מבוא לטופולוגיה

משה קמנסקי

20 באפריל 2026

1 מבוא

1.1 מרחבים מטריים ומרחבים טופולוגיים

המטרה של טופולוגיה היא ליצור מושג כללי למדי של "מרחב", ולחקור את התכונות הגסות של מרחבים כאלה. נזכיר שכבר יש לנו מושג די כללי של מרחב:

מטריקה

הגדרה 1.1.1. *מטריקה* על קבוצה X היא פונקציה $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיימת לכל $x, y \in X$:

1. $d(x, y) = 0$ אם ורק אם $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. (אי שוויון המשולש) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ לכל $z \in X$.

מרחב מטרי

זוג $\langle X, d \rangle$ כאשר X קבוצה ו-d מטריקה על X נקרא *מרחב מטרי*.

זוהי הכללה טבעית של מושג המרחק במרחב האוקלידי, ולמרות שזו הכללה די רחבה, היא לא מספיק כללית עבורנו. אנחנו נעבוד במקום זה עם מרחבים מהסוג הבא:

טופולוגיה

הגדרה 1.1.2. *טופולוגיה* על קבוצה X מורכבת מקבוצה $\mathcal{T}$ של תתי-קבוצות של X כך ש:

1. אם $Y, Z \in \mathcal{T}$ אז גם $Y \cap Z \in \mathcal{T}$
2. אם $C \subseteq \mathcal{T}$ אז $\bigcup C \in \mathcal{T}$
3. $X \in \mathcal{T}$

מרחב טופולוגי

קבוצה פתוחה

זוג $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ כאשר X קבוצה ו-$\mathcal{T}$ טופולוגיה על X נקרא *מרחב טופולוגי*. קבוצה ב-$\mathcal{T}$ נקראת *קבוצה פתוחה* של המרחב הטופולוגי.

בקרוב נראה שזו אכן, במובן מסוים, הכללה של מרחבים מטריים, אבל במבוא הזה ננסה להסביר למה המושג המופשט הזה אכן נחוץ.

מרחבי פונקציות

נזכיר שסדרת פונקציות f_n מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$ *מתכנסת נקודתית* לפונקציה g אם הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת ל-$g(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. היינו רוצים לומר שהסדרה f_n עצמה, כסדרה של נקודות בקבוצה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ של כל הפונקציות מ-$\mathbb{R}$ לעצמו, מתכנסת ל-g, איבר נוסף באותה קבוצה. אולם אין שום מטריקה סבירה על $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ עבורה זה נכון.

מנות

המעגל $S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| = 1\}$ הוא תת-קבוצה של מרחב מטרי, ולכן מרחב מטרי בעצמו. התיאור הזה של הגאומטריה של המעגל משתמש בשיכון שלו במישור. האם הגאומטריה שלו אכן תלויה בשיכון הזה? אינטואיטיבית, המעגל מתקבל מקטע היחידה הסגור $I = [0,1]$ על-ידי הדבקת הקצוות $0, 1$ אחד לשני. האם ניתן לתאר את הפעולה הזו מתמטית? הקטע I הוא מרחב מטרי בעצמו, אבל פונקציית ההדבקה לא שומרת על המטריקה: המרחק בין 0 ל-1 הוא 1, אבל המרחק בין התמונות הוא 0.

באופן כללי, נסמן ב-d את המטריקה על I, וב-$p : I \to S^1$ את פונקציית ההדבקה (נניח, $p(t) = \langle \cos(2\pi t), \sin(2\pi t) \rangle$). על-מנת להגדיר מטריקה על S^1 שתשקף את המטריקה על I, אפשר לנסות להגדיר: $d_1(u,v) = \min\{d(x,y) \mid p(x) = u, p(y) = v\}$ לכל $u, v \in I$.

תרגיל 1.1.3. 1. הוכיחו שהנוסחה אכן מגדירה פונקציה $d_1 : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, אבל היא אינה מטריקה.

2. אפשר לנסות לתקן את הבעיה בהגדרה באמצעות התיקון הבא: $d_2(u,v) = \min\{d_1(u,w) + d_1(w,v) \mid w \in S^1\}$. הוכיחו ש-$d_2$ מטריקה על S^1.

3. באופן כללי, יתכן שצריך לעשות יותר מ"קפיצה" אחת, אז סביר לנסות להגדיר $d'(u,v) = \inf\{d_1(u,w_1) + \cdots + d_1(w_n,v) \mid w_i \in S^1\}$. נתבונן במקום בהדבקה הקודמת בפונקציה $p : \mathbb{R} \to S^1$ הנתונה על-ידי $p(t) = \langle \cos(2\pi e^t), \sin(2\pi e^t) \rangle$. הוכיחו שביחס לפונקציה זו (עם המטריקה הרגילה על $\mathbb{R}$), הפונקציה d' אינה מטריקה על S^1.

מטריקות שונות על אותו מרחב

לא הגדרנו מה זה אומר ששני מרחבים מטריים הם "אותו דבר", אבל סביר שזה אומר שהתכונות של המטריקה זהות בשניהם. למשל, המרחבים המטריים $(0,1)$ (קטע פתוח) ו-$\mathbb{R}$ עם המטריקות הרגילות הם שונים: המטריקה על $(0,1)$ חסומה, ועל $\mathbb{R}$ לא. מצד שני, קיימת העתקה רציפה הפיכה מ-$(0,1)$ ל-$\mathbb{R}$, עם הופכית רציפה (למשל $t \mapsto \cot(\pi t)$), ולכן מנקודת המבט של פונקציות רציפות, שני המרחבים לא ניתנים להפרדה. איזו נקודת מבט היא הנכונה? זה תלוי בהקשר.

1.2 הטורוס

המושג של מרחב טופולוגי מאפשר להגדיר מהן העתקות רציפות בין שני מרחבים כאלה. אחת הגישות להבנה של מרחב טופולוגי היא דרך הבנת אוסף כל ההעתקות הרציפות ממנו (למרחב כלשהו) או אליו. נדגים זאת ראשיות באמצעות המעגל. קיימת העתקה רציפה מ-I ל-S^1, העתקת ההדבקה f (רציפה במובן המוכר עבור מרחבים מטריים, בהמשך נראה שעבור מרחבים מטריים המושגים מתלכדים). אם $g : S^1 \to X$ העתקה רציפה (כאשר X מרחב כלשהו), אז $\tilde{g} = g \circ f : I \to X$ העתקה רציפה המקיימת $\tilde{g}(0) = \tilde{g}(1)$. בהמשך נראה שגם ההיפך נכון: אם $g : I \to X$ העתקה רציפה המקיימת $g(0) = g(1)$, אז יש העתקה רציפה (בהכרח יחידה) $\bar{g} : S^1 \to X$ כך ש-$g = \bar{g} \circ f$.

במלים אחרות, העתקות רציפות מ-S^1 למרחב כלשהו X זה "אותו דבר" כמו העתקות רציפות מ-I ל-X שמקבלות אותו ערך בקצוות. זה בדיוק הרעיון של "הדבקת הקצוות". אם לא ידענו מראש מהו S^1 היה אפשר לתאר את ההדבקה באופן הבא: זהו מרחב S ביחד עם העתקה רציפה $f : I \to S$, המקיימת $f(0) = f(1)$, ועם התכונה:

(†) לכל מרחב X, ההרכבה $g \mapsto g \circ f$ נותנת התאמה חח"ע ועל בין העתקות רציפות מ-S ל-X, להעתקות רציפות מ-I ל-X המסכימות על הקצוות.

תכונה זו מתארת לחלוטין את אוסף ההעתקות הרציפות מ-S למרחב כלשהו X, ולכן נותר לשאול: האם מרחב כזה S קיים? והאם הוא יחיד? על השאלה הראשונה אנחנו יודעים את התשובה בדוגמא הנוכחית כי ראינו ש-S^1 כזה (ובאופן כללי, התשובה על שאלות כאלה היא כן, כפי שנראה בהמשך. זה אחד היתרונות של מרחבים טופולוגיים). לגבי היחידות, ניתן לענות כבר עכשיו:

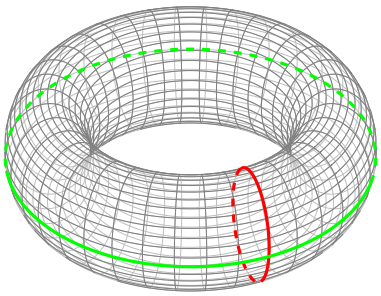
טענה 1.2.1. *אם $f : I \to S$ ו-$f' : I \to S'$ שניהם מקיימים את התכונה לעיל, אז יש העתקה רציפה יחידה $t : S \to S'$ כך ש-$t \circ f = f'$.*

הוכחה. לפי ההנחה, $f'(0) = f'(1)$. לכן, לפי התנאי (†), עבור $X = S'$, קיימת העתקה רציפה יחידה $t : S \to S'$ כך ש-$t \circ f = f'$. מאותה סיבה, קיימת העתקה רציפה יחידה $u : S' \to S$ המקיימת $u \circ f' = f$. לכן, $f = u \circ f' = u \circ (t \circ f) = (u \circ t) \circ f$. שימוש נוסף בתכונה (†), הפעם עבור $X = S$ וההעתקה $f : I \to S$, מראה שיש העתקה *יחידה* $v : S \to S$ המקיימת $v \circ f = f$. כיוון שהזהות היא העתקה כזו, קיבלנו ש-$u \circ t$ היא הזהות על S. באופן דומה, $t \circ u$ היא הזהות על S', כלומר u ההפכית של t. □

במלים אחרות, עד כדי העתקה רציפה הפיכה יחידה, המנה S מוגדרת על-ידי התכונה לעיל. הצלחנו לתאר את S^1 בלי להסתמך על המרחב $\mathbb{R}^2$ המכיל אותו.

תרגיל 1.2.2. הוכיחו שניתן לתאר את הפונקציות הרציפות על S^1 גם כפונקציות רציפות על $\mathbb{R}$ שהן מחזוריות עם מחזור 1 (כלומר, $f(x+1) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$).

באופן דומה, ניתן לתאר את הטורוס $\mathbb{T}^2$: אינטואיטיבית, זהו מרחב שהוא המעטפת של אבוב (או דונאט). דרך אחת לתאר אותו הוא כהדבקה: הוא מתקבל מריבוע היחידה הסגור $I \times I$ על-ידי



איור 1: מערכת קואורדינטות על הטורוס

הדבקת צלעות הפוכות. מנקודת המבט הזו, ניתן לתאר כמו קודם את אוסף הפונקציות הרציפות ממנו למרחב X: אלה פונקציות רציפות $f : I \times I \to X$ המקיימות $f(0,x) = f(1,x)$ ו-$f(x,0) = f(x,1)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. אבל אם אנחנו כבר מבינים את המרחב S^1, אפשר לגשת אל הטורוס אחרת: אם נצייר שני מעגלים בכיוונים מאונכים על הטורוס, ניתן לתאר כל נקודה על הטורוס על-ידי שתי קואורדינטות, כל אחת על אחד המעגלים (ראו איור 1).

במלים אחרות, כקבוצה, ניתן לזהות את הטורוס עם המכפלה הקרטזית $S^1 \times S^1$, ואינטואיטיבית, הזיהוי הזה הוא רציף. האם ניתן לבטא את העובדה הזו במדויק?

נשאל שאלה יותר כללית: בהינתן מרחבים X ו-Y, האם יש מבנה טבעי של מרחב טופולוגי על המכפלה הקרטזית $X \times Y$? ננסה לתאר את הבעיה מנקודת המבט של פונקציות רציפות. קבוצתית, נקודה ב-$X \times Y$ מתאימה לזוג נקודות, אחת ב-x והשנייה ב-Y. מידע על נקודה בודדת לא יכול לקודד רציפות, אבל קבוצתית, אפשר לומר באופן שקול שפונקציה מ-Z ל-$X \times Y$ זה כמו לתת פונקציה מ-Z ל-X ופונקציה מ-Z ל-Y. את הרעיון הזה אפשר להעביר להקשר הטופולוגי: המרחב $X \times Y$ הוא מרחב המקיים:

1. פונקציות ההטלה $\pi_1 : X \times Y \to X$ ו-$\pi_2 : X \times Y \to Y$ הן רציפות. לכן, אם $h : Z \to X \times Y$ פונקציה רציפה, מתקבלות פונקציות רציפות $\pi_i \circ h$.

2. אם Z מרחב כלשהו, ו-$f : Z \to X$ ו-$g : Z \to Y$ שתי פונקציות רציפות, אז יש פונקציה יחידה $h : Z \to X \times Y$ כך ש-$\pi_1 \circ h = f$ ו-$\pi_2 \circ h = g$.

גם כאן, סביר לשאול האם מרחב כזה $X \times Y$ קיים, ועד כמה התנאים שהשתמשנו בהם מגדירים אותו ביחידות. על השאלה הראשונה נענה (כן) בהמשך, על השנייה אפשר לענות באופן דומה לטיעון עם המעגל, אבל אנחנו ניקח נקודת מבט יותר כללית.

1.3 קטגוריות

בסעיף הקודם אימצנו את נקודת המבט שכדי להבין מרחב טופולוגי X עלינו להבין את אוסף ההעתקות ממנו או אליו מכלל המרחבים. ראינו שנקודת המבט הזו מועילה למרות שלא הגדרנו

עדיין מהי העתקה רציפה. התכונה העיקרית של העתקות רציפות שהשתמשנו בה (ללא הוכחה) היא שהרכבה של העתקות רציפות היא העתקה רציפה.

נקודת המבט הזו מועילה לא רק בטופולוגיה אלא גם בתחומים רבים אחרים, והיא מפורמלת במסגרת *תורת הקטגוריות*, שמאפשרת הגדרות וטיעונים כמו שראינו במסגרת כללית. התורה שימושית מאוד בהקשר הטופולוגי (ובמידה רבה נולדה במסגרת זו), ואנחנו נשתמש במושגי היסוד שלה.

תורת הקטגוריות

הגדרה 1.3.1. *קטגוריה* $\mathcal{C}$ מורכבת מאוסף $\mathbf{Ob}=\mathbf{Ob}_{\mathcal{C}}$ של *אובייקטים*, לכל $x,y\in\mathbf{Ob}$ קבוצה $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(x,y)=\mathcal{C}(x,y)$ של *מורפיזמים*, ולכל שלושה אובייקטים x,y,z פונקציה $\circ=\circ_{x,y,z}:\mathcal{C}(y,z)\times\mathcal{C}(x,y)\to\mathcal{C}(x,z)$ שנקראת *הרכבה*. המידע הזה מקיים את התנאים הבאים:

קטגוריה
אובייקטים
מורפיזמים
הרכבה

1. (אסוציאטיביות) לכל $f\in\mathcal{C}(x,y)$, $g\in\mathcal{C}(y,z)$ ו-$h\in\mathcal{C}(z,w)$ מתקיים $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.
2. (יחידה) לכל אובייקט $x\in\mathbf{Ob}$ קיים מורפיזם $\mathbf{1}_x\in\mathcal{C}(x,x)$ המקיים $f\circ\mathbf{1}_x=f$ ו-$\mathbf{1}_x\circ g=g$ לכל $f\in\mathcal{C}(y,x)$ ולכל $g\in\mathcal{C}(y,x)$.

אם x,y אובייקטים ו-$f\in\mathcal{C}(x,y)$ נאמר ש-f *מורפיזם מ-x ל-y*, ונסמן גם $f:x\to y$ או $x\xrightarrow{f}y$. האובייקט x נקרא *התחום* או *המקור* של f, ו-y נקרא *הטווח*.

מורפיזם מ-x ל-y
תחום
המקור
טווח

הערה 1.3.2. שימו לב למילה *אוסף* בהגדרת האובייקטים: אוסף זה לא נדרש להיות קבוצה (ובהרבה דוגמאות טבעיות אכן אינו קבוצה). בניגוד לזה, אוסף המורפיזמים בין שני אובייקטים הוא קבוצה. קטגוריה שאוסף האובייקטים בה הוא קבוצה נקראת *קטגוריה קטנה*.

קטגוריה קטנה

נשים לב גם שכל מורפיזם בקטגוריה "יודע" מיהם התחום והטווח שלו. בפרט, קבוצות המורפיזמים עבור אובייקטים שונים הן זרות. נסמן ב-$\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}$ את האיחוד $\bigcup_{x,y\in\mathbf{Ob}_{\mathcal{C}}}\mathcal{C}(x,y)$. אז יש לנו פונקציות $d,c:\mathbf{Mor}\to\mathbf{Ob}$ שמתאימות לכל מורפיזם את התחום והטווח שלו.

דוגמא 1.3.3. רוב המבנים המתמטיים שאנחנו מכירים מהווים קטגוריות: למשל, הקטגוריה $\mathcal{S}et$ בה האובייקטים הם קבוצות (מחלקה שאינה קבוצה!) והמורפיזמים הם פונקציות בין קבוצות, הקטגוריה $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ של מרחבים וקטוריים מעל שדה (קבוע) $\Bbbk$, עם העתקות לינאריות ביניהם, הקטגוריה $\mathcal{G}rp$ של חבורות והעתקות של חבורות, וכו'. בכל המקרים, ההרכבות הן הרכבות רגילות של פונקציות. הקורס הזה יעסוק בעיקר בקטגוריה $\mathcal{T}op$ של מרחבים טופולוגיים, שלא הוגדרה עדיין.

דוגמא 1.3.4. נקבע שדה $\Bbbk$. הקטגוריה $\mathcal{M}at_{\Bbbk}$ היא קטגוריה בה אוסף האובייקטים הוא $\mathbb{N}$, ולכל $i,j\in\mathbb{N}$, המורפיזמים מ-i ל-j הם מטריצות $j\times i$ עם ערכים ב-$\Bbbk$. ההרכבה נתונה על-ידי כפל מטריצות.

סוף הרצאה 1, 16 במרץ

תכונות ובניות מוכרות ניתן לפעמים לבצע ברמה הקטגורית. למשל, מורפיזם $f\in\mathcal{C}(x,y)$ נקרא *מורפיזם הפיך* אם קיים $g\in\mathcal{C}(y,x)$ כך ש-$g\circ f=\mathbf{1}_x$ ו-$f\circ g=\mathbf{1}_y$. במקרה זה נאמר גם ש-f איזומורפיזם מ-x ל-y וש-x איזומורפי ל-y. המורפיזם g נקרא *הפכי* של f.

מורפיזם הפיך
הפכי

תרגיל 1.3.5. מהם המורפיזמים ההפיכים בדוגמא 1.3.4?

טענות על קטגוריות לעתים נוח לנסח באמצעות דיאגרמות של חצים, שמייצגים מורפיזמים. למשל, האסוציאטיביות של ההרכבה היא הטענה שהדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & z \arrow[dr, "h"] & \\
& y \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h\circ g"] & & w
\end{tikzcd}$$

והטענה ש-f הפיך היא הטענה שקיים מורפיזם g שמשלים את הדיאגרמה הבאה לדיאגרמה מתחלפת:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, "\mathbf{1}_x"] \arrow[dr, "f"'] & & x \arrow[dr, "f"] & \\
& y \arrow[ur, dotted, "g"] \arrow[rr, "\mathbf{1}_y"] & & y
\end{tikzcd}$$

תרגיל 1.3.6. נניח ש-f מורפיזם מ-x ל-y. הוכיחו:

1. אם g הפכי של f, אז g הפיך
2. אם $g_1, g_2 : y \to x$ מקיימים $g_1 \circ f = \mathbf{1}_x$ ו-$f \circ g_2 = \mathbf{1}_y$ אז $g_1 = g_2$ ו-f הפיך (בפרט, ההפכי יחיד אם הוא קיים).
3. "x איזומורפי ל-y" הוא יחס שקילות על אוסף האובייקטים.

קטגוריה בה כל המורפיזמים הם הפיכים נקראת *גרופואיד*. גרופואיד

דוגמא 1.3.7. לכל קבוצה S אפשר להתאים קטגוריה $\mathcal{C}_S$ שאוסף האובייקטים בה הוא S, והמורפיזמים היחידים הם מהצורה $\mathbf{1}_x$ עבור $x \in S$. קטגוריה זו היא גרופואיד.

ניתן להכליל את הדוגמא האחרונה באופן הבא:

תרגיל 1.3.8. נניח ש-R יחס על קבוצה S. נגדיר $\mathbf{Ob} = S$ ו-$\mathbf{Mor} = R$ כאשר הפונקציות d, c הן ההטלות (כלומר יש מורפיזם יחיד מ-x ל-y אם ורק אם xRy).

1. הוכיחו שיש לכל היותר מבנה אחד של קטגוריה עם הנתונים הללו.
2. מהן התכונות ש-R צריך לקיים על מנת שזו אכן תהיה קטגוריה? אילו תכונות נוספות נדרשות על מנת שהקטגוריה תהיה גרופואיד?

נסמן את הקטגוריה הזו ב-$\mathcal{C}_{S,R}$.

נחזור כעת למכפלה הקרטזית. בחינה של ההגדרה שהצענו מראה שהיא תקפה בכל קטגוריה!

מכפלה

הגדרה 1.3.9. נניח ש-x, y אובייקטים בקטגוריה $\mathcal{C}$. *מכפלה* של x ו-y היא אובייקט z ביחד עם מורפיזמים $\pi_1 : z \to x$ ו-$\pi_2 : z \to y$, עם התכונה: לכל אובייקט u עם מורפיזמים $f : u \to x$ ו-$g : u \to y$, יש מורפיזם יחיד $t : u \to z$ כך ש-$f = \pi_1 \circ t$ ו-$g = \pi_2 \circ t$.

זוהי בדיוק התכונה שניסחנו עבור הטורוס, מנוסחת בקטגוריה כללית. המורפיזמים π_1, π_2 נקראים *הטלות*. כמובן שמכפלות לא בהכרח קיימות.

הטלות

תרגיל 1.3.10. הוכיחו שבקטגוריית הקבוצות ובקטגוריית החבורות, המכפלה הקרטזית הרגילה היא מכפלה במובן הקטגוריה. הוכיחו גם שבקטגוריית השדות אין מכפלות.

השאלה ששאלנו בהקשר של הטורוס הייתה: האם התכונה שרשמנו מגדירה את המכפלה ביחידות? נראה עכשיו שהתשובה היא כן, בהקשר הקטגורי המלא.

טענה 1.3.11. *אם z ו-w שניהם מכפלה של x_1 ו-x_2, עם הטלות $p_i : z \to x_i$ ו-$q_i : w \to x_i$, אז קיים מורפיזם יחיד $f : z \to w$ כך ש-$q_i \circ f = p_i$ עבור $i = 1, 2$, ו-f הוא איזומורפיזם.*

ההוכחה דומה מאוד להוכחת טענה 1.2.1.

הוכחה. הקיום והיחידות של f נובעים ישירות מהיותו של w מכפלה, כשההגדרה מופעלת על הנתונים p_1, p_2. באופן דומה, נובע מהעובדה ש-z מכפלה שקיים מורפיזם (יחיד) $g : w \to z$ כך ש-$p_i \circ g = q_i$. אז $f \circ g : w \to w$ מקיימת $q_i \circ (f \circ g) = (q_i \circ f) \circ g = p_i \circ g = q_i$. כיוון ש-$q_i \circ \mathbf{1}_w = q_i$ גם כן, נובע מהיחידות ש-$f \circ g = \mathbf{1}_w$. באופן דומה, $g \circ f = \mathbf{1}_z$. $\square$

אם y, z אובייקטים בקטגוריה $\mathcal{C}$ שיש להם מכפלה ב-$\mathcal{C}$, נסמן מכפלה זו ב-$y \times z$. לפי הטענה האחרונה, זה מוגדר היטב עד-כדי איזומורפיזם *יחיד*.

תרגיל 1.3.12. נניח ש-R יחס סדר על קבוצה S. תארו, במונחים של R, את המכפלות ב-$\mathcal{C}_{S,R}$ (תרגיל 1.3.8).

אובייקט אחרון

אובייקט סופי

תרגיל 1.3.13. אובייקט x בקטגוריה $\mathcal{C}$ נקרא *אובייקט אחרון* (או *אובייקט סופי*) אם לכל אובייקט יש מורפיזם יחיד ל-x.

1. מיצאו את האובייקטים האחרונים בקטגוריית הקבוצות, החבורות והשדות.
2. הוכיחו שאם R יחס סדר על קבוצה S, אז בקטגוריה $\mathcal{C}_{S,R}$ (תרגיל 1.3.8) אובייקט הוא אחרון אם ורק אם הוא מקסימום ב-R.
3. הוכיחו שכל שני אובייקטים אחרונים באותה קטגוריה הם איזומורפיים.

תרגיל 1.3.14. נניח ש-x, y אובייקטים ב-$\mathcal{C}$, ונגדיר קטגוריה $\mathcal{C}_{/x,y}$ באופן הבא:

- האובייקטים הם שלשות $\langle z, p, q \rangle$ כאשר z אובייקט ב-$\mathcal{C}$ ו-$p : z \to x$ ו-$q : z \to y$ הם מורפיזמים ב-$\mathcal{C}$.

- מורפיזם מ-$\langle z_1, p_1, q_1\rangle$ ל-$\langle z_2, p_2, q_2\rangle$ הוא מורפיזם $t : z_1 \to z_2$ המקיים $p_2 \circ t = p_1$ ו-$q_2 \circ t = q_1$.

$$\begin{tikzcd}
z_1 \arrow[rr, dashed, "t"] \arrow[dr, "p_1"'] \arrow[drr, "q_1"] & & z_2 \arrow[dl, "q_2"] \arrow[dll, "p_2"'] \\
& x \quad y &
\end{tikzcd}$$

- ההרכבה היא כמו ב-$\mathcal{C}$.

מיצאו את האובייקטים הסופיים ב-$\mathcal{C}_{/x,y}$.

תרגיל 1.3.15. נתבונן בקטגוריה שהאובייקטים שלה הן קבוצות, והמורפיזמים מ-A ל-B הם יחסים $R \subseteq A \times B$. הרכבה נתונה על-ידי הרכבת יחסים (כלומר $S \circ R = \{\langle a, c\rangle \mid \exists b \in B(aRb \wedge bSc)\}$ עבור $R : A \to B$ ו-$S : B \to C$). חשבו בקטגוריה זו מיהם המורפיזמים ההפיכים, האובייקטים האחרונים והמכפלות.

2 מרחבים טופולוגיים וההעתקות ביניהם

2.1 הגדרות ודוגמאות

הגדרנו מרחבים טופולוגיים בהגדרה 1.1.2. נזכיר שקבוצה ששייכת לטופולוגיה נקראת קבוצה פתוחה. תת-קבוצה של המרחב נקראת *קבוצה סגורה* אם המשלימה שלה (ביחס למרחב כולו) היא פתוחה.

קבוצה סגורה

עכשיו נראה מספר דוגמאות.

דוגמא 2.1.1. הממשיים עם הקבוצות הפתוחות הרגילות (באופן יותר כללי, $\mathbb{R}^n$)

אם $\mathcal{T}_1$ ו-$\mathcal{T}_2$ שתי טופולוגיות על אותה קבוצה, $\mathcal{T}_1$ נקראת *גסה* (או *חלשה*) יותר מ-$\mathcal{T}_2$, ו-$\mathcal{T}_2$ *עדינה* (או *חזקה*) יותר מ-$\mathcal{T}_1$ אם $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

גסה

חלשה

עדינה

חזקה

דוגמא 2.1.2. על כל קבוצה X יש טופולוגיה חזקה ביותר $\mathcal{P}(X)$ שנקראת *הטופולוגיה הדיסקרטית* וטופולוגיה חלשה ביותר $\{\emptyset, X\}$ שנקראת *הטופולוגיה הטריוויאלית*.

הטופולוגיה הדיסקרטית

הטופולוגיה הטריוויאלית

נשים לב שטופולוגיה $\mathcal{T}$ על X היא הדיסקרטית אם ורק אם כל יחידון של X שייך ל-$\mathcal{T}$, אם ורק אם כל תת-קבוצה היא סגורה.

לעתים יותר קל לתאר טופולוגיה על-ידי הצגת הקבוצות הסגורות.

דוגמא 2.1.3. *הטופולוגיה הקו-סופית* היא הטופולוגיה בה הקבוצות הסגורות הן הקבוצות הסופיות (וכל X). באופן יותר כללי, אם κ מונה אינסופי, ישנה טופולוגיה על X בה הקבוצות הסגורות הן אלה שעוצמתן קטנה מ-κ (ו-X).

הטופולוגיה הקו-סופית

לא תמיד קל לתאר במפורש את כל הקבוצות הפתוחות, ויותר נוח לתאר קבוצה שיוצרת אותן, במובן הבא:

בסיס

הגדרה 2.1.4. קבוצה $\mathcal{B}$ של תתי-קבוצות של X נקראת *בסיס* של קבוצות פתוחות אם $\bigcup \mathcal{B} = X$ ולכל $A, C \in \mathcal{B}$, החיתוך $A \cap C$ הוא איחוד של קבוצות ב-$\mathcal{B}$.

תרגיל 2.1.5. נניח ש-X קבוצה

1. הוכיחו שאם $\mathcal{C}$ אוסף לא ריק של טופולוגיות על X, אז גם החיתוך $\bigcap \mathcal{C}$ טופולוגיה על X. הסיקו שלכל קבוצה $\mathcal{B}$ של תתי-קבוצות של X, יש טופולוגיה חלשה ביותר $\langle \mathcal{B} \rangle$ שבה איברי $\mathcal{B}$ קבוצות פתוחות.

2. נניח ש-$\mathcal{B}$ בסיס על X. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים עבור $U \subseteq X$:

   (א) $U \in \langle \mathcal{B} \rangle$.

   (ב) U היא איחוד של קבוצות ב-$\mathcal{B}$.

   (ג) לכל $x \in U$ יש $A \in \mathcal{B}$ כך ש-$x \in A \subseteq U$.

נוצרת

אם $\mathcal{T}$ טופולוגיה ו-$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ קבוצה כך ש-$\mathcal{T} = \langle \mathcal{B} \rangle$, אומרים ש-$\mathcal{T}$ *נוצרת* על-ידי $\mathcal{B}$. אם בנוסף $\mathcal{B}$ בסיס, אומרים ש-$\mathcal{B}$ בסיס של $\mathcal{T}$. הקשר בין טופולוגיה לבסיס שלה דומה לקשר בין מרחב וקטורי לתת-קבוצה יוצרת שלו: הטופולוגיה היא האובייקט הקאנוני שקל לעבוד איתו באופן מופשט, אבל תיאור של טופולוגיה ספציפית לעתים יותר קל באמצעות בסיס.

הטופולוגיה המטרית

אחת הדוגמאות להגדרה של טופולוגיה באמצעות בסיס היא הטופולוגיה על מרחב מטרי. אם

כדור פתוח

$\langle X, d \rangle$ מרחב מטרי, *כדור פתוח* ב-X הוא קבוצה מהצורה $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$, כאשר $x \in X$ ו-$r \in \mathbb{R}$.

טענה 2.1.6. *אם $\langle X, d \rangle$ מרחב מטרי, אז האוסף $\mathcal{B} = \{B_r(x) \mid x \in X, r \in \mathbb{R}\}$ של הכדורים הפתוחים מהווה בסיס.*

הוכחה. נניח ש-$y \in B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$. אז $r_i' = d(x_i, y) < r_i$. נסמן $r = \min\{r_1 - r_1', r_2 - r_2'\}$, ונוכיח ש-$B_r(y) \subseteq B_{r_i}(x_i)$ (ואז החיתוך הוא איחוד של כדורים כאלה). נניח ש-$z \in B_r(y)$, כלומר $d(z,y) < r$. אז לפי אי-שוויון המשולש, $d(x_i, z) \leq d(x_i, y) + d(y, z) < r_i' + r \leq r_i$. $\square$

הטופולוגיה המטרית

הטופולוגיה שנוצרת על-ידי הבסיס הזה נקראת *הטופולוגיה המטרית*. אנחנו נתייחס לכל מרחב מטרי כאל מרחב טופולוגי באמצעות הטופולוגיה הזו.

דוגמא 2.1.7. הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}^n$ היא לפי הגדרה הטופולוגיה המטרית (שמושרית על-ידי המטריקה האוקלידית).

סוף הרצאה 2, 18 במרץ

כיוון שלטופולוגיה נתונה יכולים להיות בסיסים שונים, מעניין לבדוק לפעמים ששני בסיסים יוצרים אותה טופולוגיה.

תרגיל 2.1.8. נניח ש-$\mathcal{B}$ בסיס לטופולגיה $\mathcal{T}$, ונניח ש-$\mathcal{B}'$ קבוצה של תתי-קבוצות פתוחות של X כך ש-$\bigcup \mathcal{B}' = X$, וכל קבוצה ב-$\mathcal{B}$ היא איחוד של קבוצות ב-$\mathcal{B}'$. הוכיחו שגם $\mathcal{B}'$ בסיס של $\mathcal{T}$.

תרגיל 2.1.9. הוכיחו שאוסף הקופסאות הפתוחות $I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$, כאשר כל I_j קטע פתוח, הוא גם בסיס לטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}^n$.

בהינתן מרחב טופולוגי, טבעית לשאול האם הטופולוגיה עליו היא מטרית, עבור איזושהי מטריקה. מרחב כזה נקרא *מרחב מטריזבילי*. בהמשך נעסוק בשאלה הזו בהרחבה, אך כרגע נראה שתי דוגמאות.

מרחב מטריזבילי

תרגיל 2.1.10. הוכיחו שהטופולוגיה הדיסקרטית על כל קבוצה היא מטרית.

מרחב סירפינסקי הוא הקבוצה $\{0,1\}$ עם הטופולוגיה שכוללת את כל תתי-הקבוצות מלבד $\{1\}$.

מרחב סירפינסקי

תרגיל 2.1.11. הוכיחו שטופולוגיה מטרית על קבוצה סופית היא בהכרח דיסקרטית. הסיקו שמרחב סירפינסקי אינו מטריזבילי

תרגיל 2.1.12. מטריקה d על מרחב X נקראת *אולטרא-מטריקה* אם לכל $x, y, z \in X$ מתקיים $d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(z,y))$. נניח ש-$d$ אולטרא-מטריקה על X. הוכיחו:

אולטרא-מטריקה

1. אם B_1 ו-B_2 שני כדורים (פתוחים) שאינם זרים, אז אחד מהם מוכל בשני.
2. כל כדור פתוח הוא קבוצה סגורה.

טופולוגיית הסדר

עוד מחלקה של טופולוגיות שקל להגדיר על-ידי בסיס הוא טופולוגיות על קבוצות סדורות. אם $\langle X, \preceq \rangle$ קבוצה סדורה, נסמן $X_\infty = X \cup \{\infty, -\infty\}$, עם הסדר מורחב כך ש-$-\infty \preceq x \preceq \infty$ לכל $x \in X_\infty$. לכל $a, b \in X_\infty$, קבוצה מהצורה $(a,b) = \{x \in X \mid a \prec x \prec b\}$ נקראת *קטע פתוח*, וקבוצה מהצורה $[a,b) = \{x \in X \mid a \preceq x \prec b\}$ נקראת *קטע חצי פתוח מימין*.

קטע פתוח

קטע חצי פתוח מימין

הגדרה 2.1.13. נניח ש-$\langle X, \preceq \rangle$ קבוצה סדורה קווית. *טופולוגיית הסדר* על X היא הטופולוגיה שנוצרת על-ידי הקטעים הפתוחים. *טופולוגיית הגבול התחתון* על X נוצרת על-ידי הקטעים החצי פתוחים מימין. נסמן ב-X_o את המרחב עם טופולוגיית הסדר, וב-X_l את המרחב עם טופולוגיית הגבול התחתון.

טופולוגיית הסדר

טופולוגיית הגבול התחתון

דוגמא 2.1.14. הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$ היא טופולוגיית הסדר (עם הסדר הרגיל).

תרגיל 2.1.15. נניח ש-$\langle X, \preceq \rangle$ קבוצה סדורה קווית. הוכיחו:

1. שני האוספים הם בסיסים עבור הטופולוגיה שהם מגדירים.
2. הטופולוגיה על X_l עדינה מזו על X_o.

3. כל קטע חצי פתוח מימין הוא גם סגור ב-X_l.

תרגיל 2.1.16. הוכיחו שקטעים מהצורה $(a,b]$ עבור $a<b$ ב-$\mathbb{R}$ אינם פתוחים ואינם סגורים ב-$\mathbb{R}_l$.

תרגיל 2.1.17. בכל אחד מהסעיפים נתונה קבוצה X ושתי טופולוגיות. קיבעו לגבי כל אחת האם היא מעדנת את האחרת.

1. $X=\mathbb{N}$, עם טופולוגיית הסדר (עבור הסדר הרגיל) ועם הטופולוגיה הדיסקרטית.
2. $X=\{0,1\}\times\mathbb{N}$, עם טופולוגיית הסדר עבור הסדר המילוני (כלומר, $\langle i,n\rangle \preceq \langle j,m\rangle$ אם $i<j$ או $i=j$ ו-$n\leq m$), ועם הטופולוגיה הדיסקרטית.
3. $X=\mathbb{R}$ עם טופולוגיית הסדר, ועם הטופולוגיה שנוצרת על-ידי קטעים פתוחים שהקצוות שלהם ב-$\mathbb{Q}_\infty$.
4. $X=\mathbb{R}$ עם טופולוגיית הגבול התחתון, ועם הטופולוגיה שנוצרת על-ידי קטעים חצי פתוחים מימין שקצוותיהם ב-$\mathbb{Q}_\infty$.
5. $X=\mathbb{R}$ עם טופולוגיית הסדר, ועם הטופולוגיה שנוצרת על-ידי קטעים חצי פתוחים מימין שקצוותיהם ב-$\mathbb{Q}_\infty$.

דוגמאות נוספות

דוגמא 2.1.18. נניח ש-A תת-אלגברה (מעל $\mathbb{R}$) של אלגברת הפונקציות $\mathbb{R}^X$ מ-X ל-$\mathbb{R}$. לכל $B\subseteq A$, נסמן $Z(B)=\{x\in X \mid b(x)=0\forall b\in B\}$. הטופולוגיה בה הקבוצות הסגורות הן מצורה זו נקראת *טופולוגיית זריצקי*.

טופולוגיית זריצקי

תרגיל 2.1.19. הוכיחו שזו אכן טופולוגיה

דוגמא 2.1.20. הטופולוגיה הסטנדרטית על המעגל S^1 נוצרת על-ידי הקשתות הפתוחות. (בהמשך ניתן תיאורים יותר קונספטואליים של הטופולוגיה הזו).

דוגמא 2.1.21. נניח ש-V מרחב וקטורי ממימד n סופי מעל $\mathbb{R}$ (או $\mathbb{C}$). אם $T:V\to\mathbb{R}^n$ איזומורפיזם לינארי (כלומר בחירת בסיס), נגדיר טופולוגיה על V על-ידי $\{T^{-1}(U)\mid U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה$\}$ (הוכיחו שהטופולוגיה לא תלויה בבחירת הבסיס).

המרחב הפרויקטיבי

נגדיר את $\mathbb{P}(V)$, *המרחב הפרויקטיבי* המתאים ל-V, באופן הבא: כקבוצה, זוהי קבוצת תתי-המרחבים ממימד 1 של V. לכל $v\in V$ שונה מ-0, יש איבר יחיד של $\mathbb{P}(V)$ שמכיל את v (המרחב שנוצר על-ידי v). זה מגדיר פונקציה מ-$V\setminus\{0\}$ על $\mathbb{P}(V)$. בהמשך נגדיר טופולוגיה קבוצה זו.

2.2 העתקות רציפות

הגדרה 2.2.1. נניח ש-X, Y מרחבים טופולוגיים. פונקציה $f : X \to Y$ היא *העתקה רציפה* אם לכל קבוצה פתוחה U של Y, הקבוצה $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X. העתקה רציפה

תרגיל 2.2.2. אם $f : X \to Y$ ו-$g : Y \to Z$ העתקות רציפות, אז גם $g \circ f : X \to Z$ רציפה.

לכן, מרחבים טופולוגיים עם העתקות רציפות (והרכבה רגילה של פונקציות) מהווה קטגוריה, $\mathcal{T}op$.

תרגיל 2.2.3. נניח ש-$f : X \to Y$ פונקציה בין מרחבים טופולוגיים.

1. f רציפה אם ורק אם $f^{-1}(Z)$ סגורה לכל $Z \subseteq Y$ סגורה.
2. נניח ש-$\mathcal{B}$ יוצר את הטופולוגיה על Y. אז f רציפה אם ורק אם $f^{-1}(U)$ פתוחה לכל $U \in \mathcal{B}$ (רמז: התבוננו ב-$\{V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$).

תרגיל 2.2.4. נניח ש-X קבוצה. הוכיחו שהטופולוגיה הדיסקרטית על X היא הטופולוגיה היחידה עבורה כל פונקציה מ-X למרחב כלשהו Y היא רציפה, והטופולוגיה הטריוויאלית היחידה עבורה כל פונקציה ממרחב Y ל-X היא רציפה.

תרגיל 2.2.5. כל פונקציה קבועה בין מרחבים טופולוגיים היא רציפה

דוגמא 2.2.6. נסמן ב-S את מרחב סירפינסקי. אז $f : X \to S$ רציפה אם ורק אם היא הפונקציה המציינת של תת-קבוצה פתוחה.

דוגמא 2.2.7. אם $\mathcal{T}_1$ ו-$\mathcal{T}_2$ טופולוגיות על קבוצה X, אז פונקציית הזהות מ-X לעצמו היא רציפה ביחס ל-$\mathcal{T}_1$ בתחום ו-$\mathcal{T}_2$ בתמונה, אם ורק אם $\mathcal{T}_1$ מעדנת את $\mathcal{T}_2$.

דוגמא 2.2.8. עבור הטופולוגיה הקו-סופית על Y, פונקציה $f : X \to Y$ היא רציפה אם ורק אם לכל $y \in Y$, הסיב $X_y = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ הוא קבוצה סגורה. בפרט, עם הטופולוגיה הקו-סופית על $\mathbb{R}$, בטופולוגיית זריצקי המתאימה ל-A, כל איברי A הם פונקציות רציפות.

דוגמא 2.2.9. נסמן ב-$\omega + 1 = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ את הקבוצה הסדורה המתקבלת מ-$\mathbb{N}$ (עם הסדר הרגיל) על-ידי הוספת איבר ω גדול מכל הטבעיים. עם טופולוגיית הסדר, פונקציה $f : \omega + 1 \to \mathbb{R}$ היא רציפה אם ורק אם $f(\omega)$ הוא הגבול של הסדרה $f\restriction_{\mathbb{N}}$.

אם $\langle X, d_X \rangle$ ו-$\langle Y, d_Y \rangle$ שני מרחבים מטריים, יש לנו כבר הגדרה אחרת לפונקציה רציפה, שאנחנו סוחבים עוד מאינפי: $f : X \to Y$ רציפה בנקודה $x \in X$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $d_X(x', x) < \delta$ אז $d_Y(f(x'), f(x)) < \epsilon$, ו-$f$ רציפה אם היא רציפה בכל נקודה של X. על מנת להראות שההגדרה שלנו סבירה, נראה ששני המושגים מתלכדים עבור מרחבים כאלה.

לשם כך, נגדיר ראשית רציפות בנקודה:

הגדרה 2.2.10. נניח ש-X מרחב טופולוגי. *סביבה פתוחה* של הנקודה $x \in X$ היא קבוצה פתוחה שכוללת את x. סביבה פתוחה

אם Y מרחב טופולוגי נוסף, פונקציה $f : X \to Y$ היא *רציפה בנקודה* $x \in X$ אם לכל סביבה פתוחה V של $f(x)$ ב-Y יש סביבה פתוחה U של x כך ש-$f(U) \subseteq V$. רציפה בנקודה

טענה 2.2.11. *אם X, Y מרחבים טופולוגיים, ו-$f : X \to Y$ פונקציה, אז f רציפה אם ורק אם היא רציפה בכל נקודה של X.*

הוכחה. נניח ש-f רציפה ו-$x \in X$. ניקח סביבה פתוחה V של $f(x)$, ונגדיר $U = f^{-1}(V)$. אז U פתוחה וכוללת את x, ו-$f(U) \subseteq V$.

נניח ש-f רציפה בכל נקודה של X, וניקח $V \in \mathcal{T}_Y$. נסמן $U = f^{-1}(V)$. לכל $x \in U$, יש U_x פתוחה שכוללת את x ו-$f(U_x) \subseteq V$. אז $U = \bigcup_x U_x$ פתוחה. $\square$

התרגיל הבא מקל על השימוש בהגדרת רציפות בנקודה.

תרגיל 2.2.12. נניח ש-$f : X \to Y$ פונקציה בין מרחבים טופולוגיים, ו-$x \in X$.

1. נניח ש-$\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה על Y. אם f מקיימת את הגדרת הרציפות בנקודה עבור סביבות פתוחות $V \in \mathcal{B}$, אז f רציפה ב-x.

2. אם $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה על X, ו-f רציפה ב-x, אז ניתן לבחור את U ב-$\mathcal{B}$.

מסקנה 2.2.13. *נניח ש-X, Y מרחבים מטריים, ו-$f : X \to Y$. אז f רציפה במובן המטרי אם ורק אם היא רציפה במובן הטופולוגי.*

הוכחה. לפי הטענה, f רציפה במובן הטופולוגי אם ורק אם היא רציפה בכל נקודה, ולפי התרגיל האחרון מספיק לבדוק את ההגדרה לכדורים. נניח ש-f רציפה במובן המטרי, ונניח ש-B כדור ברדיוס ϵ סביב $f(x)$. לפי ההנחה, יש $\delta > 0$ כך שתמונת הכדור U ברדיוס δ סביב x מוכלת ב-B. הכיוון ההפוך דומה. $\square$

מסקנה 2.2.14. *פונקציות החיבור והכפל על $\mathbb{R}$ (עם הטופולוגיה הרגילה) הן רציפות. באופן דומה עבור $\mathbb{C}$.*

הערה 2.2.15. בשלב זו אנחנו רואים שפעולות החשבון על $\mathbb{R}$ רציפות כפונקציות מ-$\mathbb{R}^2$ עם הטופולוגיה המטרית. זה לא לגמרי שימושי כי אנחנו לא יודעים שהטופולוגיה הזו היא טופולוגיית המכפלה (הקטגורית). נראה זאת בקרוב.

דוגמא 2.2.16. פונקציה $f : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$ היא רציפה בנקודה a אם ורק אם היא רציפה מימין ב-a ביחס לטופולוגיה הרגילה.

תרגיל 2.2.17. נגדיר $f : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}_l$ על-ידי: $f(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ (הערך השלם של x). הוכיחו ש-f רציפה.

סוף הרצאה 3, 23 במרץ

הומאומורפיזמים

מורפיזם הפיך ב-$\mathcal{T}op$ נקרא *הומיאומורפיזם*. שני מרחבים הם הומיאומורפיים אם יש הומיאומורפיזם מאחד לשני. ראינו כבר שפונקציה רציפה, חח"ע ועל לא חייבת להיות הפיכה. הדרישה החסרה מצויה בהגדרה הבאה: הומיאומורפיזם

הגדרה 2.2.18. העתקה $f : X \to Y$ היא *העתקה פתוחה* אם $f(U)$ פתוחה לכל $U \subseteq X$ פתוחה, והיא *העתקה סגורה* אם $f(Z) \subseteq Y$ סגורה לכל $Z \subseteq X$ סגורה. העתקה פתוחה, העתקה סגורה

תרגיל 2.2.19. העתקה פתוחה ורציפה שהיא חח"ע ועל היא הומיאומורפיזם.

בניגוד לרציפות, שניתן לבטא באופן שקול באמצעות קבוצות פתוחות או סגורות, שני התנאי האחרונים הם בלתי תלויים:

תרגיל 2.2.20. הוכיחו שההטלה מ-$\mathbb{R}^2$ ל-$\mathbb{R}$ היא פתוחה אבל לא סגורה, ושהפונקציה $f(x)=\sin(x)$ היא סגורה אבל לא פתוחה.

תרגיל 2.2.21. הוכיחו שההכלה $f : \mathbb{Q}_o \to \mathbb{R}_o$ (ביחס לסדר הרגיל) היא רציפה, אך אינה פתוחה או סגורה.

תרגיל 2.2.22. נסמן ב-$\preceq$ את הסדר המילוני על $\mathbb{Q}^2$, כלומר $\langle x_1, y_1\rangle \preceq \langle x_2, y_2\rangle$ אם $x_1 < x_2$ או $x_1 = x_2$ ו-$y_1 \leq y_2$. נסמן ב-$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^2$ את השיכון $f(x) = \langle x, 0\rangle$. האם f רציפה?

תרגיל 2.2.23. הפונקציה $f : [0, 1) \to S^1$, כאשר הטופולוגיה על התחום היא המטרית, ועל S^1 טופולוגיית הקשתות הפתוחות, הנתונה על-ידי $f(t) = \langle\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\rangle$, היא רציפה וחח"ע, אבל לא פתוחה.

תרגיל 2.2.24. נניח ש-$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה וחח"ע. הוכיחו ש-f פתוחה. בפרט, אם f גם על, אז f הומאומורפיזם. אפשר להשתמש בשלבים הבאים:

1. מספיק להראות ש-$I = f((-1, 1))$ פתוחה
2. I חסומה
3. I קטע
4. I קטע פתוח

2.3 פנקטורים

הפילוסופיה של תורת הקטגוריות מכתיבה שמבנה מתמטי מקודד על ידי העתקות. מהן, אם כן, ההעתקות בין קטגוריות?

הגדרה 2.3.1. נניח ש-$\mathcal{C}$ ו-$\mathcal{D}$ שתי קטגוריות. *פנקטור* מ-$\mathcal{C}$ ל-$\mathcal{D}$ מורכב מהמידע הבא: פנקטור

1. פונקציה $f : \mathbf{Ob}_{\mathcal{C}} \to \mathbf{Ob}_{\mathcal{D}}$

2. לכל $x, y \in \mathbf{Ob}_{\mathcal{C}}$ ולכל $t \in \mathcal{C}(x, y)$, מורפיזם $f(t) : f(x) \to f(y)$.

כך ש-

1. לכל $x \in \mathbf{Ob}_{\mathcal{C}}$ מתקיים $f(\mathbf{1}_x) = \mathbf{1}_{f(x)}$

2. לכל $t \in \mathcal{C}(x, y)$ ו-$s \in \mathcal{C}(y, z)$ מתקיים $f(s \circ t) = f(s) \circ f(t)$

אינטואיטיבית, פנקטור מתאים באופן "טבעי" או "קאנוני" אובייקט מסוג $\mathcal{D}$ לכל אובייקט מסוג $\mathcal{C}$. הטבעיות מתבטאת בעובדה שהוא מתאים גם העתקות. ננסה להשתכנע בזה באמצעות מספר דוגמאות.

דוגמא 2.3.2. נניח ש-$\Bbbk$ שדה. לכל קבוצה A נסמן ב-$\Bbbk\langle A\rangle$ את המרחב הוקטורי שנוצר על-ידי A: זהו מרחב וקטורי שמכיל את A כבסיס. ההתאמה הזו היא (חלק מ-) פנקטור מ-$\mathcal{S}et$ ל-$\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$, קטגורית המרחבים הלינאריים מעל $\Bbbk$, ששולח פונקציה של קבוצות $s : A \to B$ להעתקה הלינארית היחידה $f(s) : \Bbbk\langle A\rangle \to \Bbbk\langle B\rangle$ עבורה $f(s)(a) = s(a) \in B \subseteq \Bbbk\langle B\rangle$ לכל $a \in A \subseteq \Bbbk\langle A\rangle$. על מנת להראות שזה פנקטור, יש להראות את התנאי על היחידה (תרגיל), וכן ש-$f(t \circ s) = f(t) \circ f(s)$ לכל $t : B \to C$. על מנת להראות זאת, מספיק להראות שההעתקות מסכימות על הבסיס A, וזה ברור.

דוגמא 2.3.3. נסמן ב-$\mathcal{M}et$ את הקטגוריה של מרחבים מטריים והעתקות רציפות ביניהם (במובן המטרי). נסמן ב-$f(X)$ לכל מרחב מטרי X את המרחב הטופולוגי עם הטופולוגיה המטרית המתאימה. זהו פנקטור כאשר לכל העתקה רציפה s מתאימים את עצמה כהעתקה של מרחבים טופולוגיים. כיוון שההרכבה בשתי הקטגוריות היא פשוט הרכבה של פונקציות, זהו פנקטור.

תרגיל 2.3.4. נסמן ב-$\mathcal{L}os$ את הקטגוריה של קבוצות סדורות קווית (עם העתקות שומרות סדר). האם ההתאמה שמתאימה לכל קבוצה סדורה כזו את המרחב עם טופולוגיית הסדר היא פנקטור?

פנקטור נאמן

פנקטור $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ הוא *פנקטור נאמן* אם הוא חח"ע על המורפיזמים: אם $f(t) = f(s)$ עבור $t, s : x \to y$ ב-$\mathcal{C}$, אז $t = s$.

תרגיל 2.3.5. לכל זוג קטגוריות $\mathcal{C}$ ו-$\mathcal{D}$, מיצאו פנקטור נאמן מ-$\mathcal{C}$ ל-$\mathcal{D}$.

1. $\mathcal{C} = \mathcal{S}et$ (קטגוריית הקבוצות), ו-$\mathcal{D} = \mathcal{T}op$ (מרחבים טופולוגיים).

2. עבור $\Bbbk$ שדה נתון, $\mathcal{C} = \mathcal{M}at_{\Bbbk}$ מדוגמא 1.3.4, $\mathcal{D} = \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$.

3. $\mathcal{C} = \mathcal{S}et_p$, הקטגוריה בה האובייקטים הם קבוצות, והמורפיזמים מ-A ל-B הם פונקציות חלקיות מ-A ל-B, ו-$\mathcal{D} = \mathcal{S}et_*$, קטגוריית הזוגות $\langle X, x\rangle$ כאשר X קבוצה, ו-$x \in X$. מורפיזם מ-$\langle X, x\rangle$ ל-$\langle Y, y\rangle$ הוא פונקציה $f : X \to Y$ (של קבוצות) כך ש-$f(x) = y$.

סוף הרצאה 4, 25 במרץ

3 בניות ותכונות בסיסיות

3.1 מכפלות

במבוא העלינו את שאלת המכפלות של מרחבים טופולוגיים. בזכות השפה הקטגורית, הצלחנו להגדיר מה אנחנו מחפשים עוד לפני שידענו מהם מרחבים טופולוגיים. עכשיו הגיע הזמן לענות על השאלה, האם מכפלות אכן קיימות, ואם כן, איך ניתן לתאר אותן. אנחנו נענה על השאלות הללו בהרחבה.

לפני שניתן את התשובה, נכליל קצת את ההגדרה: אין סיבה מיוחדת לדבר דווקא על מכפלה של שני מרחבים טופולוגיים, או של שני אובייקטים בקטגוריה.

הגדרה 3.1.1. נניח ש-$\mathcal{C}$ קטגוריה, I קבוצה, ו-$i \mapsto X_i \in \mathbf{Ob}_{\mathcal{C}}$ פונקציה אל אוסף האובייקטים של $\mathcal{C}$. *מכפלה* של משפחת האובייקטים X_i היא אובייקט X ביחד עם מורפיזמים $p_i : X \to X_i$ לכל $i \in I$ (*הטלות*), שהוא אוניברסלי: אם Y אובייקט כלשהו עם מורפיזמים $q_i : Y \to X_i$ לכל $i \in I$, אז יש מורפיזם יחיד $f : Y \to X$ כך ש-$q_i = p_i \circ f$ לכל $i \in I$.

מכפלה

הטלות

במקרה בו I קבוצה בת שני איברים, זו בדיוק ההגדרה הקודמת (הגדרה 1.3.9). כמו שם, כל שתי מכפלות של אותה משפחת אובייקטים איזומורפיות באופן יחיד, ולכן לרוב נתייחס אל המכפלה כמוגדרת באופן יחיד (אם היא קיימת). דרך אחת לראות זאת היא באופן דומה לתרגיל 1.3.14.

תרגיל 3.1.2. נניח ש-$\mathcal{C}$ קטגוריה בה קיימת מכפלה לכל משפחה של אובייקטים. הוכיחו:

1. יש ב-$\mathcal{C}$ אובייקט אחרון
2. לכל שלושה אובייקטים X, Y, Z המכפלות $(X \times Y) \times Z$, $X \times (Y \times Z)$ ו-$X \times Y \times Z$ איזומורפיות.
3. אם $(X_i)_{i \in I}$ משפחה של אובייקטים, ו-$\sigma : I \to I$ תמורה (כלומר פונקציה הפיכה של קבוצות) אז מכפלה של המשפחה X_i (עם הטלות p_i) היא גם מכפלה של המשפחה $X_{\sigma(i)}$ (עם הטלות $p_{\sigma(i)}$).

דוגמא 3.1.3. בקטגוריה $\mathcal{C} = \mathcal{S}et$ קיימת מכפלה לכל משפחה X_i של קבוצות: $X = \prod_{i \in I} X_i$ היא קבוצת כל הפונקציות u שתחומן I ומקיימות $u(i) \in X_i$ לכל $i \in I$, וההטלות נתונות על-ידי $p_i(u) = u(i)$. בפרט, אם כל הקבוצות X_i הן אותה קבוצה Y, אז X היא קבוצת כל הפונקציות מ-I ל-Y.

כדי לראות זאת, נניח ש-Y קבוצה ו-$q_i : Y \to X_i$ לכל i פונקציה. נגדיר $f(y)(i) = q_i(y)$. אז $f(y) \in X$, ו-$p_i(f(y)) = f(y)(i) = q_i(y)$ לכל $y \in Y$, ו-f יחידה עם התכונות הללו. $\square$

את הטענה ש-X מכפלה של ה-X_i אפשר לנסח כטענה שהעתקה ל-X היא "אותו דבר", כמו העתקה לכל X_i. במלים אחרות:

תרגיל 3.1.4. נניח ש-X_i משפחה של אובייקטים בקטגוריה $\mathcal{C}$, ו-$p_i : X \to X_i$ משפחה של מורפיזמים. לכל מורפיזם $f : Y \to X$, הפונקציה $i \mapsto p_i \circ f$ היא איבר t_f ב-$\prod_i \mathcal{C}(Y, X_i)$. הוכיחו ש-$X$ מכפלה (עם הטלות p_i) אם ורק אם $f \mapsto t_f$ הפיכה (כפונקציה של קבוצות).

המטרה שלנו בסעיף הזה היא להוכיח:

משפט 3.1.5. *בקטגוריה $\mathcal{T}op$ של מרחבים טופולוגיים קיימת מכפלה לכל משפחה של אובייקטים.*

נניח ש-$(X_i)_{i\in I}$ משפחה של מרחבים טופולוגיים. על מנת להוכיח שקיימת מכפלה של המשפחה הזו, עלינו לבנות מרחב טופולוגי ספציפי עם התכונות הנדרשות, ובפרט, עלינו לתאר את המרחב הזה כקבוצה, ואז לתאר טופולוגיה עליו. סביר לנחש שהקבוצה צריכה להיות פשוט המכפלה הקרטזית של הקבוצות המתאימות, אבל ההגדרה לא מבטיחה ולא דורשת זאת. נסביר עכשיו שניתן להסיק זאת משיקולים קטגוריים.

ההתאמה ששולחת מרחב טופולוגי X לקבוצת הנקודות שלו היא פנקטור $\delta : \mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$. את הטענה שקבוצת הנקודות של מכפלה היא מכפלת הקבוצות ניתן לנסח בקירוב בטענה ש-δ לוקח מכפלות למכפלות. ליתר דיוק:

הגדרה 3.1.6. נניח ש-$f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ פנקטור, ונניח ש-X מכפלה של משפחה של אובייקטים ב-$\mathcal{C}$, עם הטלות p_i. נאמר ש-f *שומר על המכפלה* אם האובייקט $Y = f(X)$ עם המורפיזמים $f(p_i) : Y \to f(X_i)$ הוא מכפלה של האובייקטים $f(X_i)$ ב-$\mathcal{D}$. נאמר ש-f *שומר על מכפלות* אם הוא שומר על כל המכפלות שקיימות ב-$\mathcal{C}$.

שומר על המכפלה

שומר על מכפלות

תרגיל 3.1.7. במצב של ההגדרה, נניח שב-$\mathcal{D}$ קיימת מכפלה Z של ה-$f(X_i)$. אז קיים מורפיזם קנוני מ-Y ל-Z, ו-f שומר על המכפלה אם ורק אם המורפיזם הזה הוא הפיך.

תרגיל 3.1.8. הוכיחו שהפנקטור מדוגמא 2.3.2 לא שומר על מכפלות

על מנת להוכיח ש-δ שומר על מכפלות, נשים לב שלכל מרחב X ולכל $x \in X$, הפונקציה היחידה מהיחידון $\mathbf{1}$ (עם הטופולוגיה היחידה שלו) ל-X ששולחת את האיבר היחיד $\mathbf{0} \in \mathbf{1}$ ל-x היא רציפה. לכן, ניתן לזהות את $\delta(X)$ עם הקבוצה $\mathcal{T}op(\mathbf{1}, X)$ של העתקות רציפות מ-$\mathbf{1}$ ל-X. לכל משפחה X_i של מרחבים, אם המכפלה $X = \prod_i X_i$ קיימת, אז

$$\delta(X) = \mathcal{T}op(\mathbf{1}, X) = \prod_i \mathcal{T}op(\mathbf{1}, X_i) = \prod_i \delta(X_i)$$

כאשר השוויון האמצעי הוא מהגדרת המכפלה (תרגיל 3.1.4). קיבלנו *שאם* המכפלה של משפחת המרחבים X_i קיימת, אז קבוצת הנקודות של המכפלה היא מכפלת הקבוצות (וההטלות הן פונקציות ההטלה הרגילות).

לפני שנמשיך, נשים לב שהטיעון שהפעלנו עובד במגוון רחב של מקרים, ולא רק בהקשר הטופולוגי.

הגדרה 3.1.9. נניח ש-$\mathcal{C}$ קטגוריה, ו-X אובייקט ב-$\mathcal{C}$. *הפנקטור המיוצג* על-ידי X הוא הפנקטור $y_X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ המוגדר באופן הבא:

הפנקטור המיוצג

- $y_X(Z) = \mathcal{C}(X, Z)$ לכל אובייקט Z של $\mathcal{C}$
- אם $f : Z \to W$ מורפיזם, $y_X(f)(h) = f \circ h$ לכל $h \in y_X(Z) = \mathcal{C}(X, Z)$

במונחים הללו, $\delta = y_{\mathbf{1}}$ הוא הפנקטור המיוצג על-ידי $\mathbf{1}$.

תרגיל 3.1.10. הוכיחו ש-y_X אכן פנקטור לכל אובייקט X, ושכל פנקטור מיוצג שומר על מכפלות

נניח ש-X מכפלה של משפחה של מרחבים טופולוגיים X_i. הדיון עד כה הראה שכקבוצה, $\delta(X) = \prod_i \delta(X_i)$, המכפלה הקרטזית של הקבוצות X_i, וההטלות $p_i : X \to X_i$ הן ההטלות הרגילות (כמו בדוגמא 3.1.3). מה ניתן לומר על הטופולוגיה של X? ניחוש סביר הוא לבחור בטופולוגיה שנוצרת על-ידי "קופסאות" מהצורה $\prod_i U_i \subseteq X$, עבור קבוצות פתוחות $U_i \subseteq X_i$. מיד נראה שהניחוש הזה נותן תוצאה *שגויה* באופן כללי. במקום זה, נמשיך עם ניתוח הדרישות.

ראשית, ההטלות p_i הן מורפיזמים, כלומר פונקציות רציפות. שנית, נניח ש-X' מרחב נוסף עם אותה קבוצה ($\delta(X') = \delta(X)$), עבורו ההטלות p_i רציפות. ההגדרה של מכפלה מבטיחה לנו העתקה יחידה $f : X' \to X$ עבורה $p_i \circ f = p_i$ לכל i. התנאי האחרון מראה ש-f היא הזהות, ובסה"כ, המסקנה היא שהטופולוגיה על X' היא יותר עדינה מאשר על X (דוגמא 2.2.7). נסכם:

מסקנה 3.1.11. *אם X מכפלה של משפחת מרחבים טופולוגיים X_i, עם הטלות $p_i : X \to X_i$, אז כקבוצה, X היא המכפלה הקרטזית הקבוצתית של X_i, p_i ההטלות הרגילות, והטופולגיה על X היא הטופולוגיה החלשה ביותר עבורה כל הפונקציות p_i רציפות.*

הקיום של הטופולוגיה החלשה ביותר מובטח על-ידי התרגיל הבא:

תרגיל 3.1.12. נניח ש-X_i, עבור $i \in I$, קבוצה של מרחבים טופולוגיים, ו-$p_i : X \to X_i$ קבוצה של פונקציות מקבוצה X. הוכיחו:

1. יש טופולוגיה חלשה (גסה) ביותר עבורה כל הפונקציות p_i רציפות
2. הטופולוגיה נוצרת (במובן של תרגיל 2.1.5) על-ידי האוסף

$$\mathcal{B}_0 = \{p_i^{-1}(U_i) \mid i \in I, U_i \in \mathcal{T}_{X_i}\}.$$

3. לכל מרחב Y, פונקציה $f : Y \to X$ היא רציפה עבור הטופולוגיה החלשה על X אם ורק אם $p_i \circ f$ רציפה לכל i (רמז: תרגיל 2.2.3)

כל מה שנותר על מנת להוכיח את משפט 3.1.5 הוא להראות שהטופולוגיה החדשה אכן מספקת את התנאים.

הוכחת משפט 3.1.5. בהינתן משפחה של מרחבים X_i, נסמן ב-X את המכפלה הקרטזית, עם הטלות p_i, ועם הטופולוגיה החלשה שהופכת את הפונקציות p_i לרציפות, כמו בתרגיל 3.1.12. בהינתן מרחב Y עם העתקות רציפות $q_i : Y \to X_i$, עלינו להראות שקיימת העתקה רציפה יחידה $f : Y \to X$ כך ש-$p_i(f(y)) = f(y)(i) = q_i(y)$.

כיוון ש-X המכפלה התורת קבוצתית, אנחנו יודעים שקיימת פונקציה יחידה f המקיימת את התנאי האחרון. לכן, השאלה היא רק האם f זו היא רציפה. לפי התרגיל האחרון, זה קורה אם ורק אם $p_i \circ f$ רציפה לכל i, אבל זה נכון כי $q_i = p_i \circ f$ רציפה על פי ההנחה. $\square$

הערה 3.1.13. פורמלית, היה אפשר להימנע מכל הדיון בסעיף הזה, ופשוט לתת את ההגדרה של הטופולוגיה כמו בתרגיל 3.1.12. החסרון הוא שהיינו מתקשים להסביר למה המרחב שמתקבל הוא מעניין ועדיף, למשל, על טופולוגיית הקופסא. הגישה הקטגורית הובילה אותנו להגדרה בלי לחשוב בכלל.

סוף הרצאה 5, 13 באפריל

3.2 התכנסות במכפלות ותכונות נוספות

על מנת להבין יותר טוב את טופולוגיית המכפלה, נחקור איך נראית התכנסות סדרות במרחב המכפלה, בהשוואה לטופולוגיית הקופסא. ראשית, נגדיר את המושג, הכללה טבעית התכנסות סדרות במרחב מטרי:

הגדרה 3.2.1. עבור מרחב טופולוגי X, הסדרה $a : \mathbb{N} \to X$

הגדרה 3.2.2. מתכנסת לגבול L לכל סביבה פתוחה U של L יש $M \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > M$ מתקיים $a_n \in U$.

תרגיל 3.2.3. אם $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה על X, מספיק לבדוק את התנאי עבור $U \in \mathcal{B}$.

מהתרגיל האחרון נובע מיד שההגדרה שקולה להגדרה המטרית, במקרה ש-X מרחב מטרי. במרחב מטרי, לכל סדרה יש לכל היותר גבול אחד. זה לא בהכרח נכון עבור מרחבים טופולוגיים כלליים:

דוגמא 3.2.4. אם X מרחב עם הטופולוגיה הטריוויאלית, אז כל איבר של X הוא גבול של כל סדרה ב-X

התכונה שמבטיחה את יחידות הגבול היא אחת מסדרת תכונות שנקראות אקסיומות הפרדה:

מרחב האוסדורף

הגדרה 3.2.5. מרחב טופולוגי X הוא *מרחב האוסדורף* (או T_2) אם לכל שתי נקודות שונות $x_1, x_2 \in X$ יש סביבות פתוחות $x_i \in U_i$ זרות: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

תרגיל 3.2.6. הוכיחו:

1. כל מרחב מטרי הוא האוסדורף
2. במרחב האוסדורף, לכל סדרה יש לכל היותר גבול אחד.

הערה 3.2.7. סביר לשאול האם הכיוון ההפוך נכון, כלומר, האם מרחב בו לכל סדרה יש לכל היותר גבול אחד הוא האוסדורף. אנחנו נענה על השאלה בהמשך

נבחר עכשיו קבוצה I, ונתבונן במרחב $X = \mathbb{R}^I$ של כל הפונקציות מ-I ל-$\mathbb{R}$, כלומר מרחב המכפלה של המשפחה X_i, כאשר $X_i = \mathbb{R}$ לכל i (עם הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$). נסמן ב-X_b את אותה קבוצה עם טופולוגיית הקופסא. נסמן ב-$\underline{0} \in X$ את פונקציית ה-0 (בכל אחד מהמרחבים). אנחנו מעוניינים להבין את המשמעות של התכנסות של סדרה $f_n \in X$ בכל אחת מהטופולוגיות.

תרגיל 3.2.8. הוכיחו שסדרה f_n של איברים ב-X_b מתכנסת ל-$\underline{0}$ אם ורק אם קיימת תת-קבוצה סופית $I_0 \subseteq I$ ומספר M כך ש-$f_n(i) = 0$ לכל $i \in I \setminus I_0$ ולכל $n > M$, ו-$f_n(i)$ מתכנסת ל-0 לכל $i \in I_0$.

התרגיל האחרון מראה שטופולוגיית הקופסא לא כל-כך מעניינת, לפחות מבחינת התכנסות סדרות, וגם לא כל-כך פשוטה להבנה. לגבי טופולוגיית המכפלה, נתחיל מניסוח שקול של התכנסות סדרות, שכבר ראינו בדוגמא 2.2.9.

תרגיל 3.2.9. נסמן $\omega + 1$ כמו בדוגמא 2.2.9, ויהי X מרחב טופולוגי. אז פונקציה $f : \omega + 1 \to X$ היא רציפה אם ורק אם $f(\omega)$ גבול של הסדרה $f\restriction_{\mathbb{N}}$.

התרגיל מאפשר לנו לנתח התכנסות ב-$X = \mathbb{R}^I$ בלי להתאמץ:

טענה 3.2.10. *הסדרה $f_n \in \mathbb{R}^I$ מתכנסת ל-$f \in \mathbb{R}^I$ בטופולוגיית המכפלה, אם ורק אם היא מתכנסת אליה נקודתית: $f_n(i) \to f(i)$ לכל $i \in I$.*

הוכחה. לפי תרגיל 3.2.9, f_n מתכנסת ל-f אם ורק אם הפונקציה $g : \omega + 1 \to \mathbb{R}^I$ הנתונה על-ידי $g(n) = f_n$ עבור $n \in \mathbb{N}$ ו-$g(\omega) = f$ רציפה. לפי הגדרת המכפלה, g רציפה אם ורק אם פונקציות הרכיבים $g_i : \omega + 1 \to \mathbb{R}$ רציפות לכל $i \in I$. כיוון ש-$g_i(h) = h(i)$ לכל $h \in \mathbb{R}^I$, שוב לפי התרגיל זה שקול לכך שכל סדרה $f_n(i)$ מתכנסת ל-$f(i)$. $\square$

הערה 3.2.11. לכל מרחב X נסמן ב-$s(X)$ את קבוצת הסדרות של איברי X, וב-$c(X)$ את קבוצת הזוגות $\langle a, L \rangle$ כאשר a סדרה ב-X ו-L גבול של a (במקרה ש-X האוסדורף זו פשוט קבוצת הסדרות המתכנסות). כל אחת מההתאמות הללו היא פנקטור, שמתאים להעתקה $t : X \to Y$ את הסדרה $t \circ a$ ואת הגבול $t(L)$. הפנקטור s מיוצג על-ידי המרחב הדיסקרטי $\mathbb{N}$ (לפי ההגדרה של סדרה), ולפי התרגיל האחרון, הפנקטור c מיוצג על-ידי $\omega + 1$. לפי תרגיל 3.1.10, c מתחלף עם מכפלות, וזו דרך אחרת לנסח את ההוכחה של הטענה האחרונה.

נניח עכשיו שהמרחבים X_i הם מטריים. טבעי לשאול האם הטופולוגיה על המכפלה נקבעת על-ידי מטריקה. בפרט, אם כל המרחבים הם אותו מרחב X, אנחנו שואלים האם הטופולוגיה על מרחב הפונקציות X^I היא מטריזבילית. ראינו שהתשובה היא כן כאשר I סופית. באופן כללי:

טענה 3.2.12. *נניח שלכל $i \in I$ נתון מרחב מטרי X_i עם יותר מאיבר אחד. את המכפלה X של ה-X_i היא מטריזבילית אם ורק אם I בת-מניה.*

הוכחה. נוכיח כיוון אחד, ונשאיר את השני כתרגיל. נניח ש-I אינה בת-מניה, ונניח בשלילה שקיימת מטריקה d על X שמשרה את טופולוגיית המכפלה. לכן, נתונים שני בסיסים לטופולוגיה הזו, בסיס הכדורים ביחס למטריקה:

$$\mathcal{B}_1 = \{B_r(a) \mid a \in X, r > 0\}$$

ובסיס הטופולוגיה החלשה

$$\mathcal{B}_2 = \{\prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_{X_i}, U_i = X_i \text{ לכמעט כל } i\}$$

נשים לב ראשית שניתן להניח שהרדיוסים r של הכדורים הם מספרים רציונליים, משום שכל כדור פתוח ברדיוס ממשי הוא איחוד של כאלה. נקבע נקודה a. כיוון ששני הבסיסים יוצרים אותה טופולוגיה, כל כדור $B_r(a)$ מכיל קבוצה מ-$\mathcal{B}_2$, שאפשר לכתוב כ-$\prod_{i \in I_r} U_i \times \prod_{i \notin I_r} X_i$, כאשר I_r קבוצה סופית.

כיוון שכל I_r סופית, וקבוצת הרציונליים היא בת-מנייה, הקבוצה $\bigcup_r I_r$ היא בת-מנייה. לכן, לפי ההנחה יש $i \in I$ שלא שייך לאף I_r. כיוון שב-X_i יש יותר מאיבר אחד, קיימת סביבה פתוחה U_i של a_i ב-X_i שאינה כל המרחב, נניח $b \in X_i \setminus U_i$. נסמן $V = U_i \times \prod_{j \neq i} X_j$. כיוון שהטופולוגיות שקולות, קיים r רציונלי כך ש-

$$\prod_{j \in I_r} U_j \times \prod_{j \notin I_r} X_j \subseteq B_r(a) \subseteq V$$

(כל כדור פתוח שכולל את a מכיל כדור פתוח שמרכזו a). זו סתירה, משום שצד שמאל כולל איברים בהם הרכיב ה-i לא נמצא ב-U_i (למשל האיבר a' המוגדר כ- $a'(j) = a(j)$ אם $j \neq i$ ו-$a'(i) = b$). $\square$

בפרט, מכפלה של מרחבים דיסקרטיים אינה מרחב דיסקרטי, ככלל (כמובן, יש דרכים אחרות להראות זאת).

סוף הרצאה 6, 15 באפריל

תרגיל 3.2.13. 1. נניח ש-X מרחב טופולוגי, ו-d מטריקה על X. הוכיחו שאם d רציפה (עם טופולוגיית המכפלה על X, והטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$) אז הטופולוגיה על X מעדנת את הטופולוגיה המטרית. בפרט, שתי מטריקות הן שקולות אם כל אחת רציפה ביחס לשניה.

2. נניח ש-$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ פונקציה רציפה ועולה, המקיימת: $f(x) = 0$ אם ורק אם $x = 0$ ולכל x, y ממשיים חיוביים, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. נניח ש-d מטריקה על מרחב X. הוכיחו ש-$f \circ d$ גם היא מטריקה, שקולה ל-d.

3. הוכיחו שכל מרחב מטרי שקול למרחב מטרי חסום (על-ידי 1).

תרגיל 3.2.14. נניח ש-$I = \mathbb{N}$, ולכל $i \in \mathbb{N}$ נתון מרחב מטרי $\langle X_i, d_i \rangle$ חסום על-ידי 1. נסמן ב-X את מרחב המכפלה, ונגדיר $d : X \times X \to I = [0,1]$ על-ידי $d(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{d_i(x_i, y_i)}{i+1}$

1. הוכיחו ש-d מטריקה על X.

2. הוכיחו ש-d משרה את טופולוגיית המכפלה.

3. הסיקו שמכפלה בת-מנייה של מרחבים מטריזביליים היא מרחב מטריזבילי.

3.3 קטגוריית הפנקטורים

נניח ש-I קבוצה ו-X מרחב טופולוגי. ראינו שניתן לבנות מהמידע הזה שני מרחבים, מרחב המכפלה X^I, ומרחב טופולוגיית הקופסא $B_I(X)$. כיוון ששני המרחבים הם על אותה קבוצה, והטופולוגיה על $B_I(X)$ עדינה יותר, הזהות היא העתקה רציפה $\alpha_X : B_I(X) \to X^I$. למרות שפורמלית ההעתקה α_X תלויה ב-X, הבנייה של α_X לא משתמשת בשום מידע ספציפי על X, והיא נעשית "באופן אחיד". אנחנו רוצים להסביר באיזה מובן זה נכון.

ההתאמות $X \mapsto X^I$ ו-$X \mapsto B_I(X)$ הן פנקטורים מ-$\mathcal{T}op$ לעצמה. אם $t : X \to Y$ העתקה רציפה, ההעתקות α_X ו-α_Y תואמות את t במובן הבא.

העתקה טבעית

הגדרה 3.3.1. נניח ש-f ו-g פנקטורים מקטגוריה $\mathcal{C}$ לקטגוריה $\mathcal{D}$. *העתקה טבעית* מ-f ל-g מורכבת ממורפיזם $\alpha_X : f(X) \to G(X)$ ב-$\mathcal{D}$ לכל אובייקט X ב-$\mathcal{C}$ כך שלכל מורפיזם $t{:}X \to Y$ ב-$\mathcal{C}$ מתקיים $g(t) \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ f(t)$:

$$\begin{array}{ccc} f(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & g(X) \\ \downarrow{\scriptstyle f(t)} & & \downarrow{\scriptstyle g(t)} \\ f(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & g(Y) \end{array}$$

דוגמא 3.3.2. בהערה 3.2.11 הזכרנו את הפנקטורים s ו-c של סדרות וסדרות על גבול. אוסף הפונקציות $\alpha_X : c(X) \to s(X)$ ששוכחות את הגבול הוא העתקה טבעית.

דוגמא 3.3.3. הבניה שמתאימה לשדה $\Bbbk$ את קבוצת המטריצות ההפיכות מעל $\Bbbk$ היא פנקטור $\mathcal{GL} : \mathcal{F} \to \mathcal{S}et$ מקטגוריית השדות, וכן גם ההתאמה $\mathcal{GL}_1 : \mathcal{F} \to \mathcal{S}et$ ששולחת כל שדה לקבוצת האיברים ההפיכים בו. לכל שדה $\Bbbk$, ישנה פונקציה $\alpha_{\Bbbk} : \mathcal{GL}_1(\Bbbk) \to \mathcal{GL}(\Bbbk)$ ששולחת איבר לאותו איבר כמטריצה 1×1 וישנה פונקציה $\det : \mathcal{GL}(\Bbbk) \to \mathcal{GL}_1(\Bbbk)$ ששולחת כל מטריצה לדטרמיננטה שלה. שתי המשפחות הללו הן העתקות טבעיות.

דוגמא 3.3.4. נניח ש-H חבורה. נסמן ב-$H - \mathcal{S}et$ את הקטגוריה של פעולות של H על קבוצות: אלה זוגות $\langle X, \cdot \rangle$ כאשר X קבוצה, ו-$\cdot : H \to X \to X$ פעולה של H על X, כלומר מקיימת $1 \cdot x = x$ ו-$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ לכל $x \in X$ ו-$g, h \in H$. מורפיזם מ-X ל-Y הוא פונקציה $t : X \to Y$ המקיימת $t(h \cdot x) = h \cdot t(x)$ לכל $x \in X$ ו-$h \in H$.

נסמן ב-$f : H - \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$ את הפנקטור ששוכח את הפעולה ($f(\langle X, \cdot \rangle) = X$), ונסמן ב-$g : H - \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$ את פנקטור נקודות השבת:

$$g(\langle X, \cdot \rangle) = X^H = \{x \in X \mid h \cdot x = x \forall h \in H\}$$

אז ההכלה $\alpha_X : g(X) \to f(X)$ היא העתקה טבעית.

תרגיל 3.3.5. אם $\mathcal{C}$ ו-$\mathcal{D}$ שתי קטגוריות, הוכיחו שאוסף כל הפנקטורים מ-$\mathcal{C}$ ל-$\mathcal{D}$ מהווים קטגוריה, בה המורפיזמים הם העתקות טבעיות. הקטגורה הזו נקראת *קטגוריית הפנקטורים*, ומסומנת $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. הוכיחו שהעתקה טבעית α בין שני פנקטורים היא הפיכה אם ורק אם α_X הפיכה לכל אובייקט X ב-$\mathcal{C}$. העתקה כזו נקראת *איזומורפיזם טבעי*.

קטגוריית הפנקטורים

איזומורפיזם טבעי

דוגמא 3.3.6. במהלך הדיון על מכפלות, זיהינו את הפנקטור $\delta : \mathcal{Top} \to \mathcal{Set}$ ששוכח את הטופולוגיה עם הפנקטור $X \mapsto \mathcal{Top}(\mathbf{1}, X)$. הזיהוי הזה הוא למעשה איזומורפיזם טבעי, בו $\alpha_X : \delta(X) \to \mathcal{Top}(\mathbf{1}, X)$ נתונה על-ידי $\alpha_X(x)(\mathbf{0}) = x$, עם הפכית $\beta_X : \mathcal{Top}(\mathbf{1}, X) \to \delta(X)$ נתונה על-ידי $\beta_X(h) = h(\mathbf{0})$.

מיוצג **הגדרה 3.3.7.** פנקטור מקטגוריה $\mathcal{C}$ ל-$\mathcal{Set}$ הוא *מיוצג* על-ידי אובייקט A של $\mathcal{C}$ אם הוא איזומורפי לפנקטור $X \mapsto y_A(X) = \mathcal{C}(A, X)$.

כמו במצבים אחרים במתמטיקה, לאובייקטים איזומורפיים יש תכונות (רלוונטיות) זהות. במקרה שלנו:

תרגיל 3.3.8. הוכיחו שאם פנקטור $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ שומר על מכפלות, והפנקטור $g : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ איזומורפי ל-f, אז גם g שומר על מכפלות. בפרט, כל פנקטור מיוצג שומר על מכפלות.

דוגמא 3.3.9. נניח ש-$\Bbbk$ שדה. לכל מרחב וקטורי V מעל $\Bbbk$ נסמן ב-$V^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$ את המרחב הדואלי של V. נסמן ב-$f(V) = V^{**}$ את הדואלי הכפול. זהו פנקטור, שנתון על מורפיזם $t : V \to U$ על-ידי $f(t)(\phi) = t^{**}(\phi)$, כאשר $t^*(\phi) = \phi \circ t$ לכל $\phi \in U^*$.

לכל מרחב וקטורי V ישנה העתקה לינארית $\alpha_V : V \to f(V)$, שנתונה על-ידי $\alpha_V(v)(\phi) = \phi(v)$ לכל $\phi \in V^*$. אוסף כל ההעתקות הללו מהווה העתקה טבעית מפנקטור הזהות ל-f (תרגיל). לכל V, ההעתקה α_V היא חח"ע (משום שלכל $v \in V$ שונה מ-0 יש $\phi : V \to \Bbbk$ כך ש-$\phi(v) \neq 0$). ככלל, היא אינה על, אבל אם V ממימד סופי, אז V^* (ולכן גם $f(V)$) מאותו מימד, ולכן α_V הפיכה. אז α איזומורפיזם טבעית בין הזהות ל-f כשהם מצומצמים לקטגוריית המרחבים ממימד סופי.

סוף הרצאה 7, 20 באפריל