לוגיקה מתמטית

משה קמנסקי

5 בדצמבר 2024

1 מבוא

לוגיקה מתמטית הוא התחום במתמטיקה שחוקר בצורה מדויקת מושגים כמו "טענה" ו-"הוכחה". על מנת לספק מוטיבציה, נתבונן בשתי דוגמאות היסטוריות.

1.1 גאומטריית המישור

אוקלידס רצה לדעת את כל הדברים שנכונים עבור נקודות, קווים ומעגלים במישור[1]. על-מנת להבין זאת, אוקלידס ניסה לנסח רשימה קצרה של הנחות יסוד שנכונותן "אינה מוטלת בספק", ולהוכיח מהן את כל יתר הטענות הנכונות. ארבעת הנחות היסוד הראשונות אכן פשוטות מאד: הראשונה, לדוגמא, אומרת שבין כל שתי נקודות קיים קו ישר אחד (את עבודתו של אוקלידס, "האלמנטים", ניתן לקרוא עד היום, גם באינטרנט: [3]). אוקלידס הצליח להוכיח את עשרים ושמונה הטענות הראשונות שלו בעזרת ארבע הנחות בסיס אלה[2]. על מנת להוכיח טענות נוספות, הוא נזקק להנחת יסוד נוספת, שקולה ל*אקסיומת המקבילים*: דרך נקודה הנמצאת מחוץ לישר נתון, עובר בדיוק ישר אחד מקביל לישר הנתון. הנחת יסוד זו פחות פשוטה ומובנת מאליה, ואוקלידס ניסה, אך לא הצליח, להוכיח אותה מארבע הנחות היסוד הראשונות.

השאלה איך להוכיח את אקסיומת המקבילים נותרה פתוחה מאות שנים, עד שהוכח שהאקסיומה *בלתי תלויה*: לא ניתן להוכיח (או להפריך) אותה מיתר הנחות היסוד. נשים לב, שטענה זו אינה טענה גאומטרית: היא אינה עוסקת בנקודות או קווים, אלא בטענות מתמטיות (מבחינה גאומטרית, אנחנו יודעים שאקסיומת המקבילים תקפה במישור). הטענה שייכת לתחום של *לוגיקה מתמטית*, בו הטענה שאקסיומת המקבילים בלתי תלויה באקסיומות האחרות, היא עצמה טענה מתמטית.

איך הוכחה הטענה? גאוס, לובאצ'בסקי ובוליאי (ובעקבותיהם מתמטיקאים אחרים) בנו *מודל* של ארבע האקסיומות הראשונות של אוקלידס, כלומר מבנה עם "קווים" ו-"נקודות", בו הקווים

[1] ניתן לקרוא את הסיפור הזה יותר בהרחבה ב-[5]

[2] למעשה, כפי שנראה, הוא השתמש בהנחות נוספות

והנקודות מתנהגים כמו שמוכתב על ידי האקסיומות הראשונות, אולם בו אקסיומת המקבילים אינה מתקיימת. מודל זה בהכרח שונה מהמישור הרגיל, בו אקסיומת המקבילים תקפה, אבל הוא "שווה זכויות" לו: כל טענה שניתן להוכיח מארבע האקסיומות הראשונות, תקפה גם בו. *למעשה*, כל הוכחה מתוך אקסיומות אלה נותן טענה תקפה *בכל המבנים המקיימים אותן*.

מה לגבי הכיוון ההפוך? נניח שיש לנו טענה בגאומטריה שנכונה בכל המודלים שסופקו על-ידי גאוס וחבריו, וגם בכל מודל אחר של ארבע האקסיומות הראשונות. האם ניתן אז להוכיח טענה זו מתוך אותן אקסיומות? לכאורה, אפשר לדמיין שהטענה נכונה "במקרה" בכל המבנים הללו, בלי שניתן להוכיח אותה. אנחנו נראה שזה לא כך:

משפט א׳ (משפט השלמות, ??). כל טענה שנכונה בכל מבנה המקיים את האקסיומות של אוקלידס, ניתן להוכחה מאקסיומות אלה

בניסוח המשפט (שאינו מנוסח בצורה מדויקת בשלב זה) לא הקפדנו לציין על איזו קבוצת אקסיומות מדובר. למעשה, זה לא משנה: המשפט תקף לכל קבוצת אקסיומות, ולא רק לגאומטריה.

כאמור, משפט השלמות אינו משפט בגאומטריה. מהם האובייקטים המתמטיים המופיעים במשפט הזה? על-מנת שנוכל אפילו לנסח את המשפט, עלינו לענות לפחות על השאלות הבאות:

שאלה 1.1.1. איך אפשר לראות טענות כאובייקטים מתמטיים?

שאלה 1.1.2. מהי הוכחה של טענה אחת מטענות אחרות?

שאלה 1.1.3. מהי משמעות האמירה שטענה מסוימת נכונה בגאומטריית המישור? באופן יותר כללי, מתי נאמר שטענה היא נכונה? מה הקשר בין זה לבין הוכחות של הטענה?

שאלה 1.1.4. איך ניתן להוכיח שטענה מסוימת לא תלויה באחרות?

בהינתן שהאקסיומה בלתי תלויה, התוספת שלה כהנחת יסוד מוצדקת. אבל האם יש טענות נוספות שאינן תלויות במערכת האקסיומות החדשה? האם אפשר לרשום רשימת אקסיומות המאפינות את המישור לחלוטין? תשובה אפשרית אחת לשאלה האחרונה נתונה במשפט הבא:

משפט ב׳ (משפט לוונהיים-סקולם, ??). לכל קבוצה אינסופית A קיים מבנה המקיים את כל הטענות המתקיימות בגאומטריית המישור, שבו קבוצת הנקודות היא A.

שוב, גם משפט זה נכון למבנים כלליים, ולא רק לגאומטריה.

1.2 אריתמטיקה

ראינו לעיל שלא ניתן לאפיין לגמרי את גאומטריית המישור על ידי רשימה של אקסיומות. עדיין, אפשר לשאול האם לפחות אפשר להוכיח את כל מה שנכון בגאומטריית המישור מתוך כל חמש האקסיומות של אוקלידס. מסתבר שלא, ולמעשה אפילו המשפט הראשון בספרו של אוקלידס דורש אקסיומות נוספות. אולם טארסקי, בתחילת המאה ה-20 (בעקבות עבודה של קליין, הילברט, ומתמטיקאים נוספים) הצליח להשלים את הרשימה: הוא נתן רשימה מפורשת של אקסיומות, והוכיח שמהן ניתן להוכיח את כל הטענות הגאומטריות הנכונות במישור.

תחום נוסף שבו עסקו היוונים הוא תורת המספרים. גם שם הניסיון הוא לגלות את כל הטענות הנכונות עבור המספרים הטבעיים. בניגוד לגאומטריה, הם לא ניסו לעבוד בשיטה האקסיומטית.

שאלה 1.2.1. האם ניתן לראות גם טענות על מספרים כאובייקטים מתמטיים?

מערכת אקסיומות עבור המספרים הטבעיים הוצעה על-ידי פיאנו. כמו בגאומטריה, גם כאן ניתן לשאול:

שאלה 1.2.2. האם אקסיומות פיאנו מוכיחות את כל הטענות הנכונות על מספרים טבעיים? אם לא, האם קיימת מערכת אחרת שעושה זאת?

אנחנו נראה:

משפט ג' (*משפט אי השלמות*, **??**). ישנן טענות בתורת המספרים שנכונות בטבעיים, אך אינן ניתנות להוכחה מאקסיומות פיאנו

למעשה, המשפט אינו יחודי לאקסיומות פיאנו, ותקף לכל מערכת אקסיומות שניתנת לתיאור מפורש (במובן שנראה מאוחר יותר).

1.3 מבנים אחרים

שתי הדוגמאות האחרונות דנות בשני נושאים מרכזיים במתמטיקה: גאומטריה ותורת המספרים. אלה תחומים חשובים, אך אינם היחידים.

שאלה 1.3.1. באילו מבנים ותורות מתמטיות ניתן לעסוק בשיטות הנ"ל? אילו כלים קיימים על מנת לענות על שאלות מהסוג לעיל לתורות אחרות?

אנחנו נראה מספר שימושים מפתיעים של טענות בלוגיקה לתחומים אחרים במתמטיקה, ביניהם:

משפט ד' (טענה 2.3.6). אם G גרף שכל תת-גרף (מלא) סופי שלו הוא k-צביע, אז G עצמו k-צביע

משפט ה' (דוגמא **??**). אם $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ העתקה פולינומית חד-חד-ערכית, אז היא על

המשפט הבא הוא משפט קלאסי על פונקציות ממשיות, אולם אנחנו נראה הוכחה פשוטה שלו, בשפה קרובה (אך מדויקת לגמרי!) לניסוחים המקוריים של ניוטון ולייבניץ

משפט ו' (*משפט ערך הביניים*, **??**). אם $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ רציפה ומקיימת $f(0) \leq 0 \leq f(1)$, אז קיים $c \in [0, 1]$ עבורו $f(c) = 0$.

הרשימות מבוססות בין היתר על הספרים [2, 6, 7]. הספר [4] מומלץ אף הוא.

2 תחשיב הפסוקים

בסעיף זה נעסוק בסוג פשוט במיוחד של לוגיקה: תחשיב הפסוקים. לוגיקה זו לא מניחה דבר על המבנה של טענות בסיסיות, ובמקום זה עונה על שאלות הנוגעות לבניה של טענה מורכבת מתוך טענות יותר פשוטות על-ידי פעולות לוגיות. בהתאם לשאלות שהותוו במבוא, נראה את התשובות המדויקות שלוגיקה זו נותנת לשאלות:

1. מהי טענה?

2. מהי המשמעות של האמירה "טענה זו נכונה"?

3. מהי הוכחה?

לאחר שנגדיר את כל המושגים, נראה שניתן לענות על כל השאלות מהמבוא עבור לוגיקה זו, ונראה גם כמה שימושים.

2.1 אלגברות בוליאניות

כאמור, בשלב זה אנו מתייחסים אל כל טענה כאל קופסה שחורה. אם a ו-b טענות כלשהן, אינטואיטיבית ניתן ליצור מהן את הטענות החדשות "a וגם b", "a או b" ו-"לא a". אנחנו מעוניינים למצוא מבנה פורמלי בו האינטואיציה הזו באה לידי ביטוי. במילים אחרות, על קבוצת הטענות B בהן אנו מתעניינים מוגדרות פעולות $\wedge : B \times B \to B$ ("וגם"), $\vee : B \times B \to B$ ("או") ו-$\neg : B \to B$ ("שלילה"). הואיל ובשלב זה אנו מתעניינים *בתוכן* של הטענה, ולא בצורת כתיבתה, למשל, הטענות "a וגם b" ו-"b וגם a" הן מבחינתינו *אותה טענה*. באופן דומה, ניתן להצדיק את התנאים האחרים בהגדרה הבאה:

הגדרה 2.1.1 *אלגברה בוליאנית* מורכבת מקבוצה B, איברים $0, 1 \in B$ ופעולות $\wedge : B \times B \to B$ ("וגם"), $\vee : B \times B \to B$ ו-$\neg : B \to B$, המקיימים את התנאים הבאים לכל $a, b, c \in B$: אלגברה בוליאנית

1. (חילופיות) $\langle a \wedge b \rangle = \langle b \wedge a \rangle$, $\langle a \vee b \rangle = \langle b \vee a \rangle$

2. (קיבוציות) $\langle a \wedge (\langle b \wedge c \rangle) \rangle = \langle (\langle a \wedge b \rangle) \wedge c \rangle$, $a \vee (\langle b \vee c \rangle) = (\langle a \vee b \rangle) \vee c$

3. (פילוג) $a \wedge (\langle b \vee c \rangle) = (\langle a \wedge b \rangle) \vee (\langle a \wedge c \rangle)$, $a \vee (\langle b \wedge c \rangle) = (\langle a \vee b \rangle) \wedge (\langle a \vee c \rangle)$

4. $\langle a \vee 0 \rangle = a$, $\langle a \wedge 1 \rangle = a$

5. $a \wedge \neg a = 0$, $a \vee \neg a = 1$

נסמן ב-$\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ את המבנה כולו

הערה 2.1.2. כתוצאה מחוקי הקיבוץ, אין צורך לרשום סוגריים כאשר מפעילים אותה פעולה ברצף, ואנחנו נרשום למשל $\langle a \wedge b \rangle \wedge c$ במקום $(\langle a \wedge b \rangle) \wedge c$. כמו-כן, נפעל לפי מוסכמה ש-"וגם" קודם, מבחינת סדר הפעולות, ל-"או", וכך נשמיט סוגריים נוספים (כלומר, נרשום $\langle a \wedge b \rangle \vee c$ במקום $(\langle a \wedge b \rangle) \vee c$). בנוסף נשתמש לרוב בחילופיות בלי להזכיר זאת.

דוגמא 2.1.3. אם B קבוצה בת איבר אחד, יש עליה מבנה יחיד של אלגברה בוליאנית (שימו לב שלא דרשנו ש-$1 \neq 0$! תרגיל: הוכיחו שאם ב-B יותר מאיבר אחד, אז $1 \neq 0$.)

דוגמא 2.1.4. ישנה אלגברה בוליאנית יחידה בת שני איברים, $B=\{0,1\}$. מבחינה אינטואיטיבית, זוהי האלגברה של ערכי האמת, כאשר 1 מסמל אמת, ו-0 שקר. נסמן אותה לרוב ב-$\mathbf{2}$.

דוגמא 2.1.5. אם X קבוצה כלשהי, המבנה $\mathcal{B}=\langle\mathcal{P}(X),\cap,\cup,\cdot^c,\emptyset,X\rangle$, כאשר $\mathcal{P}(X)=\{A\mid A\subseteq X\}$ היא קבוצת החזקה, ו-$A^c=X\setminus A$, הוא אלגברה בוליאנית. אנחנו נקרא לאלגברות כאלה *אלגברות חזקה*. אלגברות חזקה

ניתן לזהות את שתי הדוגמאות הקודמות כמקרים פרטיים של הדוגמא הזו, כאשר X קבוצה ריקה או קבוצה בת איבר אחד.

דרך אחת לחשוב על הדוגמא האחרונה היא לחשוב על איברי B כעל טענות על איברי X: נזהה כל טענה עם איברי X המקיימים את הטענה. תחת הפירוש הזה, הפעולות של $\mathcal{B}$ מזוהות עם האינטואיציה של "וגם", "או" ושלילה (כלומר, אם $C\subseteq X$ קבוצת האיברים ב-X המקיימים טענה c, ו-D קבוצת האיברים המקיימים טענה d, אז $C\cap D$ היא קבוצת האיברים המקיימים את הטענה "c וגם d")

דוגמא 2.1.6. אם X קבוצה כלשהי, *תת-קבוצה קוסופית* של X היא תת-קבוצה שהמשלימה שלה (ביחס ל-X) סופית. הקבוצה B המורכבת מתתי הקבוצות של X שהן סופיות או קו-סופיות היא אלגברה בוליאנית (עם פעולות כמו קודם). תת-קבוצה קוסופית

דוגמא 2.1.7. אם $X=[0,1]$, קבוצת הממשיים בין 0 ל-1, אז קבוצת תתי-הקבוצות של X שהן איחוד סופי של קטעים היא אלגברה בוליאנית (שוב, עם פעולות החיתוך והאיחוד). אנחנו נראה עוד דוגמאות רבות מהסוג הזה בהמשך.

דוגמא 2.1.8. אם $\mathcal{B}=\langle B,\wedge,\vee,\neg,0,1\rangle$ אלגברה בוליאנית כלשהי, אז המבנה $\mathcal{B}^*=\langle B,\vee,\wedge,\neg,1,0\rangle$ גם הוא אלגברה בוליאנית, שנקראת *האלגברה הדואלית*. האלגברה הדואלית

התרגיל הבא כולל כמה עובדות שימושיות על אלגברות בוליאניות:

תרגיל 2.1.9. לכל אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, ולכל $a,b\in\mathcal{B}$ מתקיים:

1. $\langle a\wedge 0\rangle=0$, $\langle a\vee 1\rangle=1$
2. $\langle a\wedge a\rangle=a$
3. אם $\langle a\wedge b\rangle=\langle a\vee b\rangle$ אז $a=b$
4. אם $\langle a\wedge b\rangle=0$ ו-$\langle a\vee b\rangle=1$ אז $b=\neg a$
5. $\neg(\neg a)=a$
6. $\neg(\langle a\vee b\rangle)=\neg a\wedge\neg b$
7. $a\wedge(\langle a\vee b\rangle)=a$

הערה 2.1.10. בהנתן שוויון כלשהו בין שני ביטויים בוליאניים כמו בתרגיל, *השוויון הדואלי* הוא השוויון המתקבל מהמקורי על-ידי החלפת התפקידים של $\wedge$ ו-$\vee$, והחלפת התפקידים של 1 ו-0. למשל, הדואלי של השוויון $\neg(\langle a\vee b\rangle) = \neg a \wedge \neg b$ הוא השוויון $\neg(\langle a\wedge b\rangle) = \neg a \vee \neg b$. אם השוויון המקורי נכון עבור איברים כלשהם של אלגברה $\mathcal{B}$, אז השוויון הדואלי נכון עבור אותם איברים כאשר חושבים עליהם כאיברי האלגברה הדואלים $\mathcal{B}^*$. לכן, אם שוויון כלשהו נכון לכל האלגברות הבוליאניות, אז גם הדואלי שלו נכון עבורן. אנחנו נשתמש בזה באופן חופשי.

התרגיל הבא מציג דרך נוספת לחשוב על אלגברות בוליאניות, שלעתים מקלה על הוכחת תכונות כמו בתרגיל האחרון.

תרגיל 2.1.11. תהי $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית, ונגדיר לכל שני איברים $a, b \in \mathcal{B}$ ש-$a \leq b$ אם $a\wedge b{=}a$.

1. הוכיחו שזהו סדר חלקי על $\mathcal{B}$, עם מקסימום 1 ומינימום 0.

2. הוכיחו שלכל שני איברים $a, b \in \mathcal{B}$, החסם העליון ביניהם ביחס ל-$\leq$ קיים ושווה ל-$\langle a\vee b\rangle$ והחסם התחתון שווה ל-$\langle a\wedge b\rangle$ (נזכיר *שחסם עליון* של קבוצה A בסדר חלקי הוא איבר m הגדול או שווה לכל איבר ב-A, וקטן מכל איבר אחר שמקיים זאת. חסם עליון כזה, אם קיים, הוא יחיד) חסם עליון

3. נניח ש-P קבוצה סדורה כמו בסעיפים הקודמים, ונסמן ב-$\langle a\vee b\rangle$ את החסם העליון וב-$\langle a\wedge b\rangle$ את החסם התחתון. נניח שלכל $a \in P$ קיים $b \in P$ כך ש-$\langle a\wedge b\rangle = 0$ ו-$\langle a\vee b\rangle = 1$, ושלכל $a, b, c \in P$ מתקיים: $(\langle a\vee b\rangle) \wedge (\langle a\vee c\rangle) \leq a \vee (\langle b\wedge c\rangle)$. הוכיחו ש-$\langle P, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ אלגברה בוליאנית.

4. פתרו שוב את תרגיל 2.1.9 בעזרת התרגיל הנוכחי

בהמשך, כשנדבר על אלגברות בוליאניות, נתייחס באופן חופשי ליחס הסדר מהתרגיל האחרון.

נחזור למוטיבציה: אם אנחנו חושבים על איברי אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ כטענות, איך לנסח את העובדה שבמצב נתון, כל טענה היא אמיתית או שיקרית? אנחנו רוצים להצמיד לכל טענה $b \in \mathcal{B}$ ערך אמת $v(b)$, שיכול להיות אמת או שקר. כלומר, אנחנו מדברים על פונקציות $v : B \to \{0, 1\}$, אבל הפונקציות צריכות לקיים תנאים מסוימים: אם אמרנו שהטענות a ו-b שתיהן נכונות, אז כך גם $\langle a\wedge b\rangle$, ואילו $\neg a$ שיקרית. במונחים של ההגדרה הבאה, אנחנו מתעניינים בהומומורפיזמים מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathbf{2} = \{0, 1\}$.

הגדרה 2.1.12. *העתקה של אלגברות בוליאניות* מאלגברה בוליאנית $\mathcal{B}_1$ לאלגברה בוליאנית $\mathcal{B}_2$ היא פונקציה $\omega : B_1 \to B_2$ המקיימת: העתקה של אלגברות בוליאניות

1. $\omega(\langle a\wedge b\rangle) = \omega(a) \wedge \omega(b)$

2. $\omega(\neg a) = \neg\omega(a)$

לכל $a, b \in B_1$. (העתקה כזו נקראת גם *הומומורפיזם* של אלגברות בוליאניות) הומומורפיזם

העתקה כזו נקראת *שיכון* אם היא חד-חד-ערכית, ו*איזומורפיזם* אם היא הפיכה. שיכון איזומורפיזם

הערה 2.1.13. בגלל תרגיל 2.1.9, העתקה כזו מקיימת גם $\omega(\langle a\vee b\rangle)=\omega(a)\vee\omega(b)$, $\omega(1)=1$ ו-$\omega(0)=0$. כמו-כן, היא שומרת על הסדר החלקי מתרגיל 2.1.11. נשים לב שלמרות הסימון הזהה, הפעולות בצד שמאל הן ב-$\mathcal{B}_1$ ואלה שבצד ימין הן ב-$\mathcal{B}_2$.

דוגמא 2.1.14. לכל אלגברה יש העתקה יחידה אל האלגברה בת איבר אחד. אם ב-$\mathcal{B}$ יש יותר מאיבר אחד, אין העתקה מהאלגברה בת איבר אחד ל-$\mathcal{B}$.

דוגמא 2.1.15. יש העתקה יחידה מ-2 לכל אלגברה בוליאנית. העתקה מאלגברה $\mathcal{B}$ ל-2 נקראת *השמה*. אלה העתקות שנתעניין בהן מאד בהמשך, שכן, כאמור, הן ממדלות את התהליך של בחירת ערכי אמת לטענות.

השמה

דוגמא 2.1.16. אם $\mathcal{B}=\mathcal{P}(X)$ היא אלגברת קבוצת החזקה, כל איבר x של X מגדיר השמה $\omega_x:\mathcal{B}\to 2$, הנתונה על ידי: $\omega_x(A)=1$ אם $x\in A$, ו-0 אחרת. אם חושבים על איברי $\mathcal{B}$ כטענות על איברי X, אז ω_x היא ההשמה ש"בודקת" האם הטענה נכונה עבור x.

תרגיל 2.1.17. באופן יותר כללי, אם $C\subseteq X$, הוכיחו שהפונקציה $A\mapsto A\cap C$ היא הומומורפיזם מ-$\mathcal{P}(X)$ ל-$\mathcal{P}(C)$.

דוגמא 2.1.18. אם $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית בת יותר מאיבר אחד, אז פונקציית הזהות *אינה* הומומורפיזם מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathcal{B}^*$ (למה?) מאידך, פונקציית השלילה היא איזומורפיזם מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathcal{B}^*$.

סוף הרצאה 1, 4 בנוב

איבר $a\neq 0$ של אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ הוא *אטום* אם אין איבר $b\in\mathcal{B}$ המקיים $0<b<a$. למשל, אם $\mathcal{B}=\mathcal{P}(A)$ אלגברת חזקה, האטומים הם בדיוק היחידונים.

אטום

תרגיל 2.1.19 (אלגברות בוליאניות סופיות). נניח ש-$\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית *סופית*

1. הוכיחו שלכל איבר $b\neq 0$ יש אטום $a\leq b$.

2. הוכיחו ש-$\mathcal{B}$ איזומורפית לאלגברת חזקה

3. הוכיחו שאלגברה בוליאנית אינסופית אינה בהכרח איזומורפית לאלגברת חזקה

2.1.20 משפט סטון

מי שניסה לפתור את תרגיל 2.1.9, גילה אולי שזה יותר קשה ממה שזה נראה. מצד שני, כל הטענות שם קלות מאד להוכחה עבור המקרה בו $\mathcal{B}=\mathcal{P}(X)$ היא אלגברת החזקה של איזושהי קבוצה. בתרגיל האחרון ראינו שכל אלגברה בוליאנית סופית היא כזו, אבל זה לא נכון לאלגברות כלליות.

נניח עכשיו ש-$\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית כלשהי, עבורה יש לנו שיכון $t:\mathcal{B}\to\mathcal{P}(X)$ עבור איזושהי קבוצה X. אז אפשר להוכיח את אחד השוויונים עבור $\mathcal{B}$ באופן הבא: נניח שהשוויון אינו נכון עבור איזשהם איברים $a,b\in\mathcal{B}$. אחרי שנפעיל את t נקבל, בגלל ש-t שיכון, שהשוויון אינו נכון עבור האיברים $t(a)$ ו-$t(b)$ ב-$\mathcal{P}(X)$. אבל כבר הוכחנו שהשוויון נכון לכל זוג איברים בכל אלגברה מהצורה הזו.

במילים אחרות, כל משוואה שנכונה לכל האיברים באלגברה $\mathcal{B}$ נכונה גם לכל האיברים באלגברה שמשוכנת בה (בהמשך תהיה לנו השפה לנסח את הטענה הזו באופן יותר מדויק ויותר כללי). הואיל ובדיקת שוויונים כאלה קלה מאד באלגברות חזקה, נשאלת השאלה: אילו אלגברות ניתנות לשיכון באלגברות חזקה?

משפט 2.1.21 (משפט הייצוג של סטון). *לכל אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ קיימת קבוצה X ושיכון* $t : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$

על מנת להוכיח את המשפט, עלינו ראשית לזהות את X. נניח ראשית ש-$\mathcal{B} = \mathcal{P}(Y)$ עבור איזשהו Y. האם אנחנו יכולים לשחזר את איברי Y מתוך מבנה האלגברה של $\mathcal{B}$? ראינו בדוגמא 2.1.16 שלכל איבר $y \in Y$ ניתן להתאים השמה $\omega_y : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$. לכן, קיבלנו העתקה $Y \to \mathscr{S}(\mathcal{B})$, כאשר $\mathscr{S}(B)$ קבוצת ההשמות על $\mathcal{B}$, אשר נתונה על-ידי $y \mapsto \omega_y$. העתקה זו חד-חד-ערכית, משום שאם $y \neq z$, אז $1 = \omega_y(\{y\}) \neq \omega_z(\{y\}) = 0$ (כפי שנראה בהמשך, היא לרוב לא על, אבל זה פחות חשוב, כי אנחנו מחפשים רק שיכון).

אז תיארנו קבוצה X המכילה את Y במונחים של מבנה האלגברה הבוליאנית בלבד. בפרט, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X)$. כעת נוותר על ההנחה ש-$\mathcal{B}$ אלגברת חזקה, ונשתמש באותו רעיון כדי להגדיר את X באופן כללי.

הוכחת משפט סטון. נסמן ב-X את קבוצת ההשמות על $\mathcal{B}$, ונגדיר $t : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$ על-ידי: $t(b) = \{\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2} \mid \omega(b) = 1\} \subseteq X$. אז לכל $b, c \in \mathcal{B}$,

$$t(b \wedge c) = \{\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2} \mid 1 = \omega(b \wedge c) = \omega(b) \wedge \omega(c)\} = \\ \{\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2} \mid 1 = \omega(b)\} \cap \{\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2} \mid 1 = \omega(c)\} = t(b) \cap t(c)$$

ובאופן דומה לשלילה.

זה מראה ש-t העתקה של אלגברות בוליאניות. כדי להוכיח ש-t חד-חד-ערכית, עלינו להוכיח שלכל $a \neq b \in \mathcal{B}$ יש השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega(a) \neq \omega(b)$. זה התוכן של המשפט הבא, שמסיים את ההוכחה. $\square$

משפט 2.1.22. *אם a ו-b שני איברים שונים באלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, אז יש השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega(a) \neq \omega(b)$.*

נשים לב שבפרט, המשפט אומר שלכל אלגברה בוליאנית לא טריוויאלית $\mathcal{B}$ יש השמה, עובדה לא ברורה בכלל.

אנחנו נוכיח את המשפט באמצעות תרגומו לכמה טענות שקולות. הראשונה היא רדוקציה למקרה פרטי:

תרגיל 2.1.23. הוכיחו שהמשפט נובע מהמקרה הפרטי בו $b = 0$

לפי התרגיל האחרון, עלינו להוכיח שאם $b \neq 0$, אז יש השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega(b) = 1$. על מנת להוכיח זאת, נתבונן בהשמה כלשהי $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$, ונשאל: איך נראית הקבוצה $\omega^{-1}(1)$? מסתבר שקבוצות כאלה מתוארות באופן הבא:

הגדרה 2.1.24. תת-קבוצה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ של אלגברה בוליאנית נקראית *על-מסנן* אם: על-מסנן

1. לכל $a, b \in \mathcal{F}$ גם $\langle a \wedge b \rangle \in \mathcal{F}$.
2. לכל $a \in \mathcal{B}$, אחד מ-$a, \neg a$ שייך ל-$\mathcal{F}$
3. $0 \notin \mathcal{F}$

תרגיל 2.1.25. הוכיחו שאם $\mathcal{F}$ על-מסנן, אז

1. $\mathcal{F}$ לא ריק
2. אם $a \in \mathcal{F}$ ו-$b \geq a$ אז $b \in \mathcal{F}$

תרגיל 2.1.26. הוכיחו ש-$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ על-מסנן אם ורק אם יש השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega^{-1}(1) = \mathcal{F}$

לפי התרגיל האחרון, ניתן לתרגם את הבעיה שלנו לשאלה: האם לכל $b > 0$ יש על-מסנן שמכיל אותו? כדי לענות על השאלה, מסתבר שכדאי לשאול שאלה קצת יותר כללית: אילו קבוצות של איברים של $\mathcal{B}$ מוכלות בעל-מסנן?

הגדרה 2.1.27. תת-קבוצה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ נקראת *מסנן* אם: מסנן

1. לכל $a, b \in \mathcal{F}$ גם $\langle a \wedge b \rangle \in \mathcal{F}$
2. לכל $a \in \mathcal{F}$ ו-$b \geq a$ גם $b \in \mathcal{F}$
3. $\mathcal{F}$ לא ריקה
4. $0 \notin \mathcal{F}$

היתרון במסננים (על פני על-מסננים) הוא שיש הרבה מסננים שמופיעים באופן טבעי ואפשר לתאר אותם במפורש, בעוד שזה לרוב בלתי אפשרי לתאר על-מסנן. נראה דוגמאות של מסננים בהמשך, אבל בינתיים נשים לב לעובדה הבאה:

תרגיל 2.1.28. נניח ש-$\mathcal{F}_0$ תת-קבוצה של אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ כך שלכל $b_1, \dots, b_k \in \mathcal{F}_0$, $b_1 \wedge \dots \wedge b_k \neq 0$. אז יש מסנן שמכיל את $\mathcal{F}_0$. בפרט, אם $b \neq 0$ אז יש מסנן שכולל אותו.

אינטואיטיבית, אפשר לחשוב על מסנן כעל אוסף הטענות שאדם (רציונלי) יכול להאמין בהן. על-מסנן הוא אז אוסף הדעות של אדם שיש לו דעה על כל דבר. הקשר הפורמלי בין מסננים לעל-מסננים נתון בטענה הבאה.

טענה 2.1.29. *התנאים הבאים על תת-קבוצה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ שקולים*

1. *$\mathcal{F}$ על-מסנן*

2. $\mathcal{F}$ *מסנן מקסימלי (כלומר, לא מוכל ממש במסנן אחר)*

הוכחה. נניח ש-$\mathcal{F}$ על-מסנן, ו-$a \in \mathcal{F}$. אז לכל $b \geq a$, בדיוק אחד מ-b ו-$\neg b$ ב-$\mathcal{F}$. אם זה $\neg b$ אז גם $\mathcal{F} \ni a \wedge \neg b = 0$. בסתירה להגדרה. זה מראה ש-$\mathcal{F}$ מסנן. אם $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}$ מסנן שמרחיב אותו, ניקח $a \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}$. כיוון ש-$a \notin \mathcal{F}$ ההגדרה נותנת $\neg a \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$, ולכן $0 = a \wedge \neg a \in \mathcal{F}_1$, בסתירה להגדרה.

נניח עכשיו ש-$\mathcal{F}$ מסנן מקסימלי. אם אינו על-מסנן, יש $a \in \mathcal{B}$ כך ש-$a, \neg a \notin \mathcal{F}$. אם לכל $b \in \mathcal{F}$, $\langle a \wedge b \rangle \neq 0$, אז לפי תרגיל 2.1.28, יש מסנן שמכיל את $\mathcal{F}$ ואת a, בסתירה למקסימליות של $\mathcal{F}$. לכן יש $b \in \mathcal{F}$ כך ש-$\langle b \wedge a \rangle = 0$. באותו אופן, יש $c \in \mathcal{F}$ כך ש-$c \wedge \neg a = 0$. אבל אז $\langle b \wedge c \rangle = 0$, בסתירה לכך ש-$\mathcal{F}$ מסנן. $\square$

תרגיל 2.1.30. הוכיחו שמסנן $\mathcal{F}$ הוא על-מסנן אם ורק אם לכל $b, c \in \mathcal{B}$, אם $\langle b \vee c \rangle \in \mathcal{F}$ אז $b \in \mathcal{F}$ או $c \in \mathcal{F}$.

הטענה האחרונה, בתוספת התרגיל שלפניה, מראים שהוכחת המשפט תסתיים אם נראה שכל מסנן מוכל במסנן מקסימלי. הכלי הסטנדרטי לעשות זאת נקרא *הלמה של צורן*. כדי לצטט אותה, נזכיר את ההגדרה הבאה.

הגדרה 2.1.31. תהי $(X, \prec)$ קבוצה סדורה חלקית.

1. *שרשרת* ב-X הינה תת-קבוצה Y עליה הסדר *מלא*, כלומר לכל $x \neq y \in Y$, מתקיים $x \prec y$ או $y \prec x$. שרשרת סדר מלא

2. תת-קבוצה $Y \subseteq X$ ב-X היא *חסומה מלעיל* אם קיים $x \in X$ כך ש-$y \prec x$ או $x = y$ לכל $y \in Y$. חסומה מלעיל

3. *איבר מירבי* ב-X הוא איבר $x \in X$ עבורו לכל $y \in X$ מתקיים $x \not\prec y$. איבר מירבי

דוגמא 2.1.32. תהי S קבוצה, ו-X קבוצה של קבוצות המוכלות ב-S. אז X סדורה חלקית ביחס להכלת קבוצות: $x \prec y$ אם $x \subset y$. תת-קבוצה Y של X חסומה מלעיל אם יש קבוצה $y \in X$ המכילה את כל הקבוצות ב-Y. איבר מירבי הוא איבר שלא מוכל בשום קבוצה אחרת ב-X.

לעיתים קרובות נעסוק בקבוצות X מסוג זה, עם התכונה שהאיחוד של כל שרשרת של קבוצות ב-X, גם הוא קבוצה ב-X. במקרה זה, האיחוד הוא חסם מלעיל של השרשרת, ולכן כל שרשרת חסומה מלעיל.

דוגמא 2.1.33. בתור מקרה פרטי של הדוגמא הקודמת, יהי S מרחב וקטורי (מעל שדה כלשהו), ותהי X קבוצת הקבוצות הבלתי תלויות לינארית ב-S. איחוד של שרשרת של קבוצות בלתי תלויות הוא קבוצה בלתי תלויה (שכן כל תלות לינארית היא בין מספר סופי של וקטורים, אשר שייכים לאחד האיברים בשרשרת). איבר מירבי ב-X, כלומר קבוצה בלתי תלויה מירבית, נקרא בסיס של S.

עובדה 2.1.34 (הלמה של צורן). *תהי X קבוצה סדורה חלקית, בה כל שרשרת חסומה מלעיל. אז קיים ב-X איבר מירבי*

תרגיל 2.1.35. הראו שמהלמה של צורן נובעת הגירסא היותר חזקה: עם אותן הנחות, לכל איבר קיים איבר מירבי הגדול ממנו

תרגיל 2.1.36. הקבוצה הריקה הינה קבוצה סדורה חלקית (באופן יחיד). למה היא אינה מהווה סתירה ללמה של צורן?

בגלל הלמה של צורן, משתלם לנסח תכונות של עצמים על-ידי תנאי מקסימליות. למשל:

דוגמא 2.1.37. לפי דוגמא 2.1.33, לכל מרחב וקטורי יש בסיס

מסיבות דומות, הלמה של צורן מופיעה במקומות רבים במתמטיקה. אנחנו נשתמש בה כדי להראות את קיומם של על-מסננים, ובכך להחזיר את כל החובות שצברנו:

טענה 2.1.38. *כל מסנן באלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$ מוכל בעל-מסנן*

הוכחה. נתבונן בקבוצת כל המסננים, עם יחס ההכלה. לפי תרגיל 2.1.35, מספיק להראות: איחוד של שרשרת מסננים היא מסנן. נניח ש-C שרשרת כזו, עם איחוד $\mathcal{F}$. אם $a, b \in \mathcal{F}$, קיימים $\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b \in C$, כך ש-$a \in \mathcal{F}_a$ ו-$b \in \mathcal{F}_b$. הואיל ו-C שרשרת, אחד משני המסננים, נניח $\mathcal{F}_a$, מוכל בשני. אז $a, b \in \mathcal{F}_b$, ולכן $\langle a \wedge b \rangle \in \mathcal{F}_b \subseteq \mathcal{F}$ (כי $\mathcal{F}_b$ מסנן). הוכחת התכונות האחרות דומה. $\square$

נסכם את ההוכחה:

הוכחת משפט 2.1.22. לפי תרגיל 2.1.23,עלינו להראות שלכל $b > 0$ ב-$\mathcal{B}$ קיימת השמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ כך ש-$\omega(b) = 1$. לפי תרגיל 2.1.28, b שייך למסנן, ולפי הטענה האחרונה, מסנן זה מוכל בעל-מסנן $\mathcal{F}$. נגדיר $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ על-ידי $\omega(a) = 1$ אם ורק אם $a \in \mathcal{F}$. אז $\omega(b) = 1$, ולפי תרגיל 2.1.26, ω השמה. $\square$

סוף הרצאה 2, 7 בנוב

מודל מספקת

המסקנה הבאה היא כמעט טריוויאלית בהקשר הזה, אך בהקשר של הפירוש לפסוקים שיבוא בהמשך היא אחת התוצאות המרכזיות. נגיד שהשמה $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ היא *מודל* של תת-קבוצה $B_0 \subseteq \mathcal{B}$ (או שהיא *מספקת* את B_0) אם $\omega(b) = 1$ לכל $b \in B_0$.

מסקנה 2.1.39 (משפט הקומפקטיות לאלגברות בוליאניות). *אם B_0 קבוצת איברים של אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, כך שלכל תת-קבוצה סופית $F \subseteq B_0$ יש מודל ω_F, אז ל-B_0 יש מודל*

תרגיל 2.1.40. הוכיחו את המסקנה

תרגיל 2.1.41. נניח ש-$\mathcal{B}_0$ תת-אלגברה של $\mathcal{B}$. הוכיחו שכל השמה ל-$\mathcal{B}_0$ ניתן להרחיב להשמה ל-$\mathcal{B}$.

תרגיל 2.1.42. תהי $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית, ולכל $a, b \in \mathcal{B}$ נסמן $a \to b = \neg(a) \vee b$.

1. הוכיחו שאם $\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ השמה, אז $\omega(a \to b) = \omega(a) \to \omega(b)$.

2. נניח ש-$\mathcal{B}$ קבוצה עם איבר נתון $0 \in \mathcal{B}$ ופעולה $(a, b) \mapsto a \to b$. נגיד ש-$\omega : \mathcal{B} \to \mathbf{2}$ השמה אם $\omega(0) = 0$ ומתקיים השוויון מהסעיף הקודם. נניח שמתקיים התנאי הבא: לכל $a, b \in \mathcal{B}$, אם לכל השמה ω מתקיים $\omega(a) = \omega(b)$, אז $a = b$. הוכיחו שיש מבנה יחיד של אלגברה בוליאנית על $\mathcal{B}$, עבורו $\to$ מתקבל כמו בתחילת השאלה.

2.2 פסוקים ואלגברות חפשיות

הדיון שלנו על "טענות" היה, עד כה, קצת ערטילאי: הטענות הן איברים של אלגברה בוליאנית, הדוגמאות היו בעיקר אלגברות של קבוצות, וקשה לראות בקבוצות אלה טענות. יותר מזה, אלגברה בוליאנית מייצגת טענות עד-כדי שקילות: הטענות $\langle a{\wedge}b\rangle$ ו-$\langle b{\wedge}a\rangle$ שוות, על-פי הגדרה, בעוד שבעולם האמיתי אולי נרצה לחשוב על הטענה "קר ויורד גשם" כשונה מ-"יורד גשם וקר".

בסעיף זה ניקח את הגישה השניה: נתחיל מקבוצה P של "טענות בסיסיות", ונבנה מהן, ברמה התחבירית, טענות חדשות. על-מנת להפריד בין טענות ברמה הטכנית והטענות בדיון עצמו, נקרא לאיברי P והטענות שנבנות ממהם "פסוקים".

ברמה הטכנית, המשמעות של הבניה היא כזו: אנחנו בונים אלגברה בוליאנית שמכילה את P, אנחנו יכולים לקבוע את ערכי האמת של P כרצוננו, ומרגע שקבענו אותם, ערך האמת של יתר האיברים נקבע. במלים אחרות, האלגברה נתונה על-ידי ההגדרה הבאה:

האלגברה הבוליאנית החפשית $\mathcal{B}(P)$

הגדרה 2.2.1. לכל קבוצה P, *האלגברה הבוליאנית החפשית* על P היא אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}(P)$, המכילה את P ובעלת התכונה הבאה: אם $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית כלשהי, לכל העתקה של קבוצות $t_0 : P \to \mathcal{B}$ יש הרחבה יחידה להעתקה של אלגברות בוליאניות $t : \mathcal{B}(P) \to \mathcal{B}$.

כלומר, t_0 מכתיבה את הערך של האיברים הבסיסיים ב-P, ומשם יש רק דרך אחת לחשב את הערך של כל איבר אחר. המטרה העיקרית שלנו בסעיף זה היא להוכיח:

משפט 2.2.2. *לכל קבוצה P קיימת אלגברה בוליאנית חפשית יחידה $\mathcal{B}(P)$*

היחידות במשפט דורשת קצת הסבר: ניתן כמובן לשנות את השמות של האיברים ב-$\mathcal{B}(P)$ (בהנחה שהיא קיימת), ולקבל אלגברה אחרת, אבל היא תהיה זהה מכל בחינה מעשית לאלגברה המקורית. באופן יותר מדויק:

תרגיל 2.2.3. נניח ש-$t_0 : P \to Q$ פונקציה בין קבוצות, ו-$\mathcal{B}(P), \mathcal{B}(Q)$ אלגברות חפשיות על קבוצות אלה

1. הוכיחו שיש הומומורפיזם יחיד $t : \mathcal{B}(P) \to \mathcal{B}(Q)$ כך ש-$t(p) = t_0(p)$ לכל $p \in P$
2. הוכיחו ש-t_0 חד-חד-ערכית או על אם ורק אם t כזו (רמז: ביחרו פונקציה הפוכה בכיוון אחד). בפרט, אם $P \subseteq Q$, אז ניתן לזהות את $\mathcal{B}(P)$ עם תת-אלגברה של $\mathcal{B}(Q)$ (ואנחנו נעשה זאת)
3. הוכיחו שאם $\mathcal{B}_1$ ו-$\mathcal{B}_2$ שתי אלגברות חפשיות על אותה קבוצה P, אז קיים איזומורפיזם יחיד $t : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ שהצמצום שלו ל-P הוא הזהות

שימו לב שכל הטענות נובעות ישירות *מההגדרה* של אלגברה חפשית, ולא מהבנייה שלה.

הערה 2.2.4. המצב דומה מאד לרעיון של "מרחב לינארי שנוצר על-ידי קבוצה P". נזכיר שבהנתן שדה k וקבוצה P, ניתן לבנות מרחב וקטורי $k\langle P\rangle$ מעל k שמכיל את P, וש-P בסיס שלו.

מהגדרת הבסיס נובע שכל העתקה של קבוצות $T_0 : P \to V$, כאשר V מרחב וקטורי כלשהו מעל k, ניתנת להרחבה יחידה להעתקה לינארית $T : k\langle P\rangle \to V$. כלומר, העתקה לינארית מ-$k\langle P\rangle$ נקבעת בצורה "חפשית" ויחידה על-ידי הצמצום שלה ל-P.

על-מנת להוכיח את חלק הקיום במשפט, אנחנו נבנה את קבוצת הפסוקים מעל P. לשם כך, נזכיר ש*מחרוזת* או *מילה* (מעל קבוצה A) היא סדרה סופית של איברים מ-A (אנחנו מזהים את איברי A עם סדרות באורך 1). מחרוזת מילה

הגדרה 2.2.5. עבור קבוצה P, *קבוצת הפסוקים* $\mathcal{F}(P)$ מעל P היא הקבוצה הקטנה ביותר F של מלים מעל הקבוצה $P \cup \{\langle, \rangle, \to, 0\}$ המקיימת: קבוצת הפסוקים $\mathcal{F}(P)$

1. $0 \in F$
2. $P \subseteq F$
3. אם $x, y \in F$ אז $\langle x \to y\rangle \in F$

כל איבר של $\mathcal{F}(P)$ נקרא *פסוק מעל* P. פסוק

כמובן שבהגדרה הזו אנו מניחים ש-P לא כוללת את הסימנים הנוספים $\langle, \rangle, \to, 0$. בשלב ראשון, 0 לא משחק תפקיד מיוחד, ואנחנו נסמן $P_0 = P \cup \{0\}$.

דוגמא 2.2.6. אם $P = \{p, q\}$, המחרוזות הבאות הן פסוקים מעל P: p, 0, $\langle p \to 0\rangle$, $\langle p \to q\rangle$, וכן הלאה.

לקבוצת הפסוקים אין מבנה טבעי של אלגברה בוליאנית, אך מלבד זאת, היא מקיימת את הדרישה:

משפט 2.2.7. *נניח ש-A קבוצה עם פעולה דו-מקומית $*$. לכל העתקה של קבוצות $t_0 : P_0 \to A$ יש הרחבה יחידה $t : \mathcal{F}(P) \to A$ המקיימת:*

$$t(\langle x \to y\rangle) = t(x) * t(y) \tag{2.1}$$

לכל $x, y \in \mathcal{F}(P)$.

ההוכחה תדגים את הדרך הרגילה להשתמש בהגדרה, שהיא סוג של אינדוקציה: מסתכלים על קבוצת הפסוקים שמקיימת את התכונה שאנחנו רוצים, ומראים שהיא מכילה את P_0 וסגורה תחת הגרירה. נקודה מעניינת היא שאנחנו מוכיחים קודם את היחידות, ואז משתמשים בה כדי להוכיח את הקיום.

הוכחה. נתחיל מהיחידות. נניח ש-$t_1, t_2 : \mathcal{F}(P) \to A$ שתיהן מקיימות את התנאים. נסמן $X = \{x \in \mathcal{F}(P) \mid t_1(x) = t_2(x)\}$. אז $P_0 \subseteq X$, משום שהצמצום של t_i לקבוצה זו שווה ל-t_0. כמו-כן, אם $x, y \in X$, אז

$$t_1(\langle x \to y \rangle) = t_1(x) * t_1(y) = t_2(x) * t_2(y) = t_2(\langle x \to y \rangle)$$

כלומר, $\langle x \to y \rangle \in X$ גם כן. לכן, $X \subseteq \mathcal{F}(P)$ מקיימת את התנאי בהגדרה של של $\mathcal{F}(P)$, כלומר $X = \mathcal{F}(P)$ ו-$t_1 = t_2$.

להוכחת הקיום, נזדקק לגרסא חזקה יותר של היחידות, שמופיעה בתרגיל 2.2.8. במונחים של תרגיל זה, נתבונן בקבוצה

$$E = \{t : X \to A \mid X \leq \mathcal{F}(P), t{\restriction}_{X \cap P_0} = t_0{\restriction}_{X \cap P_0}, \text{הומומורפיזם חלקי } t\}$$

אנחנו טוענים שלכל $x \in \mathcal{F}(P)$ קיים $t \in E$ כך ש-t מוגדר על x. אכן, נסמן את קבוצת האיברים המקיימים תנאי זה ב-T. נשים לב ש-$t_0 \in E$, ולכן $P_0 \subseteq T$. נניח ש-$x_1, x_2 \in T$. אז יש $t_i : X_i \to A$, כאשר $t_i \in E$ ו-$x_i \in X_i$. לפי תרגיל 2.2.8, הצמצומים של t_i ל-$X_1 \cap X_2$ שווים, ולכן לפי תרגיל 2.2.9, יש פונקציה $t : X_1 \cup X_2 \to A$ שהצמצום שלה ל-X_i הוא t_i. נגדיר $t(\langle x_1 \to x_2 \rangle) = t(x_1) * t(x_2)$ (אם t אינה מוגדרת שם).

אנו טוענים ש-t הומומורפיזם חלקי. המקרה היחיד שצריך לבדוק הוא האיבר החדש $\langle x_1 \to x_2 \rangle$. אבל לפי תרגיל 2.2.10, השוויון היחיד שצריך להראות הוא $t(\langle x_1 \to x_2 \rangle) = t(x_1) * t(x_2)$, וזה נכון לפי הגדרה.

הראינו שהאוסף E מקיים את תנאי תרגיל 2.2.9, ולכן קיימת פונקציה יחידה t על התחום $\mathcal{F}(P)$ שהצמצום שלה לכל קבוצה סגורה הוא ב-E. בפרט, t עצמה ה-E, ולכן מקיימת את תנאי הטענה. $\square$

בהוכחה השתמשנו בשלוש הטענות הבאות, שהראשונה שבהן גם מסבירה את המינוח.

תרגיל 2.2.8. נאמר שתת-קבוצה $X \subseteq \mathcal{F}(P)$ היא *סגורה*, $X \leq \mathcal{F}(P)$, אם לכל $x, y \in \mathcal{F}(P)$, אם $\langle x \to y \rangle \in X$ אז גם $x, y \in X$. נאמר ש-$t : X \to A$ (כאשר A כמו במשפט 2.2.7) היא הומומורפיזם חלקי אם $t(\langle x \to y \rangle) = t(x) * t(y)$ לכל $x, y, \langle x \to y \rangle \in X$. סגורה $X \leq \mathcal{F}(P)$

1. הוכיחו שחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה

2. הוכיחו שאם X סגורה, ו-$t_1, t_2 : X \to A$ הומומורפיזמים חלקיים כך ש-$t_1{\restriction}_{X \cap P_0} = t_2{\restriction}_{X \cap P_0}$, אז $t_1 = t_2$

התרגיל הבא הוא תרגיל כללי על פונקציות בין קבוצות.

תרגיל 2.2.9. נניח ש-X, Y קבוצות, ו-E קבוצה של פונקציות חלקיות $t : X_t \to Y$ (כאשר $X_t \subseteq X$). נניח שלכל $t, s \in E$ מתקיים $t{\restriction}_{X_s \cap X_t} = s{\restriction}_{X_s \cap X_t}$. הוכיחו שקיימת פונקציה יחידה $u : U \to Y$ כאשר $U = \bigcup_{t \in E} X_t$, כך ש-$u{\restriction}_{X_t} = t$ לכל $t \in E$.

התרגיל האחרון נקרא גם משפט הקריאה היחידה, משום שהוא אומר שיש דרך יחידה "לקרוא" איבר של $\mathcal{F}(P)$, כלומר, להבין איך הוא נבנה מהפסוקים הבסיסיים.

תרגיל 2.2.10 (משפט הקריאה היחידה). הוכיחו שהפונקציה $I : \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P)$ המוגדרת על-ידי $I(x,y) = \langle x{\to}y \rangle$ היא חד-חד-ערכית, ושהתמונה שלה זרה ל-P_0.

הוכיחו שהטענה לא הייתה נכונה אילו היינו מחליפים את $\langle x{\to}y \rangle$ ב-$x \to y$ בהגדרת $\mathcal{F}(P)$ (כלומר, מוותרים על הסוגריים)

נגדיר את הפעולות הבאות על $\mathcal{F}(P)$:

$$\neg : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P) \qquad \neg(x) = \langle x{\to}0 \rangle \tag{2.2}$$

$$\wedge : \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P) \qquad \wedge(x,y) = \neg(\langle x{\to}\neg(y) \rangle) \tag{2.3}$$

הפעולות הללו לא הופכות את $\mathcal{F}(P)$ לאלגברה בוליאנית: למשל, $\neg(\neg(p)) \neq p$. הסיבה, כמו בדוגמא הזו, היא שיש פסוקים שהם שונים כמחרוזות, אך זהים מבחינת המשמעות הלוגית שלהם. במילים אחרות, ישנו יחס שקילות על קבוצת הפסוקים, בו שני פסוקים הם שקולים אם יש להם אותה משמעות לוגית. ישנן לפחות שתי דרכים לתאר את השקילות הזו, אנחנו נראה אחת מהן עכשיו, ואת השניה מאוחר יותר.

לכל אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, נסמן $x \to y = \neg(x) \vee y$ עבור כל $x, y \in \mathcal{B}$.

הגדרה 2.2.11. תהי P קבוצה.

1. *השמה* על $\mathcal{F}(P)$ היא פונקציה $\omega : \mathcal{F}(P) \to \mathbf{2}$ המקיימת: $\omega(0) = 0$ ו- $\omega(\langle x{\to}y \rangle) = \omega(x) \to \omega(y)$. השמה

2. שני איברים $x, y \in \mathcal{F}(P)$ הם *שקולים לוגית* אם לכל השמה $\omega : \mathcal{F}(P) \to \mathbf{2}$ מתקיים $\omega(x) = \omega(y)$. סימון: $x \equiv y$. שקולים לוגית

3. *מודל* של קבוצת פסוקים $\Gamma \subseteq \mathcal{F}(P)$ הוא השמה $\omega : \mathcal{F}(P) \to \mathbf{2}$ המקיימת $\omega(x) = 1$ לכל $x \in \Gamma$. נאמר גם ש-ω *מספקת* את Γ. מודל מספקת

טענה 2.2.12. *תהי P קבוצה.*

1. *שקילות לוגית היא יחס שקילות על $\mathcal{F}(P)$.*

2. *אם $x \equiv x'$ ו-$y \equiv y'$ אז $\neg(x) \equiv \neg(x')$ ו-$\wedge(x,y) \equiv \wedge(x',y')$. לכן, $\neg$ ו-$\wedge$ משרות פעולות מוגדרות היטב על המנה $B := \mathcal{F}(P)/\equiv$ (שמסומנות באותו סימון).*

3. *המבנה $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \neg, 0 \rangle$ הוא אלגברה בוליאנית עם הפעולות המושרות (כאשר 0 מסמל את המחלקה של $0 \in \mathcal{F}(P)$, ויתר המבנה נקבע)*

4. *האיברים של P_0 אינם שקולים, ולכן P_0 משוכנת ב-$\mathcal{B}$.*

תרגיל 2.2.13. הוכיחו את הטענה

הוכחת משפט 2.2.2. נוכיח שהאלגברה $\mathcal{B}$ המופיעה בטענה 2.2.12 היא חפשית על P. נניח ש-$t_0 : P \to \mathcal{B}'$ היא פונקציה כלשהי אל אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}'$. עלינו להוכיח שהיא ניתנת להרחבה יחידה להעתקה $t : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ של אלגברות בוליאניות. נסמן ב-$\pi : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{B} = \mathcal{F}(P)/\equiv$ את העתקת המנה.

יחידות: נניח ש-$t_1, t_2 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ שתיהן מרחיבות את t_0. נסמן $\tilde{t_i} = t_i \circ \pi : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{B}'$. אז $\tilde{t_i}$ מסכימות על P (כי הצמצום של שתיהן הוא t_0) ועל 0, ושתיהן מקיימות $\tilde{t_i}(\langle x \to y \rangle) = \tilde{t_i}(x) \to \tilde{t_i}(y)$ לכל $x, y \in \mathcal{F}(P)$. לפי משפט 2.2.7, $\tilde{t_1} = \tilde{t_2}$. בגלל ש-$\pi$ על, נובע מזה ש-$t_1 = t_2$.

קיום: לפי משפט 2.2.7, יש העתקה $\tilde{t} : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{B}'$ שמרחיבה את t_0, כך ש-$\tilde{t}(0) = 0$ ו-$\tilde{t}(\langle x \to y \rangle) = \tilde{t}(x) \to \tilde{t}(y)$. אנחנו טוענים שאם $x \equiv x'$ אז $\tilde{t}(x) = \tilde{t}(x')$. אחרת, לפי משפט 2.1.22 יש השמה $\omega : \mathcal{B}' \to 2$ כך ש-$\omega(t(x)) \neq \omega(t(x'))$. אז $\omega \circ t$ השמה על $\mathcal{F}(P)$ שנותנת ערכים שונים ל-x ול-x', בסתירה לכך ש-$x \equiv x'$.

לפי הטענה האחרונה, $\tilde{t}$ משרה פונקציה מוגדרת היטב על $\mathcal{B}$. התכונה של $\tilde{t}$ מבטיחה ש-t מרחיבה את t_0, ש-$t(0) = 0$ וש-$t(x \to y) = t(x) \to t(y)$ לכל $x, y \in \mathcal{B}$. פעולות האלגברה הבוליאנית ניתנות לאפיון באמצעות $\to$ (ו-0), ולכן t העתקה של אלגברות בוליאניות. $\square$

אפשר לסכם את הנקודה שאנחנו עומדים בה: בהנתן קבוצה P של "טענות בסיסיות", בנינו את הקבוצה $\mathcal{F}(P)$ של הטענות שניתן להרכיב מהן, ואת הקבוצה $\mathcal{B}(P)$ של "טענות עד כדי שקילות לוגית". לקבוצה $\mathcal{B}(P)$ יש מבנה של אלגברה בוליאנית (ולכן אנחנו יודעים עליה משהו). לקבוצה $\mathcal{F}(P)$ אין מבנה אלגברי פשוט, אבל יש לה את היתרון שאפשר לרשום את האיברים שלה בצורה מפורשת, ולהוכיח עליהם טענות באינדוקציה (על בניית הפסוק). במילים אחרות $\mathcal{F}(P)$ מייצגת את הצד התחבירי (סינטקטי) של הטענות, ו-$\mathcal{B}(P)$ את הצד הסמנטי.

סוף הרצאה 3, 11 בנוב

תרגיל 2.2.14. הוכיחו ש-$\mathcal{B}(P)$ איזומורפית לאלגברת חזקה אם ורק אם P סופית

תרגיל 2.2.15. נניח ש-P קבוצה, ו-$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}(P)$ קבוצה של תתי-קבוצות של P. נזכיר שלכל $P_0 \subseteq P$, אנחנו חושבים על $\mathcal{B}(P_0)$ כתת-אלגברה של $\mathcal{B}(P)$ (תרגיל 2.2.3).

1. הוכיחו שאם $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$, אז $\mathcal{B}(P_1) \cap \mathcal{B}(P_2) = \mathcal{B}(P_1 \cap P_2)$.
2. הוכיחו שאם $\bigcup \mathcal{C} = P$ ולכל $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$ יש $P_3 \in \mathcal{C}$ כך ש-$P_1, P_2 \subseteq P_3$, אז $\mathcal{B}(P) = \bigcup\{\mathcal{B}(P_0) \mid P_0 \in \mathcal{C}\}$. בפרט, לכל P, $\mathcal{B}(P) = \bigcup_{P_0 \subseteq P, |P_0| < \infty} \mathcal{B}(P_0)$.

2.3 שימושים של משפט הקומפקטיות

נזכיר שבמסקנה 2.1.39 הוכחנו את משפט הקומפקטיות לאלגברות בוליאניות. בשביל השימושים יהיה נוח לנסח את התוצאה במונחים של קבוצת הפסוקים $\mathcal{F}(P)$.

מסקנה 2.3.1 (משפט הקומפקטיות לתחשיב הפסוקים). *אם $F \subseteq \mathcal{F}(P)$ קבוצה של פסוקים, כך שלכל תת-קבוצה סופית $F_0 \subseteq F$ יש מודל, אז ל-F יש מודל*

תרגיל 2.3.2. הסיקו את מסקנה 2.3.1 מתוך מסקנה 2.1.39

נראה עכשיו כמה שימושים של המסקנה האחרונה לבעיות מתחומים שונים. האסטרטגיה בכל השימושים דומה: אנחנו מתעניינים במחלקה מסוימת של אובייקטים. אנחנו מניחים את קיומם במקרה הסופי, ורוצים להראות שהם קיימים במקרה הכללי. מייצרים קבוצת פסוקים שמודל שלה מתאר (ומתואר על-ידי) אובייקטים מהסוג המעניין. אז בעיית הקיום של האובייקט הופכת לבעיית קיום מודל עבור אותה קבוצה. לפי משפט הקומפקטיות, הוכחת הקיום הזו נתונה על-ידי קיום במקרה הסופי, שאנחנו מניחים (או מוכיחים בנפרד).

טענה 2.3.3. *כל סדר חלקי $\prec$ על קבוצה X ניתן להרחבה לסדר מלא*

הוכחה. נוכיח ראשית למקרה ש-X סופית, באינדוקציה על גודלה. הטענה ברורה אם X ריקה. אחרת, יהי x איבר מירבי ב-X. אז באינדוקציה $\prec$ ניתן להרחבה לסדר מלא על $Y = X \setminus \{x\}$, וקל לראות שאם מרחיבים סדר זה ל-x על ידי הכלל $y \prec x$ לכל $y \in Y$, מתקבל סדר מלא על X המרחיב את הסדר המקורי.

תהי עתה X קבוצה סדורה חלקית כלשהי, ונתבונן בקבוצת הפסוקים הבסיסיים

$$P_X = \{p_{a,b} \,|\, a, b \in X\}$$

ובקבוצת הפסוקים Γ_X מעליה המורכבת מכל הפסוקים הבאים:

1. הפסוקים $p_{a,b}$ לכל $a \prec b$
2. $\neg p_{a,a}$ לכל $a \in X$
3. $\langle p_{a,b} \wedge p_{b,c} \rangle \to p_{a,c}$ לכל $a, b, c \in X$
4. $\langle p_{a,b} \vee p_{b,a} \rangle$ לכל $a \neq b \in X$

נשים לב שהמידע של השמה ω המספקת את Γ_X שקול למידע של סדר מלא על X המרחיב את $\prec$, על ידי: $a \prec b$ אם ורק אם $\omega(p_{a,b}) = 1$. לכן, עלינו להוכיח ש-Γ_X ספיקה, ולפי משפט הקומפקטיות, מספיק להוכיח שהיא ספיקה סופית.

תהי $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_X$ קבוצה סופית. אז היא מערבת מספר סופי של פסוקים בסיסיים, ולכן גם תת-קבוצה סופית X_0 של איברי X. כלומר, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_{X_0}$ ומספיק שנוכיח שיש השמה המספקת את Γ_{X_0}. אך לפי האמור לעיל, השמה כזו נתונה על-ידי סדר מלא על X_0 המרחיב את $\prec$ על X_0. סדר כזה קיים לפי המקרה הסופי $\square$

2.3.4 צביעת גרפים

הדוגמא הבאה קשורה לתורת הגרפים. *גרף* הוא יחס דו-מקומי, סימטרי ואי-רפלקסיבי E על קבוצה V (כלומר, $E(a, b)$ גורר $E(b, a)$ לכל $a, b \in V$, ולכל $a \in V$ לא מתקיים $E(a, a)$). גרף

הקבוצה V נקראת *קבוצת הקודקודים*, ו-E *קבוצת הקשתות*. אם S קבוצה, הגרף (V, E) הוא S- קבוצת הקודקודים

קבוצת הקשתות

צביע אם קיימת העתקה $c : V \to S$ (צביעה של קודקודי הגרף) כך שאם $E(a,b)$ אז $c(a){\neq}c(b)$. S-צביע
אם k מספר טבעי, אנו מזהים אותו עם הקבוצה $\{1 \dots k-1\}$, ולכן המושג k-צביע מוגדר היטב. למשל, *משפט ארבעת הצבעים* ([1, 8]) קובע שכל גרף מישורי סופי הוא 4-צביע (גרף מישורי הוא גרף שקודקודיו נקודות במישור, וקיימות העתקות רציפות $\gamma_{a,b} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ לכל $(a,b) \in E$, כך ש-$\gamma_{a,b}(0) = a$, $\gamma_{a,b}(1) = b$ ואם $\{a,b\} \neq \{c,d\}$ אז $\gamma_{a,b}((0,1))$ ו-$\gamma_{c,d}((0,1))$ זרות).

תת-גרף מלא (ממש) של הגרף (V,E) הוא הגרף $(V_0, E \cap (V_0 \times V_0))$, כאשר V_0 תת-קבוצה (ממש) של V. תת-גרף מלא

תרגיל 2.3.5. לכל k טבעי, מצאו דוגמא לגרף שאינו k-צביע, אבל כל תת-גרף מלא ממש שלו הוא k-צביע

טענה 2.3.6. *יהי $G = (V,E)$ גרף, k מספר טבעי. אז G הוא k-צביע אם ורק אם כל תת-גרף מלא סופי שלו הוא k-צביע*

הוכחה. כיוון אחד ברור. בכיוון השני, נתבונן בקבוצת הפסוקים Γ_G

1. $p_{1,a} \vee \dots \vee p_{k,a}$ לכל $a \in V$
2. $\neg\langle p_{i,a} \wedge p_{j,a}\rangle$ עבור $a \in V$ ו-$1 \leq i,j \leq k$
3. $\neg\langle p_{i,a} \wedge p_{i,b}\rangle$ לכל $(a,b) \in E$ ו-$1 \leq i \leq k$.

אז השמה ω המספקת Γ_G שקולה לצביעה חוקית של G ב-k-צבעים (על ידי $c(a) = i-1$ אםם $\omega(p_{i,a}) = 1$). לכן מספיק להראות ש-Γ_G ספיקה. ההמשך כמו בדוגמא הקודמת □

תרגיל 2.3.7. הראו שאם מחליפים את k בקבוצה אינסופית בטענה האחרונה, הטענה אינה נכונה

2.3.8 משפט החתונה

נניח שנתונות קבוצות F ו-M של נשים וגברים, בהתאמה, ולכל אישה קבוצה סופית של גברים שהיא מעוניינת בהם. האם ניתן לשדך לכל אישה גבר שהיא מעוניינת בו (כך שלכל גבר מותאמת רק אישה אחת)? במלים אחרות, בהנתן יחס $R \subseteq F \times M$ כך שלכל $f \in F$ הקבוצה $R[\{f\}] \subseteq M$ סופית, האם קיימת פונקציה (שידוך) חח"ע $p : F \to M$ כך ש-$p \subseteq R$? (נזכיר שלכל $X \subseteq F$, התמונה של R על X היא הקבוצה $R[X] = \{m \in M \mid \exists f \in X \langle f,m\rangle \in R\}$).

תנאי הכרחי הוא שלכל קבוצה סופית $F_0 \subseteq F$ של נשים מתקיים

$$|F_0| \leq |R[F_0]| \tag{2.4}$$

משפט החתונה (משפט Hall) אומר שזה גם תנאי מספיק.

תרגיל 2.3.9. הוכיחו שאם התנאי (2.4) מתקיים לכל $F_0 \subseteq F$ סופית, אז קיים פתרון לבעיה הנתונה על ידי R. (הוכיחו ראשית את המקרה הסופי, ואז השתמשו במשפט הקומפקטיות למקרה הכללי.)

2.3.10 הלמה של קניג

מסלול בגרף $G=(V,E)$ מקדקוד a לקדקוד b הוא סדרה סופית של קדקודים $x_1,\dots,x_n$ שונים בזוגות, כך ש-$a=x_1$, $b=x_n$, ולכל $i<n$, $(x_i,x_{i+1})\in E$. האורך של מסלול כזה הוא $n-1$. *המרחק* בין שני קדקודים הוא אורך המסלול הקצר ביותר ביניהם (אם קיים). *השכנים* של קודקוד a הם הקודקודים במרחק 1 ממנו. הגרף G נקרא *עץ* אם בין כל שני קודקודים קיים מסלול יחיד. מסלול שכנים עץ

טענה 2.3.11 (הלמה של קניג). *אם G הוא עץ אינסופי בו לכל קודקוד מספר סופי של שכנים, אז קיים ב-G מסלול אינסופי (כלומר סדרה x_i של קדקודים שונים בזוגות, לכל i טבעי, כך ש-$E(x_i,x_{i+1})$ לכל i).*

הוכחה. שוב, הרעיון הוא לבנות קבוצת פסוקים, שמודל שלהם נותן פתרון, כלומר מסלול אינסופי. נקבע קודקוד a_0, ונסמן ב-S_k את קבוצת האיברים במרחק k מ-a_0. באינדוקציה, כל S_k סופית. נתבונן בקבוצת הפסוקים הבאה:

1. $\bigvee_{a\in S_k} p_a$ לכל k
2. $\neg\langle p_a\wedge p_b\rangle$ לכל $a\neq b\in S_k$, לכל k
3. $p_a\to p_b$ אם b נמצא על המסלול היחיד מ-a_0 ל-a

אז מודל של קבוצה זו מכיל אותו מידע כמו מסלול אינסופי המתחיל ב-a_0. $\square$

תרגיל 2.3.12. השלימו את ההוכחה

תרגיל 2.3.13. נניח ש-$P=\{p_1,\dots\}$ בת-מניה. השתמשו בלמה של קניג כדי להוכיח את משפט הקומפקטיות במקרה זה (רמז: הגדירו גרף בו הקודקודים הם השמות חלקיות)

סוף הרצאה 4, 14 בנוב'

2.3.14 אלגברות בוליאניות

קיבלנו את משפט הקומפקטיות כמסקנה ישירה של הצעד המרכזי בהוכחת משפט סטון (2.1.21), בו הצעד העיקרי הוא ההוכחה שההעתקה הטבעית היא חח"ע. ראינו בתרגיל 2.1.23 שזה נובע מהעובדה הבאה, אותה נוכיח עכשיו באמצעות משפט הקומפקטיות:

טענה 2.3.15. *אם b איבר שונה מ-0 באלגברה בוליאנית $\mathcal{B}$, אז קיימת השמה $\omega:\mathcal{B}\to 2$ עבורה $\omega(b)=1$*

תרגיל 2.3.16. הוכיחו את הטענה עבור אלגברות בוליאניות סופיות (רמז: אפשר להשתמש בתרגיל 2.1.19)

נניח ש-$\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית, ו-b איבר שונה מ-0. תהי $P=\{p_x \mid x\in\mathcal{B}\}$, ונתבונן בקבוצה Γ המכילה את הפסוקים הבאים:

1. $p_{\langle x\wedge y\rangle}\leftrightarrow\langle p_x\wedge p_y\rangle$ לכל $x,y\in\mathcal{B}$.
2. $p_{\neg x}\leftrightarrow\neg p_x$ לכל $x\in\mathcal{B}$
3. p_b

תרגיל 2.3.17. השתמשו בקבוצה Γ כדי להוכיח את טענה 2.3.15

2.3.18 משפט רמזי

משפט רמזי שימושי מאד גם בלוגיקה וגם בענפים אחרים במתמטיקה. יש לו גרסא סופית וגרסא אינסופית, ובמקרה הזה נוכיח את הגרסא האינסופית ישירות, ונסיק ממנה את הגרסא הסופית בעזרת משפט הקומפקטיות.

על מנת לנסח את המשפט, ננסח את ההגדרות הבאות: בהנתן קבוצה X, נסמן ב-$\binom{X}{k}$ את קבוצת תתי הקבוצות בגודל k ב-X. אם $Y\subseteq X$, אפשר לחשוב על $\binom{Y}{k}$ באופן טבעי כעל תת-קבוצה של $\binom{X}{k}$. אם $c:\binom{X}{k}\to S$ היא "צביעה" (כלומר, פשוט פונקציה), *תת-קבוצה מונוכרומטית* של X היא תת-קבוצה $Y\subseteq X$ כך שהצמצום של c ל-$\binom{Y}{k}$ הוא פונקציה קבועה (כלומר, כל הקבוצות שכל איבריהן ב-Y נצבעות באותו צבע). תת-קבוצה מונוכרומטית

משפט 2.3.19 (משפט רמזי, גרסא אינסופית). *לכל צביעה* $f:\binom{X}{k}\to S$ *כאשר* X *אינסופית ו-*S *סופית קיימת תת-קבוצה מונוכרומטית אינסופית*

הוכחה. באינדוקציה על k, המקרים $k=0,1$ ברורים. נניח שהטענה נכונה לאיזשהו $k\geq 1$. נגדיר ברקורסיה סדרה X_i של תתי-קבוצות של X, ו-x_i של איברים של X_i. תהי $X_0=X$, ו-x_0 איבר כלשהו של X. בהנתן X_i ו-x_i, נגדיר $f_i:\binom{X_i\setminus\{x_i\}}{k}\to S$ על-ידי $f_i(s)=f(s\cup\{x_i\})$. באינדוקציה, קיימת תת-קבוצה מונוכרומטית אינסופית $X_{i+1}\subseteq X_i$ עבור f_i. נבחר את x_{i+1} להיות איבר כלשהו של X_{i+1}. נסמן ב-c_i את הערך הקבוע של f_i על $\binom{X_{i+1}}{k}$.

לפי המקרה $k=1$, קיימת קבוצה אינסופית $J\subseteq\mathbb{N}$, כך ש-$c_j=c$ לא תלוי ב-j עבור $j\in J$. נתבונן בקבוצה $Y=\{x_j\mid j\in J\}$. אם $s\subseteq Y$ היא בגודל $k+1$, יהי j האינדקס הקטן ביותר עבורו $x_j\in s$ ותהי $s'=s\setminus\{x_j\}$. אז $f(s)=f_j(s')=c_j=c$ שכן $s'\subseteq X_{j+1}$ ו-$j\in J$. לכן Y הקבוצה המונוכרומטית המבוקשת. □

מסקנה 2.3.20 (משפט רמזי, גרסא סופית). *לכל* $n,k,l\geq 0$ *קיים* $m\geq 0$*, כך שלכל* $c:\binom{m}{k}\to l$ *יש קבוצה מונוכרומטית בגודל* n.

הוכחה. לשם הפשטות, נוכיח את הטענה רק למקרה $k=l=2$, ההוכחה למקרה הכללי דומה. נקבע מספר טבעי n. לכל $i<j$ טבעיים, יהי $p_{i,j}$ פסוק בסיסי, ולכל קבוצה I בגודל n של טבעיים, יהי x_I הפסוק $\bigvee_{i,j\in I}p_{i,j}\wedge\bigvee_{i,j}\neg p_{i,j}$. תהי Γ קבוצת הפסוקים x_I עבור $I\in\binom{\mathbb{N}}{n}$. אם ω מודל של Γ, אז לפי הגרסא האינסופית של משפט רמזי, קיימת קבוצה אינסופית $Y\subseteq\mathbb{N}$ כך ש-ω קבועה על $\{p_{i,j}\mid i,j\in Y\}$. לכן ω אינה מספקת את x_I לכל $I\subseteq Y$.

הראינו ש-Γ אינה ספיקה. לפי משפט הקומפקטיות, תת-קבוצה סופית $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ אינה ספיקה. לכן, לכל השמה ω לפסוקים הבסיסיים המופיעים ב-Γ_0, יש I עבורו $\omega(x_I) = 0$, כלומר I קבוצה מונוכרומטית. $\square$

2.4 היסקים

ראינו שניתן להגדיר במדויק את המושגים טענה, ואמיתות של טענה. כעת נעבור למושג ההוכחה. ליתר דיוק, אנו רוצים להגדיר במדויק מהי הוכחה של פסוק x מתוך קבוצת פסוקים Γ. אינטואיטיבית, הוכחה של x מ-Γ היא תהליך בעל מספר סופי של שלבים, כאשר בכל אחד אנו מסיקים פסוק חדש מתוך פסוקים ב-Γ, או אקסיומות, או פסוקים שהוכחנו קודם. כל שלב כזה הוא "מכני": הוא מאפשר לעבור לפסוק המוכח לפי מבנה הפסוק בלבד. בפרט, כל התהליך הוא בלתי תלוי באמיתות או בהשמות.

על מנת למנוע בלבול, נשתמש במונח "היסק" עבור הוכחות במובן הטכני. כמו-כן, נוח יותר בהיקשר זה לעבוד עם הפעולה הלוגית של גרירה ($\rightarrow$) במקום גימום. אין כאן בעיה, שכן זהו פשוט קיצור.

הגדרה 2.4.1. 1. נניח ש-x פסוק ו-Γ קבוצת פסוקים. נסמן $\Gamma \vdash_0 x$ אם קיימת סדרה סופית של פסוקים $(x_1, \dots, x_n)$, כאשר $x = x_n$, וכל x_i הוא איבר של Γ, או שקיימים $j, k < i$ כך ש-$x_k = \langle x_j \rightarrow x_i \rangle$ (במקרה זה אנו אומרים ש-x_i התקבל מ-x_j ו-x_k על-ידי הפעלת *כלל ההיסק* (*Modus Ponens*). אם Γ ריקה, נשמיט אותה מהסימון: $\vdash_0 x$.

כלל ההיסק

Modus Ponens

האקסיומות הלוגיות

2. מערכת *האקסיומות הלוגיות* A הינה קבוצת כל הפסוקים בעלי אחת משלוש הצורות הבאות:

$$A1 \quad x \rightarrow \langle y \rightarrow x \rangle$$

$$A2 \quad \langle x \rightarrow \langle y \rightarrow z \rangle \rangle \rightarrow \langle \langle x \rightarrow y \rangle \rightarrow \langle x \rightarrow z \rangle \rangle$$

$$A3 \quad \langle \neg(x) \rightarrow \neg(y) \rangle \rightarrow \langle \langle \neg(x) \rightarrow y \rangle \rightarrow x \rangle$$

עבור פסוקים כלשהם x, y, z.

מסקנה

יכיח

3. פסוק x הוא *מסקנה* של Γ או *יכיח* מ-Γ אם $\Gamma \cup \mathrm{A} \vdash_0 x$ (כאשר A קבוצת האקסיומות הלוגיות). במקרה זה נסמן $\Gamma \vdash x$.

המטרה העיקרית שלנו בסעיף הזה היא השוואת המושג התחבירי של יכיחות מהגדרה 2.4.1 למושג הסמנטי המקביל, נביעה לוגית:

נובע לוגית

$\Gamma \models x$

טאוטולוגיה

סתירה

הגדרה 2.4.2. נניח ש-Γ קבוצה של פסוקים, ו-x פסוק. הפסוק x *נובע לוגית* מ-Γ אם לכל מודל ω של Γ מתקיים $\omega(x) = 1$ (סימון: $\Gamma \models x$). הפסוק x הוא *טאוטולוגיה* אם הוא נובע לוגית מהקבוצה הריקה, והוא *סתירה* אם $\neg(x)$ טאוטולוגיה.

תרגיל 2.4.3. המושגים בהגדרה האחרונה הם סמנטיים. נסחו את התנאים במונחים של התמונות של x ושל Γ ב-$\mathcal{B}(P)$.

תרגיל 2.4.4. הוכיחו שמשפט הקומפקטיות שקול לטענה הבאה: אם $\Gamma \models x$ אז יש $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ סופית כך ש-$\Gamma_0 \models x$.

מערכת היסק נאותה

כיוון אחד של ההשוואה בין יכיחות לנביעה הוא שהגדרנו *מערכת היסק נאותה*: אם הצלחנו להסיק פסוק מתוך Γ, אז הוא נובע לוגית מ-Γ, כלומר, אפשר להוכיח רק דברים נכונים.

טענה 2.4.5. *אם x מסקנה של Γ, אז $\Gamma \models x$.*

תרגיל 2.4.6.
1. הוכיחו שכל אקסיומה היא טאוטולוגיה
2. הוכיחו שאם z התקבל מ-x ו-y על-ידי MP, אז $x, y \models z$.
3. הוכיחו את טענה 2.4.5

הערה 2.4.7. הרעיון העיקרי בטענה האחרונה הוא שצעד ההיסק שומר על נכונות לוגית. לפני שנמשיך לכיוון השני, נציין שאותו רעיון מאפשר לנו להראות שהאקסיומות שלנו הן *בלתי-תלויות*: אין קבוצת אקסיומות שנובעת מהאקסיומות האחרות.

תרגיל 2.4.8. תהי S קבוצה עם פעולה $\cdot : S \times S \to S$, ונניח ש-$a \in S$ מקיימת: אם $a \cdot x = a$ אז $x = a$.

הוכיחו שאם יש העתקה $\omega : \mathcal{F}(P) \to S$ המקיימת:

$$\omega(x \to y) = \omega(x) \cdot \omega(y)$$
$$\omega(x) = a, \quad x \in \Gamma$$

אז אם $\Gamma \vdash_0 x$, אז $\omega(x) = a$

לדוגמא, טענה 2.4.5 נובעת מתרגיל זה עבור השמות (כלומר, כאשר $S = \{0, 1\}$ ו-$x{\cdot}y{=}0$ אם ורק אם $x > y$, ו-$a = 1$).

כדי להוכיח, למשל, ש-$A1$ אינה מסקנה של יתר האקסיומות, ניקח: $S = \{a, b, c\}$, ונגדיר $a \cdot b = a \cdot c = b \cdot c = c$, ו-$x \cdot y = a$ בכל מקרה אחר. אם ω העתקה כלשהי מקבוצת הפסוקים הבסיסיים ל-S, נרחיב אותה ל-0 על-ידי $\omega(0) = b$. לפי משפט 2.2.7, כל העתקה כזו ניתן להרחיב באופן יחיד לקבוצת כל הפסוקים. קל לבדוק אז שכל "השמה" כזאת נותנת ערך a לכל האקסיומות ב-$A2, A3$, אבל אם $\omega(x) = b$ ו-$\omega(y) = a$ אז $\omega(\langle x {\to} \langle y {\to} x \rangle \rangle) = c$. □

נראה כעת את הדוגמא הראשונה שלנו להיסק, שתשמש אותנו גם בהמשך. היא מדגימה גם, שמציאת היסק, גם של פסוקים פשוטים, אינה בהכרח פשוטה.

טענה 2.4.9. *לכל פסוק t מתקיים $\vdash \langle t {\to} t \rangle$.*

הוכחה. נרשום במפורש היסק של $\langle t{\to}t\rangle$:

$$
\begin{array}{ll}
t_1 : t \to \langle\langle t \to t\rangle \to t\rangle & A1[x:t, y:\langle t\to t\rangle] \\
t_2 : \langle t \to \langle\langle t \to t\rangle \to t\rangle\rangle \to \langle\langle t \to \langle t \to t\rangle\rangle \to \langle t \to t\rangle\rangle & A2[x:t, y:\langle t\to t\rangle, z:t] \\
t_3 : \langle t \to \langle t \to t\rangle\rangle \to \langle t \to t\rangle & \mathrm{MP}[t_1, t_2] \\
t_4 : t \to \langle t \to t\rangle & A1[x:t, y:t] \\
t_5 : t \to t & \mathrm{MP}[t_3, t_4]
\end{array}
$$

$\square$

2.4.10 משפט השלמות

ראינו בטענה 2.4.5, שכל מה שניתן להוכיח באמצעות מערכת ההיסק הוא נכון. עכשיו נשאל לגבי הכיוון ההפוך: עד כמה מערכת ההיסק חזקה? מה הן הטענות שניתן להוכיח? כפי שראינו, השאלה אינה טריוויאלית: נדרשנו למאמץ אפילו כדי להוכיח שהפסוק $\langle p{\to}p\rangle$ ניתן להיסק מהקבוצה הריקה.

משפט 2.4.11 (משפט השלמות). *אם* $\Gamma \models x$ *אז* $\Gamma \vdash x$

ביחד עם הנאותות, הוא אומר ש-$\vdash$ו-$\models$ הם למעשה אותו יחס. השלב הראשון בהוכחת המשפט הוא הרדוקציה למקרה הסופי.

תרגיל 2.4.12. הראו שמשפט השלמות ל-Γ כלשהי נובע ממשפט השלמות עבור המקרה ש-Γ סופית

הוכחת משפט השלמות מצריכה כלי שמאפשר להראות יכיחות של פסוקים מהצורה $\langle x{\to}y\rangle$. הכלי הזה נקרא משפט הדדוקציה. הוא האנלוג הפורמלי של הנוהג הרגיל בהוכחת טענות כאלה: כדי להוכיח את $\langle x{\to}y\rangle$, מותר לנו להניח את x ולהוכיח את y.

טענה 2.4.13 (משפט הדדוקציה). *אם* $\Gamma, x \vdash y$ *אז* $\Gamma \vdash \langle x{\to}y\rangle$

נשים לב שהכיוון השני גם נכון, באופן מיידי מ-MP.

הוכחה. יהי $(y_1, \dots, y_n)$ היסק של $y = y_n$ מתוך Γ, x. נוכיח, באינדוקציה על k, ש-$\Gamma \vdash \langle x{\to}y_k\rangle$. נניח שהטענה נכונה לכל $i < k$. נתבונן באפשרויות:

1. y_k אקסיומה, או איבר של Γ: במקרה זה נשתמש בכלל ההיסק על y_k ועל המקרה $\langle y_k{\to}\langle x{\to}y_k\rangle\rangle$ של A_1 כדי להסיק את $\langle x{\to}y_k\rangle$

2. $y_k = x$: במקרה זה עלינו להוכיח ש-$\Gamma \vdash \langle x{\to}x\rangle$, אולם ראינו כבר ש-$\vdash \langle t{\to}t\rangle$ לכל פסוק t.

3. y_k התקבל על-ידי MP מ-y_i ו-$y_j = \langle y_i \to y_k \rangle$ עבור $i, j < k$: במקרה זה נשתמש באקסיומה

$$\langle \langle x \to \langle y_i \to y_k \rangle \rangle \to \langle \langle x \to y_i \rangle \to \langle x \to y_k \rangle \rangle \rangle$$

(מהצורה $A2$), ובעובדה שניתן להסיק את $\langle x \to y_j \rangle$ לפי הנחת האינדוקציה כדי להסיק בעזרת MP את $\langle \langle x \to y_i \rangle \to \langle x \to y_k \rangle \rangle$, ואז שוב בהנחת האינדוקציה עבור i וב-MP כדי להסיק את $\langle x \to y_k \rangle$. □

היעילות של המשפט הזה משתקפת למשל בהוכחת המסקנה הבאה (שתשמש אותנו בהוכחת משפט השלמות).

מסקנה 2.4.14. *1.* $x \vdash \neg\neg x$

2. $\neg\neg x \vdash x$

3. $\neg x \vdash \langle x \to y \rangle$

4. $x, \neg y \vdash \neg \langle x \to y \rangle$

5. $\langle x \to y \rangle \vdash \langle \neg y \to \neg x \rangle$

תרגיל 2.4.15. הוכיחו את המסקנה

סוף הרצאה 5, 21 בנוב' 2024

נעבור כעת להוכחת משפט השלמות. נזכיר שאנחנו מניחים ש-Γ סופית, ובפרט, $\Gamma \subseteq \mathcal{F}(P)$ עבור קבוצה סופית P. נוכיח ראשית את הטענה עבור קבוצות Γ ששקולות לאטום. במלים אחרות, לכל השמה ω נסמן

$$\Gamma_\omega = \{ y \in P \mid \omega(y) = 1 \} \cup \{ \neg y \mid y \in P,\ \omega(y) = 0 \} \tag{2.5}$$

למה 2.4.16. *משפט השלמות נכון עבור קבוצות מהצורה Γ_ω: לכל פסוק x, אם $\omega(x) = 1$ אז $\Gamma_\omega \vdash x$, ואם $\omega(x) = 0$ אז $\Gamma_\omega \vdash \neg x$*

החלק השני של הטענה נובע ישירות מהחלק הראשון, אבל הניסוח הזה נוח למטרת האינדוקציה

הוכחה. תהי A קבוצת הפסוקים x מעל P עבורם הטענה נכונה. אז $P \subseteq A$ שכן אז הפסוק שצריך להסיק נמצא ב-Γ_ω (ו-$0 \in A$ באופן ריק)

נניח ש-$x, y \in A$, וש-$\omega(\langle x \to y \rangle) = 1$. אז $\omega(x) = 0$ או $\omega(y) = 1$. במקרה הראשון, $\Gamma_\omega \vdash \neg x$ והתוצאה נובעת מסעיף (3) של מסקנה 2.4.14, ובמקרה השני $\Gamma_\omega \vdash y$, והתוצאה נובעת מהאקסיומה הראשונה. אם $\omega(\langle x \to y \rangle) = 0$ אז $\omega(x) = 1$ ו-$\omega(y) = 0$ ולכן $\Gamma_w \vdash \neg(y), x$ והתוצאה נובעת מסעיף (4) של אותה מסקנה. □

הטענה הבאה מראה שפסוקים שאינם משפיעים, סמנטית, על נביעה לוגית, הם גם מיותרים למטרות היסק.

למה 2.4.17. *נניח ש-* $\Gamma, x \vdash y$ *וגם* $\Gamma, \neg x \vdash y$. *אז* $\Gamma \vdash y$.

תרגיל 2.4.18. הוכיחו את הלמה

הוכחת משפט השלמות ל-Γ סופית. באינדוקציה על הגודל של Γ. אם $\Gamma = \Gamma_0 \cup \{x\}$, אז $\Gamma_0 \models \langle x \to y \rangle$ ולכן באינדוקציה $\Gamma_0 \vdash \langle x \to y \rangle$. לפי MP, מקבלים $\Gamma \vdash y$.

נותר להוכיח את הבסיס: אם x טאוטולוגיה, אז $\vdash x$. תהי P קבוצת הפסוקים הבסיסיים ב-x. לפי למה 2.4.16, $\Gamma_\omega \vdash x$ לכל השמה ω.

אם P אינה ריקה, יהי $a \in P$, ותהי $P_a = P \setminus \{a\}$. אם ω השמה כלשהי ל-P_a, תהי ω_i, עבור $i = 0, 1$, ההרחבה של ω המקיימת $\omega(a) = i$. אז $\Gamma_{\omega_0} = \Gamma_w \cup \{\neg a\}$ ו-$\Gamma_{\omega_1} = \Gamma_w \cup \{a\}$. הואיל ו-$\Gamma_{\omega_i} \vdash x$, נקבל לפי למה 2.4.17,ש-$\Gamma_\omega \vdash x$. זה נכון לכל ω על P_a, ולכן חזרנו למצב שבו היינו עם P, אבל עבור קבוצה יותר קטנה P_a. באינדוקציה, מקבלים ש-$\Gamma_\omega \vdash x$ עבור השמה ω על קבוצה קטנה כרצוננו. עבור הקבוצה הריקה, זו הטענה שרצינו להוכיח. $\square$

הערה 2.4.19. עם מאמץ נוסף, ניתן להוכיח את משפט השלמות ישירות גם לקבוצות אינסופיות Γ, ללא שימוש במשפט הקומפקטיות. הואיל ומשפט הקומפקטיות נובע ישירות ממשפט השלמות (למה?), זה נותן הוכחה אלטרנטיבית למשפט הקומפקטיות.

הערה 2.4.20. קיבלנו תיאור נוסף של יחס השקילות $\equiv$ באמצעותו בנינו את $\mathcal{B}(P)$: שני פסוקים ϕ ו-ψ הם שקולים אם $\phi \vdash \psi$ ו-$\psi \vdash \phi$. במובן מסוים, זהו תיאור יותר מפורש.

3 תחשיב היחסים

תחשיב הפסוקים עליו דובר בסעיף הקודם לא מאפשר יכולת ביטוי גדולה: לא ניתן לנסח בו טענות מתמטיות אמיתיות, אלא רק הפשטה שלהן שמסומנת על-ידי הפסוקים הבסיסיים. בסעיף זה נחקור לוגיקה בעלת יכולת ביטוי המאפשרת ניסוח טענות מתמטיות. לוגיקה זו מורכבת יותר בצורה משמעותית, אולם המבנה הכללי מבחינת ההגדרות והשאלות שנשאלות בה הוא דומה: נגדיר את התחביר, הסמנטיקה (השמות ומודלים), אקסיומות וכללי היסק, ונוכיח את משפט השלמות ומשפט הקומפקטיות המתאימים.

3.1 דוגמאות

הגדרת התחביר מורכבת ממספר מושגים: *חתימה, שמות עצם, נוסחה, פסוק*, ומושגים נוספים. בהמשך נגדיר *השמות, מודלים* ו*קבוצות גדירות*. על מנת לתת מושג לאן אנחנו שואפים, נדגים את המושגים הללו בצורה לא פורמלית במספר דוגמאות.

דוגמא 3.1.1 (יחס סדר).

חתימה בחתימה ישנו סוג אחד, P, וסימן יחס אחד $E \in \mathscr{R}_{PP}$

נוסחה בסיסית היא מהצורה $E(x, y)$ או $x = y$

נוסחה למשל $\forall x(E(x, y) \vee x = y)$

תורה התורה שאומרת ש-E הוא יחס סדר היא:

$$\forall x, y \neg \langle E(x, y) \wedge E(y, x) \rangle$$
$$\forall x, y, z \langle \langle E(x, y) \wedge E(y, z) \rangle \to E(x, z) \rangle$$

מודל של התורה הוא קבוצה סדורה

דוגמא 3.1.2 (גרף). בדוגמא זו כל רכיבי התחביר מוגדרים באותה צורה (שכן גם גרף נתון על-ידי יחס דו-מקומי), אבל התורה היא

$$\forall x, y \langle E(x, y) \to E(y, x) \rangle$$
$$\forall x \neg E(x, x)$$

והמודלים הם גרפים

דוגמא 3.1.3 (חוגים).

חתימה סוג אחד, A, וארבעה סימני פונקציה: $a, m \in \mathscr{F}_{AA,A}$ ו-$0, 1 \in \mathscr{F}_{\epsilon,A}$

שמות עצם שמות העצם הם ביטויים מהצורה $a(m(x, y), z)$ ו-$m(1, z)$ (למשל)

נוסחה בסיסית $a(m(x, x), y) = m(a(1, 1), x)$

נוסחה לדוגמא $\exists x(m(x, y) = 1)$

תורה התורה של החוגים מכילה למשל את הפסוקים הבאים:

$$\forall x, y(a(x, y) = a(y, x))$$
$$\forall x(m(1, x) = x)$$
$$\forall x \exists y(a(x, y) = 0)$$

מודל של התורה (המלאה של חוגים) הוא חוג.

בהמשך נתייחס לדוגמא הזו, ונרשום לרוב $+$ ו-$\cdot$ במקום a ו-m, וכן $x + y$ ו-$x \cdot y$ במקום $a(x, y)$ ו-$m(x, y)$ (לדוגמא).

דוגמא 3.1.4 (גאומטריה).

חתימה שני סוגים, P, L, ושני סימני יחס: $I \in \mathscr{R}_{PL}$ ו-$B \in \mathscr{R}_{PPP}$

שמות עצם שמות העצם הם משתנים משני סוגים: x_P ו-x_L.

נוסחה בסיסית $B(x_P, y_P, z_P)$,$I(x_P, y_L)$

נוסחה לדוגמא $\exists x{\in}P\langle B(y,x,z) \wedge I(x,t)\rangle$

תורה בין היתר, האקסיומות הבאות

$$\begin{gathered}
\forall x,y{\in}P\exists z{\in}L\langle I(x,z) \wedge I(y,z)\rangle \\
\forall t{\in}L\exists x,y,z{\in}P\langle I(x,t) \wedge I(y,t) \wedge I(z,t) \wedge \\
x \neq z \wedge x \neq y \wedge y \neq z\rangle \\
\forall x,y,z{\in}P\forall t{\in}L\langle\langle I(x,t) \wedge I(y,t) \wedge I(z,t)\rangle \to \\
\langle B(x,y,z) \vee B(y,z,x) \vee B(z,y,x)\rangle\rangle
\end{gathered}$$

מודל המישור הממשי

דוגמא 3.1.5 (מרחבים וקטוריים מעל שדה קבוע). נקבע שדה K

חתימה סוג אחד V, סימני פונקציה: $+ \in \mathscr{F}_{VV,V}$, $0 \in \mathscr{F}_{\epsilon,V}$, לכל $c \in K$, $\underline{c} \in \mathscr{F}_{V,V}$.

שמות עצם שמות העצם הם למשל $\underline{c}(x+y)$, $x+0$

נוסחה בסיסית לדוגמא $\underline{c}(x+y) = \underline{d}(z)$

נוסחה לדוגמא $\forall x\exists y\underline{c}(y) = x+z$

תורה בין היתר, האקסיומות הבאות

$$\begin{gathered}
\forall x,y\underline{c}(x+y) = \underline{c}(x) + \underline{c}(y) \quad c \in K \text{ לכל} \\
\forall x\underline{0}(x) = 0 \\
\forall x,y\langle x+y = y+x\rangle \\
\forall x\underline{c \cdot d}(x) = \underline{c}(\underline{d}(x)) \quad c,d \in K \text{ לכל}
\end{gathered}$$

מודל כל מרחב וקטורי מעל K

דוגמא 3.1.6 (מרחבים וקטוריים).

חתימה שני סוגים, K, U, סימני פונקציה: $+_U \in \mathscr{F}_{UU,U}$, $0_U \in \mathscr{F}_{\epsilon,U}$, סימני פונקציה $+_K, \cdot_K, 0_K, 1_K$ על הסוג K, כמו בדוגמא 3.1.3, סימן פונקציה $\cdot \in \mathscr{F}_{KU,U}$.

שמות עצם שמות העצם הם למשל $c \cdot (u +_U v)$, $u +_U 0$, $c \cdot_K d$

נוסחה בסיסית לדוגמא $c \cdot (x +_U y) = d \cdot u$

נוסחה לדוגמא $\exists a \in K \langle u = a \cdot v \rangle$

תורה בין היתר, האקסיומות הבאות

$$\forall a \in K \forall x, y \in U \langle a \cdot (x +_U y) = a \cdot x +_U a \cdot y \rangle$$
$$\forall x \in U 0_K \cdot x = 0_U$$
$$\forall x, y \in K \langle x +_K y = y +_K x \rangle$$

מודל זוג (L, V) כאשר L שדה, ו-V מרחב וקטורי מעליו

3.2 תחביר

כעת נגדיר במדויק את התחביר של תחשיב היחסים. ההגדרה היא ארוכה וכוללת מספר שלבים, ומומלץ בכל שלב לחזור לדוגמאות בסעיף הקודם ולבדוק איך הן מתקבלות, ומה משמעות ההגדרה.

לכל קבוצה A, אנחנו מסמנים ב-A^* את קבוצת המלים מעל A. את המילה הריקה נסמן ב-ϵ, ואת האורך של מילה w נסמן ב-$|w|$. את האיבר ה-i של מילה w נסמן ב-$w(i)$ (האיברים ממוספרים מ-1). אם w_1 ו-w_2 שתי מלים, נסמן ב-$w_1 w_2$ את המילה המתקבלת מהוספת w_2 לסוף של w_1. לרוב נזהה בין איבר $a \in A$ לבין המילה באורך 1 המורכבת מ-a. A^*

האובייקט התחבירי הבסיסי ביותר הוא החתימה.

הגדרה 3.2.1. *חתימה* מורכבת מהנתונים הבאים: חתימה

1. קבוצה $\mathscr{S}$ של *סוגים* סוגים
2. לכל מילה w מעל $\mathscr{S}$, קבוצה $\mathscr{R}_w$, המכונה *קבוצת סימני היחס* מסוג w. קבוצת סימני היחס
3. לכל מילה w מעל $\mathscr{S}$ ולכל איבר $a \in \mathscr{S}$, קבוצה $\mathscr{F}_{w,a}$ המכונה *קבוצת סימני הפונקציה* מ-w ל-a. קבוצת סימני הפונקציה

חתימה כזו תסומן לרוב כ-$\Sigma = (\mathscr{S}, (\mathscr{R}_w)_{w \in \mathscr{S}^*}, (\mathscr{F}_{w,a})_{w \in \mathscr{S}^*, a \in \mathscr{S}})$ או בקיצור כ-$\Sigma = (\mathscr{S}, \mathscr{R}, \mathscr{F})$. סימני הפונקציה ב-$\mathscr{F}_{\epsilon,a}$ מכונים לרוב *סימני קבועים* (מסוג a). סימני קבועים

בהגדרה זו, ובהגדרות דומות בהמשך, אנחנו מניחים שכל הקבוצות המעורבות הן זרות בזוגות.

הערה 3.2.2. אם האורך של w הוא n, איברי $\mathscr{R}_w$ נקראים סימני יחס n-מקומיים, ובדומה לגבי סימני פונקציות. בספרות נוהגים לפעמים להניח ש-$\mathscr{S}$ מורכבת מאיבר אחד ובמקרה זה, ישנה מילה יחידה w מכל אורך n, ואז איברי $\mathscr{R}_w$ הם בדיוק סימני היחס ה-n מקומיים. כפי שראינו, הנחה זו אינה נוחה בחלק מהדוגמאות הטבעיות, ומסבכת דברים מאוחר יותר, ולכן לא נניח אותה.

בהנתן חתימה $\Sigma=(\mathscr{S},\dots)$, יתר ההגדרות תלויות בנוסף בקבוצות $\mathscr{V}_a$ עבור $a\in\mathscr{S}$, הקרויות *משתנים מסוג* a.

משתנים

הגדרה 3.2.3. בהנתן חתימה $\Sigma=(\mathscr{S},\mathscr{R},\mathscr{F})$ ולכל $a\in\mathscr{S}$, קבוצה $\mathscr{V}_a$, *קבוצת שמות העצם* $\mathscr{T}_a$ (מעל $\mathscr{V}=\coprod_{a\in\mathscr{S}}\mathscr{V}_a$) מסוג a עבור $a\in\mathscr{S}$ מוגדרת ברקורסיה כקבוצה הקטנה ביותר המקיימת:

קבוצת שמות העצם

1. $\mathscr{V}_a\subseteq\mathscr{T}_a$
2. לכל $f\in\mathscr{F}_{w,a}$, עם $|w|=n$, ולכל $t_i\in\mathscr{T}_{w(i)}$ עבור $1\le i\le n$ המחרוזת $f(t_1,\dots,t_n)$ היא שם עצם מסוג a.

נשים לב שבפרט, כל סימן קבוע מסוג a הוא שם עצם מסוג a.

תרגיל 3.2.4. עיברו על הדוגמאות בסעיף 3.1, ושכנעו את עצמכם ששמות העצם המוזכרים שם הם אכן כאלה.

כמו במקרה של תחשיב הפסוקים, הוכחות של טענות על שמות עצם (וחלקים אחרים בתחביר) מתבצעות לרוב באינדוקציה על הבניה, וכמו במקרה ההוא, שימושי לדעת שכל שם עצם נבנה בדיוק בדרך אחת. ליתר דיוק, נשים לב שכל $f\in\mathscr{F}_{w,a}$ מגדיר העתקה

$$C_f:\mathscr{T}_{w(1)}\times\dots\times\mathscr{T}_{w(n)}\to\mathscr{T}_a$$

הנתונה על-ידי $C_f(t_1,\dots,t_n)=f(t_1,\dots,t_n)$.

תרגיל 3.2.5 (קריאה יחידה, שמות עצם). הוכיחו שכל אחת מההעתקות C_f היא חד-חד-ערכית, והתמונות של כל שתי העתקות כאלה הן זרות. הסיקו שכל שם עצם נבנה במספר סופי של הפעלות C_{f_i} כאלה, עבור סדרה יחידה (f_i) של סימני פונקציה.

סוף הרצאה 6, 25 בנוב' 2024

שמות העצם מסוג a יפורשו, כשנגדיר מבנים, כהעתקות שהטווח שלהן הוא (הפירוש של) a. מהו התחום של העתקה כזו? לכאורה, התחום של $f\in\mathscr{F}_{bb,a}$ צריך להיות זוגות של איברים בפירוש של b. אולם נשים לב שראשית, f כזו אינה שם עצם לפי ההגדרה לעיל, ושנית, אם x,y שניהם משתנים מסוג b, אז $f(x,y)$ ו-$f(x,x)$ שניהם שמות עצם שנוצרים מאותו סימן פונקציה, ומשתנים מאותו סוג, אך מייצגים העתקות עם תחומים שונים. כלומר, התחום של ההעתקה תלוי במשתנים עצמם, ולא רק בסוגים שלהם.

הגדרה 3.2.6. קבוצת *המשתנים החפשיים* $\mathscr{V}(t)$ בשם עצם t מוגדרת ברקורסיה על בנית t באופן הבא: אם t הוא משתנה, אז $\mathscr{V}(t)=\{t\}$. אם $t=f(t_1,\dots,t_n)$, אז

המשתנים החפשיים $\mathscr{V}(t)$

$$\mathscr{V}(t)=\mathscr{V}(t_1)\cup\dots\cup\mathscr{V}(t_n).$$

נרשום $t(x_1,\dots,x_n)$ אם $\mathscr{V}(t)=\{x_1,\dots,x_n\}$.

$t(x_1,\dots,x_n)$

כעת נגדיר את יתר התחביר.

הגדרה 3.2.7. תהי $\Sigma = (\mathscr{S}, \mathscr{R}, \mathscr{F})$ חתימה, ו-$\mathscr{V} = \coprod_{a\in\mathscr{S}} \mathscr{V}_a$ (האיחוד הזר של $\mathscr{V}_a$) קבוצת משתנים.

1. *נוסחא בסיסית* מעל Σ ו-$\mathscr{V}$ היא מחרוזת מהצורה $E(t_1, \dots, t_n)$, כאשר $E \in \mathscr{R}_w$, וכל t_i הוא שם עצם מסוג $w(i)$. נוסחא בסיסית

2. *נוסחא* מעל Σ ו-$\mathscr{V}$ היא איבר בקבוצה הקטנה ביותר Φ המכילה את הנוסחאות הבסיסיות ואת הסימן $\bot$, וכך ש- נוסחא

   (א) אם $\phi, \psi \in \Phi$, אז גם $\langle \phi \to \psi \rangle \in \Phi$

   (ב) אם $x \in \mathscr{V}_a$ ו-$\phi \in \Phi$, אז $\exists x{\in}a\phi \in \Phi$

תרגיל 3.2.8 (קריאה יחידה, נוסחאות). נסחו והוכיחו את משפט הקריאה היחידה עבור נוסחאות

הערה 3.2.9 (קיצורים). בדוגמאות, ובמקרים אחרים בהם לא נזדקק להגדרה המדויקת, נשתמש בקיצורים הבאים:

1. כאשר $u \in \mathscr{F}_{ab,c}$ או $u \in \mathscr{R}_{ab}$ עבור $a, b, c \in \mathscr{S}$, ו-u הוא סימן (ולא אות), נרשום לעתים $\langle t_1 u t_2 \rangle$ במקום $u(t_1, t_2)$. למשל, בדוגמא 3.1.5 רשמנו $\langle x + y \rangle$ במקום $+(x, y)$. בפרט, עבור יחסי השוויון (כאשר הם בשפה), נרשום $t_1 = t_2$ במקום $=(t_1, t_2)$. כמו כן, נרשום c במקום $c()$ עבור $c \in \mathscr{F}_{\epsilon,a}$.

2. נשתמש בקשרים הלוגיים $\neg$, $\vee$ ו-$\wedge$ כפי שעשינו בתחשיב הפסוקים (עם אותם קיצורים). בנוסף, נרשום $\forall x{\in}a\phi$ כקיצור ל- $\neg\exists x{\in}a\neg\phi$. במקרים בהם $\mathscr{S}$ מורכבת מאיבר אחד a, נרשום $\exists x\phi$ במקום $\exists x{\in}a\phi$. נקצר כך גם אם סוג המשתנה מובן מן ההקשר, למשל בנוסחה מהצורה $\exists x E(x, y)$, כאשר הסוג של E ידוע או אינו חשוב. כמו-כן, נרשום $\exists x_1, x_2 \dots$ או $\exists \bar{x} \dots$ בתור קיצור ל- $\exists x_1 \exists y_2 \dots$, וכך הלאה.

כמובן שמשפט הקריאה היחידה לא תקף עם קיצורים אלה, ובכל פעם שנרצה להוכיח או להגדיר משהו על נוסחאות, נשתמש בהגדרה המקורית

כמו במקרה של שמות עצם, נרצה להגדיר את קבוצת המשתנים שנוסחא ϕ תלויה בהם (כלומר, כפי שנראה בהמשך, ערך האמת שלה תלוי בערכיהם). נשים לב שנוסחא מהצורה $\exists x f(x, y) = 0$, תלויה ב-y אך לא ב-x.

הגדרה 3.2.10. קבוצת *המשתנים החופשיים* $\mathscr{V}(\phi)$ בנוסחא ϕ מוגדרת ברקורסיה על-ידי: אם ϕ היא הנוסחא הבסיסית $E(t_1, \dots, t_n)$ אז $\mathscr{V}(\phi) = \mathscr{V}(t_1) \cup \dots \cup \mathscr{V}(t_n)$. אחרת, המשתנים החופשיים $\mathscr{V}(\phi)$

$$\mathscr{V}(\bot) = \emptyset \tag{3.1}$$

$$\mathscr{V}(\langle \phi \to \psi \rangle) = \mathscr{V}(\phi) \cup \mathscr{V}(\psi) \tag{3.2}$$

$$\mathscr{V}(\exists x{\in}a\phi) = \mathscr{V}(\phi) \setminus \{x\} \tag{3.3}$$

נרשום $\phi(x_1, \dots, x_n)$ אם $\mathscr{V}(\phi) = \{x_1, \dots, x_n\}$. הנוסחא ϕ נקראת *פסוק* אם $\mathscr{V}(\phi)$ ריקה. פסוק

3.3 סמנטיקה

כעת נגדיר את האופן שבו מפרשים את האובייקטים התחביריים שהוגדרו לעיל. ההגדרות הבאות מקבילות להשמות של תחשיב הפסוקים. שוב, כדאי לחזור לדוגמאות ב-3.1 על-מנת לראות על מה מדובר.

נתחיל עם הפירוש של חתימות.

הגדרה 3.3.1. תהי $\Sigma = (\mathscr{S}, \mathscr{R}, \mathscr{F})$ חתימה. *מבנה* $\mathcal{M}$ עבור Σ מורכב מהנתונים הבאים: מבנה

1. לכל $a \in \mathscr{S}$, קבוצה M_a לה נקרא *העולם של* a (ב-$\mathcal{M}$). בהנתן מילה $w \in \mathscr{S}^*$ באורך n, נסמן $M_w = M_{w(1)} \times M_{w(2)} \times \ldots \times M_{w(n)}$ (בפרט, $M_\epsilon = 1 = \{\emptyset\}$ היא קבוצה בת איבר אחד). העולם של a

2. לכל $E \in \mathscr{R}_w$, תת-קבוצה $E^{\mathcal{M}} \subseteq M_w$ (*היחס E ב-$\mathcal{M}$*). היחס E ב-$\mathcal{M}$

3. לכל $f \in \mathscr{F}_{w,a}$, פונקציה $f^{\mathcal{M}} : M_w \to M_a$ (*הפונקציה f ב-$\mathcal{M}$*). בפרט, עבור $c \in \mathscr{F}_{\epsilon,a}$, נזהה את ההעתקה $c^{\mathcal{M}} : 1 \to M_a$ עם האיבר $c^{\mathcal{M}}(\emptyset) \in M_a$, ונקרא לו *הקבוע c ב-$\mathcal{M}$*. הפונקציה f ב-$\mathcal{M}$ הקבוע c ב-$\mathcal{M}$

כזכור, הביטויים בשפה שלנו תלויים לא רק בחתימה, אלא גם בקבוצת המשתנים. על מנת לקבוע את ערכי הביטויים הללו, אנו צריכים לכן לקבוע את ערכי המשתנים:

הגדרה 3.3.2. יהי $\mathcal{M}$ מבנה עבור חתימה Σ, ותהי $\mathscr{V} = \coprod_{a \in \mathscr{S}} \mathscr{V}_a$ קבוצה של משתנים עבורה. *השמה ל-$\mathscr{V}$* (בתוך $\mathcal{M}$) הינה אוסף העתקות $\omega = (\omega_a)$ עבור $a \in \mathscr{S}$, כאשר $\omega_a : \mathscr{V}_a \to M_a$. השמה
את אוסף ההשמות ל-$\mathscr{V}$ בתוך $\mathcal{M}$ נסמן ב-$\mathcal{M}^{\mathscr{V}}$. $\mathcal{M}^{\mathscr{V}}$

דוגמא 3.3.3. נניח ש-Σ היא חתימה עם סוג אחד G, סימן פונקציה דו-מקומי $+$, סימן קבוע 0, וסימני יחס דו-מקומיים $<$ ו-$=$. מבנה אפשרי עבור Σ משייך ל-G את הקבוצה $\mathbb{Z}$ של השלמים, ל-$+$ את העתקת החיבור על G, ל-0 את האיבר $0 \in \mathbb{Z}$, ל-$<$ את יחס הסדר על השלמים ול-$=$ את יחס השוויון. אם x ו-y הם משתנים, ההתאמה שמשייכת ל-x את 3 ול-y את 5 היא השמה. באופן כללי, ניתן לזהות את $\mathcal{M}^{\{x,y\}}$ עם קבוצת הזוגות הסדורים של איברי $\mathbb{Z}$ (אם בוחרים סדר על $\{x,y\}$).

כעת ניתן לפרש את כל הביטויים של השפה. כפי שכבר הוזכר, שמות עצם ונוסחאות תלויים במשתנים החופשיים שלהם, והם יגדירו העתקות על ההשמות למשתנים החופשיים שלהם.

הגדרה 3.3.4. יהי $\mathcal{M}$ מבנה לחתימה Σ.

1. לכל שם עצם t מסוג a נגדיר העתקה $t^{\mathcal{M}} : M^{\mathscr{V}(t)} \to M_a$, ברקורסיה:

   (א) אם t משתנה, אז $\mathscr{V}(t) = \{t\}$, ונגדיר $t^{\mathcal{M}}(\omega) = \omega(t)$.

(ב) אם $t = f(t_1, \dots, t_n)$, אז

$$t^{\mathcal{M}}(\omega) = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\omega\restriction_{\mathscr{V}(t_1)}), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(\omega\restriction_{\mathscr{V}(t_n)}))$$

לביטוי האחרון יש משמעות, שכן $\mathscr{V}(t_i) \subseteq \mathscr{V}(t)$ לכל i, ולכן ניתן לצמצם את ω ל-$\mathscr{V}(t_i)$.

בהמשך, לא נקפיד לרשום את הצימצומים הללו: אם פונקציה g מוגדרת על $\mathcal{M}^{\mathscr{V}}$, נרשום $g(\omega)$ גם עבור $\omega \in \mathcal{M}^{\mathscr{V}_1}$ אם $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{V}_1$, כאשר הכוונה היא ל-$g(\omega\restriction_{\mathscr{V}})$.

2. לכל נוסחא ϕ, נגדיר תת-קבוצה $\phi^{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}^{\mathscr{V}(\phi)}$ ברקורסיה, באופן הבא:

(א) אם ϕ היא מהצורה $E(t_1, \dots, t_n)$, אז

$$\phi^{\mathcal{M}} = \{\omega \in \mathcal{M}^{\mathscr{V}(\phi)} \mid (t_1^{\mathcal{M}}(\omega), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(\omega)) \in E^{\mathcal{M}}\}$$

(ב) עבור נוסחאות ϕ ו-ψ,

$$(\bot)^{\mathcal{M}} = \emptyset \tag{3.4}$$

$$\langle\phi\to\psi\rangle^{\mathcal{M}} = (\phi^{\mathcal{M}})^c \cup \psi^{\mathcal{M}} \tag{3.5}$$

$$(\exists x{\in}a\phi)^{\mathcal{M}} = \{\omega\restriction_{\mathscr{V}(\phi)\setminus\{x\}} \mid \omega \in \phi^{\mathcal{M}}\} \tag{3.6}$$

תרגיל 3.3.5. בדקו שלהגדרות לעיל יש משמעות. בפרט, הבהירו את משמעות האיחוד ב-(3.5)

בפרט, אם ϕ פסוק, אז $\phi^{\mathcal{M}}$ היא תת-קבוצה של $\mathcal{M}^0 = 1$, כלומר איבר של $2{=}\{0, 1\}$.

הגדרה 3.3.6. אם $\mathcal{M}$ מבנה עבור חתימה Σ, ו-ϕ פסוק בחתימה זו, אז $\phi^{\mathcal{M}}$ נקרא *ערך האמת* של ϕ ב-$\mathcal{M}$. אם $\phi^{\mathcal{M}} = 1$, נאמר ש-$\mathcal{M}$ *מספק את* ϕ וש-ϕ נכון ב-$\mathcal{M}$.

ערך האמת

$\mathcal{M}$ מספק את ϕ

תרגיל 3.3.7. הראו שאם ϕ ו-ψ הם פסוקים, אז $(\neg\phi)^{\mathcal{M}} = 1 - \phi^{\mathcal{M}}$, ו-$\langle\phi\wedge\psi\rangle^{\mathcal{M}} = \phi^{\mathcal{M}}{\cdot}\psi^{\mathcal{M}}$. במילים אחרות, $\phi \mapsto \phi^{\mathcal{M}}$ היא השמה על קבוצת הפסוקים, במובן של תחשיב הפסוקים

תרגיל 3.3.8. הוכיחו ש-$(\forall x{\in}a\phi)^{\mathcal{M}}$ היא קבוצת כל ההשמות עבור $\mathscr{V}(\phi) \setminus \{x\}$ שכל הרחבה שלהן ל-x שייכת ל-$\phi^{\mathcal{M}}$.

דוגמא 3.3.9. נמשיך עם החתימה והמבנה מדוגמא 3.3.3. שם העצם $x + y$ מגדיר את ההעתקה הנתונה על-ידי $\omega \mapsto \omega(x) + \omega(y)$. לעומת זאת, שם העצם $x + x$ מגדיר את ההעתקה $\omega{\mapsto}\omega{+}\omega$ (אם מזהים השמות על $\{x\}$ עם איברי $\mathbb{Z}$).

הנוסחא הבסיסית $x + y = 0$ מגדירה את קבוצת כל ה-$\omega \in \mathbb{Z}^{\{x,y\}}$ כך ש-$\omega(x) + \omega(y){=}0$, כלומר, כל הזוגות מהצורה $(a, -a)$ עם $a \in \mathbb{Z}$. לכן, $\exists y(x + y = 0)$ מגדירה את קבוצת כל ההשמות ω ל-x שניתן להרחיב אותן ל-y באופן ש-$\omega(x) + \omega(y) = 0$. במלים אחרות, זוהי כל הקבוצה $\mathbb{Z}$. לכן $\forall x\exists y(x + y = 0)$ מגדירה את קבוצת כל ההשמות שלכל הרחבה שלהן ל-x קיימת הרחבה ל-y כך ש-$\omega(x) + \omega(y) = 0$. הואיל וזה נכון, המבנה $\mathcal{M}$ מספק את $\forall x\exists y(x{+}y = 0)$.

סוף הרצאה 7, 28 בנוב' 2024

נסכם במספר הגדרות נוספות הקושרות בין פסוקים למבנים, ובין קבוצות לנוסחאות.

הגדרה 3.3.10. תהי Σ חתימה, ויהי $\mathcal{M}$ מבנה עבור Σ.

מספק

1. אם φ נוסחא ב-Σ, נאמר ש-$\mathcal{M}$ *מספק* את φ אם $\varphi^{\mathcal{M}} \neq \emptyset$. נאמר ש-$\mathcal{M}$ מספק קבוצה Γ של נוסחאות אם קיימת השמה ששייכת ל-$\varphi^{\mathcal{M}}$ לכל $\varphi \in \Gamma$.

תורה

התורה של המבנה

$\mathbf{Th}(\mathcal{M})$

2. קבוצת פסוקים בחתימה Σ נקראת *תורה* (*מעל* Σ). קבוצת הפסוקים φ עבורם $\varphi^{\mathcal{M}} = 1$ נקראת *התורה של המבנה* $\mathcal{M}$, מסומנת ב-$\mathbf{Th}(\mathcal{M})$.

מודל

3. $\mathcal{M}$ הוא *מודל* של תורה $\mathbb{T}$ אם $\varphi^{\mathcal{M}} = 1$ לכל $\varphi \in \mathbb{T}$ (כלומר, כל הפסוקים ב-$\mathbb{T}$ נכונים ב-$\mathcal{M}$).

קבוצה גדירה

נוסחאות שקולות

4. תת-קבוצה מהצורה $\varphi^{\mathcal{M}}$ נקראת *קבוצה גדירה*. נוסחאות φ ו-ψ הן *נוסחאות שקולות* (ביחס ל-$\mathcal{M}$) אם $\varphi^{\mathcal{M}} = \psi^{\mathcal{M}}$.

נובעת לוגית

$\Gamma \models \varphi$

$\Gamma \models \Gamma_1$

5. נוסחא φ *נובעת לוגית* מקבוצת הנוסחאות Γ אם לכל מבנה $\mathcal{M}$ והשמה ω המספקים את Γ, השמה זו מספקת גם את φ. קבוצה Γ_1 נובעת לוגית מ-Γ אם כל איבר של Γ_1 נובע מ-Γ. סימון: $\Gamma \models \varphi$ או $\Gamma \models \Gamma_1$.

בפרט, כל מבנה הוא מודל של התורה שלו.

3.3.11 מבנים עם שוויון

יחס השוויון מוגדר על כל קבוצה, ולרוב התכונות המעניינות אותנו מנוסחות בעזרתו. כפי שנראה בהמשך, לא ניתן לכפות על יחס להיות יחס השוויון באמצעות הנוסחאות שהגדרנו, ולכן יש להוסיף את זה כדרישה חיצונית.

מבנה עם שוויון

הגדרה 3.3.12. תהי Σ חתימה עם קבוצת סוגים $\mathscr{S}$. *מבנה עם שוויון* עבור Σ הוא מבנה $\mathcal{M}$ עבור החתימה $\Sigma_{=}$ המרחיבה את Σ על-ידי יחס חדש $=_a \in \mathscr{R}_{aa}$ לכל סוג a, בו היחס $=_a$ מתפרש כשוויון על M_a.

בהקשר של מבנים עם שוויון, הנוסחאות, הפסוקים ויתר האלמנטים התחביריים יהיו ביחס לחתימה $\Sigma_{=}$. למשל, התורה של מבנה עם שוויון $\mathcal{M}$ היא קבוצת הפסוקים *מעל* $\Sigma_{=}$ הנכונים ב-$\mathcal{M}$ עם השוויון הרגיל.

3.4 שאלות ודוגמאות נוספות

נתבונן עתה במספר דוגמאות.

3.4.1 קבוצות גדירות בשדות

יהי K שדה ונתבונן כמבנה (הטבעי) לחתימה החד-סוגית $(L, 0, 1, +, -, \cdot)$. איזה קבוצות גדירות במבנה הזה? נתחיל בנוסחאות הבסיסיות במשתנה אחד. נוסחא בסיסית שקולה (ביחס ל-K) לנוסחא מהצורה $a_n x^n + \cdots + a_0 = 0$, כלומר, משוואה פולינומית במשתנה אחד, עם מקדמים ב-$\mathbb{Z}$ (ליתר דיוק, בתמונה של $\mathbb{Z}$ בתוך K). למשוואה כזו לכל היותר n פתרונות ב-K אם לפחות אחד המקדמים שונה מאפס. קבוצה חסרת כמתים במשתנה אחד היא צירוף בוליאני של קבוצות כאלה. בפרט, כל קבוצה כזו היא סופית או קו-סופית ומורכבת מאיברים אלגבריים מעל השדה הראשוני.

במספר משתנים התמונה דומה: קבוצות חסרות כמתים מוגדרות על-ידי מערכות של משוואות פולינומיות ושלילותיהן. במקרה של יותר ממשתנה אחד, קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות אינה בהכרח סופית (אך ניתן לחשוב עליה כעל קבוצה עם מבנה גאומטרי; זהו הנושא של התחום *גאומטריה אלגברית*).

מה בנוגע לנוסחאות עם כמתים? דוגמא אחת לנוסחא כזו היא $\exists y(xy = 1)$. נוסחא זו מגדירה את קבוצת כל האיברים להם יש הפכי כפלי, ולכן היא שקולה לנוסחא $x \neq 0$. האם קיימות נוסחאות שאינן שקולות לנוסחא חסרת כמתים?

תרגיל 3.4.2. מצאו נוסחה (בחתימה של חוגים) המגדירה ב-$\mathbb{R}$ את הממשיים החיוביים. הסיקו שלא כל נוסחא שקולה ב-$\mathbb{R}$ לנוסחא חסרת כמתים. מהי הקבוצה שאותה נוסחא מגדירה ב-$\mathbb{C}$?

בפרט, אנו רואים שהתיאור של הקבוצות הגדירות משתנה משדה לשדה.

שאלה 3.4.3. מהן הקבוצות הגדירות בשדות $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$? האם ניתן להגדיר את $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$? האם ניתן להגדיר את (הגרף של) הפונקציה $x \mapsto e^x$ ב-$\mathbb{R}$, ב-$\mathbb{C}$?

תרגיל 3.4.4. איפה, בתיאור לעיל, השתמשנו בעובדה ש-K הוא שדה (ולא חוג חילופי כללי יותר)?

3.4.5 גאומטריית המישור

נתבונן במבנה לחתימה של גיאומטריית המישור המורכב מנקודות וקוים, עם היחסים הרגילים של שייכות נקודה לקו וביניות. האם ניתן להגדיר את היחס "הקטע בין x ל-y שווה אורך לקטע zw"? נעשה זאת אם הקו L_{xy} העובר דרך x, y מקביל לקו L_{zw} העובר דרך z, w (ניתן כמובן להניח ש-$x \neq y$ ו-$z \neq w$, ולכן הקווים מוגדרים היטב).

תרגיל 3.4.6. מצאו נוסחאות שמגדירות את היחסים ב-$\mathbb{R}^2$ כמבנה לגאומטריית המישור:

1. הקו L_{xy} מקביל (או שווה) ל-L_{zw}
2. אם L_{xy} מקביל ל-L_{zw} ושונה ממנו אז האורך של הקטע xy שווה לאורך של zw
3. אותו דבר בלי ההנחה ש-L_{xy} שונה מ-L_{zw}

שאלה 3.4.7. האם היחס "xy שווה אורך ל-zw" גדיר לקטעים כלליים? האם הנקודה $(0,0)$ במישור גדירה?

את פרויקט הגאומטריה של אוקלידס ניתן לנסח כך:

שאלה 3.4.8. באיזו חתימה ניתן לנסח את גאומטריית המישור? האם ניתן לתאר את התורה של המישור הממשי בחתימה זו?

3.4.9 השלמים והטבעיים

נתבונן במבנה של השלמים $\mathbb{Z}$ בשפת החוגים. התיאור של קבוצות חסרות כמתים בדוגמא זו זהה למקרה של שדות. האם ניתן להגדיר את הטבעיים בתוך $\mathbb{Z}$?

עובדה 3.4.10 (*משפט לגרנז'*). *כל מספר טבעי ניתן להציג כסכום של ארבעה ריבועים (של מספרים שלמים)*

לכן הטבעיים מוגדרים על-ידי הנוסחא $\exists a,b,c,d(x=a^2+b^2+c^2+d^2)$.

תרגיל 3.4.11. במבנה $\mathbb{Z}$, רשמו נוסחאות המגדירות את הקבוצות הבאות:

1. קבוצת הראשוניים
2. קבוצת החזקות של 5

שאלה 3.4.12. האם ניתן להגדיר ב-$\mathbb{Z}$ את קבוצת החזקות של 10? את הפונקציה $5 \mapsto 5^n$?

שאלה 3.4.13. האם ניתן לתאר את $\mathbf{Th}(\mathbb{Z},+,\cdot)$?

שאלה 3.4.14. האם קיים פסוק בשפה של מרחבים וקטוריים מעל שדה קבוע K, שהמודלים שלו הם מרחבים וקטוריים ממימד 7?

שאלה 3.4.15. האם קיימת קבוצה של פסוקים בשפה של שדות שהמודל היחיד שלה הוא $\mathbb{R}$?

שאלה 3.4.16. האם קיימת תורה שהמודלים שלה הם הגרפים הקשירים?

שאלה 3.4.17. האם לחבורה החפשית מעל שני איברים אותה תורה כמו לחבורה החפשית על שלושה איברים?

תרגיל 3.4.18. הראו שלחבורה החפשית מעל איבר אחד תורה שונה מזאת שלחבורה החפשית מעל שני איברים. הראו שלחבורה האבלית החפשית מעל שני איברים תורה שונה מלחבורה האבלית החפשית על שלושה איברים

סוף הרצאה 8, 2 בדצמ' 2024

3.4.19 התורה של קבוצה אינסופית

נתבונן בחתימה הריקה על סוג אחד, כלומר, זו שהיחס היחיד בה הוא שוויון. על-פי ההגדרה, מבנה לחתימה זו הוא פשוט קבוצה. מה יכולה להיות התורה של מבנה כזה? אם לקבוצה גודל סופי n, אז הוא מתואר לחלוטין על-ידי פסוק מהצורה $\phi_n \wedge \neg\phi_{n-1}$, כאשר ϕ_n הוא הפסוק $\forall x_0 \dots x_n \langle x_0 = x_1 \rangle \vee \dots \vee \langle x_{n-1} = x_n \rangle$. נתבונן בתורה $\mathbb{T}$ המורכבת מכל הפסוקים $\neg\phi_n$.

כל מודל $\mathcal{M}$ של $\mathbb{T}$ הוא קבוצה אינסופית. מהן הקבוצות הגדירות במודל כזה? הנוסחאות הבסיסיות הן מהצורה $x = y$ כאשר x, y משתנים (לא בהכרח שונים). כלומר, קבוצה גדירה על ידי נוסחא ללא כמתים היא צירוף בוליאני של "אלכסונים". מה לגבי נוסחאות מהצורה $\exists x\phi(x, \bar{y})$ כאשר ϕ ללא כמתים? ראשית, הואיל ו-$\exists$ מתחלף עם $\vee$, ניתן להניח ש-ϕ היא מהצורה $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$, כאשר ϕ_1 היא מהצורה $x = y_1 \wedge \dots \wedge x = y_k$, ϕ_2 היא מהצורה $x \neq z_1 \wedge \dots \wedge x \neq z_l$, ו-$\phi_3$ לא מכילה את x כלל. לכן, ניתן לשכוח מ-ϕ_3, ולהתבונן בשני מקרים:

1. ϕ_1 אינה ריקה. במקרה זה $\exists\langle\phi_1 \wedge \phi_2\rangle$ שקולה ל-$y_1 = y_2 \wedge \dots \wedge y_1 = y_k \wedge y_1 \neq z_1 \wedge \dots y_1 \neq z_l$ (אם y_i הוא x בשביל i כלשהו, פשוט מוחקים את השוויון. אם $x = z_i$, אז הנוסחא מגדירה את הקבוצה הריקה).

2. ϕ_1 ריקה. במקרה זה הנוסחא מגדירה את כל התחום שלה (משום שהעולם אינסופי).

בסך הכל הראינו, באופן מפורש: כל נוסחא מהצורה $\exists x\phi(x, y)$ שקולה לנוסחא ללא כמתים. לנוסחאות אחרות, הטענה נובעת באינדוקציה. כלומר הוכחנו:

טענה 3.4.20. *לכל נוסחא ϕ בשפת השוויון קיימת נוסחא ללא כמתים ψ השקולה לה בכל מודל של $\mathbb{T}$*

תרגיל 3.4.21. הוכיחו את הטענה

מסקנה 3.4.22. *לכל המודלים האינסופיים של שפת השוויון יש אותה תורה.*

הוכחה. אם ϕ פסוק בשפת השוויון יהי ψ פסוק כמו בטענה. הואיל ו-ψ חסר כמתים, הוא חייב להיות 1 או 0. לכן התורה היא בדיוק התורה המורכבת מהפסוקים השקולים ל-1. $\square$

3.5 הגדרות נוספות

נקבע חתימה Σ. כל המבנים והנוסחאות בסעיף זה יהיו ביחס לחתימה זו. על-מנת להתחיל לענות על חלק מהשאלות ששאלנו, עלינו לנסח אותן יותר במדויק. למשל, בשאלה 3.4.15 שאלנו האם קיימת תורה ש-$\mathbb{R}$ הוא השדה היחיד שמקיים אותה. באיזה מובן היחידות הזו יכולה להיות נכונה? ניתן כמובן לשנות את ה"שמות" של האיברים ב-$\mathbb{R}$ ולקבל מבנה אחר, אבל הוא יהיה *איזומורפי* ל-$\mathbb{R}$ כשדה. למושג האיזומורפיזם יש הכללה טבעית למבנים עבור חתימה כלשהי. באופן יותר כללי, אנחנו רוצים להגדיר העתקות של מבנים:

הגדרה 3.5.1. יהיו $\mathcal{M}$ ו-$\mathcal{N}$ שני מבנים עבור חתימה Σ.

1. *הומומורפיזם* מ-$\mathcal{M}$ ל-$\mathcal{N}$ מורכב ממערכת העתקות $\tau_a : M_a \to N_a$, לכל סוג a, כך שלכל סימן יחס E ולכל $\bar{m} \in \mathcal{M}$ מתקיים $\bar{m} \in E^{\mathcal{M}}$ אם ורק אם $\tau(\bar{m}) \in E^{\mathcal{N}}$, ולכל סימן פונקציה f מתקיים $f^{\mathcal{N}}(\tau(\bar{m})) = \tau(f^{\mathcal{M}}(\bar{m}))$. הומומורפיזם

2. *תת-מבנה* של מבנה $\mathcal{M}$ הוא מבנה $\mathcal{N}$ שעולמו תת-קבוצה של M, ושההכלה שלו ב-M היא הומומורפיזם. תת-מבנה

3. אם $\mathcal{M}$ מודל של תורה $\mathbb{T}$, אז *תת-מודל* של $\mathcal{M}$ (ביחס ל-$\mathbb{T}$) הוא תת-מבנה שגם הוא מודל של $\mathbb{T}$. תת-מדל

4. *איזומורפיזם* הוא הומומורפיזם $\tau : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ שיש לו הופכי, כלומר, הומומורפיזם $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ כך ש-$\sigma \circ \tau$ ו-$\tau \circ \sigma$ שתיהן הזהות. אם קיים איזומורפיזם מ-$\mathcal{M}$ ל-$\mathcal{N}$, נאמר שהם *מבנים איזומורפיים*. איזומורפיזם מבנים איזומורפיים

5. *אוטומורפיזם* של מבנה $\mathcal{M}$ הוא איזומורפיזם מ-$\mathcal{M}$ לעצמו. אוטומורפיזם

כמובן שבהגדרה הזו, $\bar{m} \in \mathcal{M}$ זה קיצור ל-$\langle m_1, \dots, m_k \rangle \in M_w$ כאשר האורך של w הוא k, ו-$\tau(\langle m_1, \dots, m_k \rangle) = \langle \tau_{w(1)}(m_1), \dots, \tau_{w(k)}(m_k) \rangle$.

תרגיל 3.5.2. הוכיחו:

1. כל הומומורפיזם הוא חד-חד-ערכי

2. הומומורפיזם הוא איזומורפיזם אם ורק אם הוא על

3. למבנים איזומורפיים יש אותה עוצמה

4. עבור מרחבים וקטוריים מעל שדה K (כמבנים עבור החתימה החד-סוגית מדוגמא 3.1.5) ועבור חוגים (כמבנים לחתימה של חוגים), מושג ההומורפיזם שהגדרנו מתלכד עם המושג של העתקה לינארית חד-חד-ערכית והומומורפיזם חד-חד ערכי של חוגים (בהתאמה), ועבור גרפים, הומומורפיזם הוא שיכון חח"ע (בפרט, עבור קבוצות סדורות, זו פונקציה עולה ממש).

המושג של איזומורפיזם נותן לנו את המושג הסביר החזק ביותר של "אותו מבנה". אנחנו מעוניינים להשוות אותו למושג יותר חלש לכאורה, המוגדר בצורה תחבירית:

הגדרה 3.5.3. 1. מבנה $\mathcal{M}$ *שקול אלמנטרית* למבנה $\mathcal{N}$ אם יש להם אותה תורה. שקול אלמנטרית

2. *מחלקה אלמנטרית* היא מחלקת כל המודלים של תורה נתונה מחלקה אלמנטרית

3. תורה $\mathbb{T}$ היא *תורה שלמה* אם לכל פסוק ϕ (בחתימה שלה) $\mathbb{T} \models \phi$ או $\mathbb{T} \models \neg\phi$. תורה שלמה

תרגיל 3.5.4. נניח ש-$\mathbb{T}$ תורה ספיקה וסגורה תחת $\models$ (כלומר, אם $\mathbb{T} \models \phi$ אז $\phi \in \mathbb{T}$). הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

1. $\mathbb{T}$ שלמה
2. קיים מבנה $\mathcal{M}$ כך ש-$\mathbb{T} = \mathbf{Th}(\mathcal{M})$
3. כל שני מודלים של $\mathbb{T}$ שקולים אלמנטרית
4. $\mathbb{T}$ מקסימלית בין התורות הספיקות

תרגיל 3.5.5. הוכיחו שאם $\mathcal{M}$ ו-$\mathcal{N}$ איזומורפיים, אז הם שקולים אלמנטרית

דוגמא 3.5.6. במסקנה 3.4.22 הראינו שכל שתי קבוצות אינסופיות הן שקולות אלמנטרית. כיוון שאיזומורפיזם שומר על עוצמה, ישנן קבוצות כאלה שאינן איזומורפיות. במילים אחרות, התורה שאומרת שהקבוצה אינסופית היא תורה שלמה.

מאידך, אם M קבוצה סופית, ראינו בסעיף 3.4.19 שהתורה יכולה להגיד את זה (באמצעות הפסוקים ϕ_n), ולכן כל מבנה השקול אלמנטרית ל-M, גם איזומורפי לו.

אפשר עכשיו לנסח בצורה יותר מדויקת את שאלות 3.4.14 ו-3.4.15:

שאלה 3.5.7. נניח ש-V מרחב וקטורי ממימד 7 מעל שדה K (כמבנה לחתימה מדוגמא 3.1.5), ו-U מרחב וקטורי מעל K אשר שקול אלמנטרית ל-V. האם בהכרח U איזומורפי ל-V? במילים אחרות, האם המימד של U הוא בהכרח 7?

שאלה 3.5.8. נניח ש-L שדה השקול אלמנטרית ל-$\mathbb{R}$. האם הוא בהכרח איזומורפי ל-$\mathbb{R}$?

3.6 משפט הקומפקטיות ושימושיו

על-מנת לענות על חלק מהשאלות ששאלנו, נשתמש באחד המשפטים המרכזיים בתחום, *משפט הקומפקטיות* עבור תחשיב היחסים. משפט זה אנלוגי לגמרי לאותו משפט בתחשיב הפסוקים. כזכור (הגדרה 3.3.10), מבנה $\mathcal{M}$ מספק קבוצה Γ של נוסחאות אם יש ב-$\mathcal{M}$ השמה ω שמספקת את כל הנוסחאות ב-Γ.

קבוצה ספיקה
ספיקה סופית

הגדרה 3.6.1. קבוצה Γ של נוסחאות בחתימה נתונה היא *קבוצה ספיקה* אם קיים מבנה $\mathcal{M}$ עבור אותה חתימה שמספק אותה. Γ היא *ספיקה סופית* אם כל תת-קבוצה סופית של Γ היא ספיקה.

משפט 3.6.2 (משפט הקומפקטיות). *אם קבוצה Γ של נוסחאות היא ספיקה סופית, אז Γ ספיקה*

לפני שנוכיח את המשפט, נראה מספר ניסוחים ושימושים שלו. ראשית, נשים לב למקרה הפרטי כאשר Γ קבוצה של פסוקים. אז הנחת הספיקות אומרת פשוט של-Γ יש מודל, אז מקבלים את המסקנה הבאה. בהמשך נראה שהמסקנה למעשה שקולה למשפט הכללי.

מסקנה 3.6.3. *אם $\mathbb{T}$ תורה שלכל תת-קבוצה סופית שלה יש מודל, אז גם ל-$\mathbb{T}$ יש מודל.*

צורה נוספת של המשפט נתונה במסקנה הבאה, שמוכחת בדיוק כמו בתרגיל 2.4.4.

מסקנה 3.6.4. *אם* $\Gamma \models \phi$ *אז* $\Gamma_0 \models \phi$ *עבור תת-קבוצה סופית* Γ_0 *של* Γ.

תרגיל 3.6.5. נניח ש-ψ פסוק בחתימת השוויון. הוכיחו שקיים מספר טבעי n, כך שאחת האפשרויות הבאות נכונה: כל קבוצה שגודלה גדול מ-n מקיימת את ψ, או כל קבוצה שגודלה גדול מ-n לא מקיימת את ψ.

המסקנה הבאה היא שימוש טיפוסי של משפט הקומפקטיות, והיא תאפשר לנו לענות על כמה מהשאלות ששאלנו:

מסקנה 3.6.6 (משפט לוונהיים-סקולם העולה). *נניח שעבור תורה* $\mathbb{T}$ *ונוסחא* ϕ *קיים, לכל מספר טבעי* n*, מודל* $\mathcal{M}$ *של* $\mathbb{T}$ *כך שעצמת* $\phi^{\mathcal{M}}$ *גדולה מ-*n*. אז לכל עוצמה* κ *קיים מודל* $\mathcal{M}$ *של* $\mathbb{T}$ *כך שעצמת* $\phi^{\mathcal{M}}$ *היא לפחות* κ*. בפרט, אם ל-*$\mathbb{T}$ *יש מודלים בהם עצמת סוג* a *לא חסומה על-ידי שום מספר טבעי, אז יש לה מודלים בהם עצמת* a *גדולה כרצוננו.*

מסקנה 3.6.7. *נניח ש-*$\mathcal{M}$ *מבנה אינסופי (כלומר,* $\mathcal{M}_a$ *אינסופית עבור אחד הסוגים* a*). אז יש מבנה שאינו איזומורפי ל-*$\mathcal{M}$*, אך שקול לו אלמנטרית.*

הוכחה. נשתמש במסקנה 3.6.6 עבור התורה של $\mathcal{M}$, הנוסחא $x =_a x$, ועוצמה גדולה מעוצמת M_a. מודל כמובטח במסקנה שקול אלמנטרית ל-$\mathcal{M}$, אך אינו שווה עוצמה ל-$\mathcal{M}$, ולכן גם לא איזומורפי אליו. □

המסקנה נותנת לנו תשובה לשאלה 3.5.8:

דוגמא 3.6.8. השדה $\mathbb{R}$ הוא אינסופי, ולכן יש שדות שקולים לו אלמנטרית מעוצמה גדולה כרצוננו. בפרט, יש כאלה שאינם איזומורפיים לו.

תרגיל 3.6.9. מדוע הדוגמא האחרונה לא סותרת את האפיון הידוע של $\mathbb{R}$ כשדה סדור השלם היחיד (עד כדי איזומורפיזם)?

סוף הרצאה 9, 5 בדצמ' 2024

מקורות

[1] Kenneth Appel and Woflgang Haken. “The solution of the four-color-map problem.” In: *Sci. Amer.* 237.4 ,(1977) pp. −108,121 .152 ISSN: .0036-8733

[2] Herbert B. Enderton. *A mathematical introduction to logic*. 2nd ed. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, ,2001 pp. xii+317. ISBN: -0-12 .238452-0

[3] Euclid. *The Elements*. Online version with Java illusetrations by David E. Joyce. URL: `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`.

[4] Martin Hils and François Loeser. *A first journey through logic*. Student Mathematical Library .89 American Mathematical Society, Providence, RI, ,2019 pp. xi+185. ISBN: .978-1-4704-5272-8 DOI: 10.1090/stml/089.

[5] Douglas R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. New York, NY, USA: Basic Books, Inc., .1979 ISBN: .0465026850

[6] Elliott Mendelson. *Introduction to mathematical logic*. 4th ed. Chapman & Hall, London, ,1997 pp. x+440. ISBN: .0-412-80830-7

[7] Woflgang Rautenberg. *A concise introduction to mathematical logic*. 2nd ed. Universitext. With a foreword by Lev Beklemishev. Springer, New York, ,2006 pp. xviii+256. ISBN: .978-0387-30294-2

[8] *The Four color theorem*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem.