1. משפט קנטור ברנשטיין - שרדר

$(0,1) \sim (1,3)$

$A = [1,2) = \{ x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x < 2 \}$

$B = (0,3) = \{ x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 3 \}$

$f : A \to B$ הכלה

$g : B \to A \qquad g(x) = \frac{1}{3}x + 1$

$$\underline{\underline{h_U(x)}} = \begin{cases} f(x) & x \in U \\ g^{-1}(x) & x \notin U \end{cases}$$

$T : P(A) \to P(A)$

$X \subseteq A \Rightarrow X^c = A \setminus X$

$X \subseteq B \Rightarrow X^c = B \setminus X$

$T(X) = g[f[X]^c]^c$

$T(U) = U$

$$T(X) = g[X^c]^c = g[X] \cup \{1\}$$

ולכן לכן:

$$g[X^c] = g[X]^c \setminus \{1\}$$

שמצאנו U נ״ק

$$\underline{T(U)=U}$$

$$U = \bigcup \{X \mid \underline{X \subseteq T(X)}\}$$

לכל $y \in [1,2)$, נכתוב בבסיס טרנרי

$$\underline{y = 1.a_1 a_2 \ldots a_k}$$

$a_i \in \{0,1,2\}$, כלומר:

$$\underline{y = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{3^i}} \Rightarrow g(y) = \frac{1}{3} + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{3^{i+1}} + 1$$

אז

$$g(y) = \underline{1.\underline{1}\, a_1 a_2 \ldots}$$

$$U = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{3^i} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1,\ 1\tfrac{1}{3},\ 1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}, \ldots \right\}$$

$$\cup \left\{\tfrac{3}{2}\right\}$$

$h:[1,2)\xrightarrow{\sim}(0,3)$

$$h(x)=\begin{cases} x & x\in\{1,1\tfrac{1}{3},\dots\}=U \\ 3x-3 & \text{אחרת} \end{cases}$$

בכלל כל פונקציה מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{N}$ ניתנת לחישוב בג'אווה סקריפט?

כמה תכניות ג'אווה סקריפט יש?

תהי A קבוצה, נגדיר

לכל n $\quad \underbrace{A\times A\cdots\times A}_{n}=A^n$

$A^0=\{\varepsilon\}$, $\quad A^{n+1}=A^n\times A$

כלומר רצף של איברי A באורך n.

הגדרה: קבוצת המילים מעל A

היא הקבוצה

$$A^* = \bigcup \{A^n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

אם כל תכונות חווה ספציפי סלמבר
לחשוב כעל איבר של U^* כאשר
U קבוצת כל התווים.

משפט: אם A בת מנייה אז
גם A^* בת מנייה.

הוכחה: מספיק לבדוק ב- $A=\mathbb{N}$

ראינו ש $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. באינדוקציה:

$\mathbb{N}\sim\mathbb{N}^k$ לכל k: נניח שזה נכון
ל-k. אז

$$\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}\underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{\sim}\mathbb{N}^k\times\mathbb{N}=\mathbb{N}^{k+1}$$

לכן $\mathbb{N}^*$ איחוד בן מנייה של קבוצות מנייה

ראינו: אם $A\sim A'$, $B\sim B'$ אז
$A\times B\sim A'\times B'$, באינדוקציה $A^n\sim A'^n$
ובפרט במקרה פרטי, אם $A\sim\mathbb{N}$
אז $A^n\sim\mathbb{N}^n\sim\mathbb{N}$

ראינו בסוף ההרצאה הקודמת
שאיחוד בן מניה של קבוצות בנות
מניה הוא קבוצה בת מניה.

<u>מסקנה:</u> קבוצת התכניות בג'אווה
שקיימות היא בת מניה.

מצד שני, ראינו ש-
$\mathbb{N}^\mathbb{N}\sim P(\mathbb{N})$
לפי משפט קנטור, הקבוצה הנ"ל
מעוצמה יותר גדולה (לא בת מניה).

הערה: אם X לא בת מניה ו-

$A\subseteq X$ בת מניה, אז $X\setminus A$

לא בת מניה: אחרת $X=(X\setminus A)\cup A$

בת מניה.

<u>הגדרה לא דקה לעוצמות:</u> עוצמה

היא מחלקת שקילות תחת ~.

לקבוצה סופית, אפשר לזהות

את העוצמה עם מספר האיברים.

את העוצמה של $\mathbb{N}$ מסמנים ב-

$\aleph_0$. התרגיל שלנו $A\sim A'$

ו- $B\sim B'$ אז $A\times B\sim A'\times B'$ ו- A^B

שקול ל- $A'^{B'}$ כלומר הפעולות

מוגדרות היטב על עוצמות.

אם α,β עוצמות, מגדירים
$\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$ ו-α^{β} על ידי:

בוחרים A,B קבוצות זרות כך ש-
$|A|=\alpha$ ו-$|B|=\beta$ ואז $\alpha+\beta=|A\cup B|$
$\alpha\cdot\beta=|A\times B|$ ו-$\alpha^{\beta}=|A^{B}|$.

למשל, $\aleph_0^{\aleph_0}$ העוצמה של
$P(\mathbb{N})$.

קנטור ברנשטיין: $\leq$ מגדיר סדר
חלקי על עוצמות.

$A\sim B \Rightarrow$
$P(A)\sim P(B)$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad \aleph_0 \quad \aleph \quad 2^{\aleph_0} \quad 2^{2^{\aleph_0}} \dots$

$\aleph_0$: $\mathbb{N}, \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^{\infty}$, $\mathbb{Q}^{*}\times\mathbb{Q}^{*}$

$2^{\aleph_0}$: $P(\mathbb{N}), P(\mathbb{Q})$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$

טענה: לכל קבוצה אינסופית X
יש העתקה חח"ע מ-$\mathbb{N}$ ל-X.

הוכחה: נבחר איבר כלשהו $x_0 \in X$

נגדיר ברקורסיה $f:\mathbb{N}\to X$

$f(0)=x_0$

$f(n+1)=$ איבר ב-X שלא שייך ל $f[\mathbb{N}_{<n+1}]$

כדי לעשות זאת בצורה מדויקת, נשתמש

ב $C=\{A\subseteq X \mid A \text{ סופית}\}$

כיוון ש-X אינסופית, $X\notin C$.

לכן לכל $A\in C$, $X\setminus A$ לא ריקה

מאקסיומת הבחירה, יש פ' $g:C\to X$

כך ש- $g(A)\notin A$ לכל $A\in C$.

עכשיו, ההגדרה ברקורסיה רגילה

$f(0)=x_0$

$f(n+1)=g(f[\mathbb{N}^{<n+1}])$

לפי תנאי: אם $m<n$ אז

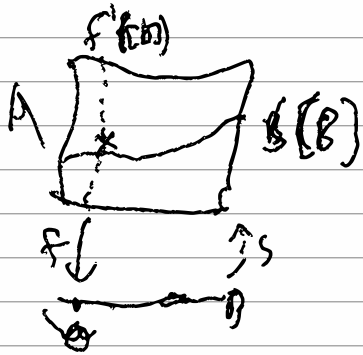
משמעות ולכן $f(n)=g(f[\mathbb{N}^{<n}])\in X\setminus f[\mathbb{N}^{<n}]$

בפרט $f(n)\neq f(m)$, ∎

<u>תזכורת</u>: אקסיומת הבחירה שקולה ל:

אם $f: A\to B$ על, אז יש

$s: B\to A$ כך ש- $f\circ s=id_B$



<u>תרגיל</u>: שלושת השקולים

הבאים שקולים:

1. אקסיומת הבחירה
2. לכל קבוצה C של קבוצות לא ריקות, יש פונקציה $f: C\to\bigcup C$

כך ש- $f(A)\in A$ לכל $A\in C$

3. לכל יחס שקילות יש מערכת נציגים:

אם E יחס שקילות על A,
מערכת נציגים הינה תת-קבוצה
$A_0 \subseteq A$ כך שלכל $b \in A$ יש $a \in A_0$
יחיד עבורו bEa.

<u>הערות:</u>

1. אקסיומת הבחירה נדרשת להוכיח שהסדר על העוצמות הוא קווי.
2. השערת הרצף: אין עוצמות בין $\aleph_0$ ל-$2^{\aleph_0}$
3. נניח ש- $f: A \to B$ על-.
האם $A \leq B$? האם יש פ' חח"ע מ-B ל-A? אקסיומת הבחירה אומרת שכן. (שאלה פתוחה בלי)

משפט: לכל קבוצה אינסופית X

וקבוצה בת מנייה A, $A\cup X\sim X$

(בהנחה של חשבון עוצמות,

$\aleph_0+\alpha=\alpha$ לכל עוצמה אינסופית α).

הוכחה: נבחר פ' חח"ע

$f:\mathbb{N}\to X$

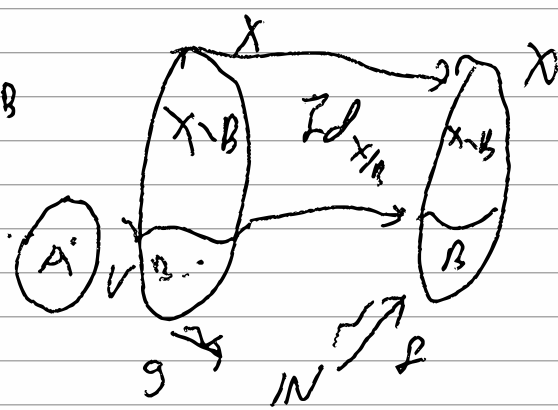
נגדיר $B=f[\mathbb{N}]$. בנוסף -

$A\cup B$ בת מנייה, אז יש פ'

הפיכה $g:A\cup B\to\mathbb{N}$, נגדיר

$h:A\cup X\to X$ ע"י

$f\circ g\cup Id_{X\setminus B}$

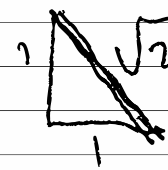


מה זה ממשיים?

למה Q לא מספיק?

למ. ב-Q אין שורש ל-2

למה צריך להיות שורש לזה?

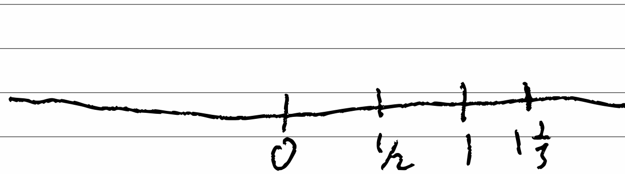


רעיון: הממשיים (הקווים) מייצגים אורכים של קטעים, כלומר מתאימים

את נקודות על ישר שלם.

קובעים ישר ובוחרים שתי נקודות

0, 1



זה מאפשר לצייר את Q בתוך

הישר.

על הממשיים יש יחס סדר, שתואם
על ידי הערך, גם עבור חיבור
שנתונים על ידי חיבור את קבוצה
אחד מהם הוא וכפל (על) דמיון
מתמטיים, גאומטריים על הסדר
, חיבור והכפל כמו ב-$\mathbb{Q}$.

ב-$\mathbb{Q}$, אין שורש ל-2 וב-$\mathbb{R}$ יש,

אבל, יש רצף ב-$\mathbb{Q}$ שמתכנס
ל-$\sqrt{2}$ ב-$\mathbb{Q}$! לקבוצה

$\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$

יש חסם עליון ב-$\mathbb{R}$, שהוא $\sqrt{2}$.
להגדרה: מודל של הממשיים הוא
קבוצה סדורה שמכילה את $\mathbb{Q}$
עם פעולות $\cdot, +$ עם התכונה:
(שלמות) לכל תת-קבוצה חסומה ולא ריקה יש חסם
עליון.

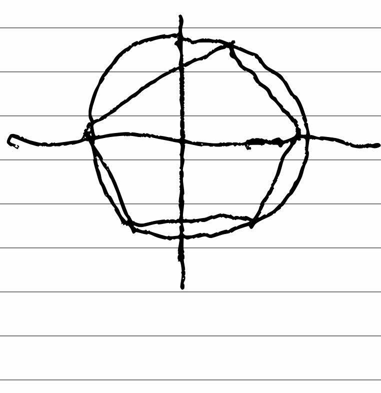
חסם עליון של קבוצה A הוא המינימום של

$\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq y$ לכל $y\in A\}$

דוגמה: $\sqrt{2}$ החסם העליון של
$\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2<2\}$

מחר: נראה שהממשיים יחודיים ונראה תכונות ונמשיך את ההגדרה שלהם.

דוגמה: 2π הוא היקף של מעגל ברדיוס 1.



החסם העליון של
$\{a \mid a$ היקף של מצולע משוכלל שחסום במעגל$\}$