניח ש-V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$, ו-$T:V\to V$ העתקה לינארית. נתבונן ב-V כמודול מעל $\mathbb{C}[x]$, כאשר x פועל כ-T. תארו את הפירוק של V במונחים של ההעתקה T.

4.4 חוגים ארטיניים

הגדרה 4.4.1. מודול מעל חוג A נקרא *מודול ארטיני* אם כל שרשרת יורדת של תתי-מודולים היא סופית. החוג עצמו נקרא *חוג ארטיני* אם הוא ארטיני כמודול מעל עצמו

מודול ארטיני
חוג ארטיני

דוגמא 4.4.2. לכל שדה k, החוג $k[x]$ אינו ארטיני: הסדרה (x^i) היא סדרה אינסופית יורדת של אידיאלים

דוגמא 4.4.3. כל אלגברה ממימד סופי (כמרחב וקטורי) מעל שדה היא חוג ארטיני

דוגמא 4.4.4. המודול $M={}^{k[x]_x}/_{k[x]}$ מעל $k[x]$ הוא ארטיני: כל איבר ב-M ניתן לייצג כסכום סופי של x^i, עבור $i<0$, ו-x פועל על איבר כזה כצפוי אם $i<-1$, אבל $x\cdot\frac{1}{x}=0$. לכן, כל תת-מודול ממש נוצר על-ידי איבר מהצורה x^i. בפרט, הוא ממימד סופי מעל k, ולכן כל שרשרת יורדת היא סופית.

מאידך, אוסף כל תתי-המודולים ממש הוא שרשרת עולה אינסופית, אז המודול אינו נתרי.

כמו מודולים נתריים, גם מודולים ארטיניים סגורים תחת סדרות מדויקות:

תרגיל 4.4.5. אם $0\to L\to M\to N\to 0$ סדרה מדויקת של מודולים, הוכיחו ש-L,N ארטיניים אם ורק אם M ארטיני. הסיקו שאם A חוג ארטיני ו-M מודול נוצר סופית מעל A אז M ארטיני

תרגיל 4.4.6. לוקאליזציה של חוג ארטיני היא חוג ארטיני

תרגיל 4.4.7. הוכיחו שכל איבר של חוג ארטיני הוא מחלק אפס או הפיך. בפרט, תחום הוא ארטיני אם ורק אם הוא שדה

מבחינה גאומטרית, שרשרת יורדת של אידיאלים מתאימה לשרשרת עולה של קבוצות סגורות. כיוון שהוספה של נקודה (סגורה) לקבוצה סגורה נותנת קבוצה סגורה, ההנחה שכל סדרה כזו היא סופית צריכה להתאים להנחה שהמרחב הוא סופי, כלומר נתרי וממימד 0. זה התוכן של המשפט הבא:

טענה 4.4.8 (משפט אקיזוקי–הופקינס). *חוג הוא ארטיני אם ורק אם הוא נתרי וממימד קרול 0*

הוכחה. נניח ש-A ארטיני. אם p אידיאל ראשוני, אז ${}^{A}/_{p}$ הוא תחום ארטיני (לפי תרגיל 4.4.5), ולכן שדה (תרגיל 4.4.7). לכן p מירבי, והמימד הוא 0.

כדי להראות שהחוג נתרי, נשים לב ראשית שב-A יש רק מספר סופי של אידיאלים מירביים: אם p_i סדרה אינסופית של אידיאלים מירביים, אז הסדרה $p_1,p_1\cap p_2,\dots$ היא סדרה יורדת אינסופית (זהו בדיוק התהליך שמתואר לפני הטענה). אם p אידיאל מירבי, אז A_p חוג מקומי ממימד 0 ובפרט סופי, ולכן נתרי. אז התנאים של טענה 4.1.25 מתקיימים, ולכן A נתרי לפי טענה זו.

בכיוון ההפוך, מטענה 4.3.8 נובע שאפשר להניח ש-A מקומי. כיוון שהחוג ממימד 0, האידיאל המירבי p הוא גם הראשוני היחיד, ולכן הוא נילפוטנטי. כיוון ש-A נתרי, יש n כך ש-$p^n = 0$. שוב כיוון ש-A נתרי, המרחבים הוקטוריים p^i/p^{i+1} הם ממימד סופי מעל שדה השארית. עכשיו הטענה נובעת באינדוקציה מתרגיל 4.4.5. $\square$

מהטענה נובע שבחוג ארטיני יש רק מספר סופי של אידיאלים ראשוניים. זה לא בהכרח נכון לאידיאלים לא ראשוניים:

תרגיל 4.4.9. נניח ש-p אידיאל מירבי בחוג נתרי A. הוכיחו ש-A/p^2 הוא חוג ארטיני מקומי עם אידיאל מירבי (התמונה של) p, ושהאידיאלים ממש בו הם בדיוק תתי-המרחבים של המרחב הלינארי $p/p^2 \subseteq A/p^2$ מעל השדה A/p. הסיקו שייתכן שבחוג ארטיני ייתכנו אינסוף אידיאלים (רמז: הסתכלו על הדוגמא $A = \mathbb{C}[x, y]$ ו-$p = (x, y)$).

הטענה הבאה היא מסקנה ישירה של טענות שכבר הוכחנו: טענה 4.3.8 וטענה 4.4.8.

טענה 4.4.10. *כל חוג ארטיני הוא מכפלה סופית של חוגי ארטיני מקומיים. האידיאל המירבי של כל חוג ארטיני מקומי הוא נילפוטנטי. בפרט, חוג ארטיני מצומצם הוא מכפלה סופית של שדות.*

סוף הרצאה 19, 25 במאי

5 משפט האפסים של הילברט

5.1 משפט האפסים ומסקנות

נניח ש-$\langle X, A\rangle$ יריעה אפינית מעל שדה k. כזכור, משמעות ההנחה היא שיש קשר חזק בין הגאומטריה של X לתכונות האלגבריות של X, לפחות ברמת הנקודות: ניתן לשחזר את X מתוך A בתור קבוצת ההעתקות (של אלגברות) מ-A ל-k. כעת, אנחנו רוצים להבין בצורה יותר מדויקת את הקשר הזה. למשל, אינטואיטיבית ביריעה ממימד גדול מ-0 צריכות להיות אינסוף נקודות. ככלל, זה לא נכון: למשל, בכל יריעה מעל שדה סופי יש רק מספר סופי של נקודות.

לכל נקודה $x : A \to k$ מתאים אידיאל מירבי, הגרעין אידיאל מירבי m_x ב-A. אנחנו מקבלים העתקה m מ-X לקבוצה $\operatorname{specm}(A)$ של כל האידיאלים המירביים ב-A. העתקה זו היא חד-חד-ערכית: האידיאל $p \in \operatorname{specm}(A)$ נמצא בתמונה של m אם ורק אם $A/p = k$, ובמקרה זה $p = m_x$, כאשר $x : A \to k$ העתקת המנה. באופן כללי, לכל איבר ב-$\operatorname{specm}(A)$ מתאימה, באופן הזה, העתקה מ-A על שדה הרחבה של k. אנחנו טוענים:

משפט 5.1.1 (משפט האפסים, גרסא א). *אם A אלגברה נוצרת סופית מעל שדה k, ו-p אידיאל מירבי ב-A, אז A/p הרחבת שדות סופית של k. בפרט, אם k סגור אלגברית אז $A/p = k$. אם $\langle X, A\rangle$ יריעה אפינית מעל שדה סגור אלגברית, ההעתקה מ-X ל-$\operatorname{specm}(A)$ היא הפיכה.*

למעשה, כבר הוכחנו את המשפט הזה. לפני שנזכיר את ההוכחה, נציין ניסוח חלופי של אותה טענה:

משפט 5.1.2 (משפט האפסים, גרסא ב). *אם $A \neq 0$ אלגברה נוצרת סופית מעל שדה k, אז יש העתקה $x : A \to L$ של אלגברות מעל k אל שדה הרחבה סופית L של k.*

כדי לראות את השקילות, נניח ש-A היא אלגברה שונה מ-0, נוצרת סופית מעל k. אז יש ב-A אידיאל מירבי p. לפי משפט 5.1.1, המנה A/p היא הרחבה סופית של k. מאידך, אם p אידיאל מירבי באלגברה נוצרת סופית A, אז השדה $L = A/p$ גם הוא אלגברה נוצרת סופית (ושונה מ-0) מעל k, אז לפי משפט 5.1.2, יש שיכון של L בשדה הרחבה סופית. אבל אז גם L עצמו הרחבה סופית.

נזכיר עכשיו הוכחה אחת של המשפט:

הוכחת משפט 5.1.1. כיוון ש-A נוצרת סופית כאלגברה מעל k, גם השדה A/p נוצר סופית כאלגברה מעל k. לפי מסקנה 4.2.28, זו הרחבה סופית. □

לגרסא ב' של המשפט ישנה המסקנה הבאה, הידועה בשם "הטריק של רבינוביץ'":

מסקנה 5.1.3. *אם A אלגברה נוצרת סופית מעל שדה סגור אלגברית k, ו-$a \in A$ איבר המקיים $t(a) = 0$ לכל העתקה $t : A \to k$ של אלגברות מעל k, אז a נילפוטנטי*

כמובן שגרסא ב' של משפט האפסים היא מקרה פרטי של המסקנה הזו, אז ניתן לראות גם אותה כניסוח שקול של המשפט.

הוכחה. נניח ש-a לא נילפוטנטי. אז $A_a \neq 0$ היא אלגברה נוצרת סופית מעל k (לפי טענה 3.0.5 ותרגיל 3.0.7). לפי משפט 5.1.2, יש העתקה $t : A_a \to k$. כיוון ש-a הפיך ב-A_a, מתקיים $t(a) \neq 0$, והשוויון הזה נשמר גם בצמצום של t ל-A. □

הניסוח הזה מאפשר לנו לענות על שאלה נוספת: מהם התנאים על אלגברה A להיות אלגברה אפינית (כלומר, אלגברת הפונקציות של יריעה אפינית)? לפי ההגדרה, A צריכה להיות נוצרת סופית מעל השדה k. בנוסף, אם A היא אלגברה אפינית, ההגדרה אומרת לנו מהי קבוצת הנקודות X. לכן, התנאי היחיד שחסר הוא ש-A היא אלגברת פונקציות על X, כלומר, שאיבר של A נקבע על-ידי ערכיו על הנקודות של X. אבל זה בדיוק התוכן של המסקנה האחרונה:

מסקנה 5.1.4. *אלגברה A מעל שדה סגור אלגברית k היא אפינית אם ורק אם היא נוצרת סופית ומצומצמת*

הוכחה. אם A חוג כלשהו ו-$a \in A$ איבר נילפוטנטי אז $t(a) = 0$ לכל העתקה t מ-A לשדה. לכן, אם A אלגברת הפונקציות של יריעה X, אז $a(x) = x(a) = 0$ לכל $x \in X$. כלומר A מצומצמת, ו-A נוצרת סופית לפי ההגדרה (בכיוון הזה לא השתמשנו בהנחה ש-k סגור אלגברית)

נניח ש-A מצומצמת ונוצרת סופית מעל k. נסמן $X = \mathrm{Hom}_k(A, k)$. כדי להוכיח ש-$\langle X, A\rangle$ יריעה אפינית, עלינו להוכיח שאם $a(x) = x(a) = 0$ לכל $x \in X$, אז $a = 0$. זה נובע ישירות ממסקנה 5.1.3. □

אפשר לנסח את המשפט גם במונחים של אידיאלים. כזכור, אם $\langle X, A\rangle$ יריעה אפינית מעל k, אנחנו מסמנים לכל תת-קבוצה $B \subseteq A$ ב-$\mathrm{Z}(B) \subseteq X$ את הקבוצה $\{x \in X \mid b(x) = 0 \forall b \in B\}$ של נקודות ההתאפסות של הפונקציות ב-B, ולכל תת-קבוצה $Y \subseteq X$ ב-$I(Y)$ את הקבוצה $\{a \in A \mid a(y) = 0 \forall y \in Y\}$ של פונקציות שמתאפסות על Y. קבוצות מהצורה $\mathrm{Z}(B)$ היו, לפי ההגדרה, הקבוצות הסגורות (זריצקי) ב-X.

בבירור, לכל $Y \subseteq X$, הקבוצה $I(Y)$ היא אידיאל ב-A. יותר מזה, זהו אידיאל רדיקלי: אם $a^n \in I(Y)$ אז $a \in I(Y)$. לכן, $I(\mathrm{Z}(B))$ כולל את האידיאל הרדיקלי שנוצר על-ידי B. השאלה היא האם מתקיים שוויון.

מסקנה 5.1.5 (משפט האפסים, גרסא ג', משפט ד'). *אם $\langle X, A\rangle$ יריעה אפינית מעל שדה סגור אלגברית k, ו-$I \subseteq A$ אידיאל רדיקלי, אז $I = I(\mathrm{Z}(I))$. אם $Y \subseteq X$ תת-קבוצה סגורה זריצקי, אז $\mathrm{Z}(I(Y)) = Y$.*

בפרט, אם I אידיאל כך ש-$\mathrm{Z}(I) = \varnothing$ אז $I = A$.

תרגיל 5.1.6. הוכיחו את המסקנה

תרגיל 5.1.7. לכל פולינום $p(x,y)$, מיצאו שדה k עבורו $I(\mathrm{Z}(p))$ אינו האידיאל שנוצר על-ידי p (כלומר, אנחנו חושבים על p כעל איבר של $k[x,y]$, ומחשבים את $\mathrm{Z}(p)$ ב-k^2)

1. $x^2 - 2y^2$
2. $x^5y - y^5x$
3. $x^2 - y^2$

תרגיל 5.1.8. נתבונן באידיאל I שנוצר על-ידי $y^2 - x^4$ ו-$x^2 - 2x^3 - x^2y + 2xy + y^2 - y$ ב-$k[x,y]$, כאשר k שדה. תארו את רכיבי הפריקות של $\mathrm{Z}(I)$. מיצאו שדה סגור אלגברית k עבורו $I(\mathrm{Z}(I)) \neq I$

נזכיר כעת את הקשר בין הנקודות של יריעה אפינית לפתרונות של משוואות. אם A אלגברה נוצרת סופית מעל השדה k, בחירת יוצרים ל-A משמעה בחירה של העתקה $t : k[x_1, \dots, x_n] \to A$ שהיא על. הגרעין I של ההעתקה הזו נוצר (לפי משפט הבסיס) על-ידי קבוצה סופית $p_1, \dots, p_m$ של פולינומים, וכל נקודה $x : A \to k$ מתאימה לכן לפתרון ב-k של מערכת המשוואות $p_i = 0$. כל זה עובד גם בכיוון ההפוך: לכל מערכת משוואות ניתן להתבונן במנה של חוג הפולינומים באידיאל (הרדיקלי) שנוצר על-ידי המערכת, ולקבל אלגברה שקבוצת הנקודות שלה מתאימה לקבוצת הפתרונות של המערכת המקורית.

השדה k הוא סגור אלגברית אם יש פתרון לכל משוואה פולינומית $p(t) = 0$ כאשר p פולינום לא קבוע. לכן, זהו המקרה של מסקנה 5.1.5 בו $A = k[t]$, כך שההנחה ש-k סגור אלגברית היא הכרחית כאן. הגרסא הכללית אומרת, במונחים של משוואות, שאם יש לנו מערכת של משוואות פולינומיות מעל שדה סגור אלגברית k, ואין למערכת פתרון ב-k, אז זה מוסבר על-ידי כך שיש במערכת סתירה, כלומר ניתן להגיע מהמשוואות, באמצעות מניפולציות אלגבריות, למשוואה 1=0. בפרט, אין למערכת פתרון גם בשום חוג אחר.

מה קורה כאשר k לא סגור אלגברית? ראינו שלהתבונן בהעתקות ל-k לא מספק מספיק מידע (למשל, אולי אין כאלה), אבל ניתן להסתכל בהעתקות לאלגברות אחרות מעל k. לכל אלגברה B מעל k נסמן $\mathrm{X}_A(B) = \mathrm{Hom}_k(A, B)$. כמו קודם, אם בוחרים יוצרים ל-A מעל k, אפשר לזהות את הקבוצה $\mathrm{X}_A(B)$ עם קבוצת הפתרונות ב-B למערכת משוואות פולינומיות מעל k.

משפט האפסים אומר שכל אידיאל מירבי הוא גרעין של העתקה להרחבה סופית של k. על מנת שלא נצטרך לשנות את ההרחבה הסופית, נבחר סגור אלגברי L של k, ונתבונן ב-$\mathrm{X}_A(L)$. נשים

לב שהגרעין של כל העתקה $x : A \to L$ מעל k הוא אידיאל מירבי: בגלל ש-A נוצרת סופית, התמונה של x היא תת-אלגברה נוצרת סופית של הרחבה אלגברית, ולכן בעצמה הרחבה סופית, ובפרט שדה. מאידך, כל הרחבה סופית של k אפשר לשכן ב-L, אז האיברים של $\mathrm{specm}(A)$ הם בדיוק הגרעינים של איברים של $\mathbf{X}_A(L)$, אבל יתכן של-$x, y \in \mathbf{X}(L)$ יהיה אותו גרעין.

כדי להבין את המצב, נסמן ב-$G = Aut(L/k)$ את חבורת הגלואה של k. אז G פועלת על $\mathbf{X}(L)$: אם $x \in \mathbf{X}(L)$ ו-$g \in G$ אז $g \circ x \in \mathbf{X}(L)$. כיוון שכל איבר של G הפיך, הגרעין של x שווה לגרעין של $g \circ x$. קיבלנו העתקה מקבוצת המנה $\mathbf{X}(L)/G$ על $\mathrm{specm}(A)$. מאידך, אם $x : A \to K_1 \subseteq L$ ו-$y : A \to K_2 \subseteq L$ שתי העתקות מנה עם אותו גרעין, אז לפי התכונה האוניברסלית יש איזומורפיזם $t : K_1 \to K_2$ מעל k כך ש-$t \circ x = y$, וניתן להרחיב את t לאיבר של G. הוכחנו:

טענה 5.1.9. *אם A אלגברה נוצרת סופית מעל שדה k, ו-L סגור אלגברי של k, אז יש העתקה הפיכה מ-$\mathrm{Hom}_k(A, L)/G$ ל-$\mathrm{specm}(A)$, כאשר $G = \mathrm{Aut}(L/k)$ חבורת הגלואה של k.*

דוגמא 5.1.10. אם $k = \mathbb{R}$ ו-$A = \mathbb{R}[x]$, אז A תחום ראשי, ולכן כל אידיאל ראשוני נוצר על-ידי פולינום אי-פריק מעל $\mathbb{R}$. פולינום כזה יכול להיות ממעלה ראשונה או שנייה. הפולינומים ממעלה ראשונה מתאימים לנקודות על הישר הממשי: האידיאל שנוצר על-ידי $x - a$ הוא הגרעין של ההעתקה ששולחת את x ל-a.

כל פולינום אי-פריק ממעלה שנייה מתאים לנקודה מרוכבת שאינה ממשית. הצמוד המרוכב של כל נקודה כזו פותר את אותה משוואה, ולכן שתי הנקודות נותנות את אותו אידיאל. במילים אחרות, $\mathrm{specm}(\mathbb{R}[x])$ נראה כמו המישור המרוכב בו כל נקודה מזוהה עם הצמודה שלה.

5.2 הוכחות נוספות של משפט האפסים

למשפט האפסים הוכחות רבות, בסעיף זה נתבונן בכמה מהן. ראינו כבר שקיום משפט עבור שדה k שקול לאמירה ש-k סגור אלגברית. זה אומר שאם k לא סגור אלגברית, ניתן למצוא אלגברה נוצרת סופית מעליו בה יש אידיאל מירבי שאינו הגרעין של העתקה ל-k. בהוכחה הבאה נראה זה נכון לכל אלגברה ממימד חיובי.

טענה 5.2.1. *נניח ש-$A \neq 0$ אלגברה מעל שדה סגור אלגברית k שהיא ממימד סופי (כמרחב וקטורי) מעל k, אז יש העתקה $x : A \to k$ של אלגברות מעל k.*

ניתן להסיק את הטענה מטענה 4.4.10, אבל אנחנו נשתמש באלגברה לינארית.

הוכחה. לכל $a \in A$, כפל ב-a הוא העתקה לינארית מ-A לעצמו מעל k. כל ההעתקות הללו, עבור איברים שונים של A, מתחלפות. לכן, יש להן וקטור עצמי משותף. לכל a, נסמן ב-$x(a)$ את הערך העצמי המתאים. אז x העתקה של אלגברות מעל k. $\square$

מסקנה 5.2.2. *נניח ש-p אידיאל בחוג A כך ש-$k = {}^{A}/_{p}$ שדה סגור אלגברית, ו-B אלגברה מעל A שהיא הרחבה סופית (כמודול) של A. אז יש $x : B \to k$ כך ש-$\ker(x) \cap A = p$.*

הוכחה. זה מקרה פרטי של הטענה עבור ${}^{B}/_{pB}$ $\square$

מבחינה גאומטרית, המסקנה אומרת שאם B אלגברה סופית מעל תת-אלגברה $A \subseteq B$ מעל שדה סגור אלגברית k, אז ההעתקה המושרית מ-$\mathbf{X}_B(k)$ ל-$\mathbf{X}_A(k)$ היא על.

הוכחת משפט 5.1.2. מספיק להוכיח שאם k סגור אלגברית אז יש נקודה ב-k. לפי משפט הנורמליזציה של נתר, כל אלגברה כמו במשפט היא סופית מעל תת-אלגברה של פולינומים מעל k. באלגברת הפולינומים יש נקודות רבות ב-k (כל n-יה, כאשר n מספר המשתנים). לפי המסקנה האחרונה, מעל כל נקודה כזו יש נקודת k של A. $\square$

תרגיל 5.2.3. הוכיחו שאין אלגברה נוצרת סופית A מעל $\mathbb{C}$ כך שהעוצמה של $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C})$ היא בדיוק $\aleph_0$ (במילים אחרות, קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות פולינומיות מעל $\mathbb{C}$ היא סופית או מעוצמת הרצף)

שתי ההוכחות הבאות מראות את המשפט למקרה בו השדה k הוא שדה סגור אלגברית שאינו בן מנייה (למשל $\mathbb{C}$).

הוכחת משפט 5.1.1 כש-k אינו בן-מניה. נניח ש-p אידיאל מירבי ב-A. כיוון ש-A נוצרת סופית מעל k, אם $L = A/p$ הרחבה אלגברית של k אז היא סופית. לכן, נניח שההרחבה אינה אלגברית. אז היא כוללת איבר טרנסנדנטי $t \in L$. האיברים $\frac{1}{t-a}$ של L, עבור $a \in k$ שונים, הם בלתי תלויים מעל k (תרגיל). כיוון ש-k אינו בן מנייה, זה אומר שהמימד של L כמרחב וקטורי מעל k אינו בן מנייה. אבל זו סתירה שכן המימד של A כמרחב וקטורי מעל k הוא לכל היותר $\aleph_0$: A נוצרת סופית כאלגברה מעל k, ולכן היא מנה של אלגברת פולינומים, ואלגברה זו נפרשת על-ידי המונומים. $\square$

הוכחה נוספת נביא כתרגיל:

תרגיל 5.2.4. נניח ש-p אידיאל מירבי באלגברת הפולינומים $A = k[t_1, \dots, t_n]$, כאשר k שדה סגור אלגברית שאינו בן-מנייה. נוכיח שקיימת העתקה $x : A/p \to k$ מעל k

1. נסמן ב-$k_0 \subseteq k$ את השדה הראשוני ($\mathbb{Q}$ או $\mathbb{F}_p$). הוכיחו שקיים שדה הרחבה נוצר סופית (כשדה) $L = k_0(a_1, \dots, a_m)$ של k_0 כך ש-p נוצר על-ידי איברים ב-$L[t_1, \dots, t_n]$.
2. נסמן ב-q את האידיאל ב-$L[t_1, \dots, t_n]$ שנוצר על-ידי האיברים מהסעיף הקודם. הוכיחו שניתן לשכן את $L[t_1,\dots,t_n]/q$ ב-k.
3. הסיקו את הטענה

הערה 5.2.5. שימוש פשוט בלוגיקה מסדר ראשון מאפשר להסיק את המקרה הכללי מהמקרה לשדות גדולים: התכונה של שדה להיות סגור אלגברית היא (אינסוף פסוקים) מסדר ראשון. כך גם התכונה של מערכת סופית של משוואות להיות פתירה. ממשפט לוונהיים–סקולם נובע לכן שלכל שדה סגור אלגברית יש הרחבה סגורה אלגברית שאינה בת-מנייה. בהרחבה זו, מערכת המשוואות פתירה, ולכן לפי שקילות אלמנטרית, גם בשדה המקורי.

סגור יישית

למעשה, הקשר בין לוגיקה למשפט האפסים יותר עמוק. שדה k נקרא *סגור יישית* בתוך שדה L שמכיל אותו אם כל מערכת משוואות (סופית) מעל k שפתירה ב-L פתירה גם ב-k. משפט האפסים אומר שאם k סגור אלגברית, אז הוא סגור יישית בכל שדה שמכיל אותו. משפט בסיסי (ולא קשה) בלוגיקה אומר שהתכונה הזו נובעת מהתנאי: ההטלה של צירוף בוליאני של קבוצות סגורות (בשדה

סגור אלגברית כלשהו) היא שוב צירוף בוליאני של קבוצות סגורות (תנאי זה נקרא *חילוץ כמתים*). העובדה שבשדות סגורים אלגברית יש חילוץ כמתים ניתנת להוכחה קלה מאוד בעזרת קריטריון מלוגיקה (ניתן להוכיח אותה גם אלגברית, ובהקשר זה היא נקראת משפט שבלייה).

סוף הרצאה 20, 1 ביוני

5.3 מעבר לאלגברות נוצרות סופית

הטריק של רבינוביץ' עובד באופן יותר כללי מהצורה בה ניסחנו אותו. כדי לנסח את הטענה הכללית יותר, נעזר בהגדרה הבאה:

חוג ג'קובסון

הגדרה 5.3.1. חוג A נקרא *חוג ג'קובסון* אם כל אידיאל ראשוני בו הוא חיתוך האידיאלים המירביים המכילים אותו

במונחים של תרגיל 3.4.8, A הוא חוג ג'קובסון אם לכל ראשוני p של A, רדיקל ג'קובסון של A/p הוא 0. חוג כזה נקרא *ג'קובסון פשוט-למחצה.* עכשיו, למסקנה 5.1.3 ישנה ההכללה הבאה, אותה ניתן לראות כהכללה של משפט האפסים:

ג'קובסון פשוט-למחצה

טענה 5.3.2 (הטריק של רבינוביץ', גרסא כללית). *אם A חוג ג'קובסון ו-B אלגברה נוצרת סופית מעל A, אז B חוג ג'קובסון, והצמצום של כל אידיאל מירבי ב-B ל-A הוא מירבי, ונותן הרחבת שדות סופית בשדה השארית.*

כל שדה הוא בבירור חוג ג'קובסון, אז הטענה הזו גוררת שכל אלגברה נוצרת סופית מעל שדה היא חוג ג'קובסון, שהיא החלק השני של משפט האפסים, והחלק השני של הטענה הוא הכללה של הגרסא 5.1.1.

נגיד שחוג A הוא *כמעט שדה* אם הוא תחום, ו-A_a הוא שדה עבור איזשהו איבר $a\in A$. נאמר שאידיאל $p\subseteq A$ הוא *כמעט מירבי* אם A/p כמעט שדה (בפרט, הוא ראשוני). בהוכחת הטענה נשתמש בקריטריון הבא:

למה 5.3.3. *חוג A הוא ג'קובסון אם ורק אם כל אידיאל כמעט מירבי ב-A הוא מירבי (במילים אחרות, כל מנה שהיא כמעט שדה היא שדה).*

הוכחה. מספיק להראות שאם A תחום בו כל אידיאל כמעט מירבי הוא מירבי, אז רדיקל ג'קובסון שלו הוא 0. נסמן ב-J את רדיקל ג'קובסון. אם J אינו 0, נבחר $0\neq a\in J$. כיוון ש-A תחום, a אינו נילפוטנטי, ולכן קיים אידיאל p מירבי מבין אלה שלא כוללים את a, ואידיאל זה הוא ראשוני (טענה 2.3.1). כיוון ש-a שייך לכל האידיאלים המירביים, p אינו מירבי, אבל הוא יוצר אידיאל מירבי ב-A_a. לכן p אידיאל כמעט מירבי אבל לא מירבי.

הכיוון השני נשאר כתרגיל $\square$

תרגיל 5.3.4. הוכיחו שאם A חוג ג'קובסון, גם כל מנה שלו היא כזו. הסיקו את הכיוון השני של הטענה

עכשיו אפשר להוכיח את ההכללה של משפט האפסים:

הוכחת טענה 5.3.2. באינדוקציה על מספר היוצרים, אפשר להניח שיש B נוצר על-ידי איבר אחד b מעל A, כלומר מנה של חוג הפולינומים מעל A. אנחנו נשתמש בקריטריון לעיל, אז אפשר להניח ש-B כמעט שדה, כלומר שיש $u \in B$ כך ש-B_u שדה, ועלינו להוכיח ש-B שדה. על-מנת להוכיח גם את החלק השני, עלינו להראות ש-A גם שדה, ו-B שדה הרחבה סופי שלו.

בכל מקרה, B ולכן גם A הם תחומים. נסמן ב-K את שדה השברים של A, וב-C את הלוקאליזציה של B ביחס ל-$A \backslash 0$. אז C תחום שנוצר על-ידי איבר אחד b מעל השדה K, ו-C_u שדה. אז C לא יכול להיות חוג הפולינומים מעל K ולכן הוא מנה ממש, כלומר C שדה הרחבה סופי מעל K. לכן, ישנה לוקאליזציה באיבר אחד $v \in A$ כך ש-C_u סופי כבר כמודול מעל A_v. לפי מסקנה 4.2.21, גם A_v שדה, כלומר A כמעט שדה. כיוון שהנחנו ש-A ג'קובסון, A עצמו שדה לפי הלמה, ולכן $A = A_v = K$, ו-C הרחבת שדות סופית. $\square$

ראינו כבר שעבור אלגברות A מעל שדה k שאינו סגור אלגברית, הקבוצה $\mathrm{specm}(A)$ מחזיקה יותר מידע מקבוצת ההעתקות ל-k. אפשר לחשוב על קבוצה זו כעל מרחב גאומטרי: הקבוצה הסגורה המתאימה לאיבר $a \in A$ היא קבוצת האידיאלים שכוללים אותו, ובאופן יותר כללי, הקבוצה הסגורה $\mathrm{Z}(I)$ שמוגדרת על-ידי אידיאל I היא קבוצת האיברים של $\mathrm{specm}(A)$ שמכילים את I. מהבחינה הזו, חוגי ג'קובסון הם החוגים בהם קורה משהו דומה למשפט האפסים: "פונקציה" שמתאפסת על כל הנקודות של קבוצה סגורה היא 0. החלק השני של המשפט מבטיח שהעתקה של חוגים משרה העתקה (בכיוון ההפוך) של המרחבים.

הבעיה היא שהמחלקה הזו עדיין לא כוללת הרבה מהדוגמאות המעניינות. בפרט, היא לא כוללת את החוגים המקומיים ממימד חיובי. יותר מזה, התמונה ההפוכה של אידיאל מירבי תחת העתקה כללית אינה בהכרח אידיאל מירבי. בשלב מסוים אלכסנדר גרותנדיק הבין שלמעשה אפשר לחשוב גאומטרית על *כל החוגים* (החילופיים) וכל ההעתקות ביניהם. דרך אחת לעשות זאת היא להחליף את המרחב $\mathrm{specm}(A)$ של האידיאלים המירביים בקבוצה הגדולה יותר $\mathrm{spec}(A)$ של האידיאלים הראשוניים. כל העתקה בין חוגים משרה העתקה בין מרחבים כאלה (בכיוון ההפוך) ומסתבר שהם מהווים הכללה מצוינת של התורה הקלאסית.

6 הרחבות אינטגרליות

אפשר לחשוב על הרחבות סופיות של חוגים כהכללה של הרחבה סופית של שדות. מנקודת המבט הזו, הרחבה אינטגרלית היא ההכללה של הרחבה אלגברית. כרגיל, עבור חוגים העניינים יותר מסובכים: מהאנלוגיה אנחנו מצפים שהרחבה אינטגרלית שנוצרת על-ידי איבר אחד תהיה סופית. אבל הפתרון למשוואה האלגברית $tx - 1 = 0$ מעל $k[t]$ הלוקאליזציה $k[t]_t$, שאינה סופית מעל $k[t]$. זה מצדיק את הדרישה על המקדם העליון בהגדרה הבאה:

הגדרה 6.0.1. אם $A \subseteq B$ הרחבה של חוגים, איבר $b \in B$ היא *איבר אינטגרלי* מעל A אם קיים פולינום מתוקן $p(x) = x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ מעל A כך ש-$p(b) = 0$. ההרחבה נקראת *הרחבה אינטגרלית* אם כל איבר של B הוא אינטגרלי מעל A.

איבר אינטגרלי

הרחבה אינטגרלית

אפשר באותו אופן לדבר על העתקה אינטגרלית (שאינה דווקא הכלה), על-ידי החלפת A בתמונה שלו.

דוגמא 6.0.2. הרחבת שדות היא אינטגרלית אם ורק אם היא אלגברית

דוגמא 6.0.3. נראה בקרוב שאם A תחום פריקות יחידה, כל איבר של $K(A)$ שאינטגרלי מעל A הוא ב-A.

דוגמא 6.0.4. אם $A = {}^{\mathbb{C}[x,y]}/_{y^2-x^3}$, האיבר $t = \frac{y}{x}$ ב-$K(A)$ אינו ב-A אבל $t^2 = \frac{y^2}{x^2} = x$, אז t אינטגרלי. במלים אחרות, ההעתקה מ-A ל-$k[t]$ שנתונה על-ידי $x \mapsto t^2$ ו-$y \mapsto t^3$ היא אינטגרלית.

אם $b \in B$ איבר אינטגרלי מעל חוג A, אז תת-האלגברה $A[b]$ שנוצרת על-ידי b מעל A היא סופית: הפולינום המתוקן ש-b מאפס מאפשר לרשום את b^n באמצעות חזקות נמוכות יותר (ממש כמו עבור שדות). בכיוון ההפוך, כדי להראות שאם $A[b]$ סופית מעל A אז b אינטגרלי, היינו רוצים להגיד שעבור n מספיק גדול, b^n שייך לתת-המודול שנוצר על-ידי החזקות הקודמות. הבעיה היא שאנחנו לא יודעים שתת-המודול שנוצר על-ידי ה-b^i נוצר סופית (ההוכחה עובדת אם מניחים ש-A נתרי). לכן, כדי להראות זאת, נצטרך להשתמש ב*משפט קיילי–המילטון*.

משפט 6.0.5 (משפט קיילי–המילטון). *נניח ש-I אידיאל בחוג R ו-A מטריצה בגודל $n \times n$ עם ערכים ב-I. נסמן $d_A(t) = \det(t - A)$. אז d_A הוא פולינום מתוקן, בו המקדם של t^i שייך ל-I^i לכל i, ו-$d_A(A) = 0$.*

אם E האלגברה (הלא-חילופית) של כל ההעתקות של R^n לעצמו (כמודול מעל R), אז אפשר לחשוב על A כאיבר של E, וראינו שיש תת-אלגברה חילופית S של E שכוללת את A. מהטענה נובע לכן ש-S (ובפרט A) אינטגרלי מעל A. את הטענה הזו אפשר להסיק מיד למודולים נוצרים סופית באופן כללי:

תרגיל 6.0.6. הוכיחו שאם $T : M \to M$ העתקה ממודול נוצר סופית M לעצמו, מעל חוג A, אז T אינטגרלי מעל A.

ניתן שתי הוכחות של משפט קיילי–המילטון בהמשך, אבל קודם נסיק את המסקנה לחוגים אינטגרליים:

מסקנה 6.0.7. *נניח ש-$A \subseteq B$ הרחבה של חוגים*

1. *איבר $b \in B$ הוא אינטגרלי מעל A אם ורק אם $A[b]$ אלגברה סופית מעל A*
2. *אם B הרחבה סופית אז כל איבר של B אינטגרלי מעל A*
3. *אם B נוצרת כאלגברה על-ידי מספר סופי של איברים אינטגרליים, אז B סופית מעל A*
4. *ההרחבה היא אינטגרלית אם ורק אם היא גבול ישר מסונן של אלגברות סופיות מעל A*

הוכחה. 1. כיוון אחד ראינו, והכיוון השני הוא מקרה פרטי של הסעיף הבא

2. אם $b \in B$ אז כפל ב-b הוא אנדומורפיזם של המודול הנוצר סופית B מעל A, אז לפי תרגיל 6.0.6, b אינטגרלי

3. באינדוקציה, מספיק להוכיח עבור יוצר אחד, אבל זה הסעיף הראשון

4. כל אלגברה היא הגבול הישר של תתי-האלגברות הנוצרות סופית שלה. לפי הסעיף הקודם, במקרה שלנו כל תת-אלגברה כזו היא סופית. בכיוון ההפוך, ברור שגבול ישר מסונן של אלגברות אינטגרליות הוא אלגברה אינטגרלית. אבל כל אלגברה סופית היא אינטגרלית.

□

המסקנה הבאה היא המקבילה, בהקשר הזה, לסגור אלגברי יחסי של הרחבת שדות. כמו במקרה ההוא, הוכחה ישירה היא טכנית וקשה.

מסקנה 6.0.8. *אם $A \subseteq B$, קבוצת האיברים של B שהם אינטגרליים מעל A היא תת-אלגברה של B.*

הוכחה. צריך להוכיח שאם $b, c \in B$ אינטגרליים, אז גם הסכום והמכפלה שלהם כאלה. אבל זה מקרה פרטי של הסעיף השלישי במסקנה 6.0.7 □

תרגיל 6.0.9. אם $b, c \in B$ מאפסים את הפולינומים $x^2 + ux + v, x^2 + rx + s$ בהתאמה, רישמו את פולינומים מתוקנים שמתאפסים על-ידי $b + c$ ו-bc

הגדרה 6.0.10. החוג המתואר במסקנה 6.0.8 נקרא *הסגור האינטגרלי* של A ב-B הסגור האינטגרלי

נעבור עכשיו להוכחה של משפט קיילי–המילטון. ההוכחה הראשונה תהיה ישירה:

הוכחת משפט קיילי–המילטון. נשתמש בסימונים שאחרי ניסוח המשפט, ונחשוב על $M = R^n$ כעל מודול מעל S, כאשר נסמן ב-t את האיבר של S שמתאים ל-A. נסמן $B = t - A$. נשים לב שהפעולה של B על M נתונה על-ידי כפל מטריצות. בפרט, לכל $v \in M$ מתקיים $Bv = 0$. כמו לכל מטריצה, קיימת מטריצה C (מעל S) כך ש-$BC = CB = \det(t - A)I_n$ (כאשר I_n מטריצת היחידה. המטריצה הזו נבנית מדטרמיננטות של מינורים של B). לכן $\det(B)v = CBv = C0 = 0$ לכל $v \in M$. הטענה על המקדמים נובעת מהביטוי המפורש עבור המקדמים של d_A: המקדם של t^i הוא פולינום הומוגני מדרגה $n - i$. □

ההוכחה השנייה יותר ארוכה, אבל יותר אינטואיטיבית ויותר גאומטרית:

תרגיל 6.0.11. הוכיחו את משפט קיילי–המילטון באמצעות השלבים הבאים:

1. הוכיחו שמספיק להוכיח את הטענה לחוגים מקומיים, ולכן לשדות ושאפשר להניח שהשדה סגור אלגברית. מעכשיו אנחנו מניחים ש-$R = k$ הוא כזה.

2. הוכיחו את הטענה במקרה ש-A לכסינה

3. נסמן $N = n^2$. אז קבוצת כל המטריצות היא המרחב האפיני ה-N מימדי X. הוכיחו שקבוצת המטריצות A עבורן $d_A(A) = 0$ היא תת-קבוצה סגורה זריצקי Y של X (אנחנו מנסים להוכיח ש-$Y = X$)

4. הוכיחו שקבוצת המטריצות הלכסינות היא תת-קבוצה פתוחה של Y.

5. השתמשו בעובדה ש-X יריעה אי-פריקה כדי להסיק ש-$Y = X$.

תרגיל 6.0.12. הוכיחו את הלמה של נאקאיימה באמצעות משפט קיילי–המילטון (רמז: בתנאים של הלמה, השתמשו במשפט קיילי–המילטון כדי למצוא איבר שאינו באידיאל המירבי והורג את המודול)

סוף הרצאה 21, 4 ביוני

6.1 חוגים נורמליים

הגדרה 6.1.1. תחום שלמות A נקרא *תחום נורמלי* אם הוא סגור אינטגרלית בשדה השברים שלו. הסגור האינטגרלי $\widetilde{A}$ של A בתוך שדה השברים שלו נקרא *הנורמליזציה* של A. תחום נורמלי נורמליזציה

דוגמא 6.1.2. כל תחום פריקות יחידה A הוא נורמלי: נניח ש-$p(b)=0$ עבור פולינום מתוקן p ו-$b\in K(A)$. כדי להוכיח ש-$b\in A$ מספיק להראות שלכל איבר ראשוני $a\in A$ מתקיים $v_a(b)\geqslant 0$, כאשר v_a היא ההערכה המתאימה ל-a, כמו בתרגיל 3.1.9. $v_a(cb^k)=v_a(c)+kv_a(b)\geqslant kv_a(b)$ עבור כל $c\in A$, אז אם $v_a(b)<0$ ו-p ממעלה n, אז $v_a(b^n)$ קטן ממש מכל המונומים האחרים, ולכן $v_a(p(b))=nv_a(b)$, כלומר לא יתכן ש-$p(b)=0$.

דוגמא 6.1.3. אם K שדה מספרים (הרחבה סופית של $\mathbb{Q}$), הסגור האינטגרלי $\mathcal{O}_K$ של $\mathbb{Z}$ בתוך K נקרא חוג השלמים של K. הוא המקביל של $\mathbb{Z}$ עבור הרחבות כאלה.

דוגמא 6.1.4. דוגמא 6.0.4 מראה שהחוג $A={}^{k[x,y]}/_{x^2-y^3}$ אינו נורמלי. ראינו גם יש לה העתקה אינטגרלית ל-$k[t]$ שנתונה על-ידי $x\mapsto t^3$ ו-$y\mapsto t^2$. החוג $k[t]$ הוא תחום פריקות יחידה, ולכן נורמלי. כיוון שחוג זה יושב בתוך שדה השברים של A (על-ידי $t\mapsto\frac{x}{y}$), הוא הנורמליזציה של A.

התרגילים הבאים נותנים שתי הכללות של הדוגמא הזו:

תרגיל 6.1.5. עבור שדה k, הוכיחו שהחוג $A={}^{k[x,y]}/_{x^m-y^n}$ הוא תחום אם ורק אם $m=n=0$ או m,n זרים. במקרה זה, חשבו את הנורמליזציה של A.

תרגיל 6.1.6. נניח ש-A תחום פריקות יחידה, ו-$a\in A$. נתבונן בחוג $B={}^{A[t]}/_{t^2-a}$.

1. הוכיחו ש-B תחום אם ורק אם a אינו ריבוע ב-A. בהמשך התרגיל נניח שזה המצב.
2. הוכיחו שאם יש $b\in A$ כך ש-$a=b^2c$ ב-A, אז $B'={}^{A[t]}/_{t^2-c}$ הרחבה אינטגרלית של B. בפרט, אם b אינו הפיך, אז B אינו נורמלי, ובכל מקרה, הנורמליזציה של B שווה לנורמליזציה של B'
3. נניח שלא קיים b כמו בסעיף הקודם (כלומר, a חסר ריבועים). לכל $d\in K(B)$ מיצאו פולינום מתוקן p מעל $K(A)$ ש-d מקיים. הוכיחו ש-d אינטגרלי מעל A אם ורק אם המקדמים של הפולינום הזה שייכים ל-A (רמז: הלמה של גאוס)
4. הסיקו שאם a חסר-ריבועים אז B נורמלי אם $a-1$ לא שייך ל-(4) (האידיאל שנוצר על-ידי 4 ב-A), ואחרת הנורמליזציה היא $B[\frac{t-1}{2}]$.

מנקודת מבט גאומטרית, אם A חוג הפונקציות של יריעה אפינית אי-פריקה $\mathbf{X}$ מעל $\mathbb{C}$, איברים בשדה השברים של A הם פונקציות מרומורפיות, כלומר, פונקציות שמוגדרות על קבוצה פתוחה

בתוך היריעה. פונקציה כזו נמצאת בנורמליזציה אם היא חסומה (בטופולוגיה הקלאסית) בסביבה של תת-היריעה שלאורכה אינה מוגדרת. הנורמליזציה מתאימה ליריעה $\widetilde{\mathbf{X}}$ שמועתקת על $\mathbf{X}$, ושלאורכה אותה פונקציה כבר הופעת לפונקציה רגולרית. למשל, בדוגמא 6.1.4, הנורמליזציה מתאימה לעתקה מהישר (עם קואורדינטה t) לעקום המוגדר על-ידי $x^2=y^3$, שיש לו "שפיץ" בראשית הצירים. ההעתקה נתונה על-ידי $t\mapsto(t^3,t^2)$, וכאשר מתקרבים לראשית הצירים לאורך העקום (במובן של הטופולוגיה הקלאסית), הפונקציה $t=\frac{x}{y}$ שואפת ל-0, כיוון ש-x שואף ל-0 יותר מהר מ-y.

הנה דוגמא נוספת, שמראה את התופעה הכללית יותר:

דוגמא 6.1.7. נתבונן בעקום שמוגדר על-ידי המשוואה $y^2=x^3+x^2$ במישור $\mathbb{C}^2$. קבוצת הפתרונות (הממשיים) נראית כמו לולאה שחוצה את עצמה בראשית הצירים. כמו בתרגיל 6.1.6, אפשר לרשום $y^2=x^2(x+1)$ ולכן $\frac{y}{x}$ שייכת לנורמליזציה, ולכן הנורמליזציה היא $\mathbb{C}[t]$, כאשר $t=\frac{y}{x}$ (ההעתקה מ-$A=\mathbb{C}[x,y]/y^2-x^3-x^2$ ל-$\mathbb{C}[t]$ נתונה על-ידי $x\mapsto t^2-1$ ו-$y\mapsto t^3-t$). בסביבה (קלאסית) של ראשית הצירים, העקום נראה כמו איחוד שני האלכסונים $y=x$ ו-$y=-x$, אז הפונקציה t היא בקירוב 1 לאורך אלכסון אחד ו--1 לאורך השני (וההעתקה הנ"ל שולחת את 1 ואת -1 לראשית הצירים, והיא איזומורפיזם מחוץ לקבוצה זו)

הטענה המרכזית שנצטרך להמשך היא שנורמליזציה היא פעולה מקומית:

טענה 6.1.8. *נניח ש-A תחום. אז:*

1. *לכל תת-קבוצה סגורה כפלית $S\subseteq A$ מתקיים $\widetilde{S^{-1}A}=S^{-1}\widetilde{A}$ (שני הצדדים הם תתי-קבוצות של $K(A)$, והשוויון הוא במובן זה). בפרט, אם A נורמלי, אז גם כל לוקאליזציה שלו*
2. *A נורמלי אם ורק אם A_p נורמלי לכל אידיאל מירבי p*

הוכחה. 1. כל איבר של S הפיך ב-$\widetilde{S^{-1}A}$, אז צריך רק להוכיח את ההכלה ההפוכה. אם a איבר אינטגרלי מעל $S^{-1}A$, נניח ש-$p(a)=0$ כאשר $p(x)=x^n+\dots+b_0$, ו-$b_i\in S^{-1}A$. אז קיים $s\in S$ כך ש-$sb_i\in A$. אז

$$0=s^np(a)=(sa)^n+sb_{n-1}(sa)^{n-1}+\dots+s^nb_0$$

כאשר כל המקדמים s^ib_{n-i} הם ב-A. לכן $sa\in\widetilde{A}$, אז $a=s^{-1}sa\in S^{-1}\widetilde{A}$.

2. כיוון אחד הוא מקרה פרטי של החלק הקודם. נניח ש-A_p נורמלי לכל אידיאל מירבי p, ונניח ש-$a\in K(A)$ אינטגרלי מעל A. לכל אידיאל מירבי p, היחס האינטגרלי נותן יחס אינטגרלי עבור a_p. לכן לפי ההנחה, a_p יוצר את המודול A_p מעל A_p. לפי טענה 3.2.7, האיבר a יוצר את A, כלומר $a\in A$.

□

הטענה האחרונה ממקדת אותנו לכיוון של חוגים נורמליים מקומיים.

6.2 חוגים נורמליים מקומיים

כזכור, הגדרנו חוג הערכה בדידה כתחום ראשי מקומי (הגדרה 4.3.13). ראינו כבר מספר אפיונים שקולים, שכלולים בטענה הבאה:

טענה 6.2.1. *התנאים הבאים על תחום מקומי (A,p) שקולים:*

1. *A נתרי ו-p ראשי*
2. *A ראשי (כלומר, חוג הערכה בדידה)*
3. *קיים $t \in A$ כך שכל אידיאל שונה מ-0 ב-A נוצר על-ידי איבר מהצורה t^i*
4. *קיימת הערכה $v : K(A)^\times \to \mathbb{Z}$ כך ש-A הוא חוג ההערכה שלה*
5. *A נתרי, והמרחב הוקטורי ${}^{p}/_{p^2}$ הוא ממימד לכל היותר 1 מעל ${}^{A}/_{p}$*
6. *A נתרי, נורמלי וממימד לכל היותר 1*
7. *A תחום פריקות יחידה ממימד לכל היותר 1*

הוכחה. $(4) \implies (1)$ נסמן ב-t יוצר של p. אם $t = 0$ אז A שדה ואין מה להוכיח. אחרת, אנחנו טוענים ראשית ש-$\bigcap_i (t^i) = 0$: אחרת, נניח ש-$x \neq 0$ שייך לחיתוך. אז האידיאלים $(\frac{x}{t^i})$ הם שרשרת עולה ממש של אידיאלים, בסתירה לנתריות.

נניח עכשיו ש-$x \in A$ שונה מ-0. אז יש i עבורו $x \in (t^i) \setminus (t^{i+1})$. נגדיר $v(x) = i$, ונרחיב לשדה השברים מכפליות. אז v הערכה עם חוג A.

$(3) \implies (4)$ נניח ש-A חוג ההערכה של הערכה v. אפשר להניח ש-v לא טריוויאלית, כי אחרת $A = K(A)$ שדה והתוצאה ברורה. התמונה של v היא תת-חבורה של $\mathbb{Z}$ (החבורה החיבורית), ואם אינה טריוויאלית אז היא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}$ (מקרה פרטי של מודול מעל תחום ראשי!). לכן, אפשר להניח ש-v על. בפרט, קיים איבר $t \in A$ כך ש-$v(t) = 1$.

נניח ש-I אידיאל לא טריוויאלי ב-A. הקבוצה $v(I)$ היא קבוצה של מספרים טבעיים (ו-∞), ולכן יש לה מינימום n. אם $f \in I$, אז $v(\frac{f}{t^n}) = v(f) - nv(t) = v(f) - n \geqslant 0$. לכן, $\frac{f}{t^n} \in A$, ולכן $f \in (t^n)$, כלומר $I \subseteq (t^n)$. מאידך, לפי ההנחה יש $g \in I$ כך ש-$v(g) = n$, ולכן $v(\frac{g}{t^n}) = 0$, כלומר $\frac{g}{t^n}$ הפיך, ולכן $t^n \in I$.

$(2) \implies (3)$ טריוויאלי

$(1) \implies (2)$ גם טריוויאלי

$(1) \implies (5)$ כיוון ש-A נתרי, p נוצר סופית. לכן, לפי הלמה של נאקאיימה, אפשר להרים כל יוצר של ${}^{p}/_{p^2}$ ליוצר של p.

$(5) \implies (2)$ כל חוג ראשי הוא נתרי, וכל קבוצת יוצרים של p פורשת את ${}^{p}/_{p^2}$

$(3)\implies(7)$ ראינו שכל תחום ראשי הוא תחום פריקות יחידה. לפי ההנחה, כל אידיאל שונה מ-0 הוא מהצורה (t^i), ואידיאל כזה הוא ראשוני רק אם $i=1$.

$(7)\implies(4)$ אם A אינו שדה, כיוון ש-A תחום פריקות יחידה, קיים איבר ראשוני t ב-A. בפרט, t אינו הפיך, ולכן נמצא ב-p, וכיוון שהמימד הוא 1, איבר זה יוצר את האידיאל. שוב בגלל ש-A תחום פריקות יחידה, כל איבר ב-A הוא מהצורה t^iu, כאשר u לא מתחלק ב-t (ופירוק כזה הוא יחיד). אז הפונקציה $v(ut^i)=i$ היא הערכה עם חוג הערכה A.

$(6)\implies(1)$ אם A שדה, אין מה להוכיח. אחרת, יש בו איבר לא הפיך a. נסמן ב-I את האידיאל שנוצר על-ידי a. הרדיקל של I חייב להיות הראשוני היחיד ששונה מ-0, כלומר p. אז בשביל חזקה מספיקה גבוהה j האידיאל I מכיל את p^j (בגלל נתריות). נבחר j כזה מינימלי, ונבחר $b\in p^{j-1}\setminus I$. אז $s=\frac{b}{a}$ לא ב-A, משום ש-$b\notin I$. מצד שני, $bp\subseteq p^i\subseteq I$, אז $sp\subseteq A$. כיוון ש-A נורמלי, s לא אינטגרלי מעל A, ולכן $A[s]$ לא סופי מעל A. אם $sp\subseteq p$ אז p מודול שונה מ-0 מעל $A[s]$, ולכן לא נוצר סופית מעל A, בסתירה לנתריות. לכן $sp=A$, ולכן $\frac{a}{b}$ יוצר את p.

□

מסקנה 6.2.2. *תחום A הוא תחום דדקינד אם ורק אם הוא נתרי, נורמלי וממימד לכל היותר 1. בפרט, הנורמליזציה של תחום נתרי ממימד 1 היא תחום דדקינד*

הוכחה. צריך להוכיח שתחום נתרי ממימד לכל היותר 1 הוא נורמלי אם ורק אם החוגים המקומיים הם תחומים ראשיים. אבל ראינו שנורמליות היא תכונה מקומית, ולכן המסקנה נובעת מהטענה האחרונה □

כפי שכבר תיארנו, התנאים השקולים בטענה מתאימים גאומטרית לחלקות. סעיף 5 הוא עוד ביטוי לזה: המרחב הקוטרי p/p^2 הוא האנאלוג האלגברי למרחב הקו-משיק בנקודה $p\in\operatorname{specm}(A)$. אם A הוא למשל החוג $\mathbb{C}[x,y]/f(x,y)$ עבור פולינום $f(x,y)$, ו-p מתאים לנקודה $\langle x_0,y_0\rangle$, אז המרחב הזה הוא הגרעין של ההעתקה הלינארית הנתונה על-ידי הנגזרות החלקיות של f. לכן, המרחב הזה חד-מימדי אם ורק אם הנגזרת df של f בנקודה זו שונה מ-0. בטופולוגיה הקלאסית זה נותן, דרך משפט הפונקציה הסתומה, איזומורפיזם מקומי (בקטגוריה החלקה למשל) לישר.

הערה 6.2.3. הנחת הנתריות בסעיפים (1) ו-(5) היא הכרחית: למשל, נניח ש-A הגבעול של פונקציות חלקות (גזירות אינסוף פעמים) סביב 0 בישר הממשי, מצומצמות לתחום האי-שלילי. זהו תחום מקומי, עם אידיאל מירבי p (הנבטים של) הפונקציות שמתאפסות ב-0. לפי משפט טיילור, פונקציה שייכת ל-p^k אם ורק אם היא ו-$k-1$ הנגזרות הראשונות שלה מתאפסות ב-0. בפרט, אם כל הנגזרות מתאפסות שם, אז הפונקציה שייכת ל-$\cap_i p^i$. אבל פונקציה כזו לא חייבת להיות 0: למשל $e^{-\frac{1}{t^2}}-1$ נמצאת שם. כפי שראינו בהוכחה, זה גורר שהחוג אינו נתרי. האידיאל p נוצר על-ידי t, והמרחב p/p^2 הוא חד מימדי

אני לא יודע אם הנחת הנתריות ב (6) הכרחית

סוף הרצאה 22, 8 ביוני

מה קורה במימד יותר גבוה? האידיאלים המירביים ב-A, כאשר A תחום ממימד 1, הם למעשה האידיאלים המינימליים ששונים מ-0. אידיאל כזה נקרא *אידיאל מקו-מימד* 1 (באופן כללי, הקו-

אידיאל מקו-מימד 1

מימד של אידיאל הוא האורך המירבי של שרשרת אידיאלים ראשוניים המוכלים בו). אם A תחום פריקות יחידה ממימד כלשהו, כל אידיאל ראשוני מקו-מימד 1 נוצר על-ידי איבר ראשוני אחד (לפי קריטריון קפלנסקי 3.2.3). כפי שראינו, בתחום פריקות יחידה, נוח לעבוד עם ההערכות שמתאימות לאיברים הראשוניים. באותו אופן, בחוגים נורמליים, לכל אידיאל ראשוני מקו-מימד 1 מתאימה הערכה בדידה, וסך כל ההערכות הללו מאפשר לגלות איברים בחוג. זה התוכן של הטענה הבאה:

טענה 6.2.4. *אם A תחום נתרי נורמלי, אז לכל אידיאל ראשוני p מקו-מימד 1, החוג A_p הוא חוג הערכה בדידה, ו-A הוא החיתוך של כל החוגים A_p מהצורה הזו (בתוך $K(A)$)*

על-מנת להוכיח את הטענה, נשתמש במונח הבא: אם A תחום, עבור $a \in K(A)$ נסמן $(a)=\{ba \mid b \in A\} \cap A$. זהו אידיאל ב-$A$. נגיד ש-$a$ הוא *שבר ראשוני* אם (a) הוא ראשוני (כמובן שאם $a \in A$ זה מתלכד עם ההגדרה הרגילה). נשים לב ש-$(a) = A$ אם ורק אם $\frac{1}{a} \in A$. שבר ראשוני

תרגיל 6.2.5. נסמן $A = {}^{\mathbb{C}[x,y,z,w]}/_{xw-yz}$, ו-$a = \frac{x}{y} \in K(A)$. הוכיחו ש-$(a) = (x, z)$, ובפרט ש-$a$ שבר ראשוני. הוכיחו ש-(a) אינו ראשי ב-A.

טענה 6.2.6. *אם A תחום נורמלי נתרי אז לכל שבר ראשוני a, האידיאל (a) הוא מקו-מימד 1*

הוכחה. נניח ש-a שבר ראשוני, ונסמן $p = (a)$. כיוון שראשוניות נשמרת תחת לוקאליזציה, a הוא שבר ראשוני גם מבחינת החוג A_p, ולכן אפשר מראש להניח ש-$A = A_p$, כלומר, p הוא האידיאל המירבי בחוג המקומי A, ועלינו להוכיח שהוא נוצר על-ידי איבר אחד.

לפי ההגדרה, מתקיים $\frac{1}{a}p \subseteq A$. זהו אידיאל I, ולכן $I \subseteq p$ או $I = A$. במקרה השני $a \in p$, ו-p נוצר על-ידי a. במקרה הראשון, כיוון ש-A נתרי, p נוצר סופית ולכן לפי משפט קיילי–המילטון, $\frac{1}{a}$ אינטגרלי מעל A ולכן ב-A, ולכן $1 \in p$, וזו סתירה. □

התרגיל הבא מראה מה יכול להתרחש עבור תחומים שאינם נורמליים:

תרגיל 6.2.7. נסמן ב-A את תת-האלגברה מעל $\mathbb{C}$ של $\mathbb{C}[s,t]$ שנוצרת על-ידי האיברים s^4, s^3t, st^3, t^4.

1. הוכיחו ש-s^2t^2 לא שייך ל-A, אבל אינטגרלי מעל A. בפרט, A הוא תחום שאינו נורמלי.
2. נסמן $a = \frac{1}{s^2t^2}$. הוכיחו ש-$(a) = (s^4, s^3t, st^3, t^4)$. בפרט, a שבר ראשוני.
3. הוכיחו ש-(a) אינו מקו-מימד 1 (כלומר, יש אידיאל ראשוני שנמצא ממש בין (a) ל-0)

בטענה 7.2.4 (ודוגמא 7.2.3) נוכיח את הטענה הבאה:

טענה 6.2.8. *אם A תחום נתרי ו-$a \in K(A) \backslash A$, אז קיים שבר ראשוני $b \in K(A)$ כך ש-$(b) \subseteq (\frac{1}{a})$*

באמצעות הטענה אנחנו מקבלים:

מסקנה 6.2.9. *אם A תחום נתרי, אז $A = \bigcap_p A_p$, כאשר החיתוך הוא עבור אידיאלים מהצורה $p = (a)$, כאשר a שבר ראשוני*

הוכחה. כיוון ש-A תחום, $A \subseteq A_p$ לכל p, אז מספיק להראות את הכיוון ההפוך. נניח ש-$a \in K(A)\backslash A$. נבחר $b \in K(A)$ כפי שמובטח בטענה 6.2.8. אז $p = (b)$ ראשוני, ו-$a \notin A_p$, כי אחרת $(\frac{1}{a}) = A_p$, אבל האידיאל הזה מוכל ב-p. $\square$

הוכחת טענה 6.2.4. נניח ש-p מקו-מימד 1. הצמצום של כל אידיאל ראשוני ב-A_p נותן אידיאל ראשוני ב-A שמוכל ב-p, ולכן המימד של A_p הוא 1. כיוון שלוקאליזציה של תחום נתרי נורמלי גם היא כזו, קיבלנו ש-A_p תחום נתרי נורמלי מקומי ממימד 1, כלומר תחום הערכה בדידה לפי טענה 6.2.1.

החלק השני נובע מיידית מטענה 6.2.6 ומסקנה 6.2.9 $\square$

תרגיל 6.2.10. הוכיחו שהחוג A מתרגיל 6.2.7 לא שווה לחיתוך של הלוקאליזציות שלו באידיאלים ראשוניים מקו-מימד 1. (כמו בטענה 6.2.4)

מסקנה 6.2.9 נותנת למעשה את האפיון הבא לתחומים נתריים נורמליים:

מסקנה 6.2.11. *תחום נתרי A הוא נורמלי אם ורק אם בכל לוקאליזציה באידיאל (a) כאשר a שבר ראשוני, האידיאל המירבי הוא ראשי*

הוכחה. אם A נורמלי ראינו את זה לעיל. בכיוון השני, לפי מסקנה 6.2.9, A הוא חיתוך לוקאליזציות כאלה, ולכן מספיק להוכיח שכל אחת מהן היא נורמלית, אבל זה נובע מההנחה ומטענה 6.2.1. $\square$

6.3 סופיות הנורמליזציה

טענה 6.3.1. *נניח ש-A תחום נתרי נורמלי, ו-L הרחבת שדות סופית פרידה של $K(A)$. אז הסגור האינטגרלי B של A בתוך L הוא אלגברה סופית מעל A.*

הוכחה. אפשר להניח ש-L הרחבת גלואה (אחרת נרחיב עוד יותר). לכל $b \in L$ נסמן ב-$t(b)$ את העקבה של b כהעתקה לינארית מ-L לעצמו מעל $K(A)$. כיוון ש-L גלואה מעל $K(A)$, ההעתקה $\langle b, c\rangle \mapsto t(bc)$ היא תבנית בילינארית לא מנוונת על L (כמרחב וקטורי מעל $K(A)$). מאידך, אנחנו טוענים שאם $b \in B$ אז $t(b) \in A$: זהו מקדם של הפולינום האופייני.

התבנית נותנת זיהוי $d : L \to \check{L}$ של מרחבים וקטוריים מעל $K(A)$. נסמן ב-$\check{B} \subseteq \check{L}$ את ההעתקות שלוקחות את B לתוך A. זהו מודול מעל A, וכיוון ש-$t(B) \subseteq A$, הזיהוי d שולח את B לתוך $\check{B}$. כיוון שהמימד של L מעל $K(A)$ סופי, B מכיל תת-מודול נוצר סופית C מעל A. אז $\check{B} \subseteq \check{C}$, שגם הוא נוצר סופית. כיוון ש-A נתרי, המודולים $\check{B}$ ו-B נוצרים סופית. $\square$

מסקנה 6.3.2. *אם B תחום נוצר סופית מעל שדה אז $\widetilde{B}$ אלגברה סופית מעל B.*

הוכחה. לפי משפט הנורמליזציה של נתר, B אלגברה סופית מעל אלגברת פולינומים $A = k[x_1, \dots, x_n]$. מספיק להראות ש-$\widetilde{B}$ אלגברה סופית מעל A. אם $L = K(B)$ הרחבה פרידה של $K(A) = k(x_1, \dots, x_n)$, אז זה נובע מהטענה. במקרה הכללי, ההרחבה היא הרכבה של הרחבה אי-פרידה לחלוטין והרחבה פרידה, אז מספיק לטפל במקרה האי-פריד לחלוטין. אבל במקרה זה אפשר להניח (אולי אחרי הרחבה של k) ש-L מהצורה $k(y_1, \dots, y_n)$ כאשר $y_i^q = x_i$ עבור חזקה q של המציין. אז הנורמליזציה היא $k[y_1, \dots, y_n]$. $\square$

מסקנה 6.3.3. *לכל שדה מספרים, חוג המספרים האלגבריים הוא אלגברה סופית מעל* $\mathbb{Z}$

6.4 חוגי הערכה כלליים

כזכור, אחת ההגדרות של חוג הערכה היא חוג מהצורה $\{a\in L \mid v(a)\geqslant 0\}$, כאשר L שדה, ו-$v{:}L\to\mathbb{Z}\cap\{\infty\}$ הערכה בדידה: $v:L^\times\to\mathbb{Z}$ הומומורפיזם מהחבורה הכפלית לחבורה החיבורית של השלמים, שמקיים $v(a+b)\geqslant\min(v(a),v(b))$. התנאים הללו נשארים בעלי משמעות כשמחליפים את $\mathbb{Z}$ בכל חבורה חילופית סדורה:

הגדרה 6.4.1. *חבורה חילופית סדורה* היא חבורה חילופית Γ סדורה בסדר מלא $\leqslant$ כך שלכל $a,b\in\Gamma$, אם $a\leqslant b$ אז $a+c\leqslant b+c$ לכל $c\in\Gamma$. חבורה חילופית סדורה

הערכה על שדה L היא הומומורפיזם $v:L^\times\to\Gamma$ של חבורות אל חבורה חילופית סדורה, המקיים $v(a+b)\geqslant\min(v(a),v(b))$ לכל $a,b\in L$ (כאשר מרחיבים את v ל-0 על-ידי $v(0)=\infty>\gamma$ לכל $\gamma\in\Gamma$). ההערכה נקראת בדידה אם התמונה של v איזומורפית לתת-חבורה של $\mathbb{Z}$, והיא נקראת טריוויאלית אם התמונה טריוויאלית. הערכה

שדה הערכה הוא שדה ביחד עם הערכה עליו. *חוג הערכה* הוא חוג מהצורה $\{a\in L \mid v(a)\geqslant 0\}$, כאשר v הערכה על שדה L. שדה הערכה חוג הערכה

כל החבורות הסדורות שלנו יהיו חילופיות, אז לעתים נאמר פשוט "חבורה סדורה".

תרגיל 6.4.2. נניח ש-Γ חבורה סדורה. הוכיחו:

1. Γ היא חסרת פיתול
2. כל תת-חבורה של Γ היא סדורה (עם הסדר המושרה)
3. על הסגור החליק $\mathbb{Q}\Gamma$ של Γ יש סדר יחיד שמרחיב את הסדר על Γ והופך את $\mathbb{Q}\Gamma$ לחבורה סדורה (הסגור החליק הוא הלוקליזציה המלאה של Γ, כשחושבים עליה כמודול מעל $\mathbb{Z}$)
4. הסדר ההפוך על Γ הופך אותה לחבורה סדורה איזומורפית (כחבורה סדורה) ל-Γ
5. אם Γ' חבורה סדורה נוספת, אז $\Gamma\times\Gamma'$ עם הסדר הלקסיקוגרפי היא חבורה סדורה

בגלל סעיף (2), התמונה של הערכה על שדה היא תת-חבורה, ולכן נניח מעכשיו שפונקציית ההערכה היא על.

תרגיל 6.4.3. נניח ש-$v:L\to\Gamma$ הערכה. הוכיחו:

1. הקבוצה $\{a\in L \mid v(a)\geqslant 0\}$ הוא תת-חוג מקומי O_v, עם אידיאל מירבי $p_0=\{a\in L \mid v(a)>0\}$
2. לכל $a\in L$, לפחות אחד מ-$a, \frac{1}{a}$ שייך ל-O_v.
3. לכל $\gamma\geqslant 0$ ב-Γ, הקבוצה $p_\gamma=\{a\in L \mid v(a)>\gamma\}$ היא אידיאל ב-O_v, וכל האידיאלים האלה (עבור איברים שונים $\gamma\in\Gamma$) הם שונים

דוגמא 6.4.4. ראינו כבר דוגמאות של הערכות בדידות. אם K שדה עם הערכה בדידה v (לא טריוויאלית) ו-L שדה הרחבה סופית שלו עם הערכה u שמרחיבה את v, אז $u(K) \subseteq u(L)$ היא תת-חבורה מאינדקס סופי, ולכן u גם היא הערכה בדידה. אם L שדה סגור אלגברית עם הערכה v, אז חבורת ההערכה $v(L)$ היא *חליקה* (כלומר, מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$). כל הערכה על שדה L ניתן להרחיב לסגור אלגברי (זה דורש הוכחה), אז סגור אלגברי של שדה עם הערכה בדידה נותן דוגמא לשדה עם חבורת הערכה $\mathbb{Q}$ (למשל, לכל ראשוני p יש הרחבה של ההערכה ה-p-אדית לסגור האלגברי $\mathbb{Q}^a$ של $\mathbb{Q}$, עם חבורת הערכה $\mathbb{Q}$).

דוגמא 6.4.5. נסמן $A = \mathbb{C}[x,y]_{(x,y)}$. זהו חוג מקומי, אבל אינו חוג הערכה: האיברים $\frac{x}{y}$ ו-$\frac{y}{x}$ של שדה השברים K שניהם אינם ב-A. ישנן מספר דרכים להגדיר הערכה על K כך שחוג ההערכה יכלול את A (בכל דוגמא מספיק להגדיר את v על תת-חוג ששדה השברים שלו K):

1. נגדיר $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ על-ידי: $v(x) = 1$ ו-$v(p) = 0$ לכל פולינום שונה מ-0 שלא מתחלק ב-x. זו הערכה בדידה, מהצורה שכבר ראינו: היא מתאימה לחוג ההערכה $\mathbb{C}(y)[x]$, ששדה השברים שלו K.

2. נגדיר $v : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ על-ידי: $v(x) = \langle 1,0 \rangle$, $v(y) = \langle 0,1 \rangle$ ו-$v(p) = 0$ לכל פולינום p שאינו מתחלק ב-x או ב-y. בסדר המילוני בו $\langle 0,1 \rangle < \langle 1,0 \rangle$, כל איבר מהצורה $\frac{x}{q(y)}$ נמצא בחוג ההערכה, אבל $\frac{1}{y}$ לא (אנליטית, חוג ההערכה מכיל נבטים של פונקציות רציונליות על המישור שנשארות חסומות כאשר מתקרבים לראשית הצירים לאורך ציר x)

3. אפשר כמובן להחליף את התפקידים של x ו-y בשתי הדוגמאות הקודמות. באופן יותר כללי, אפשר להרכיב עם כל אוטומורפיזם של A.

ההגדרה שלנו לחוג הערכה תלויה בנתון "חיצוני", פונקציית ההערכה. מעניין לתת אפיון לחוגי הערכה במונחים של מבנה החוג בלבד. המכשול העיקרי יהיה לבנות מתוך חוג כזה את ההערכה המתאימה על שדה השברים, ובפרט את חבורת ההערכה.

אם $v : K^\times \to \Gamma$ הערכה על השדה K, היא בפרט הומומורפיזם על Γ, ולכן כחבורה, Γ איזומורפית ל-$K^\times/U$ כאשר U הגרעין של v. לפי ההגדרה, הגרעין מורכב מאיברים שנמצאים בחוג ההערכה, אבל לא באידיאל המירבי. במילים אחרות, האיברים ההפיכים בחוג ההערכה. זהו תיאור במונחים של החוג. יתר על כן, כדי לשחזר את הסדר על Γ, מספיק לדעת מיהם האיברים האי-שליליים, אבל על-פי ההגדרה, זו בדיוק התמונה של החוג. זהו המרכיב העיקרי בהוכחת הטענה הבאה:

טענה 6.4.6. *תחום A הוא חוג הערכה אם ורק אם לכל $a \in K(A)$ לפחות אחד מ-$a, \frac{1}{a}$ נמצא ב-A.*

תרגיל 6.4.7. הוכיחו את הטענה

הטענה הבאה היא הסבר אחד למה חוגי הערכה בדידה מופיעים יותר מחוגי הערכה כלליים יותר בהקשר שדיברנו עליהם:

טענה 6.4.8. *אם Γ חבורה סדורה לא טריוויאלית כך שהסדר על קבוצת האיברים החיוביים ב-Γ הוא טוב (כלומר, מקיים את תנאי השרשרת היורד), אז Γ איזומורפית ל-$\mathbb{Z}$. בפרט, חוג הערכה הוא נתרי אם ורק אם ההערכה המתאימה היא בדידה*

הוכחה. אם Γ לא טריוויאלית, הקבוצה P של האיברים החיוביים בה לא ריקה. לכל איבר חיובי a מתקיים $2a > a$, אז P לא חסומה מלמעלה. לכל $a \in \Gamma$, הפונקציה $x \mapsto x + a$ היא איזומורפיזם של הסדר, אז הסדר על התמונה $P + a$ גם הוא טוב. בפרט, לכל איבר ב-Γ יש עוקב מיידי. כיוון ש-Γ איזומורפית לאותה חבורה עם הסדר ההפוך, לכל איבר *יש* גם קודם מיידי. בפרט, הקבוצה $P \cup \{0\}$ היא קבוצה סדורה היטב ללא מקסימום, בה לכל איבר מלבד 0 יש קודם מיידי. לפי משפט הרקורסיה, קבוצה זו איזומורפית באופן יחיד ל-$\mathbb{N}$. לכן Γ איזומורפית כקבוצה סדורה ל-$\mathbb{Z}$. כיוון שהחיבור נקבע על-ידי הסדר, זהו גם איזומורפיזם של חבורות.

אם ההערכה v על L אינה בדידה, שרשרת יורדת אינסופית של איברים חיוביים γ נותנת שרשרת עולה אינסופית של אידיאלים p_γ. לכן החוג אינו נתרי. הכיוון ההפוך הוכח בטענה 6.2.1.
$\square$

שאלה נוספת שניתן לשאול היא איזה חבורות סדורות יכולות להיות חבורות הערכה עבור הערכה של שדות. למשל, האם $\mathbb{R}$ (כחבורה חיבורית) היא חבורת הערכה של איזושהי הערכה? הטענה הבאה אינה קשה, אבל לא כל-כך חשובה לענייננו, אז נשאיר אותה ללא הוכחה:

עובדה 6.4.9. *לכל חבורה סדורה Γ ושדה k יש שדה L והערכה $v : L^\times \to \Gamma$ על Γ, עם חוג הערכה A ואידיאל מירבי p, כך ש-A/p איזומורפי ל-k.*

סוף הרצאה 23, 11 ביוני

7 תומך, אידיאלים נלווים ופירוק ראשיתי

כשדיברנו על תחומי דדקינד, ראינו שמודול פיתול נוצר סופית מעל תחום כזה "חי" על מספר סופי של נקודות. במונחים של הסעיף הזה, אנחנו נגיד שהוא *נתמך* על קבוצת הנקודות הזו. המטרה הראשונה שלנו כאן היא להבין את המקבילה של הקבוצה הזו, *התומך* של המודול, עבור חוגים יותר כלליים. בהמשך, נקשור את זה לפירוק לראשוניים.

7.1 התומך של מודול

אם $\mathbf{X} = \langle X, A \rangle$ יריעה אפינית מעל שדה k, ו-M מודול מעל A, אנחנו כזכור חושבים על M כקבוצת פונקציות מוכללות על $\mathbf{X}$. המטרה שלנו, כאמור, היא להבין את תת-הקבוצה של X שמעליה M שונה מ-0. אם $x \in X$ נקודה, ראינו ש-x מתאימה לאידיאל מירבי p, והוכחנו שהגבעול של M בנקודה x הוא הלוקאליזציה M_p. לכן, M אינו זהותית 0 בסביבה של x בדיוק אם $M_p \neq 0$. עבור חוגים יותר כלליים A, ראינו שהקבוצה $\mathrm{spec}(A)$ של אידיאלים ראשוניים מהווה תחליף טוב למרחב X, וההגדרה הבאה תקפה באופן טבעי לאיברים כאלה.

נתמך
תומך

הגדרה 7.1.1. מודול M מעל חוג A *נתמך* בנקודה $p \in \mathrm{spec}(A)$ אם $M_p \neq 0$. *התומך* של המודול M הוא תת-הקבוצה של $\mathrm{spec}(A)$ בה M נתמך. קבוצה זו מסומנת ב-$\mathrm{supp}(M)$.

על-מנת לחשב את התומך, נזכיר שאיבר $m \in M$ הולך ל-0 ב-M_p אם ורק אם יש $s \in A \backslash p$ כך ש-$sm = 0$. בפרט, אם $p \subseteq q$ אידיאלים ראשוניים, ו-p שייך לתומך, אז גם q שייך אליו. בשפה יותר גאומטרית, אם M נתמך על תת-יריעה (אי-פריקה), הוא נתמך גם על כל תת-יריעה שלה.

דוגמא 7.1.2. נניח ש-A תחום. אז 0 שייך לתומך של M אם ורק אם M אינו מודול פיתול (מסקנה 3.1.11). כאמור, במקרה זה כל איברי $\operatorname{spec}(A)$ נמצאים בתומך. זהו, בפרט, המצב אם M *נאמן*, כלומר אם אין איבר שונה מ-0 ב-A שפועל כ-0 על M.

הדוגמא האחרונה מראה, בפרט, שבתחום התומך של אידיאל שונה מ-0 הוא תמיד מלא. מה לגבי המנה?

טענה 7.1.3. *לכל אידיאל $I \subseteq A$, התומך של A/I הוא* $\mathrm{Z}(I) = \{p \in \operatorname{spec}(A) \mid I \subseteq p\}$.

הוכחה. נניח ש-$I \subseteq p$. עלינו להוכיח שקיים $a \in A$ כך ש-$sa \notin I$ לכל $s \notin p$. האיבר $a = 1$ מקיים זאת.

בכיוון השני, אם $s \in I \backslash p$ אז $sa \in I$ לכל $a \in I$, כלומר s הורג את A/I. לכן $A/I_p = 0$. □

לטענה האחרונה יש פירוש גאומטרי פשוט: A/I היא אלגברת הפונקציות על $Y = \mathrm{Z}(I)$. לכן כל איבר שלה הוא זהותית 0 בסביבה של כל נקודה מחוץ לקבוצה זו. דרך אחרת לראות בצורה אלגברית שפונקציות אלה נתמכות על Y היא שאלה הן בדיוק הפונקציות שהולכות ל-0 כאשר מכפילים אותן באיברי I, כלומר בפונקציות שמתאפסות על Y. אפשר להכליל את הרעיון הזה לכל מודול M:

הגדרה 7.1.4. אם M מודול מעל חוג A, *המאפס של המודול* M הוא האידיאל $\operatorname{Ann}(M) = \{a \in A \mid aM = 0\}$. המאפס של איבר $m \in M$ הוא $\operatorname{Ann}(m) = \{a \in A \mid am = 0\}$ (זהו המאפס של המודול שנוצר על-ידי m) מאפס של המודול

המודול M הוא *מודול נאמן* אם $\operatorname{Ann}(M) = 0$ מודול נאמן

אז לכל אידיאל $I \subseteq A$, המאפס של A/I הוא I, ולכן הטענה הבאה כוללת הכללה של טענה 7.1.3

טענה 7.1.5. *יהי M מודול מעל חוג A*

1. *אם C קבוצה של תתי-מודולים של M, אז* $\operatorname{supp}(\sum C) = \bigcup_{N \in C} \operatorname{supp}(N)$ *(כאשר $\sum C$ הוא תת-המודול שנוצר על-ידי $\bigcup C$)*
2. *לכל $p \in \operatorname{supp}(M)$ מתקיים $\operatorname{Ann}(M) \subseteq p$. אם M נוצר סופית, גם הכיוון ההפוך נכון:* $\operatorname{supp}(M) = \mathrm{Z}(\operatorname{Ann}(M))$ *(ולכן הרדיקל של $\operatorname{Ann}(M)$ הוא $\bigcap \operatorname{supp}(M)$)*

נשים לב שכבר ראינו גרסא של הטענה הזו מסקנות 4.3.9 ו-4.3.10.

הוכחה. 1. תרגיל

2. כמו בטענה הקודמת, אם $aM = 0$ אז כבר $M_a = 0$, ולכן אם $a \notin p$ אז p לא בתומך. אם M נוצר על ידי $m_1, \dots, m_k$ אז

$$\operatorname{supp}(M) = \operatorname{supp}(Am_1 + \dots + Am_k) = \bigcup_i \operatorname{supp}(Am_i) = \bigcup_i \mathrm{Z}(\operatorname{Ann}(m_i))$$

כאשר השוויון האחרון נובע מטענה 7.1.3, כי המודול שנוצר על-ידי m איזומורפי ל-$A/\mathrm{Ann}(m)$. עכשיו, $aM=0$ אם ורק אם $am_i=0$ לכל i, אז $\mathrm{Ann}(M)=\bigcap_i \mathrm{Ann}(m_i)$, ולכן מספיק להוכיח לכל סדרה סופית של אידיאלים I_i ש-$p\supseteq\bigcap_i I_i$ אם ורק אם $p\supseteq I_j$ עבור איזשהו j. זה תרגיל (זה למעשה המקום היחיד בו השתמשנו באמת בסופיות). $\square$

תרגיל 7.1.6. השלימו את ההוכחה

התרגילים הבאים מראים שדרישת הסופיות אכן הכרחית:

תרגיל 7.1.7. נניח ש-$A=\mathbb{C}[x]$, ו-$S\subseteq\mathbb{C}$. נגדיר את M_S להיות המודול של פונקציות מ-$\mathbb{C}$ ל-$\mathbb{C}$ ששונות מ-0 רק על תת-קבוצה סופית של S (כרגיל, זהו תת-מודול של המודול של כל הפונקציות מ-$\mathbb{C}$ ל-$\mathbb{C}$, כאשר מבנה המודול נתון על-ידי כפל פונקציות). הוכיחו ש-$\mathrm{supp}(M_S)=S$ (כלומר, קבוצת האידיאלים המירביים המתאימים לאיברי S). הוכיחו ש-M_S נוצר סופית אם ורק אם S סופית. חשבו את $\mathrm{Ann}(M_S)$.

בתרגיל האחרון, התומך אמנם לא היה שווה לקבוצת האפסים של $\mathrm{Ann}(M_S)$, אבל היה צפוף בה. ניתן לשער שזה תמיד המצב. כדי להפיג את הרעיון הזה, נתבונן בתרגיל הבא:

תרגיל 7.1.8. שוב $A=\mathbb{C}[x]$, ונסתכל על $M=\bigoplus_i M_i$, כאשר $M_i=A/x^i$. חשבו את $\mathrm{Ann}(M)$ ואת $\mathrm{supp}(M)$.

הערה 7.1.9. נשים לב שהתומך של מודול (לפחות במקרה שהמודול נוצר סופית) הוא קבוצה *סגורה*. זאת בניגוד לתומך של פונקציה רציפה, למשל. למעשה, התומך הוא *הסגור* של קבוצת הנקודות בהן הוא לא 0. לדוגמא, ראינו שלאידיאל (x) ב-$\mathbb{C}[x]$ יש תומך מלא, למרות שב-0 כל הפונקציות בו מתאפסות.

כרגיל, אנחנו רוצים לבדוק את ההתנהגות של הבנייה ביחס למיקום. נזכיר שאם $S\subseteq A$, אפשר לזהות את $\mathrm{spec}(S^{-1}A)$ עם תת-קבוצה של $\mathrm{spec}(A)$: אידיאל ראשוני $p\subseteq A$ יוצר אידיאל ראשוני ב-$S^{-1}A$ אם ורק אם $S\cap p=\varnothing$.

טענה 7.1.10. *לכל תת-קבוצה $S\subseteq A$ ולכל מודול M מעל A, התומך של $S^{-1}M$ (כמודול מעל $S^{-1}A$) הוא $\mathrm{supp}(M)\cap\mathrm{spec}(S^{-1}A)$*

הוכחה. אם $p\cap S=\varnothing$, אז $S^{-1}(M_p)=(S^{-1}M)_{S^{-1}p}$ $\square$

כמסקנה, אנחנו מקבלים שהתומך מוגדר באופן מקומי, בשני המובנים:

מסקנה 7.1.11. *לכל מודול M מעל חוג A מתקיים*

$$\mathrm{supp}(M)=\bigcup_{p\in\mathrm{spec}(M)}\mathrm{supp}(M_p)=\bigcup_{p\in\mathrm{specm}(M)}\mathrm{supp}(M_p)$$

אם $a_1,\dots,a_n$ יוצרים את A כאידיאל, אז $\mathrm{supp}(M)=\bigcup_i\mathrm{supp}(M_{a_i})$.

תרגיל 7.1.12. הוכיחו את המסקנה

7.2 אידיאלים נלווים

המטרה הבאה שלנו היא (בקירוב) לתאר את רכיבי הפריקות של התומך

אידיאל נלווה
מתנקש

הגדרה 7.2.1. אידיאל ראשוני $p \subseteq A$ נקרא *אידיאל נלווה* (או *מתנקש*) של המודול M אם הוא מהצורה $\mathrm{Ann}(m)$ עבור $m \in M$.

קבוצת כל האידיאלים הנלווים של M מסומנת ב-$\mathrm{Ass}(M)$

דוגמא 7.2.2. אם $A = \mathbb{C}[x,y]$ ו-$M = {}^{A}/_{x^2y^3}$, אז האידיאל (x) הוא אידיאל נלווה: הוא המתנקש של xy^3. מסיבה דומה (y) הוא אידיאל נלווה. אלה הם האידיאלים הנלווים היחידים.

דוגמא 7.2.3. נניח ש-${}^{A}/_{(a)}$ $M =$ ו-$b \in A\backslash(a)$, כך ש-$0 \neq \bar{b} \in M$. אז $\mathrm{Ann}(\bar{b}) = \{x \in A \mid \exists y \in A\, xb = ya\}$. אם A הוא תחום, אפשר לכתוב זאת כ-$\mathrm{Ann}(\bar{b}) = \{y\frac{a}{b} \in A \mid y \in A\}$, כלומר, מה שסימנו כ-$(\frac{a}{b})$. בפרט, זהו אידיאל נלווה אם ורק אם $\frac{a}{b}$ שבר ראשוני, במונחים של הסעיף הקודם.

סוף הרצאה 24,
15 ביוני

נראה ראשית שאידיאלים נלווים קיימים (לפעמים):

טענה 7.2.4. *כל איבר מירבי של* $\{\mathrm{Ann}(m) \mid 0 \neq m \in M\}$ *הוא ראשוני (בפרט מתנקש). אם A חוג נתרי אז כל אידיאל כזה מוכל באידיאל נלווה, וכל מחלק אפס שייך לאידיאל נלווה.*

בפרט, הטענה מוכיחה את טענה 6.2.8. מהחלק האחרון נובע שאיחוד האידיאלים הנלווים הוא בדיוק קבוצת מחלקי האפס ב-A.

הוכחה. לכל $m \in M$, המודול Am איזומורפי ל-${}^{A}/_{\mathrm{Ann}(m)}$, אז אפשר להניח ש-$M = A$. אם A אינו תחום שלמות, אז לכל מחלק אפס a של A נקבל $\mathrm{Ann}(a) \neq 0$.

אם A נתרי, לכל איבר של הקבוצה הנ"ל יש מירבי מעליו $\square$

השלב הבא, כמו עבור התומך, הוא לבדוק שקבוצת האידיאלים הנלווים היא מקומית. זה שוב תלוי בהנחת הנתריות.

טענה 7.2.5. *לכל חוג A ומודול M מעליו, ולכל $S \subseteq A$ מתקיים* $\mathrm{Ass}(M) \cap \mathrm{spec}(S^{-1}A) \subseteq \mathrm{Ass}(S^{-1}M)$. *אם A נתרי, מתקיים שוויון.*

כרגיל, $S^{-1}M$ פה הוא מודול מעל $S^{-1}A$.

הוכחה. נסמן ב-$l : M \to S^{-1}M$ את העתקת הלוקאליזציה. נניח ש-$p \in \mathrm{spec}(A)$ זר ל-S והוא הגרעין של העתקה $t : A \to M$. אז הגרעין של ההרכבה $l \circ t$ הוא קבוצת האיברים $u \in A$ עבורם $0 = st(u) = t(su)$ עבור איזשהו $s \in S$, כלומר אלה שעבורם $su \in p$. כיוון ש-S זרה ל-p, נובע מזה ש-$u \in p$. לכן הגרעין של $l \circ t$ הוא שוב p, והעתקה זו מראה ש-p אידיאל נלווה של $S^{-1}M$.

בכיוון ההפוך, אם $p \in \mathrm{Ass}(S^{-1}M)$ אז בוודאי ש-$p \in \mathrm{spec}(S^{-1}A)$, ולכן עלינו להוכיח שהתמונה ההפוכה p_A של p ב-A היא אידיאל נלווה. נניח שוב ש-p הוא הגרעין של העתקה $t : S^{-1}A \to S^{-1}M$. אז $t(s) = st(1) = l(m)$ עבור איברים $s \in S$ ו-$m \in M$.

נגדיר $t' : A \to M$ על-ידי $t'(1) = m$. אז $l \circ t' = st$, ובפרט $a \in A$ שייך לגרעין של $l \circ t'$ אם ורק אם הוא שייך לגרעין של t (כי s הפיך ב-$S^{-1}A$).

ראינו ש-$l(t'(a))=0$ אם ורק אם יש $r\in S$ כך ש-$t'(ra)=rt'(a)=0$, ולכן $p_A=\{a\in A\mid \exists r\in S\, t'(ra)=0\}$. בפרט, $\mathrm{Ker}(t')\subseteq p_A$, ובוודאי שלכל $b\in A$ מתקיים גם $\mathrm{Ker}(bt')=b\,\mathrm{Ker}(t')\subseteq p_A$. מאידך, אם $a\in p_A$, אז יש $b\in S$ כך ש-$bt'(a)=0$, כלומר $a\in\mathrm{Ker}(bt')$. אם A נתרי, אז p_A נוצר סופית, על-ידי איברים a_i. אז יש איברים b_i כך ש-$a_i\in\mathrm{Ker}(b_it')$, ולכן אם b המכפלה שלהם, אז $a_i\in\mathrm{Ker}(bt')$ לכל i, ולכן גם $p\subseteq\mathrm{Ker}(bt')$. כיוון שכבר ראינו ש-$\mathrm{Ker}(bt')\subseteq p$, התוצאה הוכחה. □

כמו עבור התומך, אנחנו מקבלים:

מסקנה 7.2.6. *לכל חוג נתרי ולכל מודול M מעליו,*

$$\mathrm{Ass}(M)=\bigcup_{p\in\mathrm{spec}(M)}\mathrm{Ass}(M_p)=\bigcup_{p\in\mathrm{specm}(M)}\mathrm{Ass}(M_p)$$

אם $a_1,\dots,a_n$ יוצרים את A כאידיאל, אז $\mathrm{Ass}(M)=\bigcup_i\mathrm{Ass}(M_{a_i})$.

עכשיו אפשר לתאר קשר (חלקי) בין התומך לאידיאלים הנלווים. בגלל המסקנות הנ"ל, מספיק לעשות זאת מקומית.

טענה 7.2.7. *לכל מודול M מעל חוג A, כל אידיאל נלווה שייך לתומך. אם A נתרי, אז כל אידיאל מינימלי בתומך הוא אידיאל נלווה.*

הוכחה. אם p אידיאל נלווה, אז A/p הוא תחום שלמות שמוכל (כמודול) ב-M. לכן M_p מכיל את שדה השברים שלו, ובפרט אינו ריק.

נניח ש-A נתרי, ו-p אידיאל מינימלי בתומך. אז הוא יהיה מינימלי בתומך גם ב-A_p, ולכן לפי מסקנות 7.1.11 ו-7.2.6, אפשר להניח ש-A חוג מקומי, עם אידיאל מירבי p. אבל אז התומך מורכב רק מנקודה אחת, p. שוב כיוון ש-A נתרי, יש ל-M אידיאל נלווה, ולפי החלק הראשון של הטענה, כל אידיאל כזה שייך לתומך. לכן p נלווה. □

מסקנה 7.2.8. *אם M מודול נוצר סופית מעל חוג נתרי A, אז $\mathrm{supp}(M)$ היא תת-קבוצה סגורה של $\mathrm{spec}(A)$, שהאידיאלים של רכיבי הפריקות שלה הם נלווים.*

מספר רכיבי הפריקות בטענה האחרונה (כמו בכל אידיאל בחוג נתרי) הוא כמובן סופי, וראינו שכל רכיב כזה הוא נלווה, אבל עד כה לא ראינו שקבוצת האידיאלים הנלווים היא סופית. נראה את זה עכשיו:

טענה 7.2.9. *1. אם $N\subseteq M$ מודולים מעל חוג A, אז* $\mathrm{Ass}(N)\subseteq\mathrm{Ass}(M)\subseteq\mathrm{Ass}(M/N)\cup\mathrm{Ass}(N)$

2. אם M מודול נוצר סופית מעל חוג נתרי A, אז יש סדרה סופית $0=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_n=M$ כך ש-M_i/M_{i-1} איזומורפי ל-A/P_i עבור אידיאל ראשוני P_i. כל אידיאל נלווה של M הוא מהצורה P_i (בפרט, יש מספר סופי של כאלה)

הוכחה. 1. נניח ש-p אידיאל נלווה של M אבל לא של N, נניח $p = \mathrm{Ann}(m)$. אז $Am \cap N = 0$: אם $am \in N$ אבל $a \notin p$, אז $bam = 0$ אם ורק אם $b \in p$ (כי p ראשוני), כלומר $p = \mathrm{Ann}(am)$ עבור $am \in N$, בסתירה להנחה. לכן p הוא המתנקש של התמונה של m במנה.

2. M_1 קיים כי קיים ל-M אידיאל נלווה. ממשיכים באינדוקציה. הטענה השנייה נובעת מהסעיף הראשון, באינדוקציה.

□

7.3 אידיאלים ראשיתיים

דרך אחת (קצת מוזרה) להגיד ש-A הוא תחום שלמות היא להגיד ש-$\mathrm{Ass}(A) = \{0\}$, כאשר חושבים על A כמודול מעל עצמו. אם A אינו תחום שלמות, הטענות שהוכחנו מראות (במקרה הנתרי) שיש קשר הדוק בין הראשוניים המינימליים לבין האידיאלים הנלווים של A כמודול מעל עצמו, אבל התיאור הזה מפספס את החלק שלא ניתן לתיאור דרך אידיאלים ראשוניים (או דרך תחומי שלמות), כלומר את הנילפוטנטים.

כדי להבין את מה שקורה איתם, נוח להתחיל מהקיצוניות השנייה: נאמר שחוג A הוא *קו-ראשיתי* אם כל מחלק אפס בו הוא נילפוטנטי. מבחינת התיאור דרך אידיאלים נלווים, אפשר לצפות מהתיאור לעיל שיהיה בדיוק אחד כזה. זהו התוכן של הטענה הבאה (במקרה הנתרי), שתוכלל עוד בהמשך קו-ראשיתי

טענה 7.3.1. *נניח ש-A חוג נתרי. אז A הוא קו-ראשיתי אם ורק אם $\mathrm{Ass}(A)$ מורכב מאיבר אחד. במקרה זה, האיבר הוא הרדיקל של A.*

הוכחה. נניח ש-A קו-ראשיתי, ונניח ש-$p \in \mathrm{Ass}(A)$. כיוון ש-p ראשוני, הוא מכיל את הרדיקל של A, אבל כיוון ש-p הוא נלווה, הוא מורכב ממחלקי 0, ולכן לפי ההנחה הם כולם נילפוטנטים. לכן p שווה לרדיקל, והוכחנו שאם יש אידיאל נלווה, אז הוא בהכרח שווה לרדיקל. מצד שני, מנתריות נובע שיש לפחות אידיאל נלווה אחד, ולכן הוכחנו את השוויון.

בכיוון השני, נניח ש-p הוא אידיאל נלווה יחיד. אם $a \in p$ אינו נילפוטנטי, אז A_a אינו חוג ה-0, וכיוון שהוא חוג נתרי, יש בו אידיאל נלווה, וראינו שאידיאל כזה נותן אידיאל נלווה ב-A (ששונה מ-p, כי $a \in p$). לכן, הנלווה היחיד p הוא הרדיקל. אם $a \in A$ מחלק אפס, לפי טענה 7.2.4 הוא שייך לאידיאל נלווה, ולכן ל-p, כלומר הוא נילפוטנטי. □

הגדרה 7.3.2. אידיאל $q \subseteq A$ הוא *אידיאל ראשיתי* אם A/q הוא חוג קו-ראשיתי. במקרה זה, אם p הרדיקל של q (כלומר הגרעין ההעתקה $A \to \overline{A/q}$), נאמר גם ש-q הוא *אידיאל p-ראשיתי*, וש-p הוא האידיאל הראשוני המשויך ל-q. אידיאל ראשיתי אידיאל p-ראשיתי

עבור יריעות אפיניות, ראינו שניתן להציג את היריעה כאיחוד של רכיבי פריקות, והצגה זו היא יחידה. עבור חוגים כלליים, ישנו מכשול פשוט לקיום הצגה דומה: אידיאלים לא רדיקליים. האידיאלים הראשיתיים הם הדוגמא הכי פשוטה למכשול הזה, ולכן אפשר לקוות שניתן להחליף את האידיאלים הראשוניים בהם. מסתבר שזה נכון למחצה: קיים פירוק לכל אידיאל, אבל באופן כללי, הוא אינו יחיד.

הערה 7.3.3. השתמשנו מספר פעמים בעובדה שהחוג המצומצם $\bar{A}$ המתאים לחוג קו-ראשיתי הוא תחום (במלים אחרות, שהרדיקל של אידיאל ראשיתי הוא ראשוני). הכיוון ההפוך אינו נכון: קיימים אידיאלים (בחוגים נתריים) שאינם ראשיתיים, אבל שהרדיקל שלהם ראשוני, למשל $I=(x^2,xy)$ ב-$k[x,y]$. גאומטרית, אידיאלים שהרדיקל שלהם ראשוני מתאימים ל"עיבוי" של יריעה אי-פריקה. האידיאל ראשיתי אם כל פעם שרושמים את העיבוי הזה כ"איחוד" של שני תתי-מרחבים, המרחב הוא "עיבוי" של כל אחד מהם.

טענה 7.3.1 אומרת למעשה ש-$q=0$ אידיאל ראשיתי אם ורק אם ל-$A={}^{A}\!/_{q}$ אידיאל נלווה יחיד. מיד נכליל זאת לאידיאל ראשיתי כלשהו, אבל לפני כן נעיר: אם I אידיאל ב-A, אפשר לחשוב על $M={}^{A}\!/_{I}$ כמודול מעל A או מעל ${}^{A}\!/_{I}$. אז יש זיהוי טבעי בין האידיאלים הנלווים בשני המקומות: $p\in\operatorname{Ass}_{A/I}({}^{A}\!/_{I})$ מתאים ל-$p+I$ ב-$\operatorname{Ass}_A({}^{A}\!/_{I})$.

טענה 7.3.4. *אידיאל q בחוג נתרי הוא p-ראשיתי אם ורק אם האידיאל הנלווה היחיד של ${}^{A}\!/_{q}$ (כמודול מעל A) הוא p*

תרגיל 7.3.5. הסיקו את הטענה

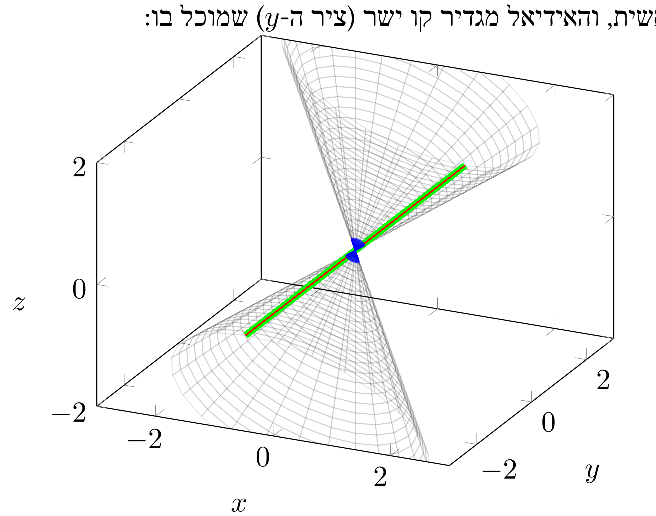
אידיאלים ראשיתיים יהוו התחליף שלנו לראשוניים. הפירוק המתאים של אידיאלים מקביל לחלוטין למקרה הראשוני:

הגדרה 7.3.6. *פירוק ראשיתי* של אידיאל I בחוג A הוא קבוצה סופית C של אידיאלים ראשיתיים, כך ש-$I=\bigcap C$. פירוק ראשיתי

סוף הרצאה 25, 18 ביוני

דוגמא 7.3.7. נניח ש-A תחום פריקות יחידה, ו-$a\in A$. אז (a) הוא ראשיתי אם ורק אם $a=up^m$ עבור איבר הפיך u, איבר אי-פריק p ושלם $m>0$. אם $b=up_1{}^{m_1}\dots p_k{}^{m_k}\in A$ איבר כלשהו, אז $(b)=(p_1^{m_1})\cap\dots\cap(p_k^{m_k})$ הוא פירוק ראשיתי של (b).

דוגמא 7.3.8. נתבונן באידיאל $I=(x,z)$ בחוג $A={}^{\mathbb{C}[x,y,z]}\!/_{x^2-zy}$. החוג הוא חוג הפונקציות על חרוט שעובר דרך הראשית, והאידיאל מגדיר קו ישר (ציר ה-y) שמוכל בו:



אנחנו מתעניינים באידיאל $J=I^2$. איברי האידיאל I הפונקציות שמתאפסות על הקו האדום l, ולכן כל איבר של I^2 מתאפס ב"סביבה אינפינטסימלית מסדר 2" של l (הסביבה הירוקה). במלים אחרות, סדר האפס של כל איבר של J ב-l הוא לפחות 2. האם אלה כל הפונקציות שמתאפסות על הסביבה הזו? התשובה היא לא, לפחות על תת-קבוצה פתוחה: אם הופכים את y (כלומר, מוציאים את הראשית), ל-$z=\frac{x^2}{y}$ יש אפס מסדר 2 על הקו הזה, אבל z לא שייך ל-J: כל איברי J מתאפסים בסביבה מסדר 2 של ראשית הצירים, ו-z לא. במלים אחרות, הקבוצה שמוגדרת על-ידי J "מעובה" בראשית הצירים לכל הכיוונים (כוללת את החלק הכחול בתמונה), ה"נקודה" $(\epsilon,\epsilon,\epsilon)$ בחוג $\mathbb{C}[\epsilon]$ (כאשר $\epsilon^2=0$) נמצאת בתחום הכחול (איברי J מתאפסים עליה), אבל לא בירוק (אינטואיטיבית, קואורדינטת z שלה אינה 0).

האם ל-J יש פירוק ראשיתי? הנה אחד:

$$J=(x^2,xz,z^2)=(zy,xz,z^2)=z(x,y,z)=(z)\cap(x,y,z)^2$$

תרגיל 7.3.9. הוכיחו שהפירוק בדוגמא הוא אכן פירוק ראשיתי

פירוק ראשיתי מתחלף עם לוקאליזציה, במובן הבא:

טענה 7.3.10. *נניח ש-S תת-מונואיד של חוג A, ונסמן ב-$l:A\to S^{-1}A$ את העתקת הלוקאליזציה.*

1. *אם A קו-ראשיתי אז $S^{-1}A$ קו-ראשיתי*
2. *אם q אידיאל p-ראשיתי ב-A, אז p זר ל-S אם ורק אם q זר ל-S. במקרה זה, $S^{-1}q$ אידיאל $S^{-1}p$-ראשיתי, ו-$l^{-1}(S^{-1}q)=q$.*
3. *אם $I=\bigcap C$ פירוק ראשיתי, נסמן $D=\{q\in C\mid q\cap S=\varnothing\}$. אז $C'=\{S^{-1}q\mid q\in D\}$ פירוק ראשיתי של $S^{-1}I$, ו-D פירוק ראשיתי של $l^{-1}(S^{-1}I)$*
4. *אם $a_1,\dots,a_n$ איברים של A שיוצרים את A כאידיאל, I אידיאל ב-A, ולכל k נתון פירוק ראשיתי C_k של I_{a_k} ב-A_{a_k}, אז $C=\bigcup_k D_k$ פירוק ראשוני של I, כאשר $D_k=\{l^{-1}(q)\mid q\in C_k\}$.*

תרגיל 7.3.11. הוכיחו את הטענה

מסקנה 7.3.12. *לכל אידיאל בתחום דדקינד יש פירוק ראשיתי יחיד, וכל אידיאל ראשיתי הוא חזקה של אידיאל ראשוני*

הוכחה. לפי הטענה האחרונה, כל השאלה היא מקומית, אז אפשר להניח שאנחנו בתחום ראשי, ושם זה קל (תרגיל: השלימו את ההוכחה) □

היתרון של פירוק ראשיתי זה שהוא קיים לכל אידיאל בכל חוג נתרי. זוהי עוד תוצאה יסודית של אמי נתר:

משפט 7.3.13. *בחוג נתרי, לכל אידיאל יש פירוק ראשיתי*

על מנת להוכיח את המשפט, נשתמש בהגדרה הבאה: אידיאל I הוא *אידיאל אי-פריק* אם הוא לא חיתוך של שני אידיאלים שמכילים אותו ממש. אז המשפט הוא מסקנה מיידית של שתי הטענות הבאות: אידיאל אי-פריק

טענה 7.3.14. *אם A חוג נתרי, כל אידיאל ב-A הוא חיתוך של מספר סופי של אידיאלים אי-פריקים*

הוכחה. אם לא, אז לקבוצת הדוגמאות הנגדיות יש מקסימום I (מנתריות). כיוון שזו דוגמא נגדית, בפרט I אינו אי-פריק, אז $I = J_1 \cap J_2$ לאידיאלים שמכילים ממש את I, ולכן כל אחד מהם חיתוך סופי של אי-פריקים, ולכן גם I. □

טענה 7.3.15. *אם A חוג נתרי, כל אידיאל אי-פריק בו הוא ראשיתי*

הוכחה. אפשר לחלק ולהוכיח שאם אידיאל האפס ב-A אי-פריק, אז A קו-ראשיתי. נניח ש-$xy = 0$ ב-A, ונתבונן באידיאלים $I_n = \mathrm{Ann}(x^n)$. זו סדרה עולה של אידיאלים, ולכן מנתריות, חייבת להתייצב, נניח ב-n. נניח ש-$a \in (y) \cap (x^n)$. אז יש $b \in A$ כך ש-$a = bx^n$, אבל $ax = 0$ (כי a כפולה של y), אז $0 = ax = bx^{n+1}$, כלומר $b \in I_{n+1} = I_n$. לכן $a = bx^n = 0$. הוכחנו שאידיאל האפס הוא החיתוך של (y) ו-(x^n), ולכן מאי-פריקות, $y = 0$ או $x^n = 0$. □

בניגוד לקיום, היחידות אינה מובטחת:

דוגמא 7.3.16. בהערה 7.3.3, ראינו שב-$k[x, y]$ האידיאל $I = (x^2, xy)$ אינו ראשיתי. פירוק ראשיתי אחד נתון על-ידי $I = (x) \cap (x, y)^2$, אבל יש פירוקים אחרים, למשל $I = (x) \cap (x^2, y)$ או $I = (x) \cap (x^2, x - y)$.

ננסה כעת לבדוק באיזו מידה היחידות נכשלת, ומה אפשר להציל. דרך אחת בה אפשר לקבל פירוק שונה היא פשוט להוסיף אידיאלים לחיתוך. ישנה גם "גרסה אינפינטסימלית" של זה: יתכנו שני אידיאלים ראשיתיים q_1 ו-q_2 שמשויכים לאותו אידיאל ראשוני p, ושאף אחד מהם אינו מוכל בשני. במצב כזה, ניתן להחליף אותם בחיתוך שלהם:

טענה 7.3.17. *אם q_1 ו-q_2 אידיאלים p-ראשיתיים, אז גם $q_1 \cap q_2$ הוא כזה*

תרגיל 7.3.18. הוכיחו את הטענה

האבחנות הללו מובילות להגדרה הבאה:

הגדרה 7.3.19. פירוק ראשיתי C של אידיאל I הוא *פירוק ראשיתי קצר ביותר* אם הוא מינימלי (ביחס להכלה), וכל שני אידיאלים שונים ב-C משויכים לראשוניים שונים פירוק ראשיתי קצר ביותר

לפי הדיון לפני ההגדרה, כל פירוק ראשיתי ניתן להחליף בפירוק קצר ביותר (בפרט, כל פירוק מינימלי מבחינת מספר האיברים הוא קצר ביותר), ולכן למטרת היחידות נתמקד בהם. ראינו כבר שיש קשר הדוק בין אידיאלים ראשיתיים לאידיאלים נלווים. הטענה הבאה מכלילה את הקשר הזה:

טענה 7.3.20. *אם C פירוק ראשיתי קצר ביותר של אידיאל I בחוג נתרי A, אז קבוצת הראשוניים המשויכים לאיברי C היא $\mathrm{Ass}(A/I)$. בפרט, קבוצת האידיאלים המשויכים אינה תלויה בפירוק.*

הוכחה. לכל $q \in C$ נסמן ב-$p(q)$ את האידיאל הראשוני המשויך לו. אם $D \subseteq C$, ישנה העתקה טבעית מ-A ל-$A_D = \bigoplus_{q \in D} A/q$, סכום ההטלות. הגרעין של ההעתקה הזו הוא $\bigcap_{q \in D}$. בפרט, הוא מכיל את I, ושווה ל-I אם ורק אם $D = C$ (בגלל המינימליות). במלים אחרות, ישנה העתקה מושרית מ-A/I ל-A_D, שהיא חד-חד-ערכית אם ורק אם $D = C$.

עבור $D = C$ אנחנו מקבלים ש-$\mathrm{Ass}(A/I) \subseteq \mathrm{Ass}(A_C)$, לפי טענה 7.2.9, ולפי אותה טענה קל לראות שקבוצת הנלווים של סכום ישר הוא איחוד קבוצות הנלווים של הנסכמים. לכן $\mathrm{Ass}(A/I) \subseteq \bigcup_{q \in C} \mathrm{Ass}(A/q)$, אבל ראינו בטענה 7.3.4 שהאידיאל הנלווה היחיד של A/q הוא $p(q)$. זה נותן הכלה אחת.

אם $q \in C$, נסמן $D = C \backslash \{q\}$, ונסמן ב-K את הגרעין של ההעתקה מ-A/I. אז $K \cap q = 0$, ולכן ההעתקה מ-K ל-A/q היא שיכון. בפרט, האידיאלים הנלווים של K הם תת-קבוצה לא ריקה של האידיאלים הנלווים של A/q, שהיא $\{p(q)\}$. לכן $p(q)$ הוא גם נלווה של K, ובפרט גם של A/I. זה נכון לכל $q \in C$, אז הוכחנו את ההכלה ההפוכה. □

מסקנה 7.3.21. *תחום נתרי A הוא תחום פריקות יחידה אם ורק אם כל ראשוני מינימלי מעל אידיאל ראשי הוא עצמו ראשי*

הוכחה. נוכיח ראשית ש-A תחום פריקות יחידה תחת ההנחה. כיוון ש-A תחום נתרי, מספיק להראות שכל איבר אי-פריק הוא ראשוני. אם a איבר אי-פריק, כל ראשוני מינימלי מעל (a) הוא מהצורה (p), עבור ראשוני p, ולכן $a = qp$, וכיוון ש-a אי-פריק, q בהכרח הפיך.

בכיוון השני, ראינו לעיל שאם A תחום פריקות יחידה, ו-$a \in A$, אז יש לו פירוק ראשיתי שמורכב מאידיאלים ראשיים. ראינו עכשיו שהאידיאלים הנלווים של A/a הם הראשוניים המתאימים, שגם הם ראשיים. ראינו לפני כן שכל הראשוניים המינימליים הם ביניהם. □

הטענה על האידיאלים הנלווים מאפשר לקבוע באופן חד משמעי את הראשוניים שמופיעים בכל פירוק ראשיתי קצר ביותר. התוצאה הבאה, שהיא מסקנה ישירה של הלוקאליזציה, מראה שגם האידיאלים עצמם שמתאימים לראשוניים המינימליים נקבעים ביחידות.

מסקנה 7.3.22. *אם q אידיאל ראשיתי בפירוק של אידיאל I בחוג נתרי A, והאידיאל הראשוני המתאים p הוא מינימלי (בין האידיאלים הראשוניים המשויכים), אז $q = l^{-1}(I_p)$ (כאשר l העתקת הלוקאליזציה $l : A \to A_p$).*

תרגיל 7.3.23. הוכיחו את המסקנה

עבדנו עד כה לשם הפשטות עם אידיאלים, אבל לכל התורה יש הכללה למודולים (נוצרים סופית). מודול נוצר סופית M נקרא *מודול קו-ראשיתי* אם לכל מחלק אפס a על M (כלומר, $am = 0$ עבור $m \in M$ שונה מ-0) יש חזקה של a שהורגת את כל המודול. תת-מודול $N \subseteq M$ נקרא *תת-מודול ראשיתי* אם M/N קו-ראשיתי. המושגים הללו מכלילים את ההגדרות שלנו:

מודול קו-ראשיתי

תת-מודול ראשיתי

תרגיל 7.3.24. הוכיחו שאידיאל הוא ראשיתי אם ורק אם הוא ראשיתי כתת-מודול של החוג. הוכיחו שאם M הוא קו-ראשיתי אז $\mathrm{Ann}(M)$ הוא אידיאל ראשיתי.

הרדיקל של $\mathrm{Ann}(M)$ עבור M קו-ראשיתי נקרא האידיאל (הראשוני) המשויך ל-M.

כאמור, כל התיאוריה שעשינו ניתנת להכללה למודולים נוצרים סופית, עם הוכחות דומות:

טענה 7.3.25. *נניח ש-M מודול נוצר סופית מעל חוג נתרי A.*

1. *M הוא קו-ראשיתי אם ורק אם $\operatorname{Ass}(M)$ מורכב מאיבר אחד. במקרה זה, האיבר הזה הוא הרדיקל של $\operatorname{Ann}(M)$*

2. *לכל תת-מודול N של M יש פירוק ראשיתי: הוא חיתוך סופי של תתי-מודולים ראשיתיים של M. כל אידיאל נלווה של M/N משויך לתת-מודול מהפירוק, ואם הפירוק הוא קצר ביותר, כל אידיאל משויך הוא נלווה.*

3. *הפירוק הראשיתי מתחלף עם לוקאליזציה, כמו ב 7.3.10.*

תרגיל 7.3.26. הוכיחו את הטענה

סוף הרצאה 26, 22 ביוני

8 מכפלות טנזוריות

8.1 הרחבת קבועים

נניח שנתונה העתקה $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ של יריעות אפיניות מעל שדה k. זה אומר, על-פי ההגדרה, שההרכבה עם f נותנת העתקה מאלגברת הפונקציות A על X לאלגברה B של פונקציות על Y. באותו אופן, אם M היא קבוצה של פונקציות על X, סגורה תחת חיבור וכפל באיברי A (כלומר, מודול מעל A), כל איבר $m \in M$ נותן פונקציה $m \circ f$ על Y. פונקציות אלה שוב סגורות תחת חיבור, וכל פונקציה כזו ניתן לכפול בכל איבר b של B. אם b עצמו במקרה מגיע מ-A, כלומר $b = a \circ f$ עבור $a \in A$, אז הכפל הזה מתלכד בכפל ב-a, במובן ש-$(a \circ f)(m \circ f) = (am) \circ f$. במלים אחרות, קיבלנו מודול N מעל B, ביחד עם העתקה מ-M ל-N של מודולים מעל A, כאשר המבנה של N כמודול מעל A מגיע מההעתקה $A \to B$. כפי שמובן מהתיאור (ונראה בהמשך), זהו מודול אוניברסלי עם התכונה הזו, במובן של ההגדרה הבאה:

הרחבת הקבועים
שינוי בסיס

הגדרה 8.1.1. תהי B אלגברה מעל חוג A, ו-M מודול מעל A. *הרחבת הקבועים* (או *שינוי בסיס*) של M מ-A ל-B הוא מודול M_B מעל B, ביחד עם העתקה $f : M \to M_B$ של מודולים מעל A, שהיא אוניברסלית עם התכונה הזו: לכל העתקה $g : M \to N$ של מודולים מעל A, כאשר N מודול מעל B, קיימת העתקה יחידה $m : M_B \to N$ של מודולים מעל B, כך ש-$m \circ f = g$

כמו בדיון לפני ההגדרה, אם $f : A \to B$ העתקה של חוגים ו-N מודול מעל B, אנחנו חושבים עליו גם כמודול מעל A דרך f.

דוגמא 8.1.2. נניח ש-I אידיאל ב-A ו-$B = A/I$. אז $M_B = M/IM$: ראשית, זהו אכן מודול מעל B, והעתקת המנה p היא העתקה של מודולים מעל A. אם N מודול כלשהו מעל B, ו-$g : M \to N$ העתקה מעל A, אז לכל $a \in I$ ו-$m \in M$ מתקיים $g(am) = p(a)g(m) = 0$, כלומר g שולחת את IM ל-0. לפי התכונה האוניברסלית של המנה, g משרה העתקה יחידה מ-M/IM של מודולים מעל A, ולכן גם מעל B.

דוגמא 8.1.3. באופן דומה, אם $S \subseteq A$, ו-$B = S^{-1}A$, אז $M_B = S^{-1}M$ עם העתקת הלוקאליזציה. כמו בדוגמא הקודמת, זה נובע מכך ש-$S^{-1}M$ הוא אוניברסלי עבור אותו תנאי: מודול מעל B הוא מודול מעל A עליו איברי S פועלים באופן הפיך

דוגמא 8.1.4. אם $M=A^n$ ו-B אלגברה כלשהי מעל A, אז $M_B=B^n$. באופן יותר כללי, אם $M=\oplus C$ הוא סכום ישר של קבוצת מודולים C, אז $M_B=\oplus D$, כאשר $D=\{N_B \mid N\in C\}$.

תרגיל 8.1.5. הוכיחו את האמור בדוגמא האחרונה

את הדוגמא האחרונה אפשר להכליל עוד קצת: אם $f:M\to N$ העתקה של מודולים מעל A, ו-B אלגברה מעל A, אז ההרכבה עם הרחבת הקבועים נותנת העתקה מ-M ל-N_B (מעל A) ולכן העתקה f_B של מודולים מעל B מ-M_B ל-N_B. גם פה אומרים ש-f_B מתקבלת מ-f על-ידי הרחבת קבועים.

טענה 8.1.6. *נניח ש-B אלגברה מעל A. אם C מערכת של מודולים מעל A, ו-M הגבול הישר של C, אז M_B הוא הגבול הישר של המערכת $D=\{N_B \mid N\in C\}$ (עם העתקות הרחבת הקבועים).*

תרגיל 8.1.7. הוכיחו את הטענה

כמקרה פרטי של הטענה, אם $K\to M\to N\to 0$ סדרה מדויקת של מודולים מעל A ו-B היא אלגברה מעל A, אז $K_B\to M_B\to N_B\to 0$ סדרה מדויקת. אומרים שהרחבת קבועים היא *פעולה מדויקת מימין*. פעולה מדויקת מימין

נניח ש-B אלגברה מעל A, ו-M מודול מעל A. על מנת להראות את הקיום של M_B, נחשוב ראשית על B רק כמודול מעל A. אז M_B שוב אמור להיות מודול A, עם העתקה $f:M\to M_B$. אם $m\in M$ ו-$b\in B$, הפעולה של B נותנת לנו איבר $p(b,m)\in M_B$. הפעולה הזו היא לינארית מעל A בכל אחד מהגורמים: $p(ab,m)=ap(b,m)=p(b,am)$. במילים אחרות, $p:B\times M\to M_B$ היא *העתקה בילינארית* מעל A. למושג הזה יש משמעות (ושימושים) כאשר B מודול כלשהו מעל A.

הגדרה 8.1.8. יהי A חוג, ו-N, M שני מודולים מעליו. *העתקה בילינארית* מעל A מ-$M\times N$ למודול שלישי L היא פונקציה $b:M\times N\to L$ כך שלכל $m\in M$ ו-$n\in N$, הפונקציות $\phi_n:M\to L$ ו-$\phi_m:N\to L$ הנתונות על-ידי $\phi_n(m')=\phi(m',n)$ ו-$\phi_m(n')=\phi(m,n')$ הן העתקות של מודולים מעל A. העתקה בילינארית

המכפלה הטנזורית של M ו-N מעל A היא מודול $M\otimes_A N$ מעל A עם העתקה בילינארית אוניברסלית $b:M\times N\to M\otimes_A N$. המכפלה הטנזורית

במקרה ש-$A=\mathbb{Z}$, או ש-A מובן מההקשר, אפשר לרשום גם $M\otimes N$

טענה 8.1.9. *אם M מודול מעל A ו-B אלגברה מעל A. אז ל-$B\otimes_A M$ יש מבנה יחיד של מודול מעל B עם העתקה $M\to B\otimes_A M$ (של מודולים מעל A) עבורה ההעתקה המושרית מ-M_B ל-$B\otimes_A M$ היא איזומורפיזם.*

במלים יותר פשוטות, $M_B=B\otimes_A M$ מכל בחינה שסביר לצפות. משום כך, לרוב מסמנים גם את שינוי הבסיס כ-$B\otimes_A M$.

הוכחה. נסמן ב-$p:B\times M\to B\otimes M$ את ההעתקה הבילינארית הטבעית. אז לכל $b\in B$ ישנה העתקה בילינארית $p_b:B\times M\to B\otimes M$ הנתונה על-ידי $p_b(b',m)=p(bb',m)$, ולכן העתקה $q_b:B\otimes M\to B\otimes M$. קל לבדוק שההעתקה $b\mapsto q_b\in\mathrm{End}_A(B\otimes M)$ קובעת

מבנה של מודול מעל B עבור $B\otimes M$. כמו-כן, ההעתקה $m\mapsto p(1,m)$ היא העתקה של מודולים מעל A. כפי שאמור בטענה, המידע הזה קובע העתקה (יחידה) מ-M_B ל-$B\otimes M$.

על מנת להוכיח שהעתקה זו הפיכה, נבנה העתקה בכיוון ההפוך. נשים לב, שמספיק לבנות העתקה של מודולים מעל A (ואפילו פחות מזה). אבל זה הוסבר לפני ההגדרה: הפעולה של B על M_B נותנת העתקה בילינארית מעל A ל-M_B, ולכן העתקה $c:B\otimes_A M\to M_B$. את שזו אכן ההעתקה ההפוכה מספיק לעשות על M, ושם זה קל. את היחידות גם נשאיר כתרגיל. $\square$

תרגיל 8.1.10. סיימו את ההוכחה

תרגיל 8.1.11. הוכיחו שאם $f:M_1\to M_2$ ו-$g:N_1\to N_2$ העתקות מעל A, אז יש העתקה טבעית $f\otimes g:M_1\otimes N_1\to M_2\otimes N_2$. תארו מה בדיוק טבעי בה. הוכיחו גם שלכל שני מודולים M,N ישנה העתקה $s:M\otimes N\to N\otimes M$ כך ש-$s\circ s$ היא הזהות (בפרט, s הפיכה), ושלכל שלושה מודולים יש איזומורפיזם $(L\otimes M)\otimes N\to L\otimes(M\otimes N)$.

את שני החלקים האחרונים של התרגיל אפשר להכליל ולהוכיח שיש דרך יחידה לזהות שתי מכפלות טנזוריות באורך כלשהו אם הן מורכבות מאותם גורמים. לכן נרשום לרוב ללא סוגריים, ונשתמש באבחנה בלי להזכיר אותה במפורש.

תרגיל 8.1.12. הכלילו את העובדה שהרחבת קבועים שומרת על גבולות ישרים למכפלות טנזוריות יותר כלליות: הוכיח שאם M הוא הגבול של מערכת C, אז $N\otimes M$ הוא הגבול של $D=\{N\otimes L\mid L\in C\}$ (עם העתקות כמו בתרגיל הקודם).

תרגיל 8.1.13. נסמן ב-C_n את החבורה המעגלית בגודל n. חשבו לכל $n,m>1$ את $C_n\otimes C_m$ (כמודולים מעל $\mathbb{Z}$)

אחת הסיבות להתעניין במכפלות טנזוריות של מודולים היא שזה מאפשר לנו להגדיר בנוחות את המבנה הנוסף שצריך לתת למודול כדי להפוך אותו לאלגברה: אם M מודול מעל A, אז פעולת כפל בין איברים של M היא העתקה בילינארית מ-$M\times M$ ל-M. לומר שהכפל הוא כפל של אלגברה מעל A שקול לכך שהוא משרה העתקה $p:M\otimes_A M\to M$. את האקסיומות של אלגברה ניתן לנסח כתנאים על p, והיחידה של M מתאימה להעתקה מ-A ל-M (שוב, שמקיימת תנאים מסוימים). זה מאפשר בקלות להוכיח את הטענה הבאה:

טענה 8.1.14. *אם B ו-C שתי אלגברות מעל A, אז ל-$B\otimes_A C$ יש מבנה יחיד של אלגברה מעל A עבורו ההעתקות מ-B ומ-C הן העתקות של אלגברות מעל A. האלגברה $B\otimes_A C$ היא הגבול הישר של $\{B,C\}$ (כאלגברות מעל A).*

תרגיל 8.1.15. הוכיחו את הטענה.

תרגיל 8.1.16. עבור חוג A, חשבו את $A[x]\otimes_A A[y]$.

נניח ש-B אלגברה מעל A, ו-M,N שני מודולים מעל B (ולכן גם מעל A). את מבנה המודול מעל B של M אפשר לרשום כהעתקה $f:B\otimes_A M\to M$. אפשר לקחת מכפלה טנזורית עם N ולקבל $f\otimes 1:B\otimes_A M\otimes_A N\to M\otimes_A N$. באופן דומה יש העתקה $1\otimes g:B\otimes_A M\otimes_A N\to M\otimes_A N$, שמגיעה ממבנה המודול על N.

תרגיל 8.1.17. במצב שתואר, הוכיחו ש-$M\otimes_B N$ הוא הגבול הישר של שתי ההעתקות $f\otimes 1$ ו-$1\otimes g$. במלים אחרות $M\otimes_B N={}^{M\otimes_A N}/_{f\otimes 1-1\otimes g}$.

טענה 8.1.18. *לכל חוג A ומודולים M, N קיימת המכפלה הטנזורית $M \otimes_A N$*

הוכחה. לפי התרגיל האחרון, מספיק להוכיח עבור $A = \mathbb{Z}$, כלומר לחבורות אבליות. נסמן ב-P את החבורה האאבלית החפשית שנוצרת על-ידי $M \times N$. אז המכפלה הטנזורית היא מנה של P. $\square$

סוף הרצאה 27, 25 ביוני