שיטות הקירובים

Walter Gautschi

— אלגברה לינארית: פתרון מערכת משוואות, למצוא ערכים עצמיים, ..

— או $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$

או $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

— אינטרפולציה: נתונות נקודות וערכים בנקודות האלה, למצוא פונקציה נחמדה שלה הערכים:

— קירוב פונקציות: קירוב פונקציה לפונקציה שקרובה אליה מסוג מסוים (למשל פולינום).

- בהמשך בוחן

- משוואות דיפרנציאליות

<u>חישובי נגזרות</u>

<u>$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$</u>

$\mathbb{R}^*\subseteq\mathbb{R}$ סופיים - מספרים שאפשר לייצג

$x\in\mathbb{R}$, יש לו ייצוג $x^*\in\mathbb{R}^*$, $0\in\mathbb{R}^*$

$0^*=0$.

$\frac{|x-x^*|}{|x|}$ - דיוק יחסי.

נניח שרוצים לחשב את $f(x)$

איך או הדיוק של x מול לוגפ'ר
של אוגלות הדיוק?

x, x^* , $f(x)$, $f(x^*) = f(x')$

עבור x' המקיים $|x'-x| \le |x^*-x|$

$$\left|\frac{f(x^*) - f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x') - f(x)}{f(x)}\right| =$$

$$\left|\frac{(f(x') - f(x))(x'-x)\cdot x}{(x'-x)\cdot x\, f(x)}\right| \le \frac{|x^* - x|}{|x|}.$$

$$\left|\frac{(f(x') - f(x))\cdot x}{(x'-x)\cdot f(x)}\right| \approx \left|\frac{x\, f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \frac{|x^*-x|}{|x|}$$

תזכורת! **מספר המצב** של f

ב- x (condition number) הוא

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

(תחת הנחה ש- $x, f(x) \neq 0$)

דוגמא: $f(x) = ax+b$,

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot a}{ax+b} \right| = \left| 1 - \frac{b}{ax+b} \right|$$

דוגמא: חישוב מדויק לכל n

חשב את הערך

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt$$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{t+5} = \ln(t+5)\Big|_0^1 = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{\boxed{t^{n+1}}}{t+5}\,dt = \int_0^1 t^n \cdot \frac{t+5-5}{t+5}\,dt =$$

$$\underbrace{-5\int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt}_{I_n} + \frac{t^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 = \underline{\underline{-5 I_n + \frac{1}{n+1}}}$$

$$I_n = f_n(I_0) \qquad \underline{f_n(x) = (-5)^n x + b_n}$$

כאשר $b_n \in \mathbb{R}$ כלשהו

$$\mathrm{cond}(f_n)(I_0) = \left| \frac{I_0 \; f_n'(I_0)}{I_n} \right| =$$

$$5^n \cdot \left| \frac{I_0}{I_n} \right| \geq \underline{\underline{5^n}}$$

$$I_n = \frac{I_{n+1} - \frac{1}{n+1}}{-5}$$

$k >> n$

$n-k < 0$

$$I_n = g_n\left(\underline{I}_k\right)$$

$$g_n(x) = (-5)^{n-k} x + c_n$$

$$\mathrm{cond}(g_n)(I_k) = \left| \frac{I_k \cdot -5^{n-k}}{I_n} \right| =$$

$$5^{n-k} \left| \frac{I_k}{I_n} \right| \leq \underline{\underline{5^{n-k}}}$$

≈ 1

שגיאות במימד גבוה.

$(x_1^*, \dots, x_n^*) \longleftarrow (x_1, \dots, x_n)$

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב ליניארי

מעל $\mathbb{R}$, נורמה על V היא

פונקציה $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ כך ש- $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

1. אם $\|v\| = 0$ אז $v = 0$
2. לכל $a \in \mathbb{R}$, $v \in V$ $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$
3. לכל $u, v \in V$ $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

מרחב ליניארי V ביחד עם נורמה:

נקרא <u>מרחב נורמי</u>!

דוגמאות: $V=\mathbb{R}^d$, $1 \le p \in \mathbb{R}$

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$$

(תרגיל: נורמה)

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_1 = \sum |x_i|$$

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$$

"$p=\infty$"

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_\infty = \sup\{|x_i|\}$$

בהינתן נורמה $\|\cdot\|$ על V,
יש מטריקה על V:

$$d(u,v) = \|u-v\|$$

אם $v_i \in V$ סדרה, (v_i) **מתכנסת**
ל-v אם $\|v_i - v\| \to 0$.

<u>טענה:</u> אם V מרחב וקטורי עם

שתי נורמות $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$

אז שני התנאים הבאים שקולים

1. לכל סדרה (v_i) ו-$v \in V$

$\|v_i - v\|_1 \to 0$ אמ"מ $\|v_i - v\|_2 \to 0$

2. יש קבוע $C > 0$ כך שלכל

$v \in V$, $\frac{1}{C}\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C\|v\|_1$

<u>עובדה:</u> כל הנורמות על $\mathbb{R}^d$

הן שקולות.

אפשר <u>לקחת נורמה</u> $\|\cdot\|$ על $\mathbb{R}^d$

ולהגדיר את הדיוק היחסי

ע״י $\frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$

נניח ש $T: U \to V$ מעתקה

לינארית ובמרחב נורמות $\|\cdot\|_U$

של U ו- $\|\cdot\|_V$ של V.

רוצים לחשב את ההשפעה של

הפעלת T על הדיוק היחסי:

$$\frac{\|Tx^*-Tx\|_V}{\|Tx\|_V} = \frac{\|T(x^*-x)\|_V}{\|T(x)\|_V} =$$

$$= \frac{\|T(x^*-x)\|_V \cdot \|x^*-x\|_U \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V \, \|x^*-x\|_U \, \|x\|_U} \le \frac{\|T\| \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V} \cdot \frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$$

תהא $T: U \to V$ העתקה לינארית

בין שני מרחבים מנורמים, נגדיר

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_V}{\|x\|_U} = \sup_{\|x\|_U=1} \|T(x)\|_V$$

העתקות הלינאריות* $Hom(U,V)$

החסומות. $T \mapsto \|T\|$ נורמה

במרחב הזה

נגדיר מספר המצב של T

בנקודה x הוא

$$cond(T)(x) = \frac{\|x\|\cdot\|T\|}{\|T(x)\|}$$

אם T הפיכה, ואפשר לרשום $x = T^{-1}(y)$

$\mathrm{cond}(T) :=$

$$\sup_{x} \mathrm{cond}(T)(x) = \|T\| \cdot \|T^{-1}\|$$ לכוג

עית ורשש לפרטא מוולה

$Tx = b$, מה הנמאת רימוית

טסלפלשת עקב הקירוב שמל b

של יני b^*?

מחריגת הלכחה!

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

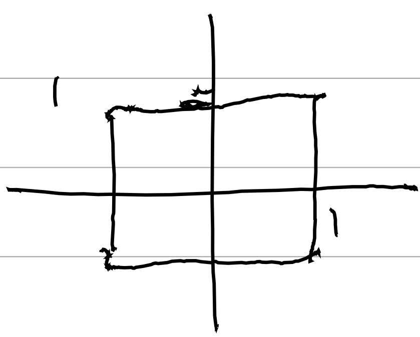
$$\mathrm{cond}_2 T_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^{4n+4}}{2^{15/4} \cdot \sqrt{\pi n}}$$

$T: U \to V$ העתקה לינארית

$U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

אז T מיוצגת על ידי

מטריצה $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$.



$$\|T\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$