תורת הקירובים

Walter Gautschi

- אלגברה לינארית: פתרון מערכות משוואות, למצוא ערכים עצמיים, ...
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$

  או $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
- אינטרפולציה: נתונות נקודות וערכים בנקודות האלה, למצוא פונקציה נחמדה שזה הערכים:
- קירוב פונקציות: קירוב פונקציה לפונקציה שקרובה אליה מסוג מסוים (למשל פולינום).

- בהמשך בוחן

- משוואות דיפרנציאליות

<u>חישובי שגיאות</u>

<u>$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$</u>

$\mathbb{R}^* \subseteq \mathbb{R}$ סופית - מספרים שאפשר לייצג

$x \in \mathbb{R}$, יש לו קירוב $x^* \in \mathbb{R}^*$, $0 \in \mathbb{R}^*$

$0^* = 0$.

$\frac{|x-x^*|}{|x|}$ - דיוק יחסי.

נניח שרוצים לחשב את $f(x)$

איך אני הדיוק של x מול לגפשיר

עם אותות הדיוק?

x, x^* , $f(x)$, $f(x^*) = f(x')$

עבור x' [illegible] $\underline{|x'-x| \le |x^*-x|}$

$$\left|\frac{f(x^*) - f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x') - f(x)}{f(x)}\right| =$$

$$\left|\frac{(f(x') - f(x))(x'-x)\cdot x}{(x'-x)\cdot x\, f(x)}\right| \le \frac{|x^*-x|}{|x|} \cdot$$

$$\left|\frac{(f(x') - f(x))\cdot x}{(x'-x)\cdot f(x)}\right| \approx \underline{\left|\frac{x\, f'(x)}{f(x)}\right|} \cdot \frac{|x^*-x|}{|x|}$$

נזכיר: מספר המצב של f

ב- x (condition number) הוא

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

(תחת בהנחה ש- $x, f(x) \neq 0$)

דוגמא: $f(x) = ax + b$,

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot a}{ax+b} \right| = \left| 1 - \frac{b}{ax+b} \right|$$

דוגמא 2: רוצים לחשב לכל n

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\, dt$$

מהו את הערך?

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{t+5} = \ln(t+5) \Big|_0^1 = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{\boxed{t^{n+1}}}{t+5}\,dt = \int_0^1 t^n \cdot \frac{t+5-5}{t+5}\,dt =$$

$$\underbrace{-5\int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt}_{I_n} + \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = -5I_n + \frac{1}{n+1}$$

$$I_n = f_n(I_0) \qquad \underline{f_n(x) = (-5)^n x + b_n}$$

עבור $b_n \in \mathbb{R}$ כלשהו

$$\text{cond}(f_n)(I_0) = \left| \frac{I_0 \, f_n'(I_0)}{I_n} \right| =$$

$$5^n \cdot \left| \frac{I_0}{I_n} \right| \geq 5^n$$

$$I_n = \frac{I_{n+1} - \frac{1}{n+1}}{-5}$$

$k >> n$

$n-k < 0$

$$I_n = g_n(I_k)$$

$$g_n(x) = (-5)^{n-k} x + c_n$$

$$\mathrm{cond}(g_n)(I_k) = \left| \frac{I_k \cdot -5^{n-k}}{I_n} \right| =$$

$$5^{n-k} \left| \frac{I_k}{I_n} \right| \leq 5^{n-k}$$

≈ 1

שגיאות במימד למה גבוה.

$(x_1^*,\dots,x_n^*) \leftarrow (x_1,\dots,x_n)$

הגדרה: יהא V מרחב ליניארי

מעל $\mathbb{R}$, נורמה על V היא

פונקציה $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ כך ש-

$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0\}$

1. אם $\|v\|=0$ אז $v=0$
2. לכל $a\in\mathbb{R}$, $v\in V$ $\|av\|=|a|\cdot\|v\|$
3. לכל $u,v\in V$ $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$

מרחב ליניארי V ביחד עם נורמה

נקרא **מרחב נורמי!**

דוגמאות: $V=\mathbb{R}^d$, $1 \leq p$ קבוע

$$\|\langle x_1, \dots, x_d \rangle\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$$

(מקרים פרטיים:)

$$\|\langle x_1, \dots, x_d \rangle\|_1 = \sum |x_i|$$

$$\|\langle x_1, \dots, x_d \rangle\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$$

"$p=\infty$"

$$\|\langle x_1, \dots, x_d \rangle\|_\infty = \sup\{|x_i|\}$$

בהינתן נורמה $\|\cdot\|$ על V, יש מטריקה על V:

$$d(u,v) = \|u-v\|$$

אם $v_i \in V$ סדרה, (v_i) **מתכנסת** ל-v אם $\|v_i - v\| \to 0$.

טענה: אם V מרחב וקטורי עם

שתי נורמות $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$

אז שני התנאים הבאים שקולים

1. לכל סדרה (v_i) ו- $v \in V$

$\|v_i - v\|_1 \to 0$ אמ"מ $\|v_i - v\|_2 \to 0$

2. יש קבוע $c>0$ כך שלכל

$v \in V$, $\frac{1}{c}\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le c\|v\|_1$

עובדה: כל הנורמות על $\mathbb{R}^d$

הן שקולות.

אפשר לקחת נורמה $\|\cdot\|$ על $\mathbb{R}^d$

ולהגדיר את הדיוק היחסי

על ידי $\frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$

נניח ש $T: U \to V$ מעתקה

ליניארית ובמרחבים נורמות $\|\cdot\|_U$

על U ו- $\|\cdot\|_V$ על V.

רוצים לחשב את ההשפעה של

הפעלת T על הדיוק היחסי:

$$\frac{\|Tx^*-Tx\|_V}{\|Tx\|_V} = \frac{\|T(x^*-x)\|_V}{\|T(x)\|_V} =$$

$$\frac{\|T(x^*-x)\|_V \cdot \|x^*-x\|_U \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V \, \|x^*-x\|_U \, \|x\|_U} \le \frac{\|T\| \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V} \cdot \frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$$

טענה: תהי $T: U \to V$ העתקה לינארית

בין שני מרחבים נורמים, נגדיר

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_V}{\|x\|_U} = \sup_{\|x\|_U = 1} \|T(x)\|_V$$

$\underline{\underline{Hom(U,V)}}$ — העתקות הלינאריות

החסומות. $\|T\|$ — נורמה ל־T

במרחב הזה.

נגדיר מספר המצב של T

בנקודה x הוא:

$$\underline{\underline{cond(T)(x)}} = \frac{\|x\| \cdot \|T\|}{\|T(x)\|}$$

אם T הפיכה, ונרשום $T^{-1}(y) = x$

$\mathrm{cond}(T) :=$

$$\sup_x \mathrm{cond}(T)(x) = \|T\| \cdot \|T^{-1}\|$$ זכור

נניח ויש לפתור משוואה

$Tx=b$, מה הטעות היחסית

שנובעת עקב הקירוב של b

על ידי b^*?

<u>מטריצת הילברט!</u>

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

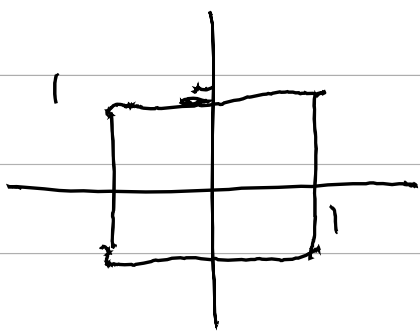
$$\mathrm{cond}_2 T_n = \underbrace{\frac{(\sqrt{2}+1)^{4n+4}}{2^{15/4} \cdot \sqrt{\pi n}}}$$

העתקה לינארית $T: U \to V$

$U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

אזי T מיוצגת ע"י

מטריצה: $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$.



$$\|T\| = \max_{j} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{\mathrm{cond}(f)(x) = \frac{|x| \, |f'(x)|}{|f(x)|}}}$$

$x = 17$

$y = -17 + \varepsilon$

$2 \cdot 17 = 34$

$T : U \to V \quad . \quad V, \|\cdot\|$

$$\underline{\underline{\|T\|}} = \sup_{|u|=1} \|Tu\|$$

$$\mathrm{cond}(T)(u) = \underline{\underline{\frac{\|u\| \cdot \|T\|}{\|Tu\|}}} \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T\|$$

$$\|$$

$$\mathrm{cond}(T)$$

[1.1] $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad$ תרגיל 3

$f(x,y) = x + y$

$$\underline{\underline{\mathrm{cond}(f)(x,y)}} = \frac{\|\langle x,y \rangle\| \cdot \|f\|}{|x+y|} = \frac{\max(|x|,|y|) \cdot 2}{(x+y)}$$

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

2. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x^* \in \mathbb{R}^n, \; x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\|f(x^*) - f(x)\|}{\|f(x)\|} =$$

$$\frac{\|f(x^*) - f(x)\| \cdot \|x\| \cdot \|x^* - x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x\| \, \|x^* - x\|} \approx$$

$= \varepsilon$

$$\frac{\|df(x)(x^* - x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x^* - x\|} \cdot \varepsilon \leq \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|} \cdot \varepsilon$$

הגדרה:

$$\mathrm{cond}(f)(x) = \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|}$$

דרך נוספת: לחשוב על $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

כאוסף m פ' $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

ולחשב את ההתניה היחסית של

f_i כפו' של x_j, נקבל

מטריצה

$$\left(\text{cond}_{x_j}(f_i)\right)_{i,j}$$

3 דוגמא:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$df=\begin{pmatrix}-\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2}\\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2}\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{cond}(f)(x,y) = ? \quad \frac{\max(|x|,|y|)\cdot \max(\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2})}{\max(|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}|, |\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|)}$$

$$f_1(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

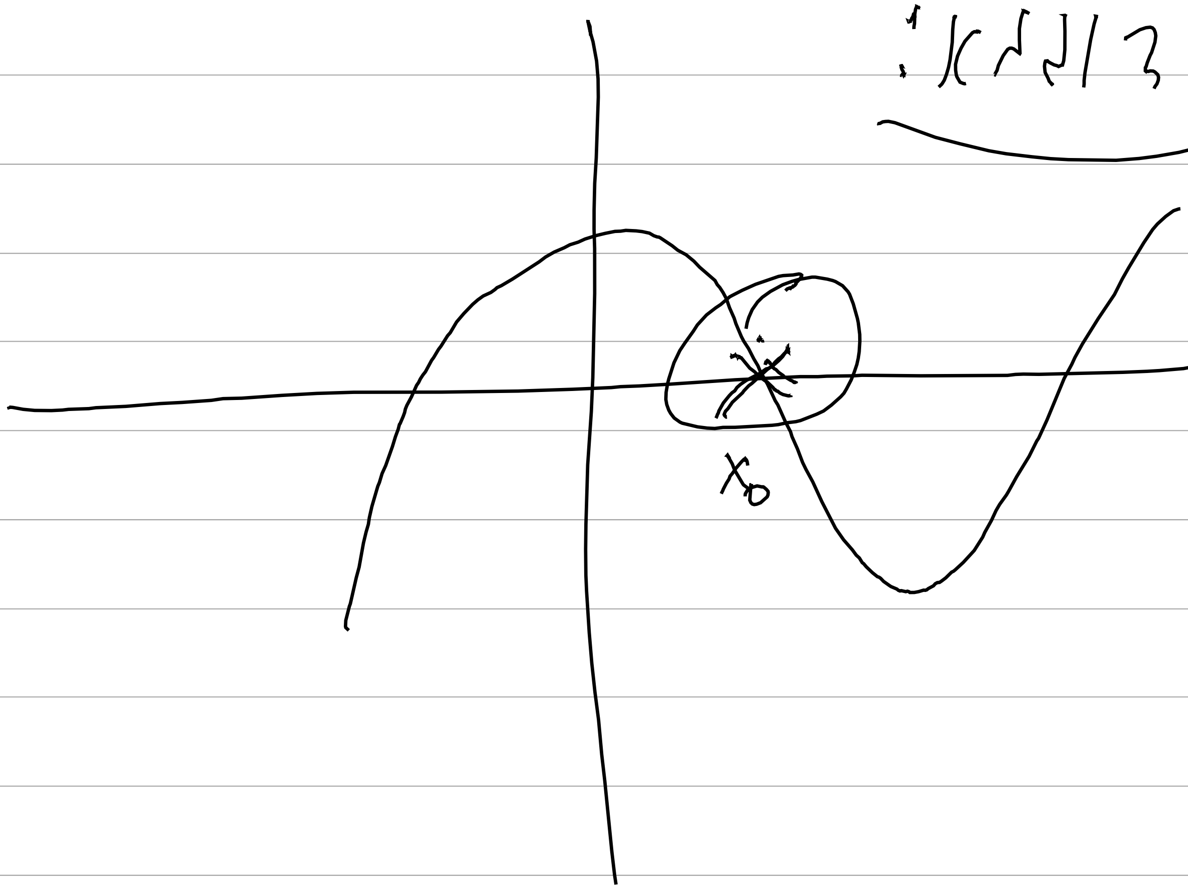
$$\mathrm{cond}_x(f_1) = \frac{|x|\cdot\frac{1}{x^2}}{|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}|} \qquad \frac{|y|\cdot\frac{1}{y^2}}{|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}|}$$

$$\parallel$$

$$\frac{|y|}{|x+y|} \qquad \frac{|x|}{|x+y|}$$

$$\mathrm{cond}_x(f_2) = \frac{|x|\cdot\frac{1}{x^2}}{|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|} = \frac{|y|}{|x-y|} \qquad \frac{|y|\ \frac{1}{y^2}}{|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|} = \frac{|x|}{|x-y|}$$

דוגמא:



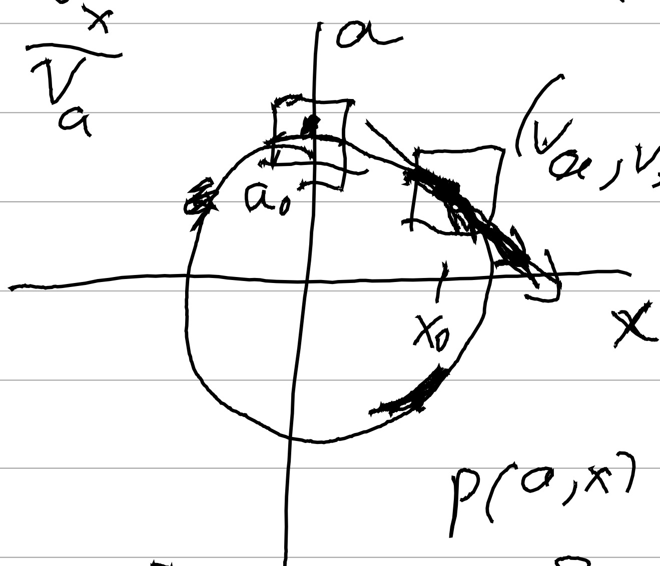
קוקצים דרגה n

$$P_n(\bar{a}, X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

$P_n(\bar{a^0}, x_0) = 0$ $\quad$ x_0 , $\bar{a^0}$

$\underline{F(x,y) = x^2 + y^2}$

$\frac{V_x}{V_a}$



$a_0 = 1$

$x = 0$

$p(a,x)$ $\quad$ $\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = 2x}$

$a^2 + x^2 = 1$ $\quad$ $\underline{\underline{a^2 + x^2 - 1 = 0}}$

$x = x(a)$ $\quad$ $p(a, x(a)) = 0$

$x_0 = x(a_0)$ $\quad$ $x = \sqrt{1 - a^2}$

$$F(a, x) = 0 \qquad F(a_0, x_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a_0, x_0) \neq 0 \Rightarrow x = x(a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = -\frac{\partial F}{\partial a} \Big/ \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$df \cdot \begin{pmatrix} v_a \\ v_x \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_x \end{pmatrix} = 0$$

$$v_a \frac{\partial f}{\partial a} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$x = x(\bar{a})$$

$$\operatorname{cond}_{a_i}(x) = \frac{|a_i| \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial a_i}\right|}{|x|} = \frac{|a_i| \cdot |x^i|}{|x| \cdot |p'(x)|}$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_i} = -\,{}^{\partial p}/_{\partial a_i} \Big/ {}^{\partial p}/_{\partial x} =$$

$$x^i \Big/ \underline{\sum j a_j x^{j-1}} = x^i \big/ p'(x)$$

הדוגמה של וילקינסון

$$p(x) = (x-1) \ldots (x-n)$$

השגיאה היחסית:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f^*: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$

$f(x)$ $\qquad$ $f^*(x^*)$

הנחה: $f^*(x^*) = f(x')$ לערך כלשהו x'

$$\frac{|f^*(x^*) - f(x)|}{|f(x)|} = \frac{|f(x') - f(x^*) + f(x^*) - f(x)|}{|f(x)|} \le$$

$$\frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x)|} + \frac{|f(x^*) - f(x)|}{f(x)}$$

$$\frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x)|} \approx \frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x^*)|} \le$$

$$\underbrace{\mathrm{cond}(f)(x^*)}_{\mathrm{cond}(f)(x)} \cdot \boxed{\frac{|x' - x^*|}{|x^*|}}$$

מס׳ המצב של האלגוריתם f^*

הינו

$$\mathrm{cond}(f^*)(x^*) = \inf_{f(x') = f^*(x^*)} \frac{|x' - x^*|}{|x^*|}$$

$$\mathrm{cond}(f)(x)\left(\frac{|x - x^*|}{|x|} + \mathrm{cond}(f^*)(x^*)\right)$$

קירובים לפונקציות ואינטרפולציה

$f: X \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) פונקציה רציפה

רוצים לקרב אותה ע"י **פונקציות פשוטות**,

A מרחב וקטורי של פונקציות על מרחב "גיאומטרי" X. למשל

X – תת-קבוצה סגורה וחסומה ב-$\mathbb{R}^n$

X – קבוצה סופית

$A = C(X)$ פונקציות רציפות מ-X ל-$\mathbb{R}$ או ל-$\mathbb{C}$.

$\mathcal{A} \subseteq P$ תת מרחב של הפונקציות

שבעזרתן מקרבים.

למשל: P - פולינומים.

מה צריך לקרב? למדוד את

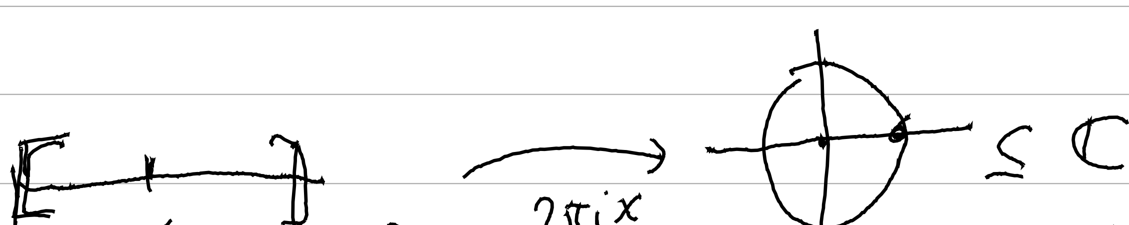
האיבר הקרוב ביותר ב-P

לפונקציה $f\in A$ ביחס לנורמה נתונה

$\|\cdot\|$ על A.

יהי $X=$ המעגל, הקטע $[0,1]$

שבו זיהינו את $1,0$.



$f(x)=e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i\sin 2\pi x$

י. מרחב עם $\mathbb{C}$ בערכים על ל'ד'

$\cos(2\pi nx)$ ו- $\sin(2\pi nx)$ הכן ולגרה

$n\in\mathbb{Z}$

(סגור יחסי כפל)

$\{e^{2\pi i nx}\}$

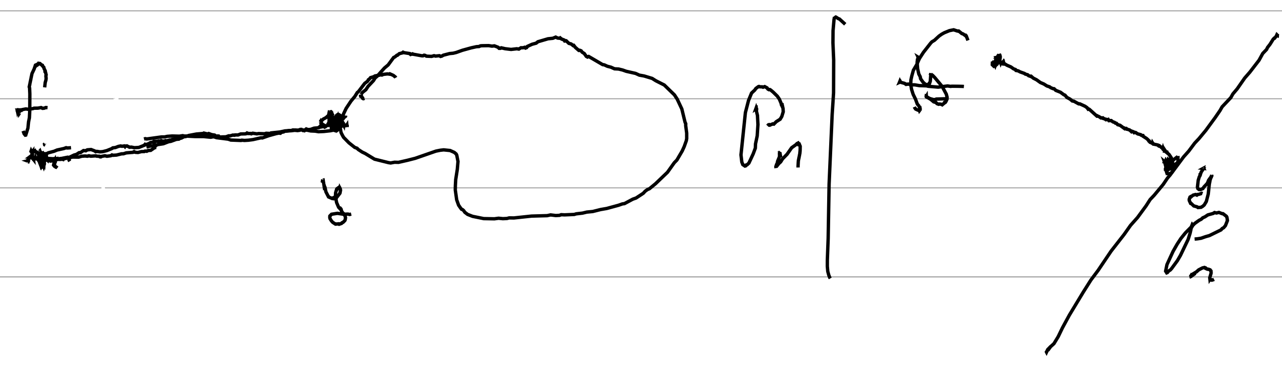
$P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \dots$, $P = \bigcup P_i$

תא' מרחב'ב ממי'מי 0 לפ'. רידי:

לכל $f\in A$ ולכל $\varepsilon>0$ יש n

כך ש- $d(f,P_n)<\varepsilon$

$$d(f,P_n) = \inf_{y\in P_n} d(f,y) = \inf_{y\in P_n} \|f-y\|$$



על $C(X)$ יש נורמה טבעית

נורמת הסופרימום:

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$$

<u>משפט סטון-ויירשטראס:</u> אם

$P \subseteq C(X)$ תת-אלגברה (סגורה תחת

כפל, מכילה את הפונקציות הקבועות)

ולכל $x \neq y$ יש $p \in P$

כך ש- $p(x) \neq p(y)$ ("מפרידה" P)

(נקודות) אז P צפופה ב-$C(X)$

<u>דוגמא:</u> $X=[a,b]$ ו- P פולינומים

במשתנה אחד. אז $P \subseteq C(X)$ תת-

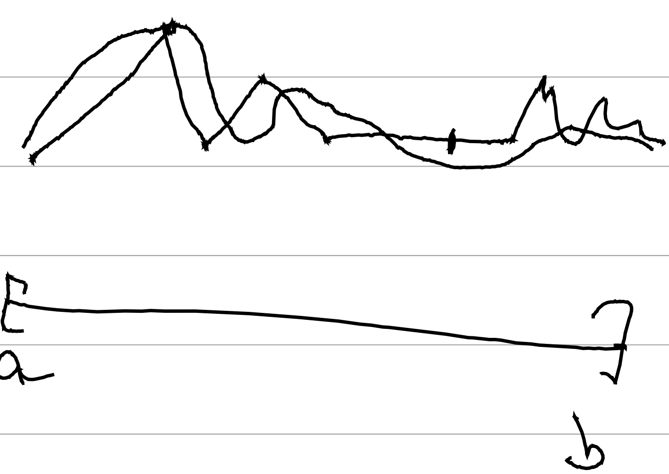
אלגברה שמפרידה נקודות ולכן צפופה

P צפופה ב-$C(X)$: לכל f ב-$C(X)$

ולכל $\varepsilon>0$ יש $p\in P$ כך ש-

$\|f-p\|<\varepsilon$

כלומר לכל $x\in X$ $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.



במקרה המרוכב, P צריכה להיות

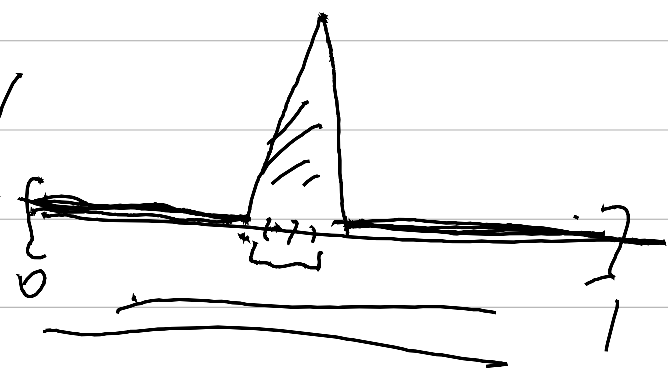
סגורה תחת הצמדה

דוגמא: כל פונקציה רציפה

C ניתנת לקרב ע"י

פונקציות טריגונומטריות:

מש

$\sup\Big($  $\Big) = 1$

$\mathbb{R}^n$ לכל $1 \le p \le \infty$ יש נורמה $\|\cdot\|_p$

$\|\bar{x}\|_\infty = \max(|x_i|)$

$\|\bar{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$ $\quad 1 \le p < \infty$

טענה X קבוצה סגורה נורמה .
הפונקציה ביחס $\|\cdot\|_\infty$

נניח ש- X סגורה או מוגבלה
קרציה של רק עם סגורה ב-$\mathbb{R}^n$.
(זה מרחב סופי המימד מידע קודל)

נגדיר $\|\cdot\|_2 : C(X) \to \mathbb{R}$

על ידי (נורמת L_2).

$$\|f\|_2 = \sqrt[2]{\int_X |f|^2}$$

אם $\underline{X=\{1,\dots,n\}}$ עם מנייה.

זאת הנורמה L_2 הקודמת

בנוסף יותר כללי, אפשר לקבוע

פונקציה חיובית $w : X \to \mathbb{R}$ ולהגדיר

$$\|f\|_{w,2} = \sqrt[2]{\int_X |f|^2 \cdot w}$$

$$\|f\|_2^2 = \int_X |f|^2 \le \sup_X |f|^2 \cdot \boxed{\int_X 1} =$$

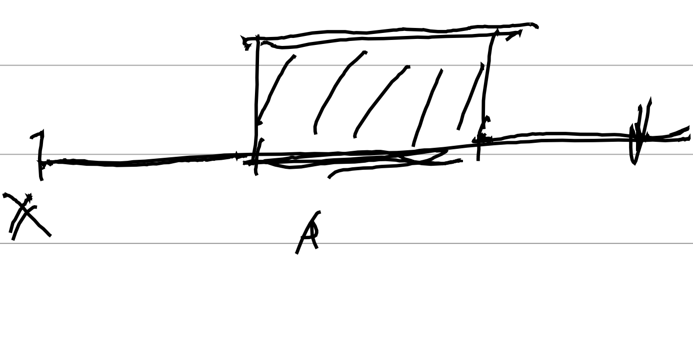
$$\|f\|_\infty^2$$

הרי ורציפות צפיפות לבג'

הדיפרנציאליות.

X $\qquad f: X \to \mathbb{R}$

$A \subseteq X \qquad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$



$\int_X 1_A =$ המדה של A

בקבוצה סופית X ספירת נקודות
נותנת מידה ~

$f: X \to \mathbb{R}$ $\quad$ $\int_X f = \sum_{x \in X} f(x)$

n-יה (=) $f: X \to \mathbb{R}$ $\quad$ $X = \{1, \dots, n\}$

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |f(i)|^p}$$

יהי V מרחב וקטורי מעל

אם $k = \mathbb{R}$, מכפלה פנימית על V

היא בילינארית $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to k$

כך ש:

1. לכל $u\in V$, הפ' $v\mapsto\langle v,\underline{u}\rangle$

היא לינארית

2. לכל $u,v\in V$, $\underline{\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}}$

ולכן לכל $u\in V$, $\langle u,u\rangle\in\mathbb{R}$

3. אם $u\neq 0$ אז $\langle u,u\rangle>0$

ע"ב $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על V

אז הפונקציה $v\mapsto\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$

היא נורמה של V.

במקרה הממשי, לכל $u,v\in V$

$$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=$$

$$\|u\|^2+\|v\|^2+\underline{2\langle u,v\rangle}$$

הנורמה מגיעה ממכפלה פנימית

אם / רק אם

$$(u,v) \mapsto \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}$$

היא מכפלה פנימית.

עבור $p=2$, נורמת $\|\cdot\|_2$

על $C(X)$ היא

$$(u,v) \mapsto \int_X u \cdot \bar{v}$$

באמצעות מכפלה פנימית ניתן

לדבר על זוויות. בפרט, אורתוגונליים

u,v הם ניצבים אם $\langle u,v \rangle = 0$.

אזי $v_1,\dots,v_n$ ניצבים בזוגות

אזי

$$\|\sum a_i v_i\|^2 = \sum a_i^2 \|v_i\|^2$$

(הוכחה של המשפט שהבטחנו).

נניח ש- A קבוצת הפונקציות

הממשיות

הרציפות של X, ו- $P=\cup P_i$

תת-מרחב, ונתונה מכפלה פנימית

של A. נניח שבחרנו בסיס

$\{\pi_i\}$ ל- P_n [זכרון תאכים]

ו- $f \in A$.

$T(c_1, \dots, c_m) =$

$$\|f - \sum c_i \pi_i\|^2 = \langle f - \sum c_i \pi_i , f - \sum c_i \pi_i \rangle =$$

$$\|f\|^2 - 2 \sum c_i \langle f, \pi_i \rangle + \sum c_i c_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle$$

המינימום היחיד של T מתקבל
במקום שבו כל הנגזרות של
T לפי ה-c_i הן 0.

$$0 = \frac{\partial T}{\partial c_k} = -2 \langle f, \pi_k \rangle + 2 \sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle$$

$$\sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle = \langle f, \pi_k \rangle$$

מקבלים מערכת לינארית

$A \tilde{c} = b$

כאשר $b_i = \langle f, \pi_i \rangle$

ו- $A = (\langle \pi_i, \pi_j \rangle)_{i,j}$

A מטריצה סימטרית וחיובית:

$(x,y) \mapsto \underline{\underline{\langle x, Ay \rangle}} \leftarrow$ מכפלה פנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^n$

היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$

כלומר, לכל $\bar{x} \neq 0$ אז

$$\underline{\underline{\bar{x} \cdot A \bar{x} > 0}}$$

כי

$$\bar{x} \cdot A \bar{x} = \sum_{i,j} x_i x_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle = \underline{\underline{\left\| \sum x_i \pi_i \right\|^2}}$$

$\{\pi_i\}$ בסיס ולכן $\sum x_i \pi_i \neq 0$ אם $\bar{x} \neq 0$.

במקרה, A הפיכה ולכן יש פתרון למערכת.

$$(\pi_i)_{i \geq 0}$$

$$A = \left(\langle \pi_i, \pi_j \rangle \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

$$A\bar{c} = \bar{b} \qquad \bar{b} = \langle f, \pi_i \rangle$$

כלומר: $\pi_i = t^{i-1}$ על $[0,1]$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g \, dt$$

$$\langle \pi_{i+1}, \pi_{j+1} \rangle = \int_0^1 t^{i+j} \, dt = \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{i+j+1}$$

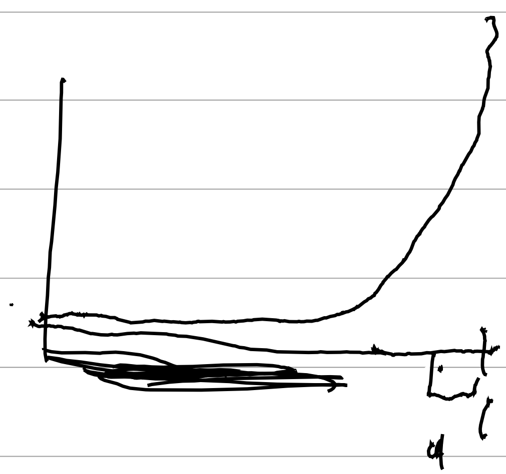
$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

קוויינלי: הבעיה $H_n \bar{c} = b$

זו בעיה (טעות קטנה ב-b

עלולה לגרום לטעות גדולה ב-$\bar{c}$).

t^i $[0,1]$



t^i

פתרון: לעבוד עם בסיס

אורתוגונלי (או אורתונורמלי):

$\langle \pi_i, \pi_j \rangle = 0$ $\quad i \neq j \quad (\langle \pi_i, \pi_i \rangle = 1)$

$$f = \sum \underbrace{a_i} \pi_i$$

$$\langle f, \pi_i \rangle = a_i \langle \pi_i, \pi_i \rangle$$

תהליך גרם-שמידט: אם

$\pi_1, \pi_2, \dots$

נמצא לנו מזה בסיס אורתוגונלי

יהי:

$$\hat{\pi}_1 = \pi_1$$

$$\hat{\pi}_{k+1} = \pi_{k+1} - \sum \frac{\langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2} \hat{\pi}_i$$

$$\langle \hat{\pi}_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle - \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = 0$$

$$P = \bigcup P_i \qquad P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots$$

$$P_i = \{ \text{פולינומים מדרגה } \le i \}$$

$$\dim(P_i) = i$$

$$\operatorname{span}(\langle \pi_i \rangle_{i \le k}) = \operatorname{span}(\langle \hat{\pi}_i \rangle_{i \le k})$$

$\hat{\pi}_i \in P_i$ | פולינום מתוקן מדרגה i.

$$\underline{\hat{\pi}_{i+1}} = t\hat{\pi}_i - \alpha_i \hat{\pi}_i + \sum_{j=0}^{i-1} b_j \hat{\pi}_j =$$

$$(t - \alpha_i)\hat{\pi}_i + \beta_i \cdot \hat{\pi}_{i-1} + \sum_{j=0}^{i-2} b_j \hat{\pi}_j$$

$$\langle \hat{\pi}_{i+1}, \hat{\pi}_i \rangle = \langle (t-\alpha_i)\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle \Rightarrow$$

$$\overset{\shortparallel}{0} \qquad \alpha_i \cdot \| \hat{\pi}_i \|^2 = \langle t\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2}$$

$$0 = \langle (t-\alpha_i)\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle + \beta_i \|\hat{\pi}_{i-1}\|^2 \Rightarrow$$

$$\beta_i = - \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} =$$

$$- \frac{\langle \hat{\pi}_i , t\hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} = - \frac{\|\hat{\pi}_i\|^2}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2}$$

$$\hat{\pi}_{i+1} = (t-\alpha_i)\hat{\pi}_i + \beta_i \hat{\pi}_{i-1}$$

הערה: אם הקטע שאנחנו עליו

הוא מהצורה $[-a, a]$

והמשקל הוא סימטרית $W(t)=w(-t)$

$$\left[\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\cdot \overline{g(t)}\, \underline{w(t)}\,dt\right]$$

אז π_k פ' זוגית עבור k

זוגי ופ' אי-זוגית ל-k אי זוגי.

ולכן במקרה הזה $\alpha_i=0$.

דוגמא: בקטע $[-1,1]$ ו-$w\equiv 1$

לז'נדר (נוסחת רודריגס)

$$\pi_k(t)=\frac{k!}{\underline{(2k)!}}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k$$

כדי להראות ש- π_k אורתו'

ל- π_i עבור $i<k$, מספיק להראות

$$0=\langle \pi_k, t^i\rangle = \underline{\underline{\int_{-1}^{1} \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k \cdot t^i\,dt}} =$$

$$\ldots = 0$$

$$\pi_0 = 1 \quad , \quad \pi_1 = \frac{1}{2}(t^2-1)' = t$$

$$\pi_2 = \left[\left((t^2-1)^2\right)'' \cdot \frac{2}{4!}\right. = \frac{1}{12}\cdot\left((t^2-1)^2\right)''$$

$$\underline{\pi_k = t^k + \mu_k t^{k-2}} + \ldots$$

$$\pi_{k+1} = t\cdot\pi_k + \beta_k\cdot\pi_{k-1} \Rightarrow \boxed{\beta_k} = \frac{\pi_{k+1} - t\pi_k}{\pi_{k-1}}$$

$$\beta_k = \mu_k - \mu_{k+1}$$

$$\mu_k = \frac{k(k-1)}{2(2k-1)} \Rightarrow$$

$$\beta_k = \frac{1}{4-k^{-2}}$$

נושא: פולינומים טריגונומטריים

כ׳ מחזוריות עם מחזור 1

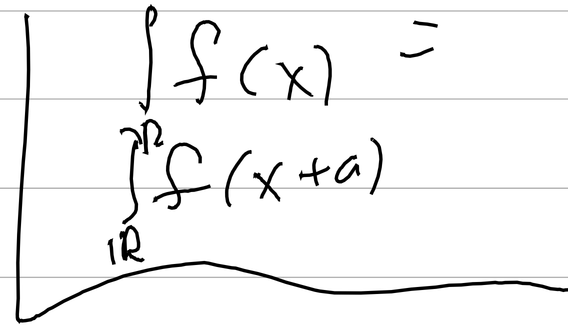
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(t+1)=f(t)$ לכל t.

$$\Updownarrow$$

$f:[0,1)\to\mathbb{R}$ $\quad f(0)=f(1)$

$$i\sin(2\pi t)+\cos(2\pi t)=e^{2\pi i t}$$

(=)



$$\int_{\mathbb{R}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)$$

$\underline{\underline{g : S^1 \to \mathbb{C}}}$

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

$$E : [0,1] \to S^1$$

$$E(t) = e^{2\pi i t}$$

$g : S^1 \to \mathbb{C} \rightsquigarrow g \circ E$ פ' מחזורית

$$\int_{S^1} g := \int_0^1 g \circ E \, dt$$

אם $z, w \in S^1$ אז $z \cdot w \in S^1$

נקבע $a \in S^1$ ונגדיר

$$g_a(z) = g(a \cdot z)$$

$\int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g$ אז

תרגיל: נניח ש- $g: S^1 \to \mathbb{C}^*$

ש מקיימת: $g(z\cdot w)=g(z)\cdot g(w)$

אז א. אם $g(z)=1$ לכל z

אז $\int_{S^1} g = 1$

ב. אחרת $\int_{S^1} g = 0$

הוכחה: א'. קל

ב. יש $a\in S^1$ כך ש- $g(a)\neq 1$

$g_a(x)=g(ax)=g(a)\,g(x)$

אז

$$\int_{S^1} g = \int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g(a)\cdot g = \underbrace{g(a)}_{\neq 1} \int_{S^1} g$$

אז $\int_{S^1} g = 0$.

לכל $n\in\mathbb{Z}$ נגד' $g_n(x)=x^n$

תרגיל: הוכיחו את התכונות של הפונ'

1) $g_n\cdot g_m=g_{n+m}$ 2) $\overline{g_n(x)}=g_{-n}(x)$

כלל שלא / קשור למכפלה: פנימית

על $\mathbb{C}(S^1)$ נגד'

$$\langle f,g\rangle=\int_{S^1} f\cdot\overline{g}$$

כבר הוכחנו שה-$\mathbb{R}$: g_i מהווה

מערכת אורתונורמלית.

נדבר על השאלה שנפרנו איך

ה-g_i סגור רווח כפל (שאלת השלמות).

הקבוצה הזו נקראות פולינומים טריגונומטריים.

נשים לב ש-

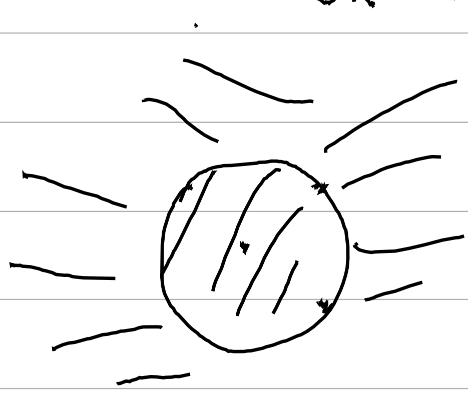
$$0 = \oint_{S^1} x^n = \int_0^1 e^{2\pi i n t}\,dt = \int \cos 2\pi i n t + i \sin 2\pi n t = 0$$

תרגיל:

$$\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$$

$x \sim y$ אם $x = y$ או

$$X = \mathbb{C}^*/\sim \qquad g_n\left(\tfrac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} \sim x^n = g_n(x) \qquad x = \frac{1}{y}$$



$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^* \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C}^* \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\bar{g}_n"] & X \end{tikzcd}$$

$\pi(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \in \mathbb{C}$

$\pi(x) = \pi(\frac{1}{x})$

אם $z \in S^1$ אז

$\pi(z) = Re(z)$

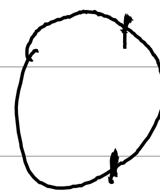
אז

$\pi(S^1) = [-1,1] = X_0$

$\bar{g}_n\left(\overbrace{\frac{x+\frac{1}{x}}{2}}^{\pi(a)}\right) = \frac{x^n + \frac{1}{x^n}}{2} = \pi(g_n(\cancel{x}))$

אם h פ' על X רציפה

$* = \int_{X_0} h = \int_{S^1} h \circ \pi = \int_{S^1} h\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)$



$\int_0^1 h(Re(e^{2\pi i t}))dt = \int_0^1 h \cos(2\pi t) dt$

$y = \cos(2\pi t) \quad dy = -2\pi \sin(2\pi t) dt =$

$$dy = -2\pi \sqrt{1-y^2}\, dt$$

$$x = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} h(y) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$

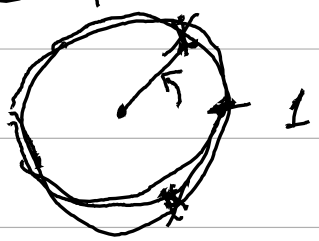
ש/כ

~~אם~~ ה- $\bar{g}_n$ נקראים פולינומי צ'בישב. הפתרון שהם מערכת אורתונורמלית עבור

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f\cdot g \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$

$$\bar{g}_n(\cos 2\pi t) = \cos 2\pi n t$$

$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$



$$\boxed{\begin{gathered} \sin 2\pi t = \sqrt{1-y^2} \\ 0 \le t \le \tfrac{1}{2} \end{gathered}}$$

$\downarrow p$

$X = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$

$p(z) = \dfrac{z + \frac{1}{z}}{2} \quad \left(= \dfrac{z + \bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(z) \text{ for } S^1 \right)$

$f : X \to \mathbb{C}$

$$\boxed{\begin{gathered} y = \cos 2\pi t \\ dy = -2\pi \sin 2\pi t \, dt \end{gathered}}$$

$\int_X f := \int_{S^1} f \circ p = \int_0^1 f \circ p \circ e^{2\pi i t} \, dt =$

$\int_0^1 f(\cos 2\pi t) \, dt = 2 \int_0^{1/2} f(\cos 2\pi t) \, dt =$

$$2\int_{1}^{-1} f(y)\cdot\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(y)\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "\varphi_n"', "x \mapsto x^n"] \arrow[d, "p"] & S^1 \arrow[d, "\cancel{p}"] \\
X \arrow[r, "T_n"'] & X
\end{tikzcd}$$

$$\varphi_n(x) = x^n$$

$$T_n\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) = \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2}$$

$$\underline{\int_X T_n} = \int_{S^1} T_n \circ p = \underline{\int_{S^1} \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2}} =$$

$$\begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{S^1} \varphi_n \bar{\varphi}_m =$$

$$\int \varphi_n \varphi_{+m} = \int \varphi_{n-m}$$

$$\left(T_n \cdot T_m\right)\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = \left(\frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{2}\right)\left(\frac{z^m + \frac{1}{z^m}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z^{m+n} + \frac{1}{z^{m+n}} + z^{n-m} + z^{m-n}}{2}\right) =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(T_{n+m}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) + T_{n-m}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\right)}$$

$$\int T_n \cdot T_m = \frac{1}{2}\left(\int T_{n+m} + \int T_{n-m}\right) =$$

$$\int \begin{cases} 1/2 & n = \pm m \neq 0 \\ 1 & n = m = 0 \\ 0 & |n| \neq |m| \end{cases}$$

$$T_n = T_{-n}$$

$$T_0 = 1 \qquad T_0\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = 1$$

$$T_1\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} \qquad T_1(z) = z$$

$$T_n \cdot T_1 = \frac{1}{2}\left(T_{n+1} + T_{n-1}\right) \Rightarrow$$

$$T_{n+1}(z) = 2z\,T_n(z) - T_{n-1}(z)$$

$$T_2(z) = 2z^2 - 1$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$$

$$\cos(nt) = T_n(\cos t)$$

1. T_n ממעלה n, המקדם [illegible]

z^n של 2^n

אינטרפולציה

נתונים ערכי פונקציה f

במספר סופי של נקודות

$c_0, \dots, c_n \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

רוצים לקרב את f על ידי

פולינום ממעלה n.

המרחב של פ' ממשיות על $c_0, \dots, c_n$

ממימד $n+1$, עם בסיס

$$\delta_i(c_j) = \begin{cases} 1 & j=i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

כולם ממעלה $\leq n$

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x-c_j)}{\prod_{j\neq i}(c_i-c_j)} \in P_n$$

$$f(c_i) = f_i \Rightarrow$$

$$f \sim \sum f_i \, l_i = \Pi_{\bar{c}}(f)$$

$$\Pi_{\bar{c}} : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$$

$$\sup_{\|f\|=1} \|\Pi_{\bar{c}}(f)\| = \sup_{\|f\|=1} \left| \sum f_i \, l_i \right| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \|l_i\|$$

$$\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|$$

$\hat{p}_n$ – הקירוב הכי טוב ל-f

ב-$\mathbb{P}_n$

$$\|f-\Pi_{\bar{c}}(f)\| = \|f-\hat{p}_n-\Pi_{\bar{c}}(f-\hat{p}_n)\|$$

$$\le \|f-\hat{p}_n\| + \|\Pi_{\bar{c}}\|\,\|f-\hat{p}_n\| =$$

$$\boxed{(1+\|\Pi_{\bar{c}}\|)\,\|f-\hat{p}_n\|}$$

הערכת הטעות בצורת הנגזרת:

f פ' ~~רציפה~~ ב-$C^{n+1}[a,b]$

(גזירה ברציפות $n+1$ פעמים)

$$(f-\Pi_{\bar{c}}(f))(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)$$

(תלוי ב-x)

למה: יש ξ שעבורו ש

נכון ($f \in C^{n+1}[a,b]$)

הוכחה: נקבע $c_i \neq x$

$$G(t) = f(t) - \pi_c(f)(t) - \frac{f(x) - \pi_c(f)(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)} \prod_{i=0}^{n}(t-c_i) \qquad (*)$$

השורשים של G הם לפחות

c_i, $i=0,\dots,n$ ו-x.

משפט רול: ל-$G^{(n+1)}$

יש שורש ξ.

נגזור את (*) $n+1$ פעמים:

$$G^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)! \cdot \frac{f(x) - \Pi_c(f)}{\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)}$$

נציב $t=\xi$.

$\xi \in [a,b]$

(נוכל להניח ש-$[a,b]$

מכילה [illegible] את x, c_i)

הערות: לנסות למזער!

○ אם כל $\vec{c}^{(n)} \in [a,b]$ של נקודות

צ'בישב הפולינום יתן ולפולינומליות:

$\Pi_{\vec{c}^{(n)}}(f) \to f$

עבור פונקציות f מספיק חלקות.

$$\|f - \Pi_{\vec{c}^{(n)}}(f)\| \le \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \prod_i (x - c_i^{(n)})$$

$$\le \frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1}$$

$M_{n+1}(f)$ חסם על הנגזרת ה-$n+1$ של f ב-$[a,b]$

אנו רוצים ש-

$$\underline{\frac{M_n(f)\cdot(b-a)^n}{n!}} \to 0$$

$\bar{c}$ נקודות אינטרפולציה $c_i \in [a,b]$

$$\|f - \pi_{\bar{c}}(f)\| \le \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot \prod_i (x-c_i)\right| \le \frac{M_{n+1}\cdot(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

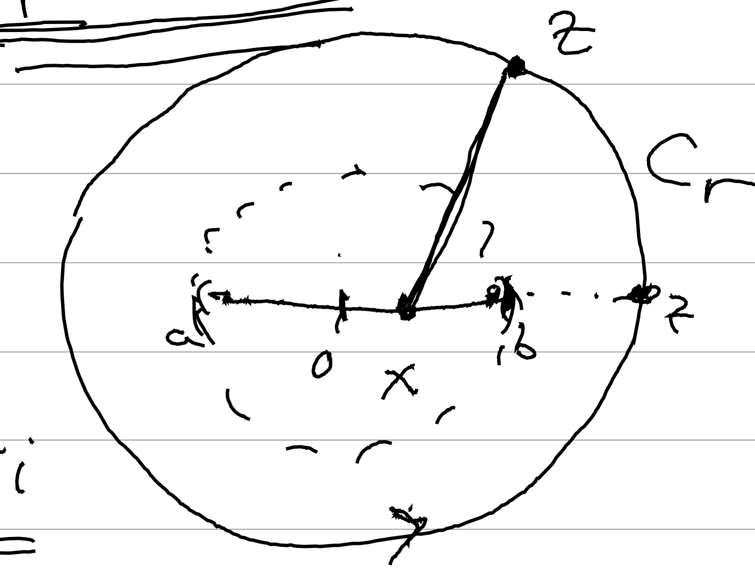
$$M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$$

f פ' מרוכבת אנליטית

משפט ליוביל: אם f אנליטית

צ"ל

$$\underline{f^{(k)}(x)} = \frac{k!}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(z)}{(z-x)^{k+1}}\,dz$$



$a = -b$

$$\int_{C_r} \frac{1}{z} = 2\pi i$$

$\gamma(t) = re^{2\pi i t}$

$\|z-x\| \geq r-b$

$$\|f^{(k)}(x)\| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{(r-b)^{k+1}} \cdot 2\pi r$$

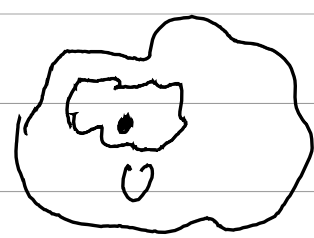
$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$\frac{u_n \cdot (2b)^n}{n!} \le \frac{\frac{n! \cdot \cancel{u_0}\, M}{(r-b)^{n+1}} \cdot r \cdot (2b)^n}{n!} =$$

$$\frac{M \cdot r}{r-b} \cdot \left(\frac{2b}{r-b}\right)^n \longrightarrow 0$$

$$\frac{2b}{r-b} < 1$$



$\subset \mathbb{C}$

$$r > 3b$$

$$\frac{1}{z}$$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(f \circ \gamma)'$?

$\gamma : (a, b) \to \mathbb{C}$

מהו הפולינום המתוקן ממעלה

n שנורמת $\|\cdot\|_\infty$ שלו (על $[-1,1]$)

מינימלית?

אם p פולינום מתוקן ממעלה:

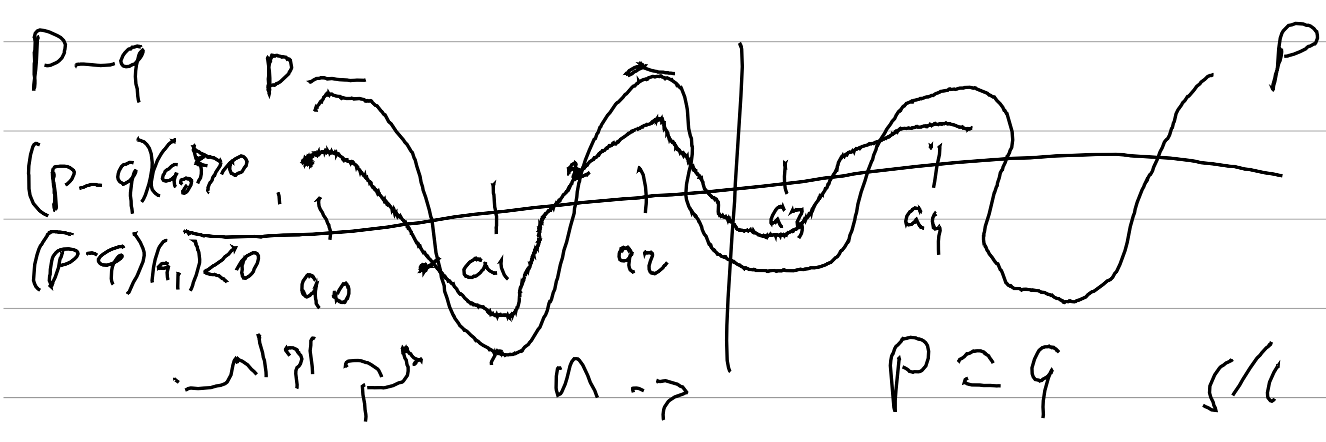
n כך ש- $\|p\|_\infty = |p(a_i)|$ עבור

$p(a_i) = -p(a_{i+1})$

$n+1$ נקודות a_i של p

הוא הפולינום עם $\|p\|_\infty$ מינימלית

אחרת, נניח ש- $\|q\| < \|p\|$



אז $p-q$ ב-n נקודות.

טענה: פולינומי צ'בישף המתוקנים

מקיימים את הטענה:

$$T_n(\operatorname{Re} z) = \underline{\operatorname{Re}(z^n)}$$

$k = 0, \dots, n-1$

$x = \operatorname{Re} z$

$= T_n(x) = 0$

$\operatorname{Re} z^n$

$\Rightarrow$

$x = \cos\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)$

$z^n = \pm i$

$y = \cos\left(\pi \frac{k}{n}\right)$

$k = 0, \dots, n$

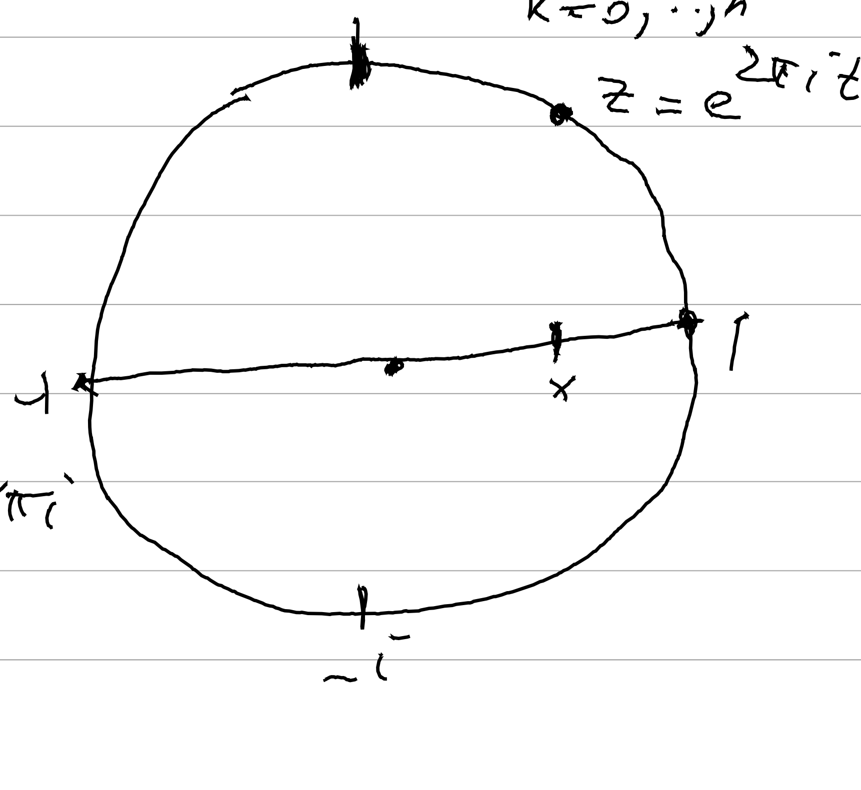
$z = e^{2\pi i t}$

$z^n = i \iff$

$e^{2\pi i n t} = i$

$2\pi i n t = \frac{\pi i}{2} + \cancel{2}k\pi i$

$\Rightarrow t = \frac{2k+1}{4n}$



המסקנה: המקדם המוביל של

T_n הוא 2^{n-1}

לכן $\tilde{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n$ פולי' מתוקן

ממעלה n, $\|\tilde{T}_n\| = \frac{1}{2^{n-1}}$ שמקבל

בנקודות $a_i = \cos(\frac{\pi i}{n})$

$n \geq i \geq 0$. עם סימנים מתחלפים

$\tilde{T}_n$ עם נורמה מינימלית

מינימלית בין הפולי' המתוקנים

ממעלה n - לכן c_i אם $\bar{C}^{(n)}$ ספרת

כ.י כסש של T_n אז

$$\|f - \Pi_{\bar{C}^{(n)}}(f)\| \le \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \cdot \|\tilde{T}_n\|_\infty =$$

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

$c_0, c_1, \ldots$ סדרה אינסופית

$p_0, p_1, \ldots \qquad \deg(p_i) \le i$.

δ_i

p_i

$$p_{i+1}(x) = p_i(x) + a_{i+1} \cdot (x - c_0) \cdot \ldots (x - c_i)$$

$$a_{i+1}(c_{i+1}-c_0)\dots(c_{i+1}-c_i)=f_{i+1}-p_i(f_{i+1})$$

$$a_{i+1}=\frac{f_{i+1}-p_i(f_{i+1})}{(c_{i+1}-c_0)\dots(c_{i+1}-c_i)}=$$

$$[c_0,\dots,c_{i+1}]f$$

$$[c_0,\dots,c_{i+1}]f=\frac{[c_0,\dots,c_i]f-[c_1,\dots,c_{i+1}]f}{c_{i+1}-c_0}$$

$\underline{c}=c_0,\dots,c_{i+1}$, $\hat{c}_j=c_0,\dots,\cancel{c_j},\dots,c_{i+1}$

ignore

$$p_{\underline{c}}(x)\overset{?}{=}p_{\hat{c}_{i+1}}-\frac{(x-c_0)}{c_{i+1}-c_0}\left(p_{\hat{c}_{i+1}}-p_{\hat{c}_0}\right)=:q(x)$$

$s/_i \quad 0 < j < i+1 \quad dc \quad {:}|'N' \quad 33$

$$q(c_j) = f_j = P_{\hat{c}}(c_j)$$

$$q(c_0) = P_{\hat{c}_{i+1}}(c_0) = f_0 = P_{\hat{c}}(c_0)$$

$$q(c_{i+1}) = P_{\hat{c}_{i+1}}(c_{i+1}) - (P_{\hat{a}_{i+1}}(c_{i+1})) -$$

$$P_{\hat{c}_0}(c_{i+1})) = P_{\hat{c}_0}(c_{i+1}) = f_{i+1} - P_{\hat{c}}(c_{i+1})$$

$c \quad f$

$c_0 \quad f_0$

$c_1 \quad f_1 \quad [c_0, c_1]f$

$c_2 \quad f_2 \quad [c_1, c_2]f \quad [c_0, c_1, c_2]f$

$c_3 \quad f_3 \quad [c_2, c_3]f \quad [c_1, c_2, c_3]f \quad [c]f$

$c_4 \quad f_4$

$$\boxed{[c_1, c_2, c_3]f} = \frac{[c_2, c_3]f - [c_1, c_2]f}{c_3 - c_1}$$

$\bar{c} = c_0, \ldots, c_i$

$$P_{\bar{c}}(x) = \underbrace{P_{\hat{c}_i}(x)}_{i} + [\bar{c}] f \cdot \prod_{j<i} (x - c_j)$$

$$\underline{\| P_{\bar{c}}(x)} - P_{\hat{c}_i}(x) \| = \| \boxed{[\bar{c}] f} \prod (x - c_j) \|$$

$$\leq \boxed{\frac{P_{\bar{c}}^{(i+1)}(\xi)}{(i+1)!}} \cdot \prod (x - c_i) \|$$

$$\underline{\underline{f}} \qquad \left.\begin{matrix} c_0, c_1, \dots, c_n \\ f_0, f_1, \dots, f_n \end{matrix}\right]$$

$$P_{\bar{c}}(x) = [\bar{c}]f \; x^n + \dots =$$

$$[\bar{c}]f\,(x - c_0)\cdots(x - c_n) + P_{\hat{c}_n}$$

$$\hat{c}_i = \{c_0, \dots, c_n\} \setminus \{c_i\}$$

$$[\bar{c}]f = \frac{[\hat{c}_0]f - [\hat{c}_n]f}{c_n - c_0}$$

$c_0, \dots, c_n$

$f_0, \dots, f_n$

$\underline{\underline{\bar{c}}} = 3 \cdot [1] + [3] + 2 \cdot [5]$

1	1	1	3	5	5	c_i
2	4	0	1	6	7	

$p(1) = 2, \quad p'(1) = 4, \quad p''(1) = 0$

$p(3) = 1, \quad p(5) = 6, \quad p'(5) = 7$

$p_{\bar{c}}(x) = ([\bar{c}]f) \cdot x^{4+\dots} + \dots$

$\hat{c}_i = \bar{c} - [c_i]$ [illegible] c [illegible] $[c_i]$

$\bar{c} = \sum n_i [c_i] \quad \deg(\bar{c}) = \sum n_i = n$

הגדרה: אם $c_i \neq c_j$ אז

$$[\bar{c}]f = \frac{[\hat{c_i}]f - [\hat{c_j}]f}{c_j - c_i}$$

הערה:

$$\bar{c} = \sum_{k=1}^{m} n_k [c_k]$$

$$n = \deg(\bar{c}) = \sum n_i$$

אינדוקציה על $N(\bar{c}) = n - m$

אם $n-m>0$ אז יש $n_k > 1$

$$d = d_\varepsilon = \bar{c} - [c_k] + [c_k + \varepsilon]$$

אם $\varepsilon > 0$ מספיק קטן אז

$$N(d) < N(\bar{c})$$

פונקציה

$$[\bar d]f = \frac{[\bar d_i]f - [\bar d_j]f}{d_j - d_i}$$

$[\bar c]f$ רציפה בכל ואת מתאודלת

ג: פונקצי במעבר הנשמה

מספיק להראות ש-

$$[(n-1)[c_0] + [c_0+\varepsilon]]f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} [n\cdot[c_0]]f$$

$$[c_0, c_0+\varepsilon]f = \frac{f(c_0+\varepsilon) - f(c_0)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f'(c_0)$$

$$P_{n[c_0]} = \sum \frac{f^{(k)}}{k!}(x-c_0)^k$$

$c_0 = c_1 = c_2$ $\qquad$ $c_5 = c_6$

$c_0 \quad f_0$

$c_1 \quad \cancel{f_0} = (f'' \quad [c_0, c_1]f = f_1$

$c_2 \quad \cancel{f_0} \qquad f_1 \qquad f_2$

$c_3 \quad f_3 \quad [c_2, c_3]f = \dfrac{f_3 - f_0}{c_3 - c_0} \quad [c_1, c_2, c_3]f = \dfrac{[c_2, c_3]f - f_1}{c_3 - c_0}$

$c_4 \quad f_4$

$c_5 \quad f_5$

$c_6 \quad f_5 \qquad f_6$

$c_7 \quad f_0 \quad [c_6, c_7]f = \dfrac{f_0 - f_5}{c_7 - c_6}$

c_6''

$[c_5, c_3, c_1]f$

ספלינים

$a<b \in \mathbb{R}$ קובעים

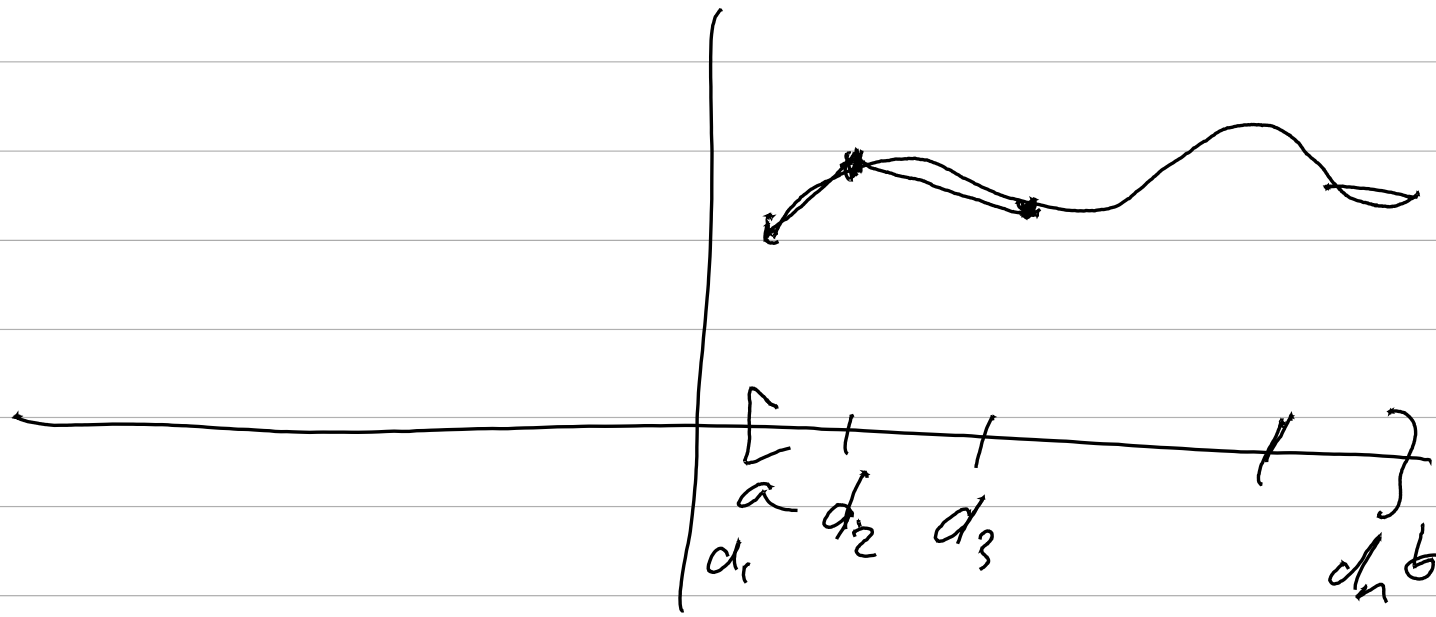
חלוקה

$$\underbrace{a=d_0<d_1<\dots<d_n=b}_{\Delta}$$

$$S_m^k(\Delta)=\left\{ s\in C^k[a,b] \;\middle|\; s\big|_{[d_{i-1},d_i]} \text{ פולינום ממעלה } \le m \text{ , לכל } i \right\}$$

$k<m$.

$S_1^0(\Delta)$ – פ' לינאריות למקוטעין רציפות.



אם f גז' פע' ברציפות

פעמיים, הרי שהמרחק בין f

לקירוב הלינארי S חסום ע"י

$$|f(x)-S(x)| \le \frac{M}{2}\cdot\left|(x-d_i)(x-d_{i+1})\right| \le$$

$$\frac{M}{8}\cdot(d_{i+1}-d_i)^2 \qquad M=\max_{x\in[d_i,d_{i+1}]} f''(x)$$

אז השגיאה המינימלית היא

$\frac{\mu}{\varphi} \cdot |\Omega|^2$

כאשר הקטע המירבי - $|\Omega|$

עובדה:

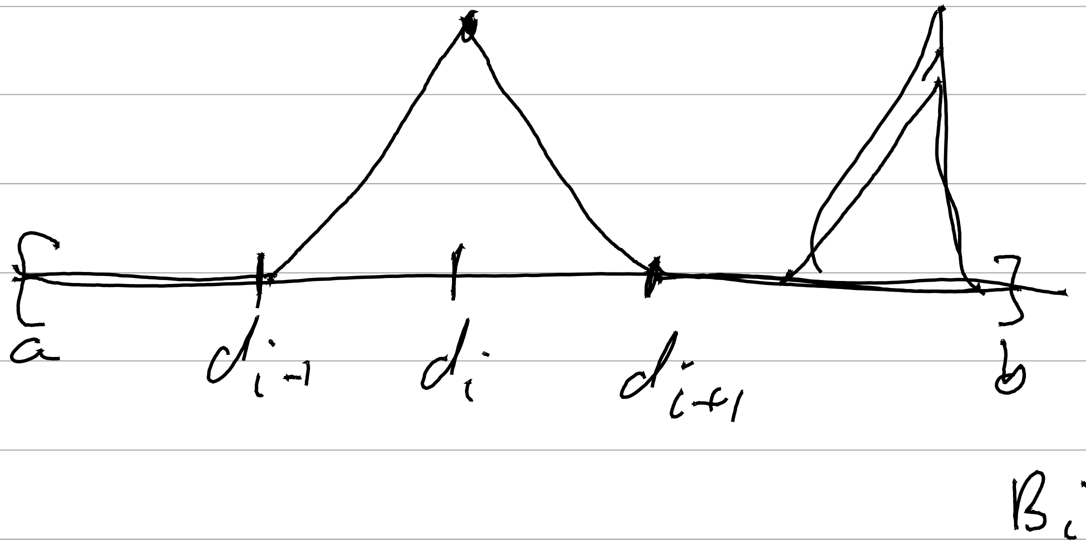
$\|f - s_1\| \le c\,\|f - s_1^0(\Omega)\|$

$V =$

$S_1^0(\Omega)$ - ממימד n. מה הפ׳ ל-V

שימושיות לבסיס הסטנדרטי

$\mathbb{R}^{\{d_1, \dots, d_n\}}$ Ω



$\langle B_i, B_j \rangle \neq 0$

רק אם $|i-j| \le 1$

כרגיל: אם

$\hat{S} = \sum c_i B_i$

והטלה של f למרחב V ע״י

$\bar{c}$ פתרון של "ג'" והפתרון של

$T\bar{c} = d$

כאשר $T = (\langle B_i, B_j \rangle)_{i,j}$

$d_i = \langle f, B_i \rangle$

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

T "בנדית" ואלכסונית.

[illegible]

$$\|f - \hat{s}\|_\infty \le 4 \cdot d(f, S_1^0(\Delta))$$

ספליינים ממעלה 3:

קירוב של f ע״י י׳ד׳ ונקחם

ה $S_3^1(\Delta)$. מקרים אלו

f ע״י י׳ד׳ פ׳ s כך ש-

לכל i $s(d_i)=f(d_i)$

פולי׳ ממעלה ≤ 3 $s|_{[d_{i-1},d_i]}$

$s'(d_i)=m_i$

א. $m_i=f'(d_i)$

ב. לבחור את m_i כך ש- $s\in S_3^2(\Delta)$

מציאת פתרונות למשוואות

$\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ (למשל f פולינום).

f גזירה ברציפות על $[a,b]$ (אולי יותר חלקה).

המטרה: למצוא פתרונות

למשוואה $f(x)=0$.

או משוואות דיפרנציאליות ממימד

סופי (בהמשך)

ק. $F(t,x,x',x'')=0$

$x(0)=x_0,\quad x(1)=x_1$

טענה: C ש- $f(a)\cdot f(b)\le 0$

המבחין קיים.. הוכחה נותנת

אלגוריתם: נקודת האמצע

$C=\frac{a+b}{2}$ מקיים $f(c)\cdot f(b)\le 0$

או $f(a)\cdot f(c)\le 0$, ממשיכים

על הקטע $[c,b]$ או $[a,c]$

התכנסה.

$f(c)\ge 0$

≤ 0

הגדרה: לתהליך יש התכנסות
ליניארית אם $|x_n-a|<\varepsilon_n$
כך ש $\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\xrightarrow[n\to\infty]{} C$ כלשהו קבוע C.

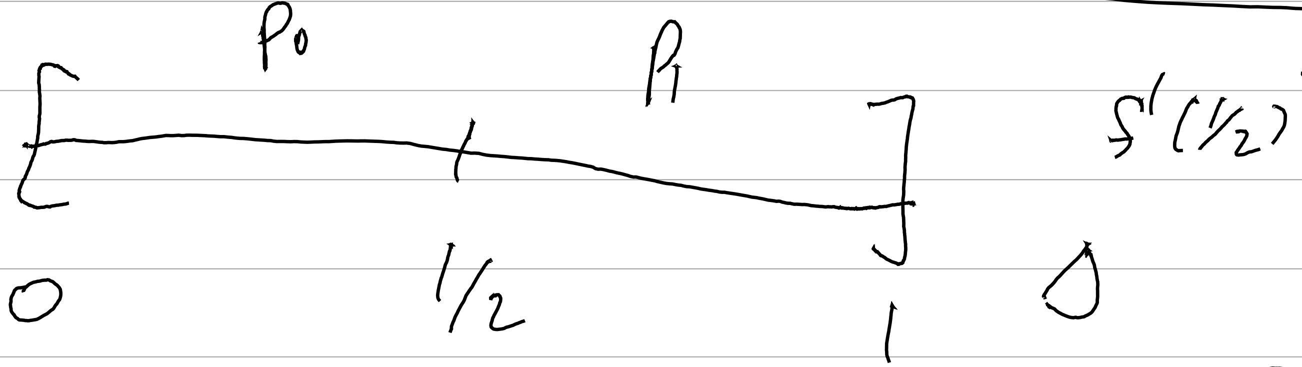
במקרה הזה

$$|x_n - a| \le \frac{|b-a|}{2^n} = \varepsilon_n$$

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{1}{2}$$

<u>התכנסות מסדר p</u> אם

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} \to c > 0$$ (עבור $p \ge 1$).



f $\quad s \in S_3^1(\Delta) \quad p_0'(1/2) = p_1'(1/2)$

$p_0(0) = f(0)$, $p_0(1/2) = f(1/2)$, $p_1(1/2) = f(1/2)$, $p_1(1) = f(1)$

$f(x)=0$ $\qquad [a,b]$

$x_i \to 0 \qquad f(c)=0$

$\left|\frac{x_{i+1}}{x_i}\right| < \varepsilon_i \qquad \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} \to c < 1$

התכנסות ליניארית

$p \geq 1$

$\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i^{\,p}} \to c > 0$

הרכס מעל מסדר p.

הגדרה: סדרת פונקציות

רציפות $f_0,\dots,f_n$

על $[a,b]$ כך שלכל אחת מהן

יש מספר סופי של שורשים ב-$[a,b]$

נסמן $f_{-1}\equiv 0$, $f_{n+1}=-f_n'$

לשאר הפונקציות שלא f_n צריך:

ולכל $0\le i\le n$ ולכל $r\in[a,b]$

אם $f_i(r)=0$ אז $f_{i+1}(r)\cdot f_{i-1}(r)<0$

לכל x נסמן $\sigma(x)$ את מס'

הפעמים שהסדרה $f_0(x),\dots,f_n(x)$

משנה סימן

משפט: מס' האפסים של f_n הוא $\sigma(a)-\sigma(b)$

הערה: אם היא נכונה לקטע

$[a,c]$ ו- $[c,b]$ c נקודה

כולה: אז היא נכונה לכל $[a,b]$

אז מספיק להוכיח לסדרה

שיש רק נקודה אחת בגבולה.

$$[\quad x \quad][\quad x \quad][\quad x \quad][\quad x \quad]$$

a $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ b

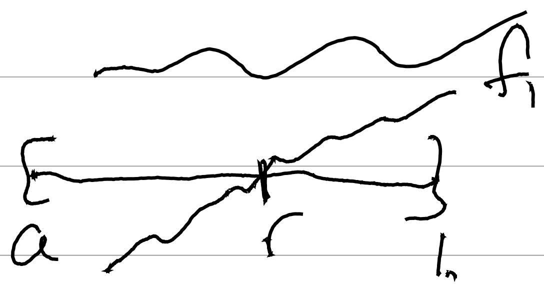
בערך: נחקור $i=0$ הוכחה

הינו - כש $f_0(r)\neq 0$ לכל $r\in[a,b]$

הוכחת המשפט: באינדוקציה על n

$n=0$ ✓

$n=1$: נסמן ב-r את הנקודה היחידה



$r(a)=0$ $r(b)=1$

$f_1(r)=0 \Rightarrow f_0(r)\cdot f_2(r)<0$

$f_2=-f_1'(r)$

$f_0(r)<0,\ f_1'(r)<0$

נניח שהטענה נכונה ל-n. יש

שני מקרים:

1. $f_1(r)\neq 0$. אם נוריד את f_0

הסדרה $f_1,\dots,f_{n+1}$ מקיימת

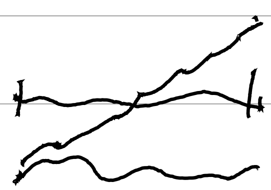
את ההנחות, כי הנ״ל קיים

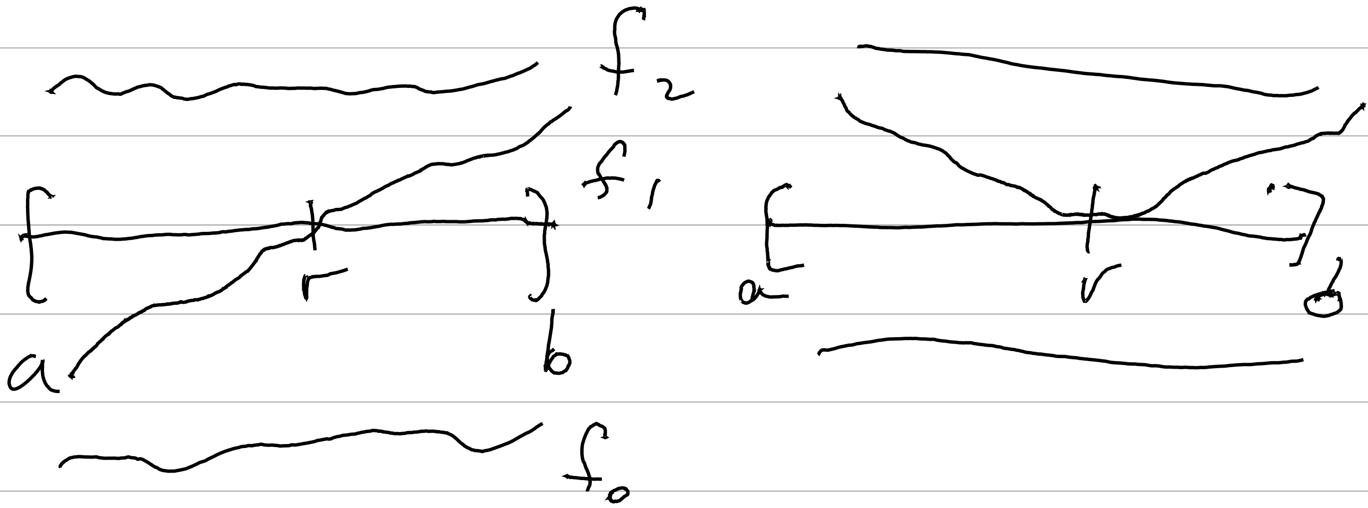
ולכן ב-1 ושל ההנחה.

2. $f_1(r)=0$. נוריד את f_0, f_1

לפי ההנחה $f_0(r)\cdot f_2(r)<0$

לכן $f_2(r)\neq 0$.





דוגמא 1. נניח ש- p פולינום

עם שורשים פשוטים.

נגדיר $f_n = p$, $f_{n-1} = p'$

ו-

$$f_{k+1} = q_k \cdot f_k - f_{k-1}$$

כאשר $\deg(f_{k+1}) < \deg(f_k)$ עבור $k \le n-1$

אז f_i מקיימים את ההנחות:

כיוון שה שורשים פשוטים, ל- p,p' אין

שורש משותף. בפרט, הדוגמה

מקיימת עבור $n=i$:

$$f_{n+1}\cdot f_{n-1} = -(f')^2 \le 0$$

2. אם $\{f_i\}$ ס״ס
$\deg(f_i)=i$

של פולינומים אורתוגונליים, מוניקים

כלומר יש נוסחת נסיגה

$$f_{i+1} = (t-a_i)\cdot f_i - b_i f_{i-1}$$

ו- $0<b_i$.

אם $0<b$, $f_i(b)>0$ לכל i.

צ״ל $\sigma(b)\le 0$

וכלל $a<c<0$ וגם $\sigma(a)=n$

ל- f_i יש i שורשים ממשיים
שונים.

לכן ניתן לגלות איפה
נמצא השורש ה- k לפי
השינוי של $\sigma(c)$

בכל שלב, מחשבים

$$x_{k+1}=\frac{x_k+x_{k-1}}{2}$$

ומחשבים גם $\sigma(x_{k+1})$
ולפי ההפרש של $\sigma(x_{k+1})-\sigma(a)$
וגם $\sigma(b)-\sigma(x_{k+1})$ יודעים לאיזה
כיוון להמשיך.

מטרה לפ $f(x)=0$ פת

נתון $[a,b]$, f רציפה

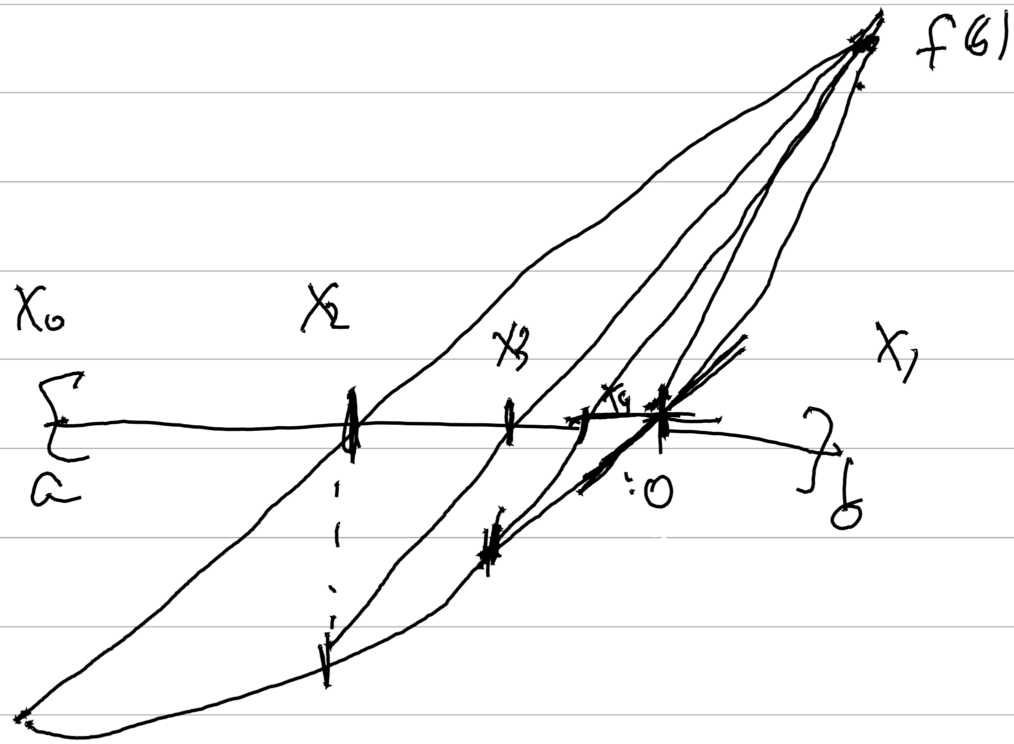
$f(a)\cdot f(b)<0$,

$$\frac{f(b)}{b-a}(x-a)+\frac{f(a)}{a-b}(x-b)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f(b)(x-a)-f(a)(x-b)=0$$

$$x=\frac{f(b)a-f(a)b}{f(b)-f(a)}$$



$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)\cdot x_{n-1} - f(x_{n-1})\, x_n}{f(x_n)-f(x_{n-1})} =$$

$$\frac{\left(f(x_n)-f(x_{n-1})\right)\cdot x_n + f(x_n)\cdot(x_{n-1}-x_n)}{f(x_n)-f(x_{n-1})} =$$

$$x_n - f(x_n)\cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{f(x_n)}{x_n} \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$1 - \underbrace{\frac{f(x_n)}{x_n}} \cdot \underbrace{\frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)}} \to$$

$$1 - f'(0) \cdot \frac{b}{f(b)} =: c$$

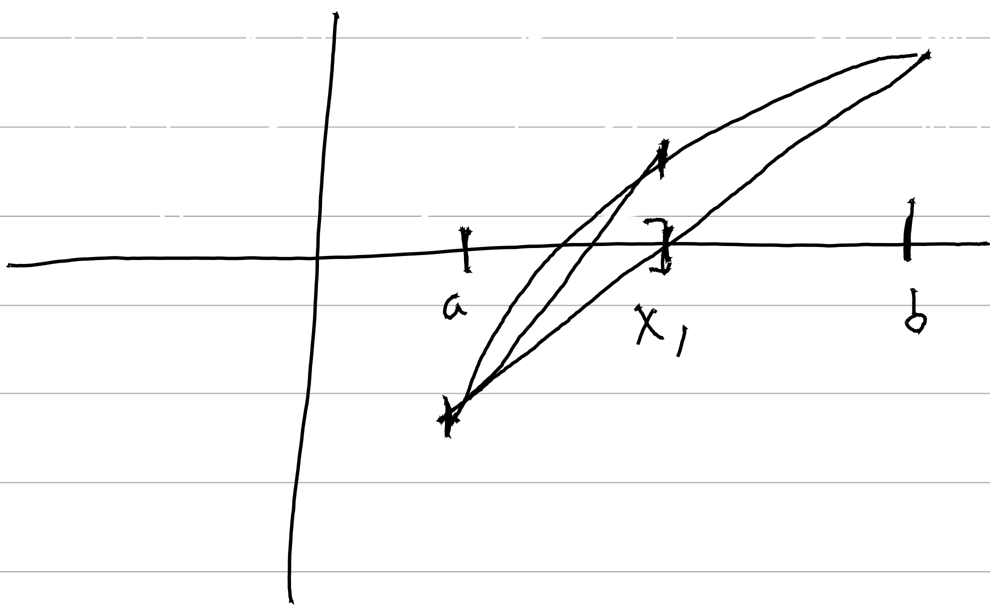
[illegible] $n+1$ - ? [illegible]

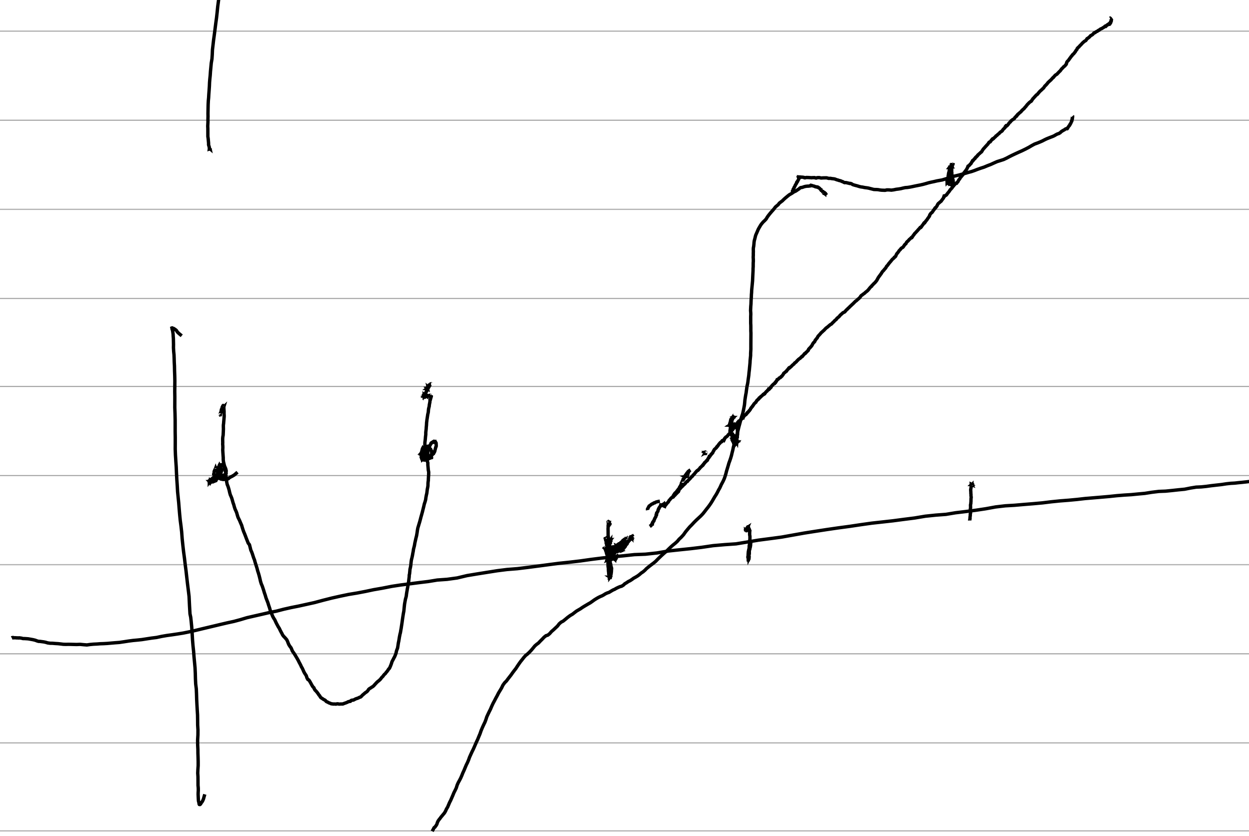
$$d = \frac{f(x_n)\, x_{n-1} - f(x_{n-1})\, x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

[illegible] $f(d) \cdot f(x_n) \leq 0$ [illegible] $x_{n+1} = d$

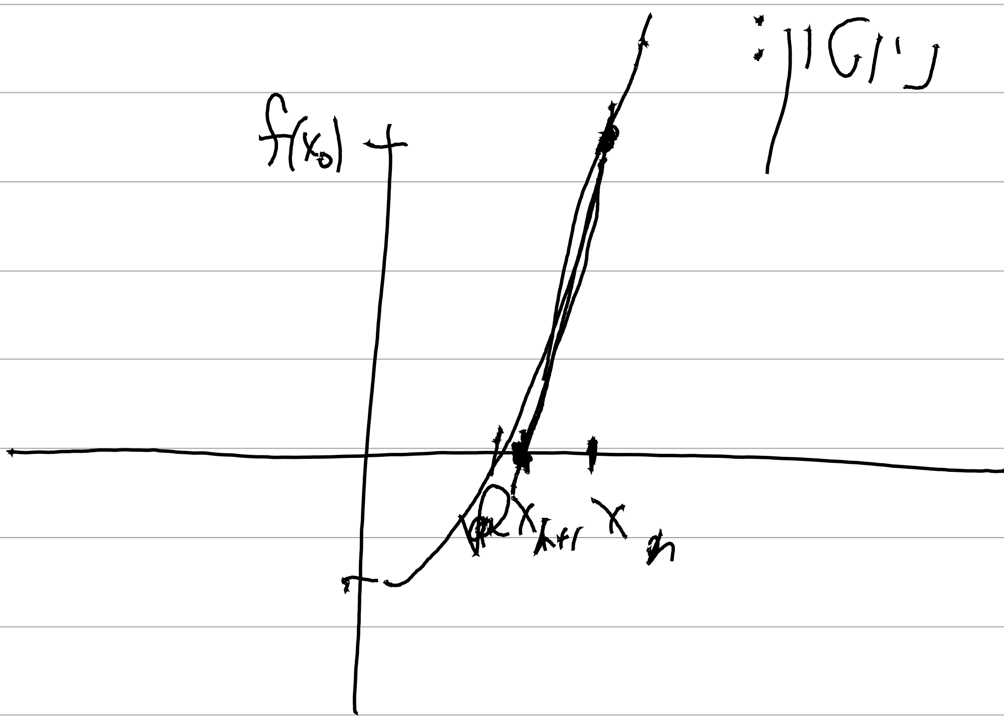
[illegible] $x_{n+1} = x_n, \quad x_n = d$

1. שיטת ה-secant
2. שיטת ניוטון





שיטת ניוטון:



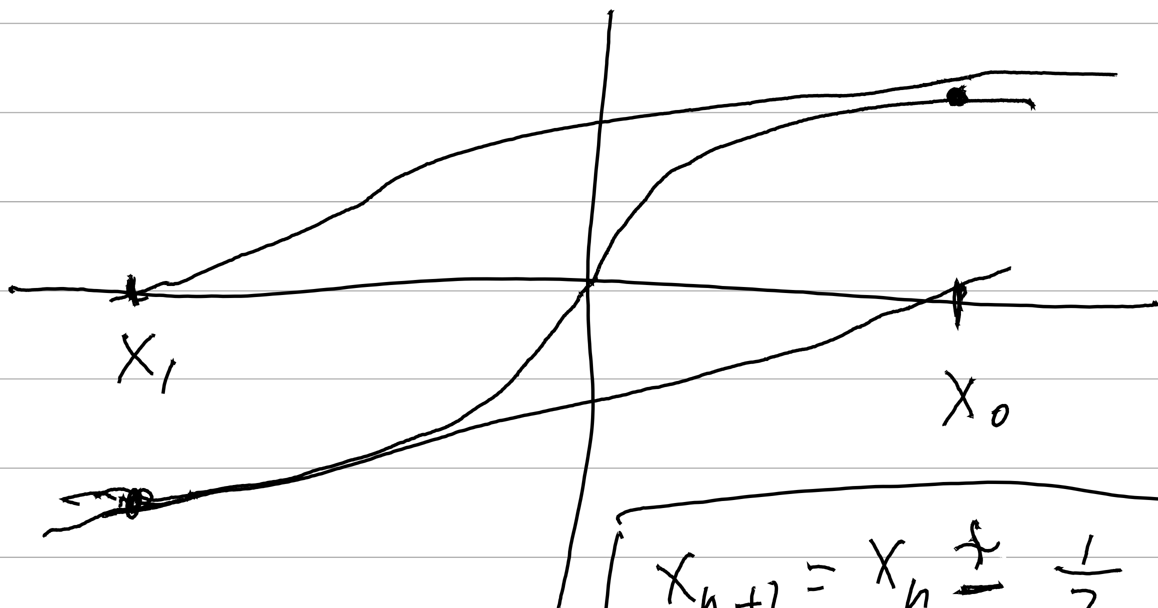
$$\frac{x_{n+1}-x_n}{0-f(x_n)} = \frac{1}{f'(x_n)} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

לדוגמא: כדי לחשב את $\sqrt{a}$

$a \geq 0 \Rightarrow x^2 - a = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$



$$x_{n+1} = x_n \cancel{-}\ \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & x \geq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-x}} & x \leq 0 \end{cases}$$

$x_0 = \frac{1}{4}$

$x_1 = -\frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{1}{\cancel{t}} = \infty$

נגדיר

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

התהליך הוא $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

השורש של f הוא נקודת שבת של φ: נקודה α כך ש- $\varphi(\alpha)=\alpha$.

<u>משפט ההעתקה המכווצת:</u>

יהי (M,d) מרחב מטרי

אם $\varphi: M \to M$ העתקה מכווצת: יש $c<1$ כך ש

$$d(\varphi(x),\varphi(y)) \le c\cdot d(x,y)$$

לכל $x,y\in M$ אז ל-φ יש נקודה אחת ויחידה שמונה כ ע"י

הגבול של הסדרה, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

x_0 כלשהו.

הוכחה: לכל $i \le j$,

$$d(x_i, x_j) \le c^i \cdot \underline{d(x_0, x_{j-i})}$$

$$d(x_0, x_k) \le d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{k-1}, x_k) \le$$

$$d(x_0, x_1)(1 + c + c^2 + \dots + c^{k-1}) = \frac{1-c^k}{1-c} d(x_0, x_1)$$

$$\Rightarrow d(x_i, x_j) \le \frac{c^i}{1-c} d(x_0, x_1) \longrightarrow 0$$

$\Leftarrow$ $(x_i)_{i \ge 0}$ סדרת קושי $\Leftarrow$ יש

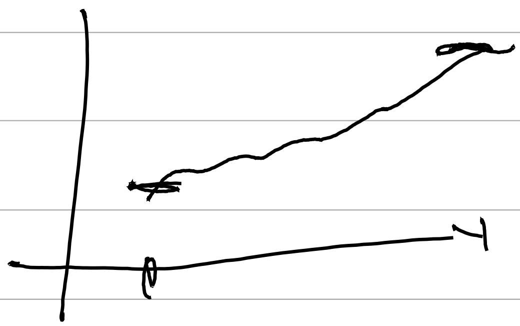
לה גבול α $\Leftarrow$ (φ רציפה)

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\lim x_i) = \lim \varphi(x_i) = \lim x_i = \alpha$$

(סגורה)
נניח ש- $M \subseteq \mathbb{R}$ ונניח ש-

φ גזירה ברציפות, ו-

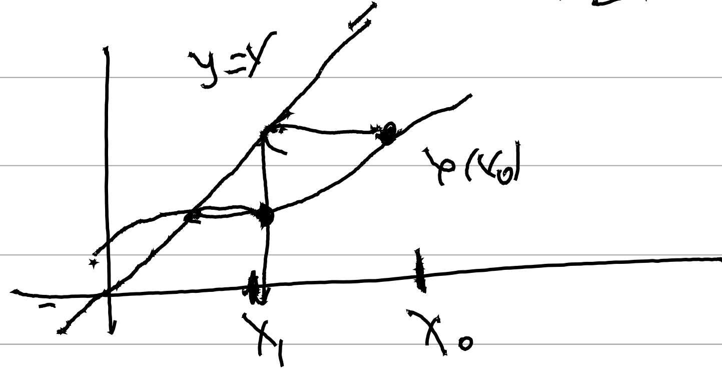
ו$|\varphi'| \le c < 1$ לכל $x \in M$. אזי φ מכווצת.



[אותה שיטה עובדת לקמור

$\varphi :$ מה-M

כנ״ל $M \subseteq \mathbb{R}^n$ קמורה]



טענה: אם α נקודת הופכת

1- $\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \dots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0$

2- $\varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0$. $\left(\varphi \in C^{p}(M) \right)$

אז סדר ההתכנסות הוא p:

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p} \to \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

הוכחה:

$$\varphi(x) = \alpha + \varphi'(\alpha)(x-\alpha) + \dots + \frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x-\alpha)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(u)}{p!}(x-\alpha)^p$$

$$\alpha + \frac{\varphi^{(p)}(u)}{p!}(x-\alpha)^p \Rightarrow \quad u \in [\alpha, x]$$

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{\varphi^{(p)}(u)}{p!} \cdot (x_n-\alpha)^p$$

במקרה שלנו:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\underline{\varphi'(x)} = 1 - \frac{f'^2 - f\cdot f''}{f'^2} = \frac{f\cdot f''}{[f']^2}$$

$\varphi'(\alpha) = 0$ $\boxed{\varphi(x) = x - \underline{d\, f'^{-1}(x)}\cdot f(x)}$

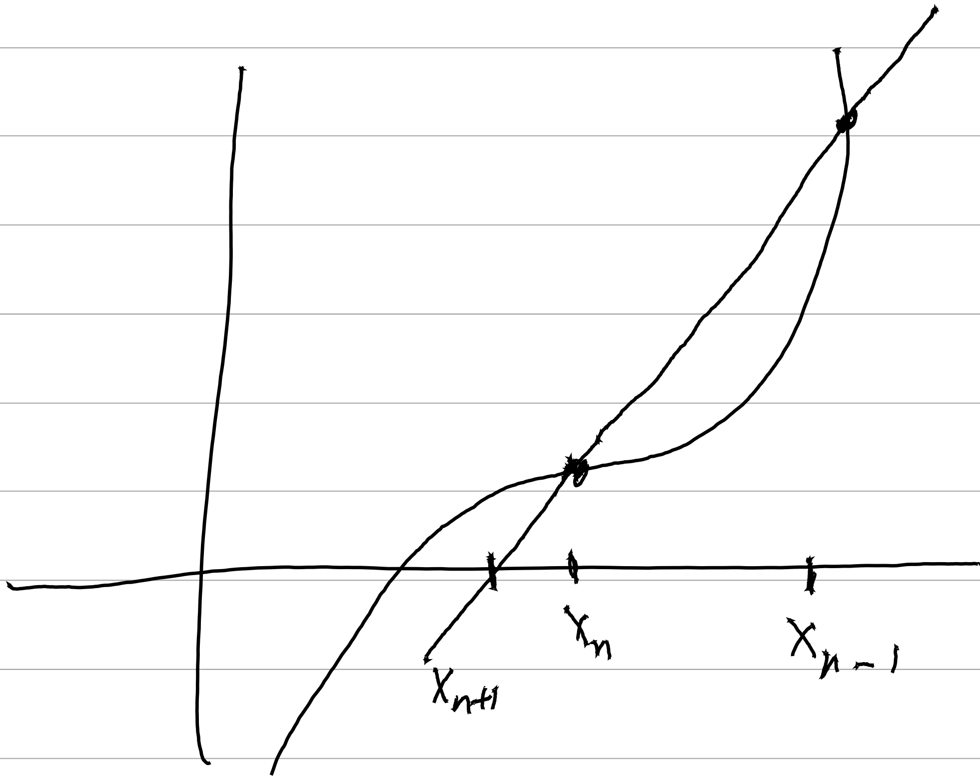
לכן סדר ההתכנסות הוא **לפחות**

ריבועי.

אם $f'(\alpha) \neq 0 \Rightarrow |\varphi'(u)| < 1$ לכל u

כלשהי סביבה של α.

Secant



$$\frac{x_{n+1} - x_n}{-f(x_n)} = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

נניח כי שורש פשוט α.

$$x_{n+1}-\alpha = x_n-\alpha - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} f(x_n) =$$

$$(x_n-\alpha)\left(1-\frac{f(x_n)}{(x_n-\alpha)[x_n,x_{n-1}]f}\right)=$$

$$(x_n-\alpha)\left(1-\frac{[x_n,\alpha]f}{[x_n,x_{n-1}]f}\right)=$$

$$(x_n-\alpha)\left(\frac{[x_n,x_{n-1}]f-[x_n,\alpha]f}{[x_n,x_{n-1}]f}\right)=$$

$$(x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)\cdot\left(\frac{[x_n,x_{n-1},\alpha]f}{[x_n,x_{n-1}]f}\right)$$

$$\underline{(x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)\cdot M}$$

כאשר $M=\max_{t,s\in U_\alpha}\left|\frac{f''(s)}{2f'(t)}\right|$

(כי $f'(\alpha)\neq 0$ ולכן המקסימום קיים

עבור סביבה מספיק קטנה סביב

α).

אז אם $\underline{U_\alpha}=\{x \mid |x-\alpha|\le\varepsilon\}$

$\underline{x_{n-1}, x_n\in U_\alpha}$ ו- $\underline{\varepsilon\cdot M\le 1}$ אז

$$|x_{n+1}-\alpha|\le\varepsilon^2 M\le\varepsilon\cdot 1=\varepsilon$$

ובאינדוקציה נקבל $x_n\to\alpha$.

$$|X_{n+1}-\alpha| \le |X_n-\alpha|\cdot|X_{n-1}-\alpha|\cdot\mu \le$$

$$\varepsilon\cdot|X_{n-1}-\alpha|\mu \le \varepsilon^2|X_{n-2}-\alpha|\mu^2 \ldots$$

$$\underbrace{(\varepsilon\cdot\mu)}_{<1}{}^n\cdot|X_1-\alpha|$$

$$E_n = \underbrace{|X_n-\alpha|}\cdot\mu$$

$$\frac{|X_{n+1}-\alpha|}{|X_n-\alpha|^p} = \frac{E_{n+1}/\mu}{E_n^p/\mu^p} \le \phi$$

$$\mu^{p-1}$$

$$E_{n+1} \le E_n\cdot E_{n-1}$$

$$p = \frac{1+\sqrt5}{2}$$

$$\boxed{p^2 = p+1}$$

$$E_n \le E^{p^n} \qquad E = \max(E_0, E_1^{1/p})$$

$$E_{n+1} \le E_n\cdot E_{n-1} \le E^{p^n}\cdot E^{p^{n-1}} = E^{p^{n-1}(p+1)} = E^{p^{n+1}}$$

$$[x_0, x_1]f = f'(u)$$

$$u \in [x_0, x_1]$$

$$[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(u)}{k!}$$

$$u \in [a, b]$$

שיטת ניוטון לפולינומים:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x^n + a$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_n &= c_n = 1 \\ b_k &= t\, b_{k+1} + a_k \\ c_k &= t\, c_{k+1} + b_k \end{aligned}}$$

$$(x - t)(x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_1) + b_0 = p(x)$$

$$b_n = 1 \qquad \underline{b_k = t\, b_{k+1} + a_k}$$

גזירה אינטגרציה

$f'(c_0)$

$c_0, \dots, c_n \qquad f \rightsquigarrow p_{\bar{c},f}$

$$p_{\bar{c},f}(x) = [\bar{c}]f \cdot (x-c_0) \cdots (x-c_{n-1}) \dots$$

$$p'(c_0) = [\bar{c}]f \cdot (c_0-c_1) \cdots (c_0-c_{n-1}) +$$

$$[c_0, \dots, c_{n-1}]f \, (c_0-c_1) \cdots (c_0-c_{n-1}) + \dots$$

$$f(x) = p_{\bar{c},f}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \cdot (x-c_0) \cdots (x-c_n)$$

$$f'(c_0) \stackrel{?}{=} p'_{\bar{c},f}(c_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(c_0))}{(n+1)!} (c_0-c_1) \cdots (c_0-c_n)$$

[illegible] $h=\max\{|c_0-c_i|\}$,[illegible]

<u>[illegible]</u> כמו h^n.

<u>דוגמאות</u> 1. c_0, $c_1=c_0+h$

$$f'(c_0)=\underbrace{\frac{f(c_0+h)-f(c_0)}{h}}+h\frac{f''(\xi)}{2}$$

$$P_{\bar{c},f}(x)=f(c_0)+(\underbrace{[c_0,c_1]f})\cdot(x-c_0)$$

$$\underbrace{f(c_1)-f(c_0)}$$

$$h=c_1-c_0$$

$$c_{-1} = c_0 - h, \quad c_1 = c_0 + h \qquad -2$$

$$P_{\bar{c},f}(x) = f(c_0) + [c_0, c_1]f \cdot (x - c_0) +$$

$$\underline{[c_0, c_1, c_{-1}]f \, (x - c_0)(x - c_1)}$$

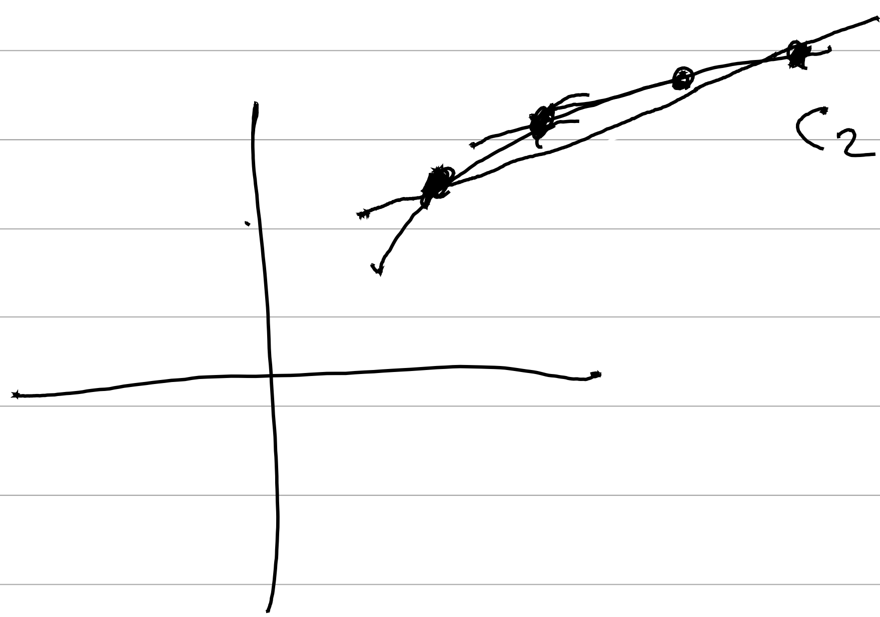
$$[c_0, c_1]f = \frac{f(c_1) - f(c_0)}{h}$$

$$[c_0, c_1, c_{-1}]f = \frac{[c_0, c_1]f - [c_0, c_{-1}]f}{2h} =$$

$$\frac{f(c_1) - f(c_0) + (f(c_{-1}) - f(c_0))}{2h^2} =$$

$$\boxed{\frac{f(c_1) - 2f(c_0) + f(c_{-1})}{2h^2}} \qquad P' = \frac{f(c_1) - f(c_0)}{h} - \frac{f(c_1) - 2f(c_0) + f(c_{-1})}{2h} \; ?$$

$$\frac{f(c_1) - f(c_{-1})}{2h}$$



$$e = \frac{f'''(\xi)}{6} \cdot h^2$$

$f_1 = f(c_1) + \varepsilon$ שגיאת עיגול!

$f_{-1} = f(c_{-1}) + \varepsilon$

$$f'(c_0) = \frac{\underbrace{f(c_1)} - \underbrace{f(c_{-1})}}{2h} + e_2 =$$

$$= \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{\varepsilon}{h} + e_2 =$$

השגיאה הכוללת היא

$$E(h) = \underbrace{M \cdot h^2} - \underbrace{\frac{\varepsilon}{h}}$$

$h_0 = \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^{1/3}$ $E(h_0) = \frac{3}{2}(2M)^{1/3} \cdot \varepsilon^{2/3}$

אם f אנליטית אז נשתמש קושי

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(x)}{(x-x_0)^2}dx$$

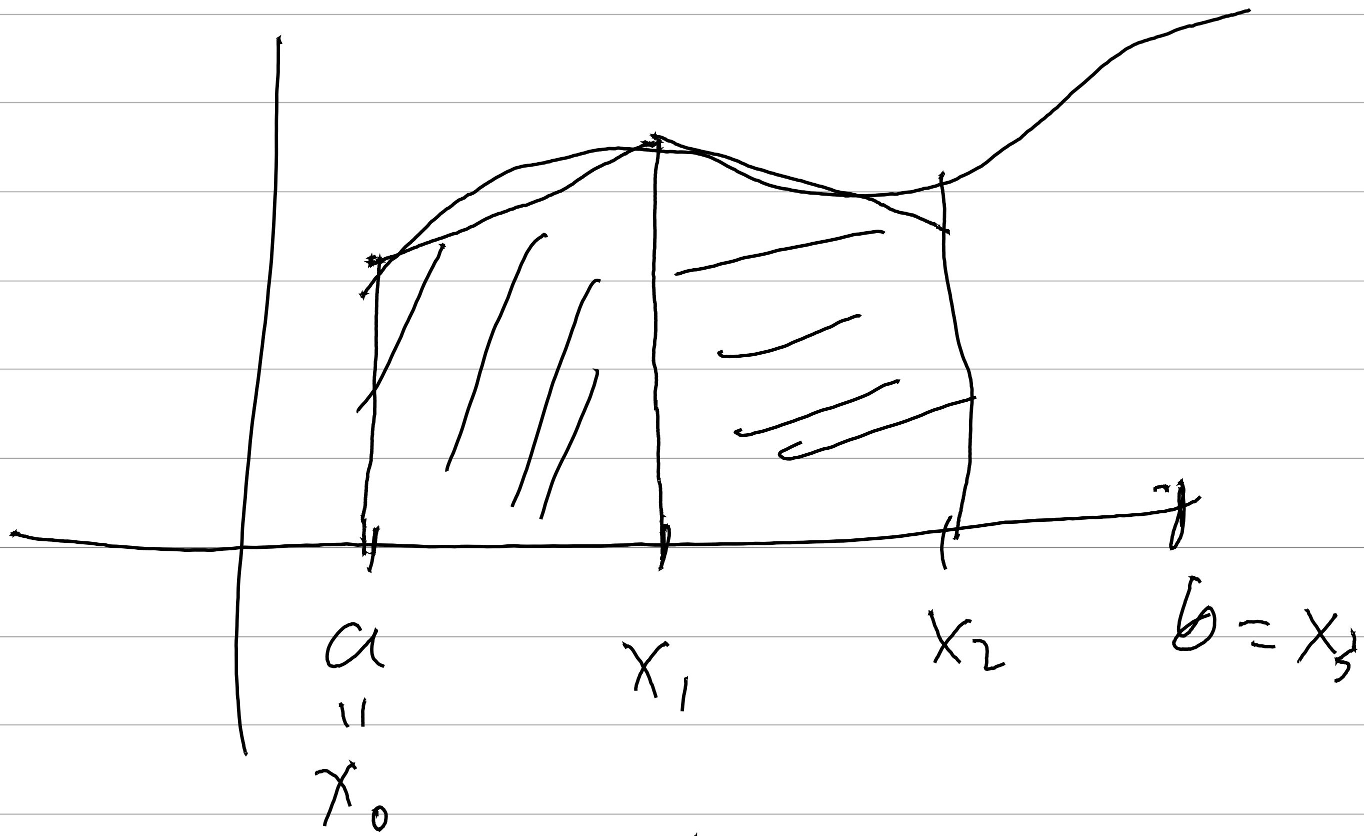
אינטגרציה

רוצים לחשב את

$$\int_a^b f$$

מחלקים את $[a,b]$ לקטעים

הנ׳מ $a = \underline{x_0} < x_1 \dots < x_n = b$



$$x_{i+1} - x_i = h$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f = \frac{\big(f(x_{i+1}) + f(x_i)\big)(x_{i+1} - x_i)}{2}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{\underbrace{(x - x_i)(x - x_{i+1})}\cdot \underbrace{\frac{f''(\xi(x))}{2}}}_{R_1(x)}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} R_1(x) = \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x-x_{i+1})\,dx}\cdot$$

$$\frac{f''(c_i)}{2} \qquad = -\frac{h^3}{12}\cdot f''(c_i)$$

$$\int_a^b f\,dx = h\cdot\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \dots + \frac{1}{2}f_n\right) +$$

$$\underbrace{-\frac{h^3}{12}\cdot\sum f''(c_i)}$$

$$\|$$

$$E_n^T(f) = -\frac{h^2}{12}\cdot\frac{(b-a)}{h}\sum f''(c_i) = -\frac{h^2}{12}(b-a)\cdot f''$$

שיטת סימפסון לקרב את

f ע"י 2 קטעים עוקבים

ע"י פולינום ריבועי

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f_k + 4f_{k+1} + f_{k+2}\right) - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(c_k)$$

$$\int_a^b f = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots f_n\right) + \underbrace{}_{E_n^S(f)}$$

$$E_n^S(f) = -\frac{1}{180}\cdot(b-a)h^4 \cdot f^{(4)}(c)$$

מדויק ב' טריגונומטרי

$[a,b]=[0,2\pi]$ $\quad e_k$

$$E_n^T\left(e^{2\pi i k x}\right)=\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx -$$

$$\left(\underline{\underline{\tfrac{1}{2}e_k(0)}}+\sum_{i=1}^{n-1} e_k(2\pi i/n)+\underline{\underline{\tfrac{1}{2}e_k(2\pi)}}\right)\cdot\frac{2\pi}{n}$$

$=0 \qquad k<n$

אם f פ' טריגונומטרי

$$f(x)=\sum_i a_i\cos(ix)+b_i\sin(ix)$$

$E_n(f)=\sum a_{in}$

עובדה: אם $f \in C^r(\mathbb{R})$

אז $a_i(f)$ שואפים ל-0 לפחות

כמו i^{-r}

באופן כללי, מהו המבנה

הכללי של קירוב לאינטגרל

משוקלל

$$\int_a^b f(t)\,\underline{\underline{w(t)}}\,dt = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot f(t_k) + E_n(f)$$

9

A - פולינומים של x ו- $\frac{1}{x}$ A_1, A_{-1}

$T: A \to A$ $T(f) = f \circ \tau$ A_τ

$\tau^2 = Id$ $T^2 = Id$ $\lambda^m = 1$

T הפיכה לינארית

$A_i =$ המרחב העצמי של i

$\boxed{\begin{array}{c} \tau^m = Id \\ G \\ \text{חבורה סופית} \end{array}}$

$x + \frac{1}{x}$ $\tau(x) = \frac{1}{x}$

$A^m = \{ t \in \mathbb{C}[x, \frac{1}{x}] \mid t(x) = \sum_{i=-m}^{m} a_i x^i \}$

$\dim A^m = 2m+1$

$(x + \frac{1}{x})^k \in A_1^m = A^m \cap A_1$ $0 \le k \le m$

$(x - \frac{1}{x}) \cdot (x + \frac{1}{x})^k$ $k < m$

אינטגרציה על ידי נוסחה מהצורה

$$\int_a^b f(t)\,w(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i) + E_n(f)$$

$w(t)$ – "פונקציית משקל" (אי שלילית, רציפה, $\int_a^b f(t)w(t)dt$ קיים לכל פולינום f).

המטרה היא למצוא נקודות אופטימליות t_i ואופטימליות:

$E_n(f)=0$ לפולינומים מדרגה $\leq m$ עבור m מירבי.

V – מרחב של פונקציות f עבורן

$$\Psi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, w(t)\, dt$$

קיים. אז V מרחב לינארי

שכולל את הפולינומים

$$\Psi : V \to \mathbb{R}$$

העתקה לינארית. $S_t(f) = (f(t_1), \dots, f(t_n))$

$S_{\bar t} : V \to \mathbb{R}^n$ $\qquad \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\varphi_{\bar t}$ $\qquad \dim P_k = k$

לכל k, מרחב הפולינומים ממעלה $< k$ P_k

$$\Psi\big|_{P_k} = \varphi \circ S_{\bar t}\big|_{P_k} \qquad P_k \subseteq V.$$

הצמצום

$$S_{\bar{t}}\big|_{P_n} : P_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

הוא ע' על (לפי אינטרפולציה)

לכן עבור $\varphi = \psi \circ S_{\bar{t}}^{-1}$

נמשיך את הבניה (באופן יחיד).

נוכל למצוא $\bar{t}$ כך ש-

$$\psi\big|_{P_{n+1}} = \varphi \circ S_{\bar{t}}$$

בפרט, עבור $f \in \ker S_{\bar{t}}$, $\psi(f) = 0$

באותו אופן עבור חצ', לכל g:

$$S_{\bar{t}}(f) = 0 \Rightarrow \psi(f) = 0$$

$S_{\bar t}(f) = 0 \Rightarrow \Psi(f) = 0$ $\quad f \in P_k$

$f(t_i)=0 \ \forall i \iff f = \Pi_n \cdot g$ $\quad g \in P_{k-n}$

כאשר $\Pi_n(t) = (t-t_1)\cdots(t-t_n)$

כלומר מתאפסים בנקודות $\bar t$

כך: $\Psi(\Pi_n \cdot g) = 0$

לפולינומים $g \in P_\ell$ עם ℓ

כמה שיותר גדול.

נוכיח $\ell < n$ ובאופטימלי כך.

$\ell = n-1$. כי Π_n הפולינום

נגדיר: n מכפלות לפולי' ביחס לפס:

פנימיות $(u,v) \mapsto \langle u,v \rangle = \Psi(u \cdot v)$

3 נקודות: 1. $a=-1,\ b=1,\ w(t)=1$

$\bar{t}_i$ השורשים של פולינום לג'נדר

2. $a=-1,\ b=1,\ w(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

t_i השורשים של Π_n

$$w_i = \int \underbrace{\frac{\Pi_n(t)}{(t-t_i)\cdot \Pi_n'(t_i)}}\, w(t)\,dt$$

$\overset{?}{=}$

$w(t_i)$

1. כל השורשים של Π_n הם ממשיים ושונים.

2. כל ה-$w_i > 0$.

l_i – הפולינום שמתאים לאיבר ה-i בבסיס הסטנדרטי

$$w_i = \sum_j w_j l_i^2(t_j) = \int l_i^2 w \, dt > 0$$

3. לכל f, $E_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

יש סדרה $p_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$,

p_i פולינום ממעלה i.

$$|E_n(f)| = |E_n(f - P_{2n-1})| =$$

$$\left| \int_a^b (f - P_{2n-1})\, w(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (f(t_i) - P(t_i)) \right| \leq$$

$$\left| \int_a^b \underline{\underline{(f - p)}}\, w(t)\,dt \right| + \sum_{i=1}^{n} w_i \, |f(t_i) - P(t_i)| \leq$$

$$\|f - P\|_\infty \cdot \Big(\underbrace{\int 1\, w(t)\,dt}_{\shortparallel} + \boxed{\sum w_i} \Big) =$$

$$\underline{\underline{\|f - P\|_\infty}} \cdot \underline{\underline{2 \cdot \mu_0}}$$

הערה: את סדרת תתי

המרחבים P_k אפשר להחליף

בסדרה אחרת כלשהי $V_k \subseteq V_{k+1} \subseteq \dots$

V - מרחב פונקציות

$\psi : V \to \mathbb{R}$

$\theta = \varphi \circ S_{\tilde{t}} : V \to \mathbb{R}$

$E = \psi - \theta$

$Ep = 0$ לכל $p \in P_k$

אם $f \in C^{k+1}([a,b])$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i + \frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt$$

$$E(f) = \frac{1}{k!} E \int_0^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt =$$

$$\frac{1}{k!} E \int_0^b (x-t)_+^k f^{(k+1)}(t)\,dt \overset{(?)}{=}$$

$$\frac{1}{k!}\int_0^b \underbrace{E\left((x-t)_+^k\right)}_{k!\,K_k(t)} f^{(k+1)}(t)\,dt$$

$$(x-t)_+ = \begin{cases} x-t & t \le x \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$E(f) = \int_a^b \underline{\underline{K_k(t)}}\, f^{(k+1)}(t)\, dt \cdot$$

$$K_k(t) \geq 0 \quad o/c$$

$$= f^{(k+1)}(\tau) \cdot \underbrace{\int_a^b K_k(t)\, dt}$$

Numerical Linear Algebra

Folkmar Bornemann

---

1. לפתור מערכת משוואות

$A\bar{x} = b$

2. למצוא ערכים ווקטורים עצמיים

מקרה קל: A מטריצה משולשת

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$cy = d_2 \Rightarrow y = d_2/c$$

רעיון: נמצא פירוק $A = LU$

כאשר U משולשת עליונה

L משולשת תחתונה

[נניח ש- A הפיכה]

$Ax=b \iff LUx=b \iff$

$Ux=c$ וגם $Lc=b$

נדרוש גם שב- L כל האיברים

על האלכסון הם 1 !

∇ טענה: פירוק כזה הוא יחיד

(אם הוא קיים)

$L_1U_1 = L_2U_2 \Rightarrow L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$

I

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left[= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & x \end{pmatrix} \right] ?$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

[לא קיים כאשר $a=0$, נניח ש-$a\neq 0$]

$$xa = c \Rightarrow x = c/a$$

$$bx + y = d \Rightarrow y = d - \frac{bc}{a}$$

$A = L\,U =$

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha_{11} & \overbrace{\quad\quad}^{a_1} \\ \hline b_1 & A' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \; \cdots \; 0 \\ \hline \underbrace{l_1}_{n-1} & L' \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \overset{\alpha_1}{\overset{\shortparallel}{x}} & r_1 \\ \hline 0 & \\ \vdots & U' \\ 0 & \end{array}\right)$$

$(x \mid r_1) = (\alpha_1 \mid a_1)$

$\underline{x = \alpha_1 \neq 0}$ | כדי שיהיה פתרון

$\underline{l_1 = b_1 / \alpha_1}$

$B = L' U'$ פתרון של הבעיה
במימד אחד יותר נמוך, כאשר

$B = A' - l_1 r_1$

באופן כללי, יש מטריצת פרמוטציה
P כך ש-

$$\underline{PA = LU}$$

כאשר U משולשת עליונה,
L משולשת תחתונה עם 1
על האלכסון ו-$|x| \leq 1$ לכל
קואורדינטה x ב-L.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -4/5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4/5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4/5 \end{pmatrix}$$

$$P_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & P_2 \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$P$$

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad <1 \qquad 0 < \varepsilon$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - 1/\varepsilon \end{pmatrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -1/\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

פירוק Cholesky

נניח ש- $A=A^*$ וחיובית:

לכל $\bar{x}\neq 0$, $\bar{x}^*A\bar{x}>0$

(כאשר $A=A^*$ אז $\left(\bar{x}^*A\bar{x}\right)^*=\bar{x}^*A^*\bar{x}=\bar{x}^*A\bar{x}\in\mathbb{R}$)

במילים אחרות

$(\bar{x},\bar{y})\mapsto\bar{x}^*A\bar{y}$

מכפלה פנימית.

אז כל הערכים העצמיים
ממשיים וחיוביים.

הערה: ו.כש A חיובית אז

היא שונה מ-0 על האלכסון,

2. רגע המטריצות על האלכסון

הן גם חיוביות

אז למטריצה כזו יש פירוק

$A = LU$

לכן

$A = A^* = \underbrace{U^*}\underbrace{L^*}$

~~אז~~ אפשר לדרוש שהאיברים

על האלכסון יהיו חיוביים עם-

$L^* = U$

(ולכן גם $U^* = L$)

לכן יש פירוק יחיד $A = L \cdot L^*$

כאשר L משולשת תחתונה

וכן נדרש על האלכסון של L

חיוביות.

מחשבים בהוכחה דומה כמו

פירוק LU,

$$\begin{pmatrix} \alpha & a_1 \\ & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & \\ \frac{a_1}{\sqrt{\alpha}} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & \frac{a_1}{\sqrt{\alpha}} \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

1. נניח ש- A מטריצה כללית

ר. מקה

$A: K^m \to K^n$

$K=\mathbb{R}/\mathbb{C}$

נניח ש- A חח״ע. רוצים

לפרק

$\underline{A = QR}$

כאשר Q אורתוגונלית

ו-$R: K^n \to K^n$ משולשת עליונה.

עם איברים חיוביים על האלכסון.

<u>הערה:</u> A חח״ע אם ורק אם

A^*A הפיכה.

השמאלי: A^*A מוגדרת

לחיובית, כי $\|Ax\|=0 \iff$

$Ax=0 \iff x=0$

נניח ש-A חח״ע. לכן קיים

פירוק

$$A^*A = L \cdot L^*$$

L משולש תחתון. ניקח

$R = L^*$, נגדיר $Q = AR^{-1}$

צ״ל ש- $Q^*Q = Id$. אכן

$$Q^*Q = (R^{-1})^* A^* A R^{-1} = L^{-1} \cdot (L \cdot L^*) \cdot R^{-1}$$

$$R \cdot R^{-1} = Id$$

עכשיו נניח, שכ $A = Q_1 R_1$ אז

$$A^*A = R_1^* Q_1^* Q R_1 = R_1^* R_1$$

והפירוק היחיד

גישה אלגוריתמית: Q מבין

למטריצה האוניטרית של תמונה

ברוחה - שמירה על וקטורי

העמודה של A:

$$A = Q \cdot R \iff A \cdot \underline{R^{-1}} = Q$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots \\ & \gamma & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad A = (a_1, \ldots, a_n)$$

$\alpha = 1/\|a_1\|$ $\quad \beta \cdot a_1 + \gamma a_2$

אלגוריתם:

$$\boxed{A = Q \cdot R = q_1 \cdot r_1 + (q_2, \dots, q_k) R'}$$

$$A = (a_1, \dots, a_k)$$

$$A = QR$$

$$Q = (q_1, \dots, q_k)$$

$$Q^* A = R$$

$$R = \left(\begin{array}{c|c} \rho & \bar{r} \\ \hline 0 & R' \end{array}\right)$$

$$(a_2, \dots, a_k) = (q_2, \dots, q_k) \cdot$$

$$\rho \cdot q_1 = a_1 \Rightarrow \rho = \|a_1\|, \ \underline{q_1 = a_1/\rho}$$

$$q_1 \cdot a_i = r_i \qquad q \cdot A = (\rho, \bar{r})$$

וכך אפשר להמשיך רקורסיבית:

$$A - q \cdot r_1 = Q' \cdot R'$$